ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА
2007. Т. 38. ВЫП. 3

КОСМОЛОГИЧЕСКАЯ ПОСТОЯННАЯ И ПРОСТРАНСТВО МИНКОВСКОГО

*С. С. Герштейн**, *А. А. Логунов***, *М. А. Мествиришвили*

Институт физики высоких энергий, Протвино, Россия

В рамках классического гравитационного поля показано, что уравнения общей теории относительности (ОТО) Эйнштейна с космологическим членом после согласования их с пространством Минковского видоизменяются и приобретают форму уравнений релятивистской теории гравитации (РТГ). Они и приводят к кардинально другим физическим выводам, в отличие от ОТО в эволюции Вселенной и коллапсе.

In the framework of the classical gravitational field theory it is shown that equations of Einstein's General Relativity (GR) with a cosmological constant are transforming and acquiring the form of Relativistic Theory of Gravitation (RTG) equations when requested to be compatible with the Minkowski space. These equations lead us to fundamentally different physical conclusions contrasting with GR in evolution of the Universe and Collapse.

PACS: 04.80.-y, 06.20.Jr, 95.30.sf

В работах [1–4] подробно изложена релятивистская теория гравитации (РТГ). Она является альтернативой общей теории относительности (ОТО).

В основе РТГ лежит представление о классическом гравитационном поле как физическом поле, развивающемся в пространстве Минковского. Таким образом, теория построена в рамках специальной теории относительности (СТО).

Источником гравитационного поля является сохраняющийся тензор энергии-импульса всех полей материи, в том числе и гравитационного поля. На основании калибровочной группы и требования, чтобы гравитационное поле обладало только спинами 2 и 0, определен лагранжиан теории, и из принципа наименьшего действия получена полная система общековариантных уравнений, которые форминвариантны относительно преобразований Лоренца. Выводы РТГ, особенно в сильных гравитационных полях, кардинально отличаются от выводов ОТО.

В настоящей статье мы в порядке преемственности придем к уравнениям РТГ, а следовательно, и к полевым представлениям, исходя непосредственно

*E-mail: Semen.Gershtein@ihep.ru
**E-mail: Anatoly.Logunov@ihep.ru

из уравнений ОТО Эйнштейна, проводя в них некоторые, на первый взгляд, небольшие физически необходимые изменения.

А. Эйнштейн в 1917 г. в статье [5] получил уравнения гравитационного поля с космологической постоянной λ в форме

$$R_{\mu\nu} - \lambda g_{\mu\nu} = 8\pi\Big(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T\Big). \tag{1}$$

Эта система уравнений неполна, и она всегда пополняется четырьмя координатными условиями, которые нековариантны и неуниверсальны.

Уравнения (1) можно записать в форме

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R + \lambda g^{\mu\nu} = 8\pi T^{\mu\nu}. \tag{2}$$

Отсюда, применяя тождество Бьянки

$$\nabla_\nu \Big(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R\Big) \equiv 0, \tag{3}$$

обычно получают уравнения движения вещества:

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0. \tag{4}$$

Тот факт, что уравнения движения вещества* (4) следуют из уравнений гравитационного поля (1), рассматривался как успех, обязанный свойству гравитационного поля. В электродинамике, как хорошо известно, из уравнений Максвелла–Лоренца следует только уравнение сохранения тока, а не уравнения движения пробного заряда в поле. Но эта особенность гравитационного поля имела только частный характер, поскольку она позволяла находить уравнения движения вещества из уравнений гравитационного поля (1) только в том случае, если вещество описывается четырьмя уравнениями. Все это очевидно из следующего тождества (см. приложение А, равенство (А.16)):

$$\sqrt{-g}\, \nabla_\lambda T^\lambda_\mu = -D_\nu \left(\frac{\delta L_M}{\delta \Phi_A} F^{B;\nu}_{A;\mu} \Phi_B(x) \right) - \frac{\delta L_M}{\delta \Phi_A} D_\mu \Phi_A(x). \tag{5}$$

Здесь Φ_A — поля вещества; D_ν — ковариантная производная в пространстве Минковского; L_M — плотность лагранжиана вещества в гравитационном поле.

Тензор энергии-импульса вещества $T^{\lambda\nu}$ определен по Гильберту:

$$\sqrt{-g}\, T^{\lambda\nu} = -2 \frac{\delta L_M}{\delta g_{\lambda\nu}}.$$

*Под веществом подразумеваются все поля материи, за исключением гравитационного поля.

Если уравнения движения вещества выполняются:

$$\frac{\delta L_M}{\delta \Phi_A} = 0, \tag{6}$$

то на основании (5) имеют место уравнения (4), т. е.

$$\nabla_\nu T^\nu_\mu = 0, \text{ или эквивалентное ему } \nabla_\lambda T^{\lambda\nu} = 0.$$

Отсюда мы видим, что уравнения (4) всегда следуют из уравнений движения вещества (6). Если число уравнений вещества (6) равно четырем, то их всегда можно заменить уравнениями (4). Если уравнений движения вещества (6) больше четырех, их нельзя заменить только уравнениями (4), которые следуют из уравнений (1), необходимо частично добавить уравнения вещества. Таким образом, в общем случае в ОТО из уравнений гравитационного поля (1) не следуют все уравнения движения вещества.

Обратимся теперь к уравнению гравитационного поля (1), которое содержит космологическую постоянную λ.

Относительно введения космологической постоянной λ в уравнения Гильберта–Эйнштейна В. А. Фок в монографии [6] писал: «Согласно нашим основным положениям отсутствие поля тяготения означает отсутствие отклонений геометрии пространства-времени от евклидовой, а значит, и равенство нулю тензора кривизны $R^{\mu\nu}$ и его инварианта R. С другой стороны, поле тяготения будет отсутствовать, если тензор массы $T^{\mu\nu}$ везде равен нулю. Поэтому равенства $T^{\mu\nu} = 0$ и $R^{\mu\nu} = 0$ должны быть во всяком случае совместными, а это возможно только в том случае, если уравнения, связывающие $R^{\mu\nu}$ с $T^{\mu\nu}$, не содержат $\lambda g_{\mu\nu}$ (т. е. только в случае, если $\lambda = 0$)».

