

## О ФИЗИКЕ НА ПЛАНКОВСКИХ РАССТОЯНИЯХ. ПРОСТРАНСТВО КАК СЕТЬ\*

*Л. В. Прохоров*

Научно-исследовательский институт физики им. В. А. Фока, Санкт-Петербург, Россия

Показано, что одномерная квантовая теория поля моделируется цепочкой классических осцилляторов в термостате при условии, что мера Гиббса отождествляется с мерой объема фазового пространства, а цепочка находится в неравновесном состоянии. Квантованные струны и  $p$ -браны также моделируются упорядоченными системами осцилляторов. Построена модель одномерного суперпространства. Показано, что суперструна Рамона–Неве–Шварца получается в результате закручивания в спираль бозонной струны в многомерном пространстве. Физическое 3-мерное пространство представляется трехмерной структурой, построенной из суперструн («сеть»), которая описывается некоторым лагранжианом. Тем самым достигается единое описание всех взаимодействий, включая гравитационное, поскольку возбуждения суперструн содержат все поля. Ввиду дискретности исходной структуры теория свободна от ультрафиолетовых расходимостей. Неотъемлемый элемент модели — появление космологической постоянной в гравитационных уравнениях. Предложена модель черной дыры, дающая разумные величины для ее температуры и энтропии.

It is shown that 1D quantum field theory can be considered as a chain of classical oscillators in a thermostat under assumptions that the Gibbs distribution measures the phase space volume, and the chain is in the non-equilibrium state. Strings and  $p$ -branes are also considered as ordered sets of oscillators. A model of 1D superspace is given. The Ramon–Neveu–Schwarz superstring is modeled by a helix formed of a bosonic string in a multidimensional space. Physical 3D space is considered as a structure made of superstrings (a 3D «net»); it is described by some supersymmetric Lagrangian. In fact this model gives unification of all interactions, including gravitational one. Appearance of the cosmological constant in the gravitational equations is a specific feature of the model. A model of black hole giving reasonable values for temperature and entropy of the latter is proposed.

PACS: 12.10.-g; 11.25.-w; 04.50.+h

### ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время становится ясно, что ключ к главным проблемам современной физики (природа квантового описания, квантовая гравитация) следует искать в физике на планковских расстояниях. В этом направлении уже проделана огромная работа — имеется в виду программа суперструн [1], претендующая на создание теории «всего сущего», включая квантовую теорию

---

\*Расширенный вариант лекций, прочитанных на Международной школе физики им. В. А. Фока (Санкт-Петербург, 2004 г.).

гравитационного поля. Программа исходит из гипотезы, что на планковских расстояниях  $l \sim l_P = 1,6 \cdot 10^{-33}$  см материя проявляет себя в форме суперструн — одномерных объектов в многомерных пространствах, описываемых суперсимметричным лагранжианом. Данная точка зрения получила серьезную поддержку в теории черных дыр (в рамках теории суперструн было получено правильное выражение для энтропии черной дыры [2]). Попытки совместить квантовую теорию и гравитацию привели к довольно неожиданным выводам. Дело в том, что характерным элементом теории тяготения являются черные дыры. Согласно квантовой механике такие объекты могут не только поглощать частицы, но и испускать их как абсолютно черное тело [3]. При этом, очевидно, теряется информация — в противоречии с основами квантовой механики (самосопряженный гамильтониан гарантирует унитарность оператора эволюции). Анализ проблемы привел 'т Хоофта [4] к выводу, что необходимо: 1) обратиться к теории на планковских расстояниях, 2) предположить дискретность фундаментальных структур, 3) постулировать на планковских расстояниях детерминизм (классическую физику), 4) допустить диссипативные процессы.

В работе [5] предложена модель, демонстрирующая возможность появления квантового описания в рамках классической теории (классическая механика, стандартная теория вероятностей). Отправным пунктом работы было включение в теорию элементарной системы с компактным фазовым пространством (ФП). Выяснено следующее: 1) в теории появляется фундаментальная постоянная размерности действия (объем двумерного фазового пространства), которая отождествляется с постоянной Планка  $h$ , 2) если ФП есть сфера, то естественным образом появляется вероятностное описание (на сфере радиуса  $R$  имеется единственное инвариантное распределение вероятности, задаваемое плотностью  $p = 1/4\pi R^2$ ), 3) система «частица со сферическим ФП» эквивалентна системе «гармонический осциллятор в термостате», 4) случайные величины такой системы образуют пространство Фока для осциллятора, 5) возбуждения цепочки подобных осцилляторов описываются амплитудами вероятности, 6) частица есть квант соответствующего поля, а ее волновая функция описывает одночастичное возбуждение поля. В дальнейшем выяснилось, что амплитуды вероятности появляются при описании квазиравновесных состояний осциллятора в термостате (т. е. неравновесных состояний с большим временем релаксации) [6].

Оказывается, что данный подход позволяет построить модели поля, струны, суперструны и физического пространства как многомерной сети, составленной из суперструн ( $D1$ -бран). Подчеркнем, что предлагаемая модель пространства позволяет решить ряд трудных проблем.

1) Решается проблема того, как соотносятся между собой струны и пространство (проблема в том, что, с одной стороны, струны движутся в про-

странстве, с другой — среди их возбуждений имеются кванты гравитационного поля).

2) Исчезает проблема компактификации подпространства дополнительных размерностей (возбуждения не могут покинуть сеть).

3) Решается проблема объединения всех взаимодействий, включая гравитационное (возбуждения суперструн порождают поля со спинами  $1/2, 1, 2$ ).

4) Ввиду дискретности фундаментальной структуры (суперструны) в теории отсутствуют ультрафиолетовые расходимости.

5) Пространство (сеть) описывается суперсимметричным лагранжианом; тем самым проясняется природа суперсимметрии.

Ниже обсуждаются следующие вопросы. В разд. 1 изложены основные моменты описания неравновесных состояний осциллятора в термостате. Показано, что рассмотренная в [5] цепочка осцилляторов в неравновесном состоянии моделирует одномерную квантовую теорию скалярного поля. В связи с необходимостью обращения к кинетике вводятся обобщенные скобки Пуассона, допускающие описание процесса превращения неравновесных состояний системы в равновесные. Модель легко обобщается на случай произвольного числа измерений. Отсюда автоматически получается модель струны как квантовой теории поля на отрезке. Приводятся необходимые сведения о струнах и бранах (разд. 2). Более нетривиальной задачей оказывается моделирование суперструны. В разд. 3 показано, что суперструну можно рассматривать как обычную (бозонную) струну, закрученную в спираль. Из требования устойчивости струны (неотрицательности энергии) с необходимостью вытекает появление возбуждений с моментом импульса  $\hbar/2$ . Низшие круговые возбуждения спирали описываются антикоммутирующими переменными. При этом проясняется природа «моря Дирака» и разрешается парадокс, связанный с энергией вакуума (энергия «моря Дирака» оказывается равной нулю). Закрученность спирали решает еще одну фундаментальную проблему — нарушение киральной симметрии; фермионные возбуждения имеют здесь лишь одну «спиральность». В разд. 4 физическое пространство трактуется как 3-мерная «сеть», построенная из суперструн. Выписан соответствующий лагранжиан. Сеть предполагается помещенной в термостат. Таким образом, физическое пространство рассматривается как динамическая система, эволюция которой определяется лагранжианом. Возбуждения этой системы и есть кванты (т. е. частицы) всех наблюдаемых полей, включая гравитационное; фактически достигается единое описание всех полей. Предложена модель черной дыры, дающая разумные величины для энтропии, температуры Хокинга и натяжения струны (разд. 5). Весьма нетривиальным элементом предлагаемого подхода, имеющим далеко идущие следствия, является неравновесность состояний системы: возбуждение системы (отклонение от равновесного состояния) и есть то, что называют материей, а эволюция возбуждений описывается амплитудами вероятности. Но неравновесные состояния стремятся к равновесным,

т. е. их время жизни определяется временем релаксации  $t_r$ . Это означает, что мир, который описывается квантовой механикой, имеет конечное время жизни. Если еще предположить, что равновесное состояние достигается за счет сил, аналогичных силам трения, то все безмассовые поля приобретают массу, а в гравитационных уравнениях появляется космологическая постоянная  $\Lambda \sim t_r^{-2}/2$  (разд. 6).

В заключительном разд. 7 подводятся итоги, обсуждается возможность проверки некоторых следствий модели. В приложении изложен метод квантования систем со связями 2-го рода («метод редукции»), применявшийся в разд. 3.

## 1. КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ

В работе [5] было показано: если ФП-частицы есть сфера, то такая система может рассматриваться или

- 1) как классическая гамильтонова теория свободной частицы, или
- 2) как осциллятор в термостате, характеризуемый распределением Гиббса, или
- 3) как квантовый осциллятор.

Выбор определяется постановкой задачи (физическими условиями). Это может быть задача о движении классической частицы (компактное ФП, гамильтонова механика) или задача описания осциллятора в термостате (статистическая механика). В случае единственного осциллятора в термостате нет никакой необходимости специального перехода к квантовому описанию. Амплитуды вероятности оказываются востребованными при описании квазиравновесных состояний с большим временем релаксации [6]. Такие состояния могут появиться в результате внешних воздействий или флуктуаций. Прежде чем переходить к описанию цепочки осцилляторов, воспроизведем основные результаты описания неравновесных состояний одного осциллятора в термостате [5, 6].

**1.1. Амплитуды вероятности.** Покажем, что амплитуды вероятности описывают эволюцию неравновесных распределений гармонического осциллятора в термостате [6]. Пусть

$$G(q, p) = h^{-1} e^{-\beta H(q, p)}, \quad H = \frac{\omega}{2}(p^2 + q^2), \quad \beta = 1/kT, \quad h = 2\pi/\beta\omega, \quad (1.1)$$

есть распределение Гиббса ( $k$  — постоянная Больцмана). Нормировочная размерная постоянная  $h$  (единица площади фазового пространства) есть универсальная постоянная теории и ее можно будет отождествить с постоянной Планка  $h$ .

Если рассмотреть гамильтонову теорию, в которой ФП есть сфера радиуса  $R$  (координаты  $\varphi, \theta$ , дифференциальная 2-форма  $R^2 \sin \theta d\varphi \wedge d\theta$ ), то помимо

стереографического отображения сферы на комплексную плоскость  $z$  имеется следующее, менее тривиальное отображение [5]:

$$|z|^2 = -(1/\beta) \ln(2\beta R^2 \sin^2 \theta/2), \quad \arg z = \varphi,$$

которое порождает 2-форму

$$\frac{d\bar{z} \wedge dz}{i} e^{-\beta z \bar{z}}.$$

Переменные  $z, \bar{z}$  можно рассматривать как комплексные канонические переменные  $z = (q + ip)/\sqrt{2}$ ,  $\bar{z} = (q - ip)/\sqrt{2}$ ; тогда эта 2-форма задает распределение Гиббса для гамильтониана  $(p^2 + q^2)/2$  и меру в ФП. Его объем равен  $4\pi R^2 = h$ , т. е. здесь  $h$  есть фундаментальная постоянная теории, характеризующая ФП. Тем самым распределение (1.1) допускает красивую геометрическую интерпретацию, а постоянная  $h$  приобретает наглядный геометрический смысл.

Распределение (1.1) задает следующую меру  $\mu$  в фазовом пространстве:

$$d\mu(q, p) = \frac{dq \wedge dp}{h} e^{-\beta\omega(p^2+q^2)/2} = d\mu(\bar{z}, z) = \frac{d\bar{z} \wedge dz}{ih} e^{-\bar{z}z/\hbar}, \quad (1.2)$$

$$H = \omega \bar{z} z, \quad \hbar = \frac{h}{2\pi}.$$

Строго говоря, (1.2) есть бивектор, но, поскольку ФП есть ориентируемое многообразие, эта терминологическая вольность не приведет к недоразумениям. В преобразовании

$$\begin{pmatrix} \bar{z} \\ z \end{pmatrix} = \hat{U} \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}, \quad \hat{U} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

матрица  $\hat{U}$  унитарна ( $\hat{U}^+ \hat{U} = 1$ ), и  $H$  можно записать в виде

$$H = \frac{\omega}{2} \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} = \frac{\omega}{2} \begin{pmatrix} \bar{z} \\ z \end{pmatrix} U^* U^+ \begin{pmatrix} \bar{z} \\ z \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{\omega}{2} \begin{pmatrix} \bar{z} \\ z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{z} \\ z \end{pmatrix}. \quad (1.4)$$

Однако скобки Пуассона в комплексных переменных выглядят иначе:

$$\{f, g\} = \left( \frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial g}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial g}{\partial q} \right) \equiv \frac{\partial(f, g)}{\partial(q, p)} = i \frac{\partial(f, g)}{\partial(\bar{z}, z)}, \quad (1.5)$$

т. е. преобразование  $(q, p) \rightarrow (\bar{z}, z)$  не есть каноническое [6]. Переход к комплексным каноническим переменным в классической механике играет

принципиальную роль в выявлении ее связи с квантовой механикой\* [8]. В случае комплексных переменных можно ограничиться лишь одним из двух уравнений движения

$$\dot{z} = \{z, H\} = -i\omega z. \quad (1.6)$$

Второе уравнение  $\dot{\bar{z}} = i\omega\bar{z}$  получается комплексным сопряжением. Кстати, это — одна из существенных особенностей квантовой механики (КМ): достаточно найти решение уравнения Шредингера для  $\psi$ ;  $\bar{\psi}$  получается комплексным сопряжением. Представляется важной еще одна особенность комплексных канонических переменных: корреляция  $q$  и  $p$  для осциллятора равна нулю, тогда как корреляция  $\bar{z}$  и  $z$  отлична от нуля.

Мера (1.2) задает равновесное распределение для гармонического осциллятора в термостате. Любая другая мера  $\mu_p$ :

$$d\mu_p = p(x)d\mu, \quad (x_1, x_2) = (q, p), \quad p(x) \geq 0, \quad \int d\mu_p = 1,$$

описывает некоторое неравновесное распределение [9, с. 7]. Неравновесные распределения можно генерировать различными способами, например, варьируя канонические переменные  $x$ . Произвольная вариация  $\delta x$  представляется суммой

$$\delta x = \delta x_{\perp} + \delta x_{\parallel}, \quad (1.7)$$

где  $\delta x_{\perp}$ , по определению, сохраняет распределение Гиббса, т. е.

$$\delta H = \nabla H \delta x_{\perp} = 0. \quad (1.8)$$

Решения этого уравнения имеют вид

$$\delta x_{\perp} = \hat{J} \nabla H \delta t, \quad (1.9)$$

где  $\hat{J}$  — некоторая антисимметричная матрица, а  $t$  — некоторый параметр. Отождествляя  $t$  со временем и полагая  $\hat{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ , находим, что (1.9) совпадает с классическим уравнением движения

$$\dot{x} = \{x, H\}, \quad (1.10)$$

т. е.  $\hat{J}$  задает симплектическую форму в механике Гамильтона.

---

\* «Систему координат всегда можно выбрать так, как нам заблагорассудится, однако полезным и удобным этот выбор окажется только в том случае, когда выбранная система координат неким специальным образом связана с важными аспектами рассматриваемой задачи» [7, с. 39]. Здесь речь идет о координатах в ФП.

Напротив, вариации  $\delta x_{\parallel}$  не сохраняют равновесное распределение. Взяв, например, вариации  $z \rightarrow z + c$ , находим

$$d\mu(\bar{z}, z) \rightarrow d\mu_f(\bar{z}, z) = |f_c(z)|^2 d\mu(\bar{z}, z), \quad f_c(z) = e^{-\bar{c}z/\hbar} e^{-\bar{c}c/2\hbar}. \quad (1.11)$$

Мера  $\mu_f(\bar{z}, z)$  описывает неравновесное распределение, которое с течением времени стремится к равновесному ( $|f_c|^2 \rightarrow 1$ ).

Будем различать малые и большие деформации распределения Гиббса.

*Малые деформации* порождают новые распределения со старым гамильтонианом (см. (1.11)).

*Большие деформации* порождают распределения с новым гамильтонианом.

В квантовой теории поля и теории твердого тела примером больших деформаций может служить фазовый переход. И большие, и малые деформации распределения Гиббса могут появиться в результате флуктуаций.

Обратимся к малым деформациям. Отметим два важных обстоятельства.

1. Для описания эволюции меры  $\mu_f(\bar{z}, z)$  достаточно знать эволюцию функции  $f$  в (1.11) [6, 10]:

$$\dot{f} = \{f, H\} = -i\omega z \frac{df}{dz}. \quad (1.12)$$

2. Если время релаксации  $t_r$  велико ( $\omega^{-1} \ll t_r$ ), то в интервале времени  $0 < t \ll t_r$  можно использовать классические уравнения движения (1.12). Умножая (1.12) на  $\hbar$ , фактически приходим к уравнению Шредингера («вакуумная энергия»  $\hbar\omega/2$  здесь несущественна, см. ниже).

Важно установить класс допустимых функций  $f(z)$ . Введя обозначение  $\varphi = \arg z$  ( $z = |z| e^{i\varphi}$ ) и учитывая, что фиксация энергии эквивалентна фиксации  $|z|$  ( $d|z| = 0$ ), перепишем уравнение (1.12) в виде

$$(\partial_t + \omega \partial_{\varphi})f = 0.$$

Его решением будет любая функция  $f(\varphi - \omega t)$ . «Квадрируя» это уравнение, получаем волновое уравнение на окружности  $|z| = \text{const}$ :

$$(\partial_t - \omega \partial_{\varphi})(\partial_t + \omega \partial_{\varphi})f = (\partial_t^2 - \omega^2 \partial_{\varphi}^2)f = 0.$$

Отсюда немедленно заключаем, что функции  $f(z)$ , описывающие (квази)стационарное движение, должны быть периодическими.

К условию периодичности можно прийти разными путями. Например, движению с частотой  $\alpha\omega$ , где  $\alpha$  — произвольное число, отвечает функция  $z^{\alpha}$ . Но если  $\alpha$  не есть целое число, то  $z^{\alpha}$  — неоднозначная функция на плоскости  $z$ , т.е. задание  $z$  (или  $q, p$ ) не характеризует однозначно состояние осциллятора (что противоречит исходным принципам гамильтоновой механики).

Полезно и другое соображение. В случае достаточно больших интервалов времени  $t$  ( $t_r \gg t \gg \omega^{-1}$ ) непериодические движения будут вымирать (волна на окружности деструктивно интерферирует сама с собой). Рассмотрим в духе эргодической теории среднее от  $z^\alpha(t) = z^\alpha(0) e^{-i\alpha\omega t}$  ( $T = 2\pi/\omega$ ):

$$\begin{aligned} \overline{z^\alpha}(t) &= \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{n=N} z^\alpha(t+nT) = \\ &= \frac{z^\alpha(t)}{2N+1} \sum_{n=-N}^{n=N} e^{-i\alpha n 2\pi} = \frac{z^\alpha(t)}{2N+1} e^{i\alpha 2\pi N} \frac{1 - e^{-i\alpha 2\pi 2N}}{1 - e^{-i\alpha 2\pi}}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что если  $\alpha = N_0$  (целое число), то  $\overline{z^\alpha}(t) \neq 0$  при  $N \rightarrow \infty$ . Во всех остальных случаях  $\overline{z^\alpha}(t) = 0$ .

Таким образом, при больших временах релаксации в неравновесных состояниях реализуются классические детерминированные движения с частотами  $\omega n$ ; они доминируют при  $t \gg \omega^{-1}$ ,  $t_r > t$ .