Таким образом, наличие космологического члена в уравнениях (1) недопустимо. Основной аргумент против введения космологического члена в уравнения Гильберта–Эйнштейна состоит в том, что при отсутствии вещества и искривленности пространства-времени (тензор кривизны Римана $R^\sigma_{\lambda\mu\nu}$ равен нулю) уравнение (1) не имеет решения в виде метрического тензора $\gamma_{\mu\nu}$ пространства Минковского, что физически неприемлемо. Аргумент физически убедительный и не вызывает сомнений. Но если все же сохранить космологический член, а физический недостаток уравнений (1) устранить, введя в уравнение (1) дополнительный член $\lambda\gamma_{\mu\nu}$, то после совершения такого изменения мы приходим к уравнению

$$R_{\mu\nu} - \lambda(g_{\mu\nu} - \gamma_{\mu\nu}) = 8\pi\Big(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T\Big). \tag{7}$$

Из уравнения (7) следует, что теперь при отсутствии вещества $T_{\mu\nu} = 0$ и отсутствии искривленности пространства-времени $R^\sigma_{\lambda\mu\nu} = 0$ уравнение (7) имеет естественное решение только в виде метрического тензора пространства Минковского:

$$g_{\mu\nu}(x) = \gamma_{\mu\nu}(x).$$

Таким образом, космологический член стал совместим с пространством Минковского. Заметим, что появление метрики $\gamma_{\mu\nu}$ пространства Минковского в уравнениях (7) означает сохранение понятия инерциальной системы.

Уравнения (1) и (2) равноправны, но достижение нашей цели: получить уравнения РТГ в результате минимального изменения уравнений Эйнштейна — возможно только на основе уравнений (1), а не уравнений (2), что нами и осуществлено при построении уравнений (7). Возникновение уравнений (7) с физической точки зрения не только вполне логично, но и необходимо, если мы вводим космологический член $\lambda g_{\mu\nu}$ в уравнения Гильберта–Эйнштейна. Таким образом, космологический член с необходимостью ведет к появлению в (7) дополнительного члена $\lambda\gamma_{\mu\nu}$.

Уравнения (7) сразу же вносят существенные изменения. Так, если ранее из уравнений (1) следовали уравнения вещества (4), то теперь они не следуют из уравнений (7). Уравнения (4) необходимо добавить к уравнениям гравитационного поля (7) как уравнения вещества.

Так, в нашем случае, когда вещество описывается четырьмя физическими величинами, мы получаем общековариантную систему уравнений вещества (4) и гравитационного поля (7), которая вместе с уравнением состояния вещества является полной для определения величин: метрического тензора $g_{\mu\nu}$, плотности ρ, давления p и скорости $\mathbf{v}$. В приближении слабого поля, когда плотность $\tilde{g}^{\mu\nu}$ близка к плотности $\tilde{\gamma}^{\mu\nu}$ пространства Минковского, уравнение (7) вне вещества в инерциальной системе в галилеевских координатах принимает вид

$$\Box\phi^{\mu\nu} + 2\lambda\phi^{\mu\nu} = 0.$$

Ниже мы дадим точное определение гравитационного поля $\phi^{\mu\nu}$.

Отсюда видно, что космологическая постоянная проявляется в слабом гравитационном поле как масса покоя гравитона m_g:

$$\lambda = \frac{m^2}{2}, \quad m = \frac{m_g c}{\hbar}. \tag{8}$$

Так раскрывается природа космологической постоянной. Именно отсюда следует, что она должна быть достаточно малой величиной.

Теперь, если использовать тождество Бьянки (3) в уравнении (7), преобразовав его соответствующим образом, то можно получить очень важное равенство (см. приложение Б, равенство (Б.20)):

$$m^2 D_\sigma \tilde{g}^{\lambda\sigma} = \sqrt{-g}\,16\pi\gamma^{\lambda\nu}\nabla_\mu T^\mu_\nu, \tag{9}$$

здесь

$$\tilde{g}^{\lambda\sigma} = \sqrt{-g}\, g^{\lambda\sigma}.$$

Таким образом возникла плотность тензора $\tilde{g}^{\lambda\sigma}$, для которой из равенства (9) на основании уравнения движения вещества (4) получим уравнения

$$D_\sigma \tilde{g}^{\lambda\sigma} = 0. \tag{10}$$

Поскольку уравнения (10) следуют согласно (9) из уравнений вещества (4), их можно использовать вместо уравнений (4).

Так возникают универсальные общековариантные полевые уравнения (10), которые только в инерциальной системе в галилеевских координатах имеют такой же вид, как гармонические условия Фока.

Таким образом, система уравнений (4) и (7) с учетом (8) и (9) свелась к системе уравнений РТГ, которая, как показано в [1], следует также из принципа наименьшего действия:

$$R_{\mu\nu} - \frac{m^2}{2}(g_{\mu\nu} - \gamma_{\mu\nu}) = 8\pi\Big(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T\Big), \tag{11}$$

$$D_\sigma \tilde{g}^{\lambda\sigma} = 0. \tag{12}$$

Уравнения (12) в инерциальной системе в галилеевских координатах принимают вид

$$\partial_\sigma \tilde{g}^{\lambda\sigma} = 0, \tag{13}$$

но они теперь являются не гармоническими условиями, а универсальными уравнениями поля.

Уравнения (13) аналогичны условию Лоренца в электродинамике, которое при наличии массы покоя фотона становится обязательным для сохранения тока. Уравнения (13) исключают из плотности $\tilde{g}^{\lambda\sigma}$ неприводимые представления, соответствующие спинам 1 и $0'$, оставляя только представления, соответствующие спинам 2 и 0. Отсюда, естественно, именно величину $\tilde{g}^{\lambda\sigma}$ и следует связать с плотностью гравитационного тензорного поля $\tilde{\phi}^{\lambda\sigma}$.

При отсутствии вещества и гравитационного поля уравнения (11) и (12) тождественно удовлетворяются, если положить

$$\tilde{g}^{\lambda\sigma} = \tilde{\gamma}^{\lambda\sigma}, \quad \tilde{\gamma}^{\lambda\sigma} = \sqrt{-\gamma}\, \gamma^{\lambda\sigma}. \tag{14}$$

Тензорное гравитационное поле $\tilde{\phi}^{\lambda\sigma}$ естественно определить соотношением

$$\tilde{g}^{\lambda\sigma} = \tilde{\gamma}^{\lambda\sigma} + \tilde{\phi}^{\lambda\sigma}, \quad \tilde{\phi}^{\lambda\sigma} = \sqrt{-\gamma}\, \phi^{\lambda\sigma}. \tag{15}$$

Именно данное определение поля приводит к тому, что в слабом статическом гравитационном поле, когда вещество определяется только одной компонентой плотности тензора энергии-импульса вещества $\sqrt{-g}T^{00}$, создаваемое ею гравитационное поле описывается также одной компонентой плотности тензора $\tilde{\phi}^{00}$.