Итак, функция  $f(z)$  должна разлагаться в ряд Лорана (или в ряд Фурье). Если потребовать, чтобы  $f(z)$  характеризовала любые физические состояния осциллятора, включая состояние покоя (точка  $z = 0$ ), то нужно ограничиться рядом Маклорена и рассматривать только целые функции, для которых этот ряд сходится во всей плоскости. В противном случае  $\mu_f$  не есть мера (она не может быть нормирована). Функции  $f(z)$  должны быть целыми аналитическими функциями. Но этого недостаточно. Мера (1.11) позволяет определить гильбертово пространство только целых аналитических функций  $f(z)$  порядка  $\rho \leq 2$ . Функции  $f_c(z)$  даже для произвольно малых, но конечных  $\bar{c}$  образуют переполненный базис в пространстве Фока [11–13] со скалярным произведением

$$(g(z), f(z)) = \int d\mu(\bar{z}, z) \overline{g(\bar{z})} f(z). \quad (1.13)$$

Заметим, что в ФП с мерой Гиббса всегда можно ввести скалярное произведение (1.13) и гильбертово пространство для фазовых функций общего вида  $f(\bar{z}, z)$  (или  $f(q, p)$ ) [14, 15], но они уже не будут амплитудами вероятности, ибо зависят от обеих канонических переменных.

Легко видеть, что малость  $\bar{c}$  в (1.11) не накладывает ограничений на совокупность  $e^{\bar{c}z}$  как базисных функций в пространстве Фока  $\mathcal{F}$ . Известно [12], что для произвольно малого  $\epsilon > 0$  векторы  $e^{\bar{c}_k z}$ ,  $|c_k| < \epsilon$ , образуют переполненный базис в  $\mathcal{F}$ , если бесконечная последовательность точек  $\bar{c}_k$  в комплексной плоскости сходится к некоторому пределу  $\bar{c}_0$  (из последовательности можно удалить любое конечное число точек). Это означает, что если некоторая функция  $\psi(z) \in \mathcal{F}$  ортогональна всем функциям  $e^{\bar{c}_k z}$ , то  $\psi(z) \equiv \langle z | \psi \rangle = 0$ . В самом деле, функции  $e^{\bar{c}z} = \langle z | \bar{c} \rangle = \bar{c}(z)$  играют роль



$\delta$ -функций в  $\mathcal{F}$  [5] и  $(\bar{c}_k, \psi) = \langle c_k | \psi \rangle = \psi(c_k) = 0, \forall k$ . Но  $\psi(z)$  есть целая аналитическая функция, поэтому  $\psi(z) = 0$ .

Итак, аналитические функции  $f(z)$ :

- 1) есть фазовые функции;
- 2) есть динамические переменные;
- 3) есть случайные функции, и
- 4) они могут быть отождествлены с амплитудами вероятности (элементами гильбертова пространства).

Из (1.13) следует (если брать осциллятор), что умножение функции  $\overline{f(z)}$  на  $z$  эквивалентно применению к ней оператора  $\hbar d/d\bar{z}$  (проверяется интегрированием в (1.13) по частям). Следовательно, в пространстве функций  $f(z)$  можно определить операторы  $\hat{a}^+ f(z) \equiv \bar{z} f(z)$ ,  $\hat{a} f(z) \equiv \hbar df(z)/d\bar{z}$  (т. е.  $z \leftrightarrow \hat{a}$ ,  $\bar{z} \leftrightarrow \hat{a}^+$ ),  $[\hat{a}, \hat{a}^+] = \hbar$ . Поскольку канонические переменные  $z$ ,  $\bar{z}$  становятся операторами, операторами становятся и все физические величины. Во избежание недоразумений подчеркнем, что в (1.13)  $z$ ,  $\bar{z}$ ,  $f(z)$ ,  $\overline{g(z)}$  есть обычные комплексные переменные — операторные свойства выявляются лишь при отождествлении  $f(z)$ ,  $\overline{g(z)}$  с векторами в пространстве Фока и при анализе результатов их умножения на функции от  $z$ ,  $\bar{z}$ .

Векторы состояний  $Z_n(z) = \bar{z}^n / \sqrt{n!} \equiv \langle z | n \rangle$ ,  $\bar{z} = z / \sqrt{\hbar}$ , образуют ортонормированный базис в пространстве Фока [6, 10, 12]:  $(Z_n, Z_m) = \delta_{nm}$ ,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n Z_n(z) \quad (1.14)$$

и

$$\|f\|^2 = (f, f) = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 = 1. \quad (1.15)$$

Это означает, что числа  $|c_n|^2$  задают некоторое дискретное распределение вероятности и  $c_n$  также могут рассматриваться и как динамические переменные, и как амплитуды вероятности. Из уравнения (1.12) имеем

$$Z_n(t) = e^{-i\omega nt} Z_n(0), \quad f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(t) Z_n(0), \quad c_n(t) = c_n e^{-i\omega nt} \quad (1.16)$$

(здесь  $Z_n(t) \equiv Z_n(z(t))$ ). Зависимость  $c_n$  от времени генерируется гамильтонианом

$$H = \omega \sum_{n=1}^{\infty} n \bar{c}_n c_n, \quad (1.17)$$

если  $\bar{c}_n, c_n$  рассматривать как комплексные канонические переменные со скобкой Пуассона:

$$\{f, g\} = i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial(f, g)}{\partial(\bar{c}_n, c_n)}, \quad (1.18)$$

тогда  $\dot{c}_n = \{c_n, H\} = -i\omega n c_n$ . Таким образом, эффективно это есть динамическая система с бесконечным числом степеней свободы (в интервале времени  $0 < t \ll t_r$ ).

Вопрос. Гамильтониан (1.17) зависит от счетного множества канонических переменных  $\bar{c}_n, c_n$ , хотя рассматривается система с одной степенью свободы; откуда берутся остальные степени свободы?

Ответ. Рассматривается не осциллятор сам по себе, а осциллятор в термостате. Более того, рассматривается его неравновесное состояние, задаваемое функцией  $f(z)$ , т.е. в этом случае состояние осциллятора характеризуется бесконечным числом переменных  $c_n$ . Фактически это «временные», эффективные степени свободы, существенные лишь в период, когда система находится в неравновесном квазистационарном состоянии. В процессе перехода к равновесному состоянию все они вымирают.

Несложно убедиться, что если состояние осциллятора описывается функцией  $f$ , то  $|(g, f)|^2$  есть вероятность нахождения осциллятора в «состоянии  $g$ ». Нормированную функцию  $g(z)$  можно взять в качестве элемента некоторого ортонормированного базиса. Раскладывая  $f(z)$  по элементам этого базиса, находим, что  $(g, f)$  можно отождествить с комплексным числом  $c_g$  (аналог  $c_n$ ), и тогда  $|c_g|^2$  есть интересующая нас вероятность.

В квантовой механике стохастическая по своей природе волновая функция удовлетворяет причинному уравнению Шредингера. Данная модель проясняет природу этого феномена. Рассмотрим неканоническое преобразование:  $(\bar{z}, z) \rightarrow (\varphi, r)$ ,  $z = r \exp(i\varphi)$ . Тогда

$$\{f, g\} = i \frac{\partial(f, g)}{\partial(\bar{z}, z)} = i \frac{\partial(f, g)}{\partial(\varphi, r)} \frac{\partial(\varphi, r)}{\partial(\bar{z}, z)} = -\frac{1}{2r} \frac{\partial(f, g)}{\partial(\varphi, r)}.$$

Теперь  $H = \omega r^2$ , и уравнения движения для  $\varphi, r$  выглядят так:

$$\dot{\varphi} = -\omega, \quad \dot{r} = 0 \tag{1.19}$$

(разумеется, они идентичны стандартному уравнению  $\dot{z} = -i\omega z$ ). Это означает, что в случае неравновесного распределения одна из канонических переменных ( $\varphi$ ) удовлетворяет классическому уравнению движения (1.12), тогда как другая не меняется со временем: будучи чисто стохастической, переменная  $r$  характеризуется распределением вероятности Гаусса  $\exp(-r^2/\hbar)$ . В выражении для энергии  $E_n = \hbar\omega(n + 1/2)$  первый член отвечает вкладу классического движения: взяв в (1.12)  $f = z^n$ , получим  $\omega_n = n\omega$ . Второй член в сумме есть результат влияния термостата; он одинаков для всех состояний. Энергия квантуется ( $\hbar\omega_n = n\hbar\omega$ ) благодаря классическому движению!

Главное отличие задач о классическом гармоническом осцилляторе и о неравновесном состоянии осциллятора в термостате заключается в следую-

щем. В первом случае  $H = \omega \bar{z}z$  и

$$\dot{f}(z) = -i\omega z \frac{d}{dz} f(z),$$

если  $f(z)$  есть произвольная функция (динамическая переменная). Во втором случае  $f(z)$  характеризует неравновесное распределение для осциллятора в термостате (неравновесное состояние), т. е. последний должен влиять на изменение  $f(z)$  со временем. Данный факт проявляется в том, что теперь  $f(z)$  оказывается вектором из пространства Фока и, как подчеркивалось выше, смысл  $\bar{z}, z$  в гамильтониане меняется радикально — теперь это операторы ( $z \leftrightarrow \hat{a}, \bar{z} \leftrightarrow \hat{a}^+, \hat{a}^+ f(z) \equiv \bar{z} f(z), \hat{a} f(z) \equiv \hbar d f(z)/d \bar{z}$ ). Классическое уравнение движения (1.12) можно записать в операторной форме:

$$i\hbar \dot{f} = \hat{H}_{\text{cl}} f, \quad \hat{H}_{\text{cl}} = \hbar\omega z \frac{d}{dz}.$$

Если  $f$  есть вектор гильбертова пространства, то в  $H$ , очевидно, нужно учесть некоммутативность  $\hat{a}^+, \hat{a}$  (или  $\hat{z}, \hat{\bar{z}}$ ). Формула (1.4) явно задает порядок следования операторов  $\hat{z}, \hat{\bar{z}}$  в гамильтониане, т. е. в классическом уравнении движения при переходе к описанию эволюции векторов состояния следует сделать замену

$$\hat{H}_{\text{cl}} \rightarrow \hat{H} = \frac{\hbar\omega}{2} (\hat{z}\hat{\bar{z}} + \hat{\bar{z}}\hat{z}) = \hbar\omega \left( \bar{z} \frac{d}{d\bar{z}} + \frac{1}{2} \right).$$

Вычисляя среднее от  $\hat{H}$  для различных состояний  $Z_n$ , еще раз убеждаемся, что первое слагаемое здесь отвечает вкладу классического движения ( $\hbar\omega n$ ), а второе — отражает влияние термостата (нулевые колебания  $\hbar\omega/2$ , в полном соответствии с (1.19)). Уравнение движения для случайной величины  $f(z)$  выглядит так:

$$i\hbar \dot{f}(z) = \hat{H} f(z).$$

Это и есть уравнение Шредингера для волновой функции осциллятора в пространстве Фока.

Рассмотрим вопрос о переходе к конфигурационному пространству: как от теории, сформулированной на комплексной плоскости  $z$ , перейти к теории на оси координат  $q$ ? Аналитические функции определяются своими значениями на границе, поэтому, казалось бы, с учетом аналитичности функций  $f(z)$  цель достигается переходом  $z \rightarrow q$ . Но этого делать нельзя. Дело в том, что определяющая меру экспонента  $e^{-\bar{z}z}$  не есть аналитическая функция. Поскольку функции на комплексной плоскости принадлежат гильбертову пространству, речь должна идти о гильбертовом пространстве функций  $\psi(q)$  на оси  $q$ . Собственные функции оператора  $\hat{H}$  известны — это функции Эрмита (если положить  $\omega = 1, \hbar = 1$ ):

$$\mathcal{H}_n(q) \equiv \langle n|q \rangle = (2^n n! \sqrt{\pi})^{-1/2} H_n(q) e^{-q^2/2},$$

$H_n(q)$  — полиномы Эрмита. Эти функции образуют ортонормированный базис. Введя обозначение  $Z_n(z) = \langle z|n\rangle$ , получаем ядро унитарного оператора  $U(z, q)$ , связывающего оба пространства:

$$U(z, q) = \langle z|q\rangle \equiv \sum_n \langle z|n\rangle \langle n|q\rangle = \sum_n Z_n(z) \mathcal{H}_n(q) = \\ = \pi^{-1/4} \exp\left(-\frac{z^2 + q^2}{2} + \sqrt{2}qz\right), \\ \langle q|\bar{z}\rangle = U(q, \bar{z}) = \overline{U(z, q)}$$

и

$$\int_{-\infty}^{\infty} dq U(z, q) \mathcal{H}_n(q) = Z_n(z), \quad \int d\mu(\bar{z}, z) U(q, \bar{z}) Z_n(z) = \mathcal{H}_n(q).$$

Очевидно,

$$\int d\mu(\bar{z}, z) U(q, \bar{z}) U(z, q') = \delta(q - q'), \quad \int_{-\infty}^{\infty} dq U(\bar{z}, q) U(q, z) = e^{\bar{z}z}.$$

Экспонента  $e^{\bar{z}z}$  есть ядро единичного оператора для скалярного произведения с мерой (1.2) (при  $\hbar = 1$ ) — «комплексная  $\delta$ -функция» (подробнее см. [5, 10]).

Итак, в рамках чисто классической теории получается описание с помощью амплитуд вероятности  $f(z)$  (квантовая механика), ибо выражение  $|f(z)|^2 \equiv p(x)$  может быть отождествлено с плотностью вероятности. Это верно для квазистационарных неравновесных состояний. Присутствуют все необходимые элементы квантовой механики: постоянная Планка  $\hbar$ , комплексные амплитуды вероятности  $f(z)$ , пространство Фока и уравнение Шредингера. Классические уравнения движения для осциллятора получают фактически из условия сохранения распределения Гиббса (они конкретизируются выбором матрицы  $\hat{J}$  в (1.9)).

**1.2. Детерминизм и хаос.** Заслуживает внимания еще один факт. Эргодические детерминированные динамические системы обладают статистическими свойствами. Но верно и обратное: хаос порождает распределение Гиббса (для осциллятора) и, следовательно, классическую гамильтонову динамику (см. п. 1.1).

Рассмотрим случайные перемещения частицы по оси  $x$ . Пусть  $F(x - x', t - t')$  есть плотность вероятности обнаружить частицу в точке  $x$  в момент времени  $t$ , если в момент  $t'$  она находилась в точке  $x'$ . Функция  $F$  удовлетворяет уравнению

$$F(x - y, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dx' F(x - x', t - t') F(x' - y, t')$$

(стационарный процесс в однородном пространстве). Пусть частица совершает последовательно  $n$  переходов, каждый за время  $\tau$ , т. е.  $x_1 = x(\tau) - x(0), \dots, x_n = x(n\tau) - x((n-1)\tau)$ . Тогда, если существуют пределы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} = p$$

и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(x_1 + \dots + x_n - np)^2}{n} = \sigma^2,$$

то для  $\xi = (x_1 + \dots + x_n - np)/\sigma\sqrt{n}$  при  $n \rightarrow \infty$  имеет место распределение с плотностью вероятности [16, с. 285]

$$p(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\xi^2/2}.$$

Данная предельная теорема обобщается на пространства произвольной конечной размерности.

Рассмотрим теперь случайные перемещения точки в фазовой плоскости  $(q, p)$ . Соответствующее предельное распределение дается функцией

$$\frac{1}{2\pi} e^{-(p^2+q^2)/2},$$

т. е. совпадает с распределением Гиббса для гармонического осциллятора (в надлежащих единицах). Но, как показано в п. 1.1, вариации канонических переменных, сохраняющие распределение Гиббса, подчиняются уравнениям Гамильтона.

Закljučаем: чисто стохастический процесс (случайные перемещения точки в фазовой плоскости) порождает распределение Гиббса, а квазиравновесные распределения с большим временем релаксации описываются классическими уравнениями Гамильтона. Очевидно, случайные перемещения точки в бесконечномерном ФП порождают распределение Гиббса для счетного множества невзаимодействующих осцилляторов:

$$p \sim \exp \left[ -\frac{1}{2} \sum (p_i^2 + q_i^2) \right]. \quad (1.20)$$

Итак, связь между строго детерминированной и хаотической динамиками не столь проста, как может показаться на первый взгляд: детерминированная динамика порождает хаос (см. эргодическую теорию), а хаотическая динамика порождает детерминированную гамильтонову механику (см. п. 1.1).

**1.3. Квантовая теория поля.** Неравновесные состояния возникают, в частности, при малых возмущениях цепочки взаимодействующих осцилляторов в термостате. Возбуждение одного осциллятора передается по цепочке. Это и есть упомянутое в начале раздела обстоятельство (внешнее условие), предопределяющее выбор последней из трех перечисленных возможностей.

Уравнение движения для малых возмущений такой цепочки (рис. 1), характеризующейся лагранжианом

Рис. 1

$$L = \frac{1}{2} \sum_j [\dot{q}_j^2 - \tilde{\gamma}(q_j - q_{j-1})^2 - m^2 q_j^2], \quad \dot{q} = \frac{dq}{dt} \quad (1.21)$$

(постоянная  $\tilde{\gamma} > 0$ ), в непрерывном пределе совпадает с уравнением Клейна–Фока–Гордона (КФГ)

$$(\square - m^2)\varphi = 0,$$

отвечающим лагранжиану

$$L = \frac{1}{2} \int dx (\dot{\varphi}^2 - \varphi'^2 - m^2 \varphi^2) \quad (1.22)$$

(здесь  $\varphi(x, t)$  есть предельное значение  $q_j/\sqrt{a}$ , когда расстояния между соседними осцилляторами  $a \rightarrow 0$ , а  $j \rightarrow \infty$  так, что  $aj \rightarrow x$ ,  $\tilde{\gamma}a^2 \rightarrow 1$  и  $q_j/\sqrt{a} \rightarrow \varphi(x, t)$ ;  $\dot{\varphi} = \partial\varphi/\partial t$ ,  $\varphi' = \partial\varphi/\partial x$ ). Роль комплексных амплитуд играют решения уравнения КФГ с положительной энергией  $\varphi_+ \sim e^{-iEt}$ ,  $E > 0$ , а плотность вероятности дается формулой  $p(x) \sim i(\varphi_+^* \dot{\varphi}_+ - \dot{\varphi}_+^* \varphi_+)$  [5]. В нерелятивистском пределе  $m \rightarrow \infty$  уравнение КФГ переходит в одномерное уравнение Шредингера для свободной частицы:  $\varphi_+ = e^{-imt}\psi$ ,  $i\psi = -\psi''/2m$ , причем  $p(x) \sim \psi^* \psi$ .

Оказывается, что построенная в [5] модель одновременно есть модель квантованного поля. Для дальнейшего существенны следующие обстоятельства. Принципиальную роль играет упорядоченность осцилляторов. Произвольная неупорядоченная система осцилляторов в термостате описывается в рамках статистической физики. Необходимость использования нового аппарата обнаруживается при переходе к *цепочке* взаимодействующих осцилляторов. В этом случае сведения о возбуждении системы заключены лишь в одной совокупности переменных, а именно:  $q_n(t)$  из  $q_n(t), p_n(t)$  (или  $\varphi_+(x, t)$  из  $\varphi_+(x, t), \pi_+(x, t)$ ); для одного осциллятора это  $z$  (или  $f(z)$ ) вместо  $z, \bar{z}$ . Тогда и приобретает физический смысл скалярное произведение (1.13). Информация о системе содержится в функции  $f(z)$ , а для вычисления вероятностей нужны и  $z$ , и  $\bar{z}$ , т. е. функции  $f(z)$  и  $\overline{f(z)}$ .