Таким образом, совершенно простое, но физически необходимое при $\lambda \neq 0$ изменение уравнений (1) оказалось принципиальным, поскольку оно вывело нас из риманова пространства и привело к понятию физического гравитационного поля $\tilde{\phi}^{\lambda\sigma}$, развивающегося в пространстве Минковского с метрикой $\gamma_{\mu\nu}$, и в то же время превратило риманово пространство в эффективное с простой топологией, что и нашло отражение в уравнениях (11) и (12) и связи римановой метрики и гравитационного поля (15).

Для всех гравитационных эффектов в Солнечной системе уравнения (11) и (12) из-за очень слабого влияния члена, содержащего массу покоя гравитона, приводят к тем же результатам, что и в ОТО, но только в том случае, если там взяты гармонические координаты. Именно так в ОТО в гармонических координатах В. А. Фок вычислял гравитационные эффекты в Солнечной системе.

Фундаментальное отличие возникает для сильных гравитационных полей. Эти отличия происходят из-за эффекта «самоограничения» гравитационного поля. Хорошо известно, что согласно ОТО гравитационное поле обладает свойством замедлять ход времени, не ограничивая при этом сам процесс замедления. В теории, описываемой уравнениями (11) и (12), гравитационное поле обладает не только свойством замедлять ход времени по сравнению с инерциальным, но и новым свойством: останавливать процесс замедления хода времени и тем самым останавливать и процесс сжатия вещества гравитационным полем. Именно это свойство и получило название «самоограничения» поля.

Покажем, следуя уравнениям (11) и (12), на примере однородной и изотропной Вселенной, как происходит это «самоограничение» и как оно сказывается на эволюции Вселенной.

В однородной и изотропной Вселенной, когда пространство Минковского описывается интервалом $d\sigma^2$:

$$d\sigma^2 = c^2 \frac{d\tau^2}{a^6} - (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta \, d\phi^2),$$

интервал эффективного риманова пространства ds^2 согласно уравнениям (12) имеет вид

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 - \beta^4 a^2(\tau)(dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta \, d\phi^2), \tag{16}$$

что означает, что Вселенная бесконечна и она плоская, т. е. пространственная геометрия евклидова. Здесь β — постоянная интегрирования.

Собственное время $d\tau$ связано с инерциальным временем dt соотношением

$$d\tau = a^3(\tau) dt. \tag{17}$$

Масштабный фактор $a(\tau)$ согласно (11) удовлетворяет уравнениям

$$\frac{\ddot{a}(\tau)}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\Big(\rho + \frac{3p}{c^2}\Big) - \frac{(mc)^2}{6}\Big(1 - \frac{1}{a^6}\Big), \tag{18}$$

$$\Big(\frac{\dot{a}}{a}\Big)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho(\tau) - \frac{(mc)^2}{6}\Big(1 - \frac{3}{2\beta^4 a^2} + \frac{1}{2a^6}\Big). \tag{19}$$

Поскольку левая часть уравнения (19) неотрицательна, а плотность вещества в радиационно-доминантной стадии растет при уменьшении a как a^{-4}, отрицательный член в (19) при массе гравитона

$$-\frac{(mc)^2}{12a^6}$$

может быть скомпенсирован лишь при конечном значении масштабного фактора

$$a_{\min} = \Big(\frac{m^2c^2}{32\pi G\rho_{\max}}\Big)^{1/6}. \tag{20}$$

Таким образом, процесс замедления хода времени τ по сравнению с инерциальным временем t согласно (17) и (20) останавливается, а следовательно, останавливается и процесс сжатия вещества, достигая некоторого конечного значения плотности $\rho_{\max}$. Эта величина теорией не определяется. Она связана с интегралом движения Вселенной. Именно все это и устраняет космологическую сингулярность, которая имеет место в ОТО.

Ускорение в точке остановки, которое явилось «толчком» к расширению Вселенной, равно

$$\frac{\ddot{a}}{a}\Big|_{\tau=0} = \frac{8\pi G}{3}\rho_{\max},$$

а скалярная кривизна в радиационно-доминантной фазе в точке остановки равна

$$R = -\frac{16\pi G}{c^2}\rho_{\max}.$$

Наличие скалярной кривизны R способствует образованию релятивистского реликтового гравитационного фона не теплового происхождения. В ОТО скалярная кривизна в радиационно-доминантной фазе равна нулю, а поэтому такой фон в этой фазе образоваться не может.

Из уравнения (19) следует, что величина современной полной относительной плотности $\Omega^0_{\rm tot}$ слегка превышает единицу и равна

$$\Omega^0_{\rm tot} = 1 + \frac{1}{6}\Big(\frac{m_g c^2}{\hbar H}\Big)^2, \tag{21}$$

где H — современное значение постоянной Хаббла. В ОТО только для плоской однородной и изотропной Вселенной $\Omega^0_{\text{tot}} = 1$.

Таким образом, из теории следует, что помимо наблюдаемой материи во Вселенной должна существовать большая скрытая масса «темной» материи. Из ОТО такой вывод не следует.

Поскольку измерения угловой анизотропии реликтового излучения систематически дают для средней величины Ω^0_{tot} значения, на несколько процентов превышающие единицу (но в пределах ошибки не противоречат значению, равному единице), из соотношения (21) можно получить наилучшую верхнюю оценку на массу гравитона:

$$m_g < 3{,}6 \cdot 10^{-66} \text{ г.} \tag{22}$$

Вместе с тем в пределах ошибок наблюдений допустимо

$$m_g \backsimeq 10^{-66} \text{ г.} \tag{23}$$

Гравитационное поле, как и все другие физические поля, не должно выводить геодезическую линию движения пробного тела в эффективном римановом пространстве не только за конус риманова пространства $ds^2 = 0$, но также и за конус пространства Минковского. Отсюда следует, что световой конус в эффективном римановом пространстве должен всегда лежать внутри светового конуса в пространстве Минковского. Учитывая это, на основании (16) возникает требование

$$a \leqslant \beta.$$

Отсюда естественно выбрать постоянную интегрирования β равной

$$\beta = a_{\max}.$$

Таким образом, согласно РТГ невозможно неограниченное расширение Вселенной, а поэтому теория несовместима с наличием космологической постоянной, описывающей вакуумное состояние вещества и соответствующей отталкиванию. Для объяснения наблюдаемого в настоящее время ускорения расширения Вселенной требуется среда типа квинтэссенции с уравнением состояния

$$p = \omega\rho, \quad -1 < \omega < -\frac{1}{3}.$$

Наличие массы покоя гравитона в уравнении (19) обеспечивает остановку расширения при наличии квинтэссенции. Минимальная плотность вещества (в максимуме расширения) равна

$$\frac{\rho_{\min}}{\rho^0_c} = \Omega^0_{\text{tot}} - 1 = \frac{1}{6}\left(\frac{m_g c^2}{\hbar H}\right)^2, \quad \Omega^0_{\text{tot}} = \frac{\rho}{\rho^0_c},$$