Пусть в распределении Гиббса  $e^{-\beta H}$  фигурирует гамильтониан

$$H = \frac{1}{2} \sum_n \left( \frac{p_n^2}{\mu} + \tilde{\gamma}(q_n - q_{n-1})^2 + \gamma q_n^2 \right). \quad (1.23)$$

В нормальных координатах  $u(k), p(k)$

$$\begin{aligned} q_n &= \int_{-\Delta}^{\Delta} dk u(k) \varphi_n^*(k), \\ p_n &= \int_{-\Delta}^{\Delta} dk p(k) \varphi_n(k), \\ \varphi_n(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\Delta}} \exp\left(\frac{i\pi n}{\Delta} k\right), \quad \Delta = \frac{\pi}{a}, \end{aligned} \quad (1.24)$$

где  $\int_{-\Delta}^{\Delta} dk \varphi_n^*(k) \varphi_{n'}(k) = \delta_{nn'}$ , гамильтониан записывается в виде

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \int_{-\Delta}^{\Delta} dk \left( \frac{p(k)p(-k)}{\mu} + \mu\omega_k^2 u(k)u(-k) \right) = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\Delta}^{\Delta} dk \omega_k (\tilde{a}^*(k)\tilde{a}(k) + \tilde{a}(k)\tilde{a}^*(k)), \end{aligned} \quad (1.25)$$

здесь  $\omega_k^2 = \gamma/\mu + 4(\tilde{\gamma}/\mu) \sin^2(\pi k/2\Delta)$ ,  $u(k) = (\tilde{a}^*(k) + \tilde{a}(-k))/\sqrt{2\mu\omega_k}$ ,  $p(k) = i(\tilde{a}^*(k) - \tilde{a}(-k))\sqrt{\mu\omega_k}/2$ . Имея в виду последующий переход к операторам, сохраняем «естественный» порядок следования  $\tilde{a}^*, \tilde{a}$  в (1.25). Переход от системы невзаимодействующих осцилляторов к цепочке с гамильтонианом (1.23), (1.25) можно рассматривать как результат большой деформации распределения. Но если теперь по аналогии с (1.1), (1.2) написать меру в фазовом пространстве

$$\prod_k d\tilde{a}_k^* \wedge d\tilde{a}_k \exp\left(-\beta \int dk \omega_k \tilde{a}_k^* \tilde{a}_k\right), \quad (1.26)$$

то порождаемое ею скалярное произведение (аналог (1.13)) будет отличаться от скалярного произведения в пространстве Фока с мерой

$$\prod_k da_k^* \wedge da_k \exp\left(-\beta\omega \int dk a_k^* a_k\right). \quad (1.27)$$

Замена переменных в интеграле (1.26)  $\tilde{a}_k = a_k \sqrt{\omega/\omega_k}$  дает правильную меру, но при этом, казалось бы, меняется и гамильтониан, т. е. уравнения движения.

В действительности именно здесь в полной мере сказывается сделанное выше замечание о разной роли комплексных канонических переменных в интеграле (1.13) и в гамильтониане. В выражении для скалярного произведения

$$(\tilde{\Phi}_1, \tilde{\Phi}_2) = \int \prod_k d\tilde{a}_k^* \wedge d\tilde{a}_k \exp\left(-\beta \int dk \omega_k \tilde{a}_k^* \tilde{a}_k\right) \overline{\tilde{\Phi}_1[\tilde{a}]} \tilde{\Phi}_2[\tilde{a}] \quad (1.28)$$

можно произвольно менять переменные интегрирования, например, переходя к новым переменным  $a_k = \tilde{a}_k \sqrt{\lambda_k}$ ,  $\lambda_k = \omega_k/\omega$ . Скалярное произведение для функционалов  $\Phi_1, \Phi_2$  приобретает стандартный вид:

$$(\Phi_1, \Phi_2) = \int \prod_k da_k^* \wedge da_k \exp\left(-\int dk a_k^* a_k / \hbar\right) \overline{\Phi_1[a]} \Phi_2[a], \quad (1.29)$$

где  $\Phi[a] = \tilde{\Phi}[\lambda_k^{-1/2} a] = \tilde{\Phi}[\tilde{a}]$ . Но уравнения движения для функционала  $\Phi[a]$  не меняются: его эволюция во времени по-прежнему определяется гамильтонианом (1.25). В пределе при  $a \rightarrow 0$ ,  $\Delta \rightarrow \infty$  формула (1.29) задает скалярное произведение в пространстве Фока одномерной квантовой теории поля. Каждый осциллятор в цепочке на рис. 1 квантован (см. [5]), поэтому не удивительно, что такая цепочка моделирует одномерную квантовую теорию поля. Еще раз подчеркнем, что появление описания с помощью амплитуд вероятности связано с описанием распространения возмущений, т.е. отклонений системы от равновесного состояния.

Резюмируем: одномерная квантовая теория скалярного поля моделируется цепочкой классических осцилляторов в термостате при условии, что мера Гиббса отождествляется с мерой объема фазового пространства, а цепочка находится в неравновесном состоянии.

Модель легко обобщается на многомерный случай. Например, если осцилляторы расположены в узлах  $D$ -мерной решетки,  $D > 1$ , то в пределе при  $a \rightarrow 0$  получается квантовая теория скалярного поля в пространстве размерности  $D$ . Весьма существенно то, что рассмотренная структура моделирует физическое 1D-пространство: пространство образовано механической системой, характеризуемой лагранжианом. Основное состояние цепочки есть вакуум («пустое пространство»), одночастичные возбуждения поля — частицы, описываемые квантовой механикой. Для получения более реалистической модели следует перейти к суперструнам (чтобы включить фермионы), поместить их в многомерное пространство и построить из них многомерную сеть (см. разд. 4).

**1.4. Обобщение скобок Пуассона.** Уравнение (1.12) дает приближенное описание эволюции квазистационарного состояния. Точное уравнение должно описывать кинетику, переход неравновесного состояния в равновесное. Простейший способ добиться этого — ввести в уравнение движения для



осциллятора нечто вроде сил трения:

$$\ddot{q} + \omega^2 q = 0 \longrightarrow \ddot{q} + 2\alpha\dot{q} + \omega^2 q = 0, \quad \alpha > 0. \quad (1.30)$$

Очевидно,  $t_r \sim 1/\alpha$ . Можно ввести трение и в гамильтоновы уравнения движения (1.10) подстановкой  $\dot{x} \rightarrow \dot{x} + \alpha x$ . Однако все это выглядит как рецепт *ad hoc*. Описание неравновесных состояний есть раздел классической физики, и в рамках гамильтоновой механики должен существовать более общий подход к данной проблеме. Итак, требуется описать эволюцию неравновесного распределения.

В гамильтоновой механике осцилляторов имеется два фундаментальных тензора. Первый — антисимметричный, он определяет симплектическое фазовое пространство и скобки Пуассона:

$$\omega_2(q, p) = \sum_{k=1}^n \omega_k^{-1}(q, p) dq_k \wedge dp_k, \quad \{f, g\} = \sum_{k=1}^n \omega_k(q, p) \frac{\partial(f, g)}{\partial(q_k, p_k)}. \quad (1.31)$$

Второй — симметричный; в случае  $n$  осцилляторов он определяет их гамильтониан

$$H(x) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{ij} h_{ij}^k x_i^k x_j^k, \quad i, j = 1, 2. \quad (1.32)$$

Для одного осциллятора антисимметричная и симметричная матрицы есть, соответственно,  $\hat{J}, \hat{J}_{ij} = \epsilon_{ij} = -\epsilon_{ji}, \epsilon_{12} = 1$  и  $h_{ij} = \omega \delta_{ij}$ . Описание кинетики требует учета вариации  $\delta x_{\parallel}$  в равенстве (1.7). Эти вариации «параллельны»  $\nabla H$ , и следующее обобщение скобок Пуассона выглядит почти очевидным:

$$\{f, g\} \rightarrow \{f, g\}_{\alpha} \stackrel{\text{def}}{=} \{f, g\}_{-} + \{f, g\}_{+}, \quad (1.33)$$

где  $\{f, g\}_{-} \equiv \{f, g\}$ , а

$$\{f, g\}_{+} = -\alpha \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \sum_{ij} h_{ij}^k \nabla_i^k f \nabla_j^k g, \quad h^{il} h_{lj} = \delta_j^i. \quad (1.34)$$

Второй член в (1.33) учитывает вариации, меняющие распределение Гиббса. Уравнения движения выглядят так:

$$\dot{f} = \{f, H\}_{-} + \{f, H\}_{+}, \quad (1.35)$$

и если  $k = 1$ , то

$$\delta x_{\parallel}^i = -\alpha h^{ij} \nabla_j H \delta t. \quad (1.36)$$

Для гармонического осциллятора имеем  $h^{ij} = \frac{1}{\omega} \delta^{ij}$ . Уравнения движения

$$\dot{q} = \omega p - \alpha q, \quad \dot{p} = -\omega q - \alpha p$$

теперь могут быть записаны в виде

$$Dq = \omega p, \quad Dp = -\omega q, \quad D \equiv \partial_t + \alpha. \quad (1.37)$$

Применяя оператор  $D$  к первому уравнению (1.37), получаем

$$\ddot{q} + 2\alpha\dot{q} + (\omega^2 + \alpha^2)q = 0, \quad \alpha \ll \omega. \quad (1.38)$$

В результате  $\omega^2$  получает добавку  $\alpha^2$ . Итак, для гармонического осциллятора эффект трения учитывается подстановкой в уравнениях движения:

$$\partial_t \rightarrow D = \partial_t + \alpha. \quad (1.39)$$

Отметим, что: 1) теперь принцип наименьшего действия неприменим, ибо речь идет об описании кинетики, 2) значение  $\alpha$  в (1.34), (1.38) положительно; скобка (1.33) с  $\alpha < 0$  описывает противоположный процесс — развитие неравновесного состояния. Появление  $\alpha$  в (1.38) и изменение частоты имеют далеко идущие последствия в гравитации и космологии. Замена  $\omega^2 \rightarrow \omega^2 + \alpha^2$  означает появление массы у гравитона, т. е. космологического члена  $\Lambda = \alpha^2/2$  в гравитационных уравнениях (см. разд. 6). Слагаемое  $2\alpha\dot{q}$  в (1.38) («трение») ведет к затуханию всех возбуждений системы.

## 2. СТРУНЫ И БРАНЫ

**2.1. Струны.** Струна как одномерный квантованный объект конечной длины (по существу, это есть квантовая теория поля на отрезке) получается в результате перехода от оси к отрезку (см. рис. 2, точки изображают закрепленные концы струны). В простейшем случае эту систему можно рассматривать как струну в пространстве  $M^2 \times R^1$  ( $x, t$  и поперечные возмущения  $\varphi$ ). Нетрудно написать лагранжиан бозонной струны и в пространстве Минковского  $M^d$ . В разд. 1 частица элементарной системы полагалась нерелятивистской; лишь в пределе при  $a \rightarrow 0$  лагранжиан (1.21) приобретал релятивистскую инвариантность. В принципе, однако, можно с самого начала считать элементарную систему «релятивистской» в том смысле, что вместо  $q_i$  берется  $q_i^\mu \rightarrow z^\mu(\sigma)$  — вектор в  $M^d$  (с метрикой  $\eta_{\mu\nu}(+ - \dots -)$ ,  $\mu = 0, 1, \dots, d - 1$ ; ср. модель «релятивистского осциллятора» в [17]). Закон взаимодействия соседей и лагранжиан можно выбрать так, чтобы в непрерывном пределе получался, например, лагранжиан Намбу–Гото:



Рис. 2

$$S_{\text{NG}} = \int d^2u \mathcal{L}_{\text{NG}} = -c \int d^2u \sqrt{(\dot{z}z')^2 - \dot{z}^2 z'^2}, \quad c = \text{const.} \quad (2.1)$$

Здесь  $z^\mu = z^\mu(u) = z^\mu(\tau, \sigma)$  ( $u^1 = \tau, u^2 = \sigma, \dot{z} = \partial z / \partial \tau, z' = \partial z / \partial \sigma$ ). Действие (2.1) и действие Полякова

$$S_P = \int d^2 u \mathcal{L}_P = -\frac{c}{2} \int d^2 u \sqrt{-g} \eta_{\mu\nu} g^{ij} z_{,i}^\mu z_{,j}^\nu, \quad (2.2)$$

$$z_{,i} = \partial z / \partial u^i, \quad i = 1, 2, \quad g = \det g_{ij},$$

дают одни и те же уравнения движения для  $z^\mu$ , если в (2.2) варьировать по  $g_{ij}$  и  $z^\mu$  (варьирование по  $g_{ij}$  дает связи). Но действие (2.2) описывает цепочку «релятивистских осцилляторов» в пространстве  $M^d$ , т. е. мы приходим к задаче из разд. 1. Тем самым проясняется физическое содержание квантованной струны: теперь каждая степень свободы  $z^\mu(\tau, \sigma)$  в некоторой точке  $\sigma$  описывается квантово-механически. Разумеется, при этом следует выявить физические и нефизические степени свободы (учесть связи) [17].

**2.2. Браны.** Аналогичные соображения справедливы и для  $p$ -бран. Действие

$$S = -c \int d^m u \sqrt{|g|}, \quad g_{ij} = \eta_{\mu\nu} g^{ij} z_{,i}^\mu z_{,j}^\nu, \quad (2.3)$$

$$i, j = 1, 2, \dots, m, \quad p = m - 1,$$

эквивалентно билинейному по скоростям действию

$$\tilde{S} = -\frac{c}{2} \int d^m u \sqrt{|g|} [\eta_{\mu\nu} g^{ij} z_{,i}^\mu z_{,j}^\nu + (2 - m)]. \quad (2.4)$$

Покажем, что переход от действия « $S_{\text{NG}}$ » к действию « $S_P$ » можно трактовать как вариант перехода к нерелятивистскому пределу в пространстве  $(n + l)$ -измерений ( $n = d$  [18]).

В дополнение к  $X^\mu(u), \mu = 1, \dots, n$ , введем  $\xi^a(u), a = n + 1, \dots, n + l$ , т. е.  $p$ -брана движется в  $(n + l)$ -мерном пространстве. Индуцированная метрика и действие таковы:

$$g_{ij}^* = \xi_{,i}^a \xi_{,j}^a + \eta_{\mu\nu} X_{,i}^\mu X_{,j}^\nu \equiv \tilde{g}_{ij} + g_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, m, \quad (2.5)$$

$$S^* = -c \int d^m u \sqrt{(-1)^p g^*}, \quad g^* = \det g_{ij}^*. \quad (2.6)$$

Разложим  $g^*$  по степеням  $g_{ij}$ :

$$g^* = \tilde{g} + \frac{\partial g^*}{\partial \tilde{g}_{ij}} g_{ij} + \dots = \tilde{g} (1 + \tilde{g}^{ij} g_{ij} + \dots) \quad (dg = g g^{ij} dg_{ij}). \quad (2.7)$$

Тогда имеем приближенное выражение для  $S^*$ :

$$S^* \approx -c \int d^m u \sqrt{(-1)^p \tilde{g}} \left( 1 + \frac{1}{2} \tilde{g}^{ij}(u) \eta_{\mu\nu} X_{,i}^\mu X_{,j}^\nu \right) \equiv \tilde{S}. \quad (2.8)$$

Варьируя (2.8) по  $\tilde{g}^{ij}$  и  $X^\mu$ , находим

$$\frac{\delta \tilde{S}}{\delta \tilde{g}^{ij}} = \frac{c\sqrt{(-1)^p \tilde{g}}}{2} \left[ \tilde{g}_{ij} \left( 1 + \frac{1}{2} \tilde{g}^{kl} \eta_{\mu\nu} X_{,k}^\mu X_{,l}^\nu \right) - \eta_{\mu\nu} X_{,i}^\mu X_{,j}^\nu \right] = 0, \quad (2.9)$$

$$\frac{\delta \tilde{S}}{\delta X^\mu} = \frac{c}{2} \frac{\partial}{\partial u^i} \left( \sqrt{(-1)^p \tilde{g}} \tilde{g}^{ij} \frac{\partial}{\partial u^j} X_\mu \right) = 0. \quad (2.10)$$

Ищем решения уравнений (2.9) в виде

$$\tilde{g}_{ij} = f(u) \eta_{\mu\nu} X_{,i}^\mu X_{,j}^\nu,$$

где  $f(u)$  — неизвестная функция. Подставляя это выражение в (2.9), находим

$$\tilde{g}_{ij} \left( 1 + \frac{1}{2} \tilde{g}^{kl} f^{-1} \tilde{g}_{kl} \right) - f^{-1} \tilde{g}_{ij} = 0,$$

т. е.  $f^{-1} = 1 + m/(2f)$  и  $f = (2 - m)/2$ . Таким образом,

$$\tilde{g}_{ij} = \frac{2 - m}{2} g_{ij} \quad (2.11)$$

и уравнения (2.10) превращаются в уравнения движения  $p$ -браны, вытекающие из действия (2.3). Подстановка (2.11) в (2.8) дает

$$\begin{aligned} \tilde{S}|_{\tilde{g}_{ij}=fg_{ij}} &= -\frac{c}{2} \left( \frac{2}{2-m} \right)^{(2-m)/2} \times \\ &\times \int d^m u \sqrt{(-1)^p g} [g^{ij} \eta_{\mu\nu} X_{,i}^\mu X_{,j}^\nu + (2-m)], \end{aligned} \quad (2.12)$$

что, за исключением не влияющего на уравнения движения множителя перед интегралом, совпадает с действием (2.4) (включая слагаемое  $(2-m)$ ). В этом случае постоянная  $c$  приобретает зависимость от  $m$ :

$$c \rightarrow c \left( \frac{2}{2-m} \right)^{(2-m)/2}.$$

Из условия вещественности лагранжиана и правильного знака при нем ясно, что при  $m \geq 2$  такие браны существуют лишь в пространствах с размерностями

$$m = 4r + 2, \quad r = 0, 1, \dots,$$

т. е. при  $m = 2, 6, 10, \dots, 26, \dots$ ,  $p = 1, 5, 9, \dots, 25, \dots$

Разумеется, при желании переход к  $(n+l)$ -мерному пространству может рассматриваться как эвристический прием, хотя за ним, возможно, стоит нечто большее. В разд. 4 отмечается, что  $p$ -браны,  $p \geq 2$ , допустимо трактовать

не как фундаментальные, а как сложные составные объекты, построенные из струн и  $D1$ -бран. Тогда можно ограничиться действием (2.2). Подробнее о представлении струн и бран дискретными множествами релятивистских частиц см. в [19, 20].

### 3. МОДЕЛЬ СУПЕРСИММЕТРИЧНОЙ СТРУНЫ

**3.1. Суперсимметрия.** Суперсимметрия — одно из важнейших понятий, появившихся в физике за последние три с половиной десятилетия [21–24]. Формально она сводится к введению наряду с обычными координатами  $x^\mu$ ,  $\mu = 0, 1, 2, 3$ , также и грассмановых (антикоммутирующих) переменных  $\theta_\alpha$ ,  $[\theta_\alpha, \theta_\beta]_+ = 0$ ,  $\alpha = 1, \dots, 4$ . При этом к генераторам группы Пуанкаре  $P_\mu, M_{\mu\nu}$  добавляются генераторы  $Q_\alpha$  инфинитезимальных сдвигов:  $x^\mu \rightarrow x^\mu - i\bar{\varepsilon}\gamma^\mu\theta$ ,  $\theta_\alpha \rightarrow \theta_\alpha + \varepsilon_\alpha$ , где  $\gamma^\mu$  — матрицы Дирака,  $\varepsilon_\alpha$  — антикоммутирующие параметры преобразования,  $\bar{\varepsilon} = \varepsilon C$ ,  $C$  — некоторая антисимметричная матрица. Характерной особенностью новой алгебры является пропорциональность антикоммутатора  $Q_\alpha, Q_\beta$  вектору энергии-импульса:

$$[Q_\alpha, Q_\beta]_+ = 2(\gamma^\mu C)_{\alpha\beta} P_\mu. \quad (3.1)$$

Поля теперь зависят от  $x$  и  $\theta$ . Природа пространства с координатами  $\{x, \theta\}$  и его суперсимметрии остается загадкой. Покажем, как в рамках подхода [5], проливающего свет на природу квантового описания, можно построить модель одномерного суперсимметричного пространства.