где ρ_c^0 — современная критическая плотность, она равна

$$\rho_c^0 = \frac{3H^2}{8\pi G}.$$

Согласно РТГ однородная и изотропная Вселенная развивается циклически от максимальной плотности вещества до минимальной и т. д. Красное смещение вызвано не движением галактик, а изменением гравитационного поля. Вещество (без учета пекулярных скоростей) находится в покое относительно инерциальной системы. Таким образом, никакого «большого взрыва» не было, а было состояние вещества с большой плотностью и высокой температурой. Теория устраняет известные проблемы ОТО: сингулярности, причинности (горизонта), плоскостности (евклидовости).

Эффект «самоограничения» поля кардинально изменяет и эволюцию тел больших масс. Он так же, как и во Вселенной, останавливает процесс замедления хода времени гравитационным полем, а следовательно, останавливает и процесс сжатия вещества. Так что никаких «черных дыр» образоваться не может. Объекты больших масс могут существовать и обладать различными физическими свойствами, но они не исчезают из нашего пространства и доступны для исследования.

Полевой подход исключает появление сингулярностей метрических коэффициентов риманова пространства, так как появление таких особенностей привело бы к появлению сингулярности в инвариантах

$$g^{\mu\nu}\gamma_{\mu\nu}, \quad g_{\mu\nu}\gamma^{\mu\nu},$$

которую нельзя было бы устранить в результате выбора системы координат, а поэтому, если, например, такая особенность возникла бы в вакууме, она привела бы к особенности скалярной кривизны R, которая согласно уравнению (11) равна

$$R = 2m^2 - \frac{m^2}{2}(\gamma_{\mu\nu}g^{\mu\nu}), \tag{24}$$

а поэтому привела бы к невозможности «сшить» решение в веществе с решением в вакууме.

Рассмотрим нестатическое сферически-симметричное тело. Общий вид интервала для нестатического сферически-симметричного эффективного риманова пространства-времени может быть представлен в форме

$$ds^2 = g_{00}dt^2 + 2g_{01}dtdr + g_{11}dr^2 + g_{22}d\theta^2 + g_{33}d\phi^2,$$

где метрические коэффициенты g_{00}, g_{01}, g_{11} и g_{22} являются функциями радиальной переменной r и времени t, а g_{33} зависит также от угла θ. Введем следующие обозначения:

$$
\begin{aligned}
&g_{00}(r,t) = U(r,t); \quad g_{01}(r,t) = -A(r,t);\\
&g_{11}(r,t) = -\bigl[V(r,t) - A^2(r,t)/U(r,t)\bigr];\\
&g_{22}(r,t) = -W(r,t); \quad g_{33}(r,t,\theta) = -W(r,t)\sin^2\theta.
\end{aligned} \tag{25}
$$

Можно показать, что отличные от нуля компоненты тензора $g^{\mu\nu}$ имеют вид

$$
\begin{aligned}
&g^{00}(r,t) = \left(\frac{1}{U}\right)\left(1 - \frac{A^2}{UV}\right); \quad g^{01}(r,t) = -\frac{A}{UV};\\
&g^{11}(r,t) = -\frac{1}{V}; \quad g^{22}(r,t) = -\frac{1}{W}; \quad g^{33}(r,t,\theta) = -\frac{1}{W\sin^2\theta}.
\end{aligned} \tag{26}
$$

Для интервала пространства Минковского $d\sigma^2$:

$$
d\sigma^2 = dt^2 - dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2),
$$

на основании (24) и (26) имеем

$$
R = 2m^2 - \frac{m^2}{2}\left[\frac{1}{U}\left(1 - \frac{A^2}{UV}\right) + \frac{1}{V} + \frac{2r^2}{W}\right]. \tag{27}
$$

Для статического сферически-симметричного тела в силу уравнений (12) $A = 0$. Величины U, V, W должны быть отличными от нуля, поскольку в противоположном случае скалярная кривизна обратится в бесконечность, которую нельзя устранить выбором системы координат, а поэтому будет невозможно «сшить» внешнее решение с внутренним. Отсюда следует, что в РТГ шварцшильдовская особенность отсутствует, что и приводит к остановке процесса замедления времени гравитационным полем, а следовательно, и к остановке процесса сжатия вещества. Таким образом устраняются сами истоки проблемы, откуда возникли «черные дыры». Все это находится в соответствии с интуицией А. Эйнштейна [7]: «Основным результатом проведенного исследования является четкое понимание того, что в реальном мире отсутствуют *шварцшильдовские сингулярности* (выделено нами. — Авторы)». И далее: «Шварцшильдовская сингулярность отсутствует, так как вещество нельзя концентрировать произвольным образом; в противном случае частицы, образующие скопления, достигнут скорости света».

Поскольку выводы РТГ относительно больших масс тел принципиально отличаются от выводов ОТО, то для проверки необходимы более детальные данные наблюдений. Например, в РТГ сферически-симметричная аккреция вещества на объект большой массы, находящийся на заключительной стадии эволюции (когда ядерные ресурсы исчерпаны), будет сопровождаться значительным энерговыделением из-за падения вещества на поверхность объекта. Тогда как в ОТО при сферически-симметричной аккреции вещества на «черную дыру» энерговыделение будет крайне малым, поскольку падающее вещество уносит энергию в «черную дыру». «Черная дыра» не имеет материальной поверхности. Следует также подчеркнуть, что «черная дыра» вопреки распространенному мнению не является следствием ОТО. Более того, это направление исследований противоречит основам ОТО, поскольку нарушает важнейшее положение Эйнштейна [8]: «Признать все мыслимые (мы не будем здесь касаться некоторых ограничений, вытекающих из требования однозначности и непрерывности) координатные системы принципиально равноправными для описания природы».