*Спиноры* вводятся стандартным образом. Рассмотрим двумерное псевдоевклидово пространство с группой симметрии  $SO(1, 1)$ . Определим  $x_\pm = t \pm x$ . Тогда при поворотах  $x'_\pm = \exp(\mp\vartheta)x_\pm$ . Для дальнейшего важны следующие обстоятельства:

- 1) все неприводимые представления группы  $SO(1, 1)$  одномерны;
- 2)  $x_\pm^{1/2}$  ( $\equiv u_\pm$ ) преобразуются как спиноры:  $u'_\pm = \exp(\mp\vartheta/2)u_\pm$ ;
- 3) «тензорные» представления даются  $x_\pm^p$ , а «спин-тензорные» —  $x_\pm^{p+1/2}$ , где  $p \in \mathbb{N}$ ;
- 4) функции от  $x_\pm$  есть решения уравнения

$$(\partial_t^2 - \partial_x^2)f(x_\pm) = \partial_+\partial_-f(x_\pm) = 0. \quad (3.2)$$

Имеются два независимых решения  $f_1(x_+)$  и  $f_2(x_-)$ , описывающих движение волн налево ( $L$ ) и направо ( $R$ ). Пусть они отвечают возмущениям цепочки элементарных систем, описанной в [5] и в п. 1.3 (рис. 1). В непрерывном пределе лагранжиан такой системы дается интегралом (1.22) ( $m = 0$ ). Напомним, что канонические переменные одновременно являются амплитудами вероятности.

Определим операторы  $\sigma^\pm$  для спиноров:  $\sigma^- u_+ = u_-$ ,  $\sigma^+ u_- = u_+$ ,  $\sigma^+ u_+ = \sigma^- u_- = 0$  (т. е.  $\sigma^- L = R$ ,  $\sigma^+ R = L$ ). Очевидно,  $(\sigma^\pm)^2 = 0$  и

$$\sigma^+ \sigma^- + \sigma^- \sigma^+ = 1, \tag{3.3}$$

т. е. эти операторы можно отождествить с операторами рождения и уничтожения для фермионного (грассманова) осциллятора.

Переходя от неприводимых спиноров  $u_\pm$  к приводимым:  $u_1 = (u_- + u_+)/2$ ,  $u_2 = (u_- - u_+)/2$ , и вводя двухкомпонентный спинор  $u = (u_1, u_2)$ , определяем матрицы Дирака:  $\gamma_1 = \sigma^- - \sigma^+ = -i\sigma_2$ ,  $\gamma_0 = (\sigma^- + \sigma^+)\gamma_1 = \sigma_1\gamma_1 = \sigma_3$  ( $\sigma_{1,2,3}$  — матрицы Паули). Итак,  $\bar{u}\gamma_1 u \equiv u\gamma_0\gamma_1 u = -2u_1u_2 = -(u_-^2 - u_+^2)/2 = x$ ,  $\bar{u}\gamma_0 u = u_1^2 + u_2^2 = (u_-^2 + u_+^2)/2 = t$ , т. е.  $\bar{u}\gamma_a u$ ,  $a = 0, 1$ , есть вектор. Спинор  $u$  удовлетворяет уравнению Дирака

$$\gamma_a \partial_a u = 0, \tag{3.4}$$

которое получается варьированием действия

$$S = \int dt dx \bar{u} i \gamma_a \partial_a u. \tag{3.5}$$

Отметим, впрочем, что этому уравнению удовлетворяет и «спинор», построенный аналогичным образом из любых степеней  $u_+^k$ ,  $u_-^k$ .

*Фермионы* моделируются следующим образом. Замкнем цепочку, изображенную на рис. 2, в кольцо достаточно малого радиуса  $R$  (пусть  $R \sim l_P$ ; при этом число  $N_R$  образующих ее осцилляторов по-прежнему велико,  $N_R \gg 1$ ; на рис. 3, *a* изображена система колец). Кольцо — упорядоченная система осцилляторов в термостате, поэтому движение по нему описывается квантовой механикой (в интервале времени  $0 < t \ll t_r$ ). Группа симметрии плоскости кольца  $(y_1, y_2)$  есть  $SO(2)$ . Переходя к комплексным переменным  $\zeta = y_1 + iy_2 = \rho e^{i\phi}$ , находим закон преобразования  $\zeta$  при поворотах:  $\zeta' = e^{i\alpha}\zeta$ ; можно ввести «тензоры»  $T_n = \zeta^n$ ,  $T'_n = (e^{i\alpha})^n T_n$ ,  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , и «спиноры»  $v_\pm = \zeta^{\pm 1/2}$ ,  $v'_\pm = e^{\pm i\alpha/2} v_\pm$ . Все неприводимые представления группы  $SO(2)$  одномерны.

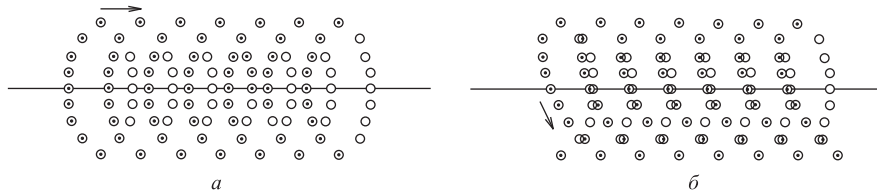


Рис. 3

Импульс  $\mathbf{p}$  теперь есть двумерный вектор в плоскости кольца. В случае уравнения КФГ с массой  $m = 0$  связь энергии с импульсом дается равенством  $E^2 = \mathbf{p}^2 c_R^2$ , где  $c_R$  — скорость распространения возмущения по цепочке. В квантовой теории это равенство записывается в виде  $\hat{H}^2/c_R^2 = -\hbar^2 \Delta$ ,  $\Delta$  — двумерный оператор Лапласа. Описание движения по кольцу сводится к задаче о квантовании системы со связями второго рода (связь  $y_1^2 + y_2^2 = R^2$ ). В полярных координатах имеем

$$-\hbar^2 \Delta = \hat{P}_r^2 + \left( \hat{P}_\phi^2 - \frac{\hbar^2}{4} \right) \frac{1}{R^2}, \quad (3.6)$$

где  $\hat{P}_r, \hat{P}_\phi$  — операторы импульсов радиального  $\hat{P}_r = -i\hbar r^{-1/2}(\partial/\partial r)r^{1/2}$  и углового  $\hat{P}_\phi = -i\hbar \partial/\partial \phi$  движений. Физические состояния  $\psi_{\text{ph}}$  подчиняются условию  $\hat{P}_r \psi_{\text{ph}} = 0$  (отсутствие радиального движения, см. приложение). Рассмотрим сначала нерелятивистский случай ( $\hat{H} = -\hbar^2 \Delta/2$ ).

Важнейшие особенности движения волны по кольцу радиуса  $R$  таковы:

- 1) наличие отрицательного «квантового потенциала»  $V_q = -\hbar^2/8R^2 < 0$  [25, 26];
- 2) наличие двух (вырожденных) состояний движения на кольце: «правого» ( $R$ ) и «левого» ( $L$ );
- 3) дискретный спектр импульса  $\hat{P} \equiv R^{-1} \hat{P}_\phi$ :  $\hat{P} \psi_n = p_n \psi_n$ ,  $p_n = n\hbar/R$ ;
- 4) большие интервалы между уровнями энергии для малых  $R$  ( $E_n \sim (n\hbar/R)^2$ ).

Кольцо моделирует основные черты «однофермионной» системы: а) отрицательная энергия низшего состояния (первопричина появления «подвала Дирака»); б) два состояния «поляризации» ( $R, L$ ); в) появление грассмановых переменных (принцип Паули).

Поясним последний пункт на примере осциллятора. Операторы рождения и уничтожения для него представляются матрицами:

$$\hat{a}^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \sqrt{1} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \quad \hat{a} = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}. \quad (3.7)$$

Если интервал между уровнями энергии осциллятора велик или вероятность возбуждения высших уровней мала, то при низких энергиях помимо основного можно ограничиться учетом лишь первого возбужденного состояния. Тогда вместо матриц (3.7) достаточно ограничиться матрицами  $2 \times 2$ , стоящими в их левых верхних углах:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \equiv \hat{f}^+, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv \hat{f}, \quad \hat{a} \hat{a}^+ - \hat{a}^+ \hat{a} = 1, \quad \hat{f}^+ \hat{f} + \hat{f} \hat{f}^+ = \hbar \quad (3.8)$$

(в антикоммутиратора введена зависимость от постоянной Планка  $\hbar$ ). Операторы  $\hat{a}, \hat{a}^+$  получаются из комплексных канонических переменных  $z = (q + ip)/\sqrt{2}$  и  $\bar{z} = (q - ip)/\sqrt{2}$  со скобкой Пуассона  $\{z, \bar{z}\} = -i$  в процессе «квантования»:  $z \rightarrow \hat{z}, [\hat{z}, \hat{z}^+] = i\hbar\{z, \bar{z}\} = \hbar$ . Переходя в антикоммутираторе (3.8) к пределу  $\hbar \rightarrow 0$ , получаем «классические» фермионные степени свободы  $\hat{f}^+ \rightarrow \bar{\theta}, \hat{f} \rightarrow \theta, \bar{\theta}\theta + \theta\bar{\theta} = 0$ . Теперь каноническими переменными будут образующие алгебры Грассмана.