То простейшее изменение, которое было сделано в уравнениях Эйнштейна (1), как мы видим, оказалось принципиальным, поскольку привело к кардинально другим физическим выводам. Но тогда это было, по-видимому, трудно осуществить, поскольку в силу принципа эквивалентности рассматривалось только риманово пространство. Это было трудно сделать и потому, что метрическое поле пространства Минковского $\gamma_{\mu\nu}$ также считалось гравитационным полем. Не было осознано главное: специальная теория относительности — это псевдоевклидова геометрия пространства-времени, а поэтому метрическое поле $\gamma_{\mu\nu}(x)$ не имеет никакого отношения к гравитации.

Все эти представления и не позволили осуществить технически простой, но физически принципиальный шаг. Гравитационное поле не рассматривалось как физическое поле, развивающееся в пространстве Минковского.

В заключение авторы выражают глубокую благодарность академику РАН В. Г. Кадышевскому, профессорам В. А. Петрову, Н. Е. Тюрину за ценные обсуждения.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Для любой заданной плотности лагранжиана L, при бесконечно малом изменении координат, вариация действия

$$S = \int L d^4x$$

будет равна нулю. Вычислим вариацию действия от плотности лагранжиана L_M

$$S_M = \int L_M(\tilde{g}^{\mu\nu}, \Phi_A) d^4x$$

вещества и установим сильное тождество. При преобразовании координат

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \xi^{\mu}(x), \tag{A.1}$$

где $\xi^\mu(x)$ – бесконечно малый четырехвектор смещения, вариация действия при координатном преобразовании равна

$$\delta_c S_M = \int d^4x \left(\frac{\delta L_M}{\delta \tilde{g}^{\mu\nu}} \delta_L \tilde{g}^{\mu\nu} + \frac{\delta L_M}{\delta \Phi_A} \delta_L \Phi_A + \mathrm{div} \right) = 0. \tag{A.2}$$

В этом выражении div обозначает дивергенциальные члены, которые несущественны для наших целей.

Эйлерова вариация определена, как обычно:

$$\frac{\delta L}{\delta \Phi} \equiv \frac{\partial L}{\partial \Phi} - \partial_\mu \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \Phi)} + \partial_\mu \partial_\nu \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \partial_\nu \Phi)} .$$

Вариации Ли $\delta_L \tilde{g}^{\mu\nu}, \delta_L \Phi_A$ при изменении координат легко вычисляются, если использовать закон преобразования величин $g^{\mu\nu}, \Phi_A$:

$$\begin{gathered} \delta_L \tilde{g}^{\mu\nu} = \tilde{g}^{\lambda\mu} D_\lambda \xi^\nu + \tilde{g}^{\lambda\nu} D_\lambda \xi^\mu - D_\lambda(\xi^\lambda \tilde{g}^{\mu\nu}), \\ \delta_L \Phi_A = -\xi^\lambda D_\lambda \Phi_A + F^{B;\lambda}_{A;\sigma} \Phi_B D_\lambda \xi^\sigma, \end{gathered} \tag{A.3}$$

D_λ — ковариантные производные в пространстве Минковского. Подставляя эти выражения в (A.2) и интегрируя по частям, получаем

$$\begin{aligned} \delta S_M = \int d^4x \Bigg\{ -\xi^\lambda \Bigg[D_\alpha \left(2\frac{\delta L_M}{\delta \tilde{g}^{\lambda\nu}} \tilde{g}^{\alpha\nu} \right) - D_\lambda \left(\frac{\delta L_M}{\delta \tilde{g}^{\alpha\beta}} \right) \tilde{g}^{\alpha\beta} + \\ + D_\sigma \left(\frac{\delta L_M}{\delta \Phi_A} F^{B;\sigma}_{A;\lambda} \Phi_B \right) + \frac{\delta L_M}{\delta \Phi_A} D_\lambda \Phi_A \Bigg] + \mathrm{div} \Bigg\} = 0. \end{aligned} \tag{A.4}$$

В силу произвольности вектора ξ^λ из этого равенства находим сильное тождество, справедливое независимо от выполнения уравнений движения для полей. Оно имеет вид

$$\begin{aligned} D_\alpha \left(2\frac{\delta L_M}{\delta \tilde{g}^{\lambda\nu}} \tilde{g}^{\alpha\nu} \right) - D_\lambda \left(\frac{\delta L_M}{\delta \tilde{g}^{\alpha\beta}} \right) \tilde{g}^{\alpha\beta} = \\ = -D_\sigma \left(\frac{\delta L_M}{\delta \Phi_A} F^{B;\sigma}_{A;\lambda} \Phi_B \right) - \frac{\delta L_M}{\delta \Phi_A} D_\lambda \Phi_A. \end{aligned} \tag{A.5}$$

Введем обозначения:

$$\begin{gathered} T_{\mu\nu} = 2\frac{\delta L_M}{\delta g^{\mu\nu}}, \quad T^{\mu\nu} = -2\frac{\delta L_M}{\delta g_{\mu\nu}} = g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} T_{\alpha\beta}, \\ T = T^{\mu\nu} g_{\mu\nu}, \quad \widetilde{T}_{\mu\nu} = 2\frac{\delta L_M}{\delta \tilde{g}^{\mu\nu}}, \\ \widetilde{T}^{\mu\nu} = -2\frac{\delta L_M}{\delta \tilde{g}_{\mu\nu}} = \tilde{g}^{\mu\alpha} \tilde{g}^{\nu\beta} \widetilde{T}_{\alpha\beta}, \quad \widetilde{T} = \widetilde{T}^{\alpha\beta} \tilde{g}_{\alpha\beta}. \end{gathered} \tag{A.6}$$

Учитывая эти обозначения, левую часть тождества (А.5) можно записать в виде
$$D_\alpha(\widetilde{T}_{\lambda\nu}\tilde{g}^{\alpha\nu}) - \frac{1}{2}\tilde{g}^{\alpha\beta}D_\lambda\widetilde{T}_{\alpha\beta} = \partial_\alpha(\widetilde{T}_{\lambda\nu}\tilde{g}^{\alpha\nu}) - \frac{1}{2}\tilde{g}^{\alpha\beta}\partial_\lambda\widetilde{T}_{\alpha\beta}.$$
Правая часть этого равенства легко приводится к форме
$$\partial_\alpha(\widetilde{T}_{\lambda\nu}\tilde{g}^{\alpha\nu}) - \frac{1}{2}\tilde{g}^{\alpha\beta}\partial_\lambda\widetilde{T}_{\alpha\beta} = \tilde{g}_{\lambda\nu}\nabla_\alpha\left(\widetilde{T}^{\alpha\nu} - \frac{1}{2}\tilde{g}^{\alpha\nu}\widetilde{T}\right), \tag{A.7}$$
здесь ∇_α — ковариантная производная в римановом пространстве.

Выразим теперь выражение под знаком ковариантной производной ∇_α через плотность тензора $T^{\alpha\nu}$. Для этой цели воспользуемся формулой (В.16) (см. приложение В):
$$\frac{\delta L_M}{\delta g_{\mu\nu}} = \frac{\delta L_M}{\delta\tilde{g}^{\alpha\beta}}\frac{\partial\tilde{g}^{\alpha\beta}}{\partial g_{\mu\nu}}, \tag{A.8}$$
где
$$\frac{\partial\tilde{g}^{\alpha\beta}}{\partial g_{\mu\nu}} = \sqrt{-g}\frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial g_{\mu\nu}} - \frac{1}{2\sqrt{-g}}\frac{\partial g}{\partial g_{\mu\nu}}g^{\alpha\beta}. \tag{A.9}$$
Используя соотношения
$$g^{\alpha\beta}g_{\beta\sigma} = \delta^\alpha_\sigma,$$
найдем
$$\frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial g_{\mu\nu}} = -\frac{1}{2}(g^{\alpha\mu}g^{\nu\beta} + g^{\alpha\nu}g^{\mu\beta}). \tag{A.10}$$
По правилу дифференцирования определителей находим
$$dg = gg^{\mu\nu}dg_{\mu\nu}, \tag{A.11}$$
откуда имеем
$$\frac{\partial g}{\partial g_{\mu\nu}} = gg^{\mu\nu}. \tag{A.12}$$
Подставляя выражения (А.10) и (А.12) в (А.9), получим
$$\frac{\partial\tilde{g}^{\alpha\beta}}{\partial g_{\mu\nu}} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}\big[g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu} + g^{\alpha\nu}g^{\beta\mu} - g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta}\big]. \tag{A.13}$$
Используя это соотношение в (А.8), находим
$$\frac{\delta L_M}{\delta g_{\mu\nu}} = \sqrt{-g}\left(\frac{\delta L_M}{\delta\tilde{g}^{\alpha\beta}}g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu} - \frac{1}{2}\frac{\delta L_M}{\delta\tilde{g}^{\alpha\beta}}g^{\alpha\beta}g^{\mu\nu}\right). \tag{A.14}$$
Учитывая обозначения (А.6), это выражение можно записать в виде
$$\sqrt{-g}T^{\mu\nu} = \widetilde{T}^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\tilde{g}^{\mu\nu}\widetilde{T}. \tag{A.15}$$

На основании равенства (А.15) сильное тождество (А.5) с учетом (А.7) принимает вид

$$g_{\lambda\nu}\nabla_\alpha T^{\alpha\nu} = -D_\sigma\left(\frac{\delta L_M}{\delta\Phi_A}F^{B;\sigma}_{A;\lambda}\Phi_B\right) - \frac{\delta L_M}{\delta\Phi_A}D_\lambda\Phi_A,$$

или (А.16)

$$\nabla_\alpha T^\alpha_\lambda = -D_\sigma\left(\frac{\delta L_M}{\delta\Phi_A}F^{B;\sigma}_{A;\lambda}\Phi_B\right) - \frac{\delta L_M}{\delta\Phi_A}D_\lambda\Phi_A.$$

Здесь, в отличие от основного текста статьи, через $T^{\mu\nu}$ обозначена плотность тензора энергии-импульса вещества.

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Представим уравнение (11)

$$R_{\mu\nu} - \frac{m^2}{2}(g_{\mu\nu} - \gamma_{\mu\nu}) = 8\pi\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\right) \tag{Б.1}$$

в форме

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R + \frac{m^2}{2}\left[g^{\mu\nu} + \left(g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta}\right)\gamma_{\alpha\beta}\right] = 8\pi T^{\mu\nu}. \tag{Б.2}$$

На основании тождества Бьянки

$$\nabla_\mu\left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R\right) \equiv 0 \tag{Б.3}$$

(здесь ∇_μ — ковариантная производная в римановом пространстве) из уравнения (Б.2) после применения ковариантной производной ∇_μ находим равенство

$$m^2\left(g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta}\right)\nabla_\mu\gamma_{\alpha\beta} = 16\pi\nabla_\mu T^{\mu\nu}. \tag{Б.4}$$

Нам необходимо несколько упростить левую часть равенства (Б.4). Для этой цели мы выведем ряд формул, которые и помогут осуществить упрощение.

При вычислении ковариантных производных всегда возникают нековариантные величины — символы Кристоффеля, но, чтобы избежать их, мы будем пользоваться тензорными величинами:

$$G^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\lambda\sigma}(D_\mu g_{\nu\sigma} + D_\nu g_{\mu\sigma} - D_\sigma g_{\mu\nu}) = \Gamma^\lambda_{\mu\nu}(x) - \gamma^\lambda_{\mu\nu}(x). \tag{Б.5}$$

Здесь $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ — символы Кристоффеля риманова пространства; $\gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ — символы Кристоффеля пространства Минковского; D_μ — ковариантная производная в пространстве Минковского.

Согласно тензорному закону имеем выражение для ковариантных производных в виде

$$\nabla_\lambda A_{\mu\nu} = \partial_\lambda A_{\mu\nu} - \Gamma^{\sigma}_{\lambda\mu} A_{\sigma\nu} - \Gamma^{\sigma}_{\lambda\nu} A_{\mu\sigma}, \tag{Б.6}$$

$$D_\lambda A_{\mu\nu} = \partial_\lambda A_{\mu\nu} - \gamma^{\sigma}_{\lambda\mu} A_{\sigma\nu} - \gamma^{\sigma}_{\lambda\nu} A_{\mu\sigma}. \tag{Б.7}$$

Вычитая (Б.7) из (Б.6) и учитывая (Б.5), получим

$$\nabla_\lambda A_{\mu\nu} = D_\lambda A_{\mu\nu} - G^{\sigma}_{\lambda\mu} A_{\sigma\nu} - G^{\sigma}_{\lambda\nu} A_{\mu\sigma}. \tag{Б.8}$$

Так, используя тензорные величины $G^{\lambda}_{\mu\nu}$, удается при вычислении ковариантной производной иметь дело только с тензорными слагаемыми, тем самым сохраняется ковариантность на каждом этапе вычислений.

На основании (Б.8) имеем

$$\nabla_\mu \gamma_{\alpha\beta} = -G^{\sigma}_{\mu\alpha}\gamma_{\sigma\beta} - G^{\sigma}_{\mu\beta}\gamma_{\sigma\alpha}, \quad D_\mu \gamma_{\alpha\beta} \equiv 0. \tag{Б.9}$$

Подставляя это выражение в левую часть (Б.4), получим

$$m^2\left(g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta}\right)\nabla_\mu\gamma_{\alpha\beta} = -m^2 g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}\gamma_{\sigma\beta}G^{\sigma}_{\mu\alpha} - \\ - m^2\gamma_{\sigma\beta}G^{\sigma}_{\mu\alpha}(g^{\mu\beta}g^{\nu\alpha} - g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta}). \tag{Б.10}$$

В выражении (Б.10) второй член в правой части равен нулю, поскольку в нем производится умножение тензора $G^{\sigma}_{\mu\alpha}$, симметричного по индексам μ и α, на тензор

$$g^{\mu\beta}g^{\nu\alpha} - g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta},$$

который антисимметричен по индексам μ и α.

Учитывая это обстоятельство, мы получим для левого члена в (Б.4) выражение

$$m^2\left(g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta}\right)\nabla_\mu\gamma_{\alpha\beta} = -m^2\gamma_{\sigma\beta}\, g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}G^{\sigma}_{\mu\alpha}. \tag{Б.11}$$

Из очевидного равенства

$$D_\lambda(g^{\alpha\beta}g^{\sigma\tau}g_{\beta\sigma}) = D_\lambda\, g^{\alpha\tau}$$

находим

$$g^{\alpha\beta}g^{\sigma\tau}D_\lambda\, g_{\beta\sigma} = -D_\lambda\, g^{\alpha\tau}. \tag{Б.12}$$

С учетом (Б.5) и (Б.12) равенство (Б.11) принимает форму

$$m^2\left(g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta}\right)\nabla_\mu\gamma_{\alpha\beta}=m^2\gamma_{\sigma\beta}\,g^{\nu\beta}(D_\mu g^{\mu\sigma}+g^{\sigma\lambda}G^\mu_{\lambda\mu}). \qquad (Б.13)$$

Здесь мы учли, что

$$G^\mu_{\lambda\mu}=\frac{1}{2}g^{\mu\sigma}D_\lambda\,g^{\mu\sigma}. \qquad (Б.14)$$

Если теперь принять во внимание, что

$$D_\mu(\sqrt{-g})=\sqrt{-g}\,G^\sigma_{\mu\sigma}, \qquad (Б.15)$$

то получим равенство

$$D_\mu\,\tilde{g}^{\mu\sigma}=(D_\mu\,g^{\mu\sigma}+g^{\sigma\lambda}G^\mu_{\lambda\mu})\sqrt{-g}. \qquad (Б.16)$$

На основании (Б.16) выражение (Б.13) принимает вид

$$m^2\left(g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta}\right)\nabla_\mu\gamma_{\alpha\beta}=\frac{m^2}{\sqrt{-g}}\gamma_{\sigma\beta}\,g^{\nu\beta}D_\mu\,\tilde{g}^{\mu\sigma}. \qquad (Б.17)$$

Подставляя выражение (Б.17) в (Б.4), получим

$$m^2\gamma_{\sigma\beta}\,g^{\nu\beta}D_\mu\,\tilde{g}^{\mu\sigma}=\sqrt{-g}\,16\pi\nabla_\mu T^{\mu\nu}. \qquad (Б.18)$$

Умножив обе части равенства (Б.18) на $g_{\nu\lambda}$ и осуществив суммирование по одинаковым индексам ν, находим

$$m^2\gamma_{\sigma\lambda}\,D_\mu\,\tilde{g}^{\mu\sigma}=\sqrt{-g}\,16\pi\nabla_\mu T^\mu_\lambda. \qquad (Б.19)$$

Теперь, умножив обе части равенства (Б.19) на $\gamma^{\lambda\nu}$ и осуществив суммирование по λ, имеем

$$m^2D_\mu\,\tilde{g}^{\mu\sigma}=\sqrt{-g}\,16\pi\gamma^{\lambda\nu}\,\nabla_\mu T^\mu_\lambda. \qquad (Б.20)$$

Так мы получили равенство, которое и используется в основном тексте статьи (см. выражение (9)).

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Установим соотношение

$$\frac{\delta L}{\delta\gamma_{\mu\nu}}=\frac{\delta L}{\delta g_{\alpha\beta}}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial\gamma_{\mu\nu}}+\frac{\delta^\star L}{\delta\gamma_{\mu\nu}}, \qquad (В.1)$$

здесь

$$\frac{\delta L}{\delta \gamma_{\mu\nu}} = \frac{\partial L}{\partial \gamma_{\mu\nu}} - \partial_\sigma \left(\frac{\partial L}{\partial \gamma_{\mu\nu,\sigma}} \right), \tag{B.2}$$

$$\frac{\delta L}{\delta g_{\mu\nu}} = \frac{\partial L}{\partial g_{\alpha\beta}} - \partial_\sigma \left(\frac{\partial L}{\partial g_{\alpha\beta,\sigma}} \right), \tag{B.3}$$

звездочкой в формуле (B.1) обозначена вариационная производная от плотности лагранжиана по явно входящей в L метрике $\gamma_{\mu\nu}$. После дифференцирования получим

$$\frac{\partial L}{\partial \gamma_{\mu\nu}} = \frac{\partial^\star L}{\partial \gamma_{\mu\nu}} + \frac{\partial L}{\partial g_{\alpha\beta,\sigma}} \frac{\partial g_{\alpha\beta,\sigma}}{\partial \gamma_{\mu\nu}} + \frac{\partial L}{\partial g_{\alpha\beta}} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial \gamma_{\mu\nu}}, \tag{B.4}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \gamma_{\mu\nu,\sigma}} = \frac{\partial^\star L}{\partial \gamma_{\mu\nu,\sigma}} + \frac{\partial L}{\partial g_{\alpha\beta,\tau}} \frac{\partial g_{\alpha\beta,\tau}}{\partial \gamma_{\mu\nu,\sigma}}\ . \tag{B.5}$$

Подставим эти выражения в формулу (B.2):

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \gamma_{\mu\nu}} - \partial_\sigma \left(\frac{\partial L}{\partial \gamma_{\mu\nu,\sigma}} \right) &= \frac{\delta^\star L}{\delta \gamma_{\mu\nu}} + \frac{\partial L}{\partial g_{\alpha\beta,\sigma}} \frac{\partial g_{\alpha\beta,\sigma}}{\partial \gamma_{\mu\nu}} + \\ &+ \frac{\partial L}{\partial g_{\alpha\beta}} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial \gamma_{\mu\nu}} - \partial_\sigma \left(\frac{\partial L}{\partial g_{\alpha\beta,\tau}} \frac{\partial g_{\alpha\beta,\tau}}{\partial \gamma_{\mu\nu,\sigma}} \right) = \frac{\delta^\star L}{\delta \gamma_{\mu\nu}} + \frac{\partial L}{\partial g_{\alpha\beta}} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial \gamma_{\mu\nu}} - \\ &- \partial_\sigma \left(\frac{\partial L}{\partial g_{\alpha\beta,\tau}} \right) \frac{\partial g_{\alpha\beta,\tau}}{\partial \gamma_{\mu\nu,\sigma}} + \frac{\partial L}{\partial g_{\alpha\beta,\sigma}} \left[\frac{\partial g_{\alpha\beta,\sigma}}{\partial \gamma_{\mu\nu}} - \partial_\rho \left(\frac{\partial g_{\alpha\beta,\sigma}}{\partial \gamma_{\mu\nu,\rho}} \right) \right]. \end{aligned} \tag{B.6}$$

Рассмотрим выражение

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta,\sigma}}{\partial \gamma_{\mu\nu}} - \partial_\rho \left(\frac{\partial g_{\alpha\beta,\sigma}}{\partial \gamma_{\mu\nu,\rho}} \right). \tag{B.7}$$

Для этой цели запишем производную $g_{\alpha\beta,\sigma}$ в форме

$$g_{\alpha\beta,\sigma} = \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial \gamma_{\lambda\omega}} \partial_\sigma \gamma_{\lambda\omega} + \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial \Phi_{\lambda\omega}} \partial_\sigma \Phi_{\lambda\omega}, \tag{B.8}$$

отсюда легко найти

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta,\sigma}}{\partial \gamma_{\mu\nu,\rho}} = \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial \gamma_{\mu\nu}} \delta^\rho_\sigma. \tag{B.9}$$

Дифференцируя это выражение, имеем

$$\partial_\rho \left(\frac{\partial g_{\alpha\beta,\sigma}}{\partial \gamma_{\mu\nu,\rho}} \right) = \frac{\partial^2 g_{\alpha\beta}}{\partial \gamma_{\mu\nu} \partial \gamma_{\lambda\omega}} \partial_\sigma \gamma_{\lambda\omega} + \frac{\partial^2 g_{\alpha\beta}}{\partial \gamma_{\mu\nu} \partial \Phi_{\lambda\omega}} \partial_\sigma \Phi_{\lambda\omega}. \tag{B.10}$$

С другой стороны, дифференцируя (В.8) по $\gamma_{\mu\nu}$, имеем

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta,\sigma}}{\partial\gamma_{\mu\nu}} = \frac{\partial^2 g_{\alpha\beta}}{\partial\gamma_{\mu\nu}\partial\gamma_{\lambda\omega}}\partial_\sigma\gamma_{\lambda\omega} + \frac{\partial^2 g_{\alpha\beta}}{\partial\gamma_{\mu\nu}\partial\Phi_{\lambda\omega}}\partial_\sigma\Phi_{\lambda\omega}. \tag{B.11}$$

Сравнивая (В.10) и (В.11), найдем

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta,\sigma}}{\partial\gamma_{\mu\nu}} - \partial_\rho\left(\frac{\partial g_{\alpha\beta,\sigma}}{\partial\gamma_{\mu\nu,\rho}}\right) = 0. \tag{B.12}$$

Учитывая это соотношение, в (В.6) получаем

$$\frac{\delta L}{\delta\gamma_{\mu\nu}} = \frac{\delta^\star L}{\delta\gamma_{\mu\nu}} + \frac{\partial L}{\partial g_{\alpha\beta}}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial\gamma_{\mu\nu}} - \partial_\sigma\left(\frac{\partial L}{\partial g_{\alpha\beta,\tau}}\right)\frac{\partial g_{\alpha\beta,\tau}}{\partial\gamma_{\mu\nu,\sigma}}\ . \tag{B.13}$$

Подставляя (В.9) в (В.13), найдем

$$\frac{\delta L}{\delta\gamma_{\mu\nu}} = \frac{\delta^\star L}{\delta\gamma_{\mu\nu}} + \left[\frac{\partial L}{\partial g_{\alpha\beta}} - \partial_\sigma\left(\frac{\partial L}{\partial g_{\alpha\beta,\sigma}}\right)\right]\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial\gamma_{\mu\nu}}, \tag{B.14}$$

т. е.

$$\frac{\delta L}{\delta\gamma_{\mu\nu}} = \frac{\delta^\star L}{\delta\gamma_{\mu\nu}} + \frac{\delta L}{\delta g_{\alpha\beta}}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial\gamma_{\mu\nu}}. \tag{B.15}$$

Аналогично вычисляется

$$\frac{\delta L}{\delta g_{\alpha\beta}} = \frac{\delta L}{\delta\tilde{g}^{\lambda\rho}}\frac{\partial\tilde{g}^{\lambda\rho}}{\partial g_{\alpha\beta}}\ . \tag{B.16}$$

Используя (В.16), выражение (В.15) можно записать в виде

$$\frac{\delta L}{\delta\gamma_{\mu\nu}} = \frac{\delta^\star L}{\delta\gamma_{\mu\nu}} + \frac{\delta L}{\delta\tilde{g}^{\lambda\rho}}\frac{\partial\tilde{g}^{\lambda\rho}}{\partial\gamma_{\mu\nu}}\ . \tag{B.17}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Логунов А. А., Мествиришвили М. А.* Релятивистская теория гравитации. М.: Наука, 1989. 304 с.
2. *Логунов А. А.* Теория гравитационного поля. М.: Наука, 2000. 234 с.
3. *Логунов А. А.* Релятивистская теория гравитации. М.: Наука, 2006. 253 с.
4. *Герштейн С. С. и др.* Эволюция Вселенной в полевой теории гравитации // ЭЧАЯ. 2005. Т. 36, вып. 5. С. 1003–1050.
5. *Эйнштейн А.* // Собр. науч. тр. М., 1965. Т. I. Ст. 44. С. 611.
6. *Фок В. А.* Теория пространства, времени и тяготения. М., 1961. С. 257.
7. *Эйнштейн А.* // Собр. науч. тр. М., 1966. Т. II. Ст. 119. С. 531.
8. *Эйнштейн А.* // Собр. науч. тр. М., 1965. Т. I. Ст. 38. С. 459.