Считается, что теория обладает суперсимметрией, если гамильтониан инвариантен относительно замены  $\hat{a} \leftrightarrow \hat{f}, \hat{a}^+ \leftrightarrow \hat{f}^+$ , точнее, если он коммутирует с операторами суперсимметричных преобразований  $\hat{a}\hat{f}^+, \hat{a}^+\hat{f}$ . Этому условию удовлетворяет гамильтониан

$$\hat{H} = \omega(\hat{a}^+\hat{a} + \hat{f}^+\hat{f}).$$

**3.2. Суперструна.** Рассмотрим цепочку колец (рис. 3, а). Допустим, что возбуждения могут передаваться от кольца к кольцу. В качестве конкретного примера такой структуры возьмем спираль, образованную из колец (рис. 3, б). Возможны два типа возбуждений: 1) возбуждения, перемещающиеся по спирали от осциллятора к осцилятору, 2) поперечные возбуждения спирали как целого, перемещающиеся от кольца к кольцу (колебания центров колец в их плоскости). Спираль может служить моделью суперструны, ибо допускает два типа движений: фермионные (круговые движения по кольцам) и бозонные (колебания центров колец).

Чтобы убедиться в этом, обратимся к релятивистскому движению по спирали. В цилиндрических координатах  $r, \phi, z$  переменные разделяются. Движение по спирали сводится к перемещению возмущения по окружности и смещению вдоль оси  $z$ , поэтому полностью применим анализ движения по кольцу из предыдущего пункта. На физических векторах состояний ( $\hat{P}_r\psi_{ph} = 0$ ) имеем

$$\hat{H}^2 = c_R^2 \left( \hat{P}^2 - \frac{\hbar^2}{4R^2} \right) = c_R \left( \hat{P} - \frac{\hbar}{2R} \right) c_R \left( \hat{P} + \frac{\hbar}{2R} \right) \equiv \hat{H}_+ \hat{H}_-. \quad (3.9)$$

Собственный вектор оператора  $\hat{P}$  с нулевым собственным значением ( $\hat{P}\psi_0 = 0$ ) отвечает отрицательному значению квадрата энергии  $\hat{H}^2$ . Данный факт естественно толковать как указание на неустойчивость невозбужденного кольца. Поэтому допустимы лишь движения с  $p \geq \hbar/2R$ . В случае одного кольца состояние с нулевой энергией невозможно (необходим импульс  $p = \hbar/2R$ ); такое состояние возможно лишь, если взять спираль из двух витков, соединив концы спирали (сдвоенные кольца, рис. 4).

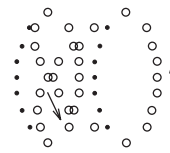


Рис. 4



Спектры операторов импульса  $\hat{P}^\pm$  движения по кольцу таковы:

$$p_n^\pm = \pm n \frac{\hbar}{R}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.10)$$

Из уравнения  $(\hat{H}^2 - \mathbf{p}^2 c_R^2)\psi = 0$  вытекает возможность состояний с энергиями  $\pm\sqrt{E^2}$ . Выбираем в качестве оператора энергии

$$\hat{H}_+ = \left( \hat{P}^+ - \frac{\hbar}{2R} \right) c_R. \quad (3.11)$$

Из (3.10), (3.11) находим расстояния между уровнями энергии кругового движения:  $\Delta\mathcal{E}_n = c_R \hbar / R$ . Если длина спирали равна  $L$  (т.е.  $0 \leq z \leq L$ ), то характерный спектр энергии линейного движения стандартен:  $E_n = c_H \hbar n / L$ , где  $c_H$  — скорость перемещения возмущения вдоль спирали, и  $\Delta E_n \equiv \hbar \Omega_H = c_H \hbar / L$ . Отсюда находим

$$\frac{\Delta\mathcal{E}_n}{\Delta E_n} \equiv \frac{\Omega}{\Omega_H} = \frac{c_R}{c_H} \frac{L}{R} \gg 1. \quad (3.12)$$

Действительно,  $c_H < c_R$ , поскольку  $c_H$  связана с колебаниями относительно больших масс (порядка массы кольца), и  $\Omega / \Omega_H \gg 1$ , если  $L \gg R$ .

Объединение  $N_H$  двоянных колец в спираль ведет к появлению  $(N_H + 1)$ -уровней энергии в интервале  $[-\hbar c_R / 2R, 0]$ . При  $N_H \rightarrow \infty$  расстояния между уровнями стремятся к нулю. Если все пары колец находятся в первом возбужденном состоянии (т.е. если полная энергия спирали равна нулю), то это отвечает полностью заполненному «подвалу», когда все  $(N_H + 1)$ -уровней спирали возбуждены. Возбуждение следующих уровней двоянных колец отвечает фермионным возбуждениям с положительной энергией. Следует ожидать, что при достаточной большой энергии струна может разрушиться.

Из (3.11) следует:

1) угловой момент движения  $(\mathbf{y} \times \mathbf{p}, |\mathbf{y} \times \mathbf{p}| = pR)$ , отвечающего нулевой энергии ( $p = \hbar / 2R$ ), равен  $\hbar / 2$  («спин»  $1/2$ ); соответствующий собственный вектор  $\exp(is / 2R)$ ,  $s = R\phi$  ( $\hat{P} = \hbar d / ds$ ), преобразуется как спинор  $\zeta^{1/2}$ ;

2) спектр оператора  $\hat{P}^+ c_R$  аналогичен спектру осциллятора:  $p_n^+ c_R = n \hbar \Omega$ ,  $\Omega = c_R / R$ , т.е. можно ввести формализм повышающих и понижающих операторов  $\hat{a}^+, \hat{a}$  (3.7), таких, что  $\hat{P}^+ = \hbar \Omega \hat{a}^+ \hat{a}$ ;

3) учитывая (3.12) и переходя согласно (3.8) к операторам  $\hat{f}^+, \hat{f}$ :  $\hat{a}^+ \rightarrow \hat{f}^+$ ,  $\hat{a} \rightarrow \hat{f}$ , получаем следующее представление для оператора энергии  $\hat{H}_+$ :

$$\hat{H}_+ = \hbar \Omega \left( \hat{a}^+ \hat{a} - \frac{1}{2} \right) \rightarrow \Omega \left( \hat{f}^+ \hat{f} - \frac{1}{2} \right) = \frac{\Omega}{2} (\hat{f}^+ \hat{f} - \hat{f} \hat{f}^+). \quad (3.13)$$

Оператор (3.13) есть стандартный оператор энергии фермионной степени свободы. Учитывая, что  $\hat{H}_+$  есть нулевая компонента 2-вектора и что оператор

$\hat{H}_+$  билинеен в  $\hat{f}^+, \hat{f}$ , заключаем: осцилляторные переменные  $\hat{f}^+, \hat{f}$  должны преобразовываться как спиноры. Этот же результат можно получить другим путем. Спинорные возбуждения кольца описываются лагранжианом (3.5) и гамильтонианом в виде суммы членов типа (3.13). Так как кольцо находится в термостате, гамильтониан должен быть оператором. Из условия неотрицательности энергии вытекает антикоммутируемость  $\hat{f}, \hat{f}^+$ . Весьма существен и тот факт, что характер спирали (левый или правый винт) предопределяет левую или правую «поляризацию» возбуждений, т. е. имеет место спонтанное нарушение киральной симметрии.

Относительно динамики спиралей см. также [27].

Модель суперструны Рамона–Неве–Шварца получается, если предположить, что цепочка колец, изображенная на рис. 3, а, находится в псевдоевклидовом пространстве размерности  $d$  с координатами  $X^\mu$ . Указанным выше типам возбуждений, распространяющихся по цепочке, сопоставим переменные:  $S_\pm^\mu$  (круговые движения, которые передаются от кольца к кольцу спирали и описываются антикоммутирующими переменными) и  $X^\mu$  (возбуждения, также перемещающиеся вдоль спирали, но описывающие колебания центров колец).

Вводя инвариантный параметр  $\tau$  («время») и обозначая предел  $\Delta Ln$  ( $\Delta L \rightarrow 0, n \rightarrow \infty, \Delta L$  — расстояние между кольцами) через  $\sigma$ , имеем два типа возбуждений:

$$X^\mu(\tau \pm \sigma) \quad \text{и} \quad S_\pm^\mu(\tau \pm \sigma).$$

Закрученная в спираль цепочка колец, изображенная на рис. 3, б, моделирует суперструну Рамона–Неве–Шварца. Действительно, свободные бозонное поле  $X^\mu$  и фермионное (антикоммутирующее) векторное поле  $S_\alpha^\mu$  описываются согласно (3.2), (3.4) суперсимметричным лагранжианом [22]

$$\mathcal{L} = \int d\tau d\sigma \left( -\frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma_+} \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma_-} + \bar{S}^\mu i \gamma_a \partial_a S^\mu \right), \quad \sigma_\pm = \tau \pm \sigma, \quad a = 0, 1. \quad (3.14)$$

Тем самым проясняется природа антикоммутирующего векторного поля  $S^\mu$  в струне Рамона–Неве–Шварца. В пространстве  $M^d$  операторы  $\hat{a}^+, \hat{a}$  (3.7) становятся векторами  $\hat{a}^{\mu+}, \hat{a}^\mu$ . Следовательно, и антикоммутирующие операторы  $\hat{f}^+, \hat{f}$  становятся векторами  $\hat{f}^{\mu+}, \hat{f}^\mu$ . Эти последние и образуют антикоммутирующее поле  $S^\mu$ .

Любое решение (3.2) можно разложить по неприводимым представлениям группы  $SO(1, 1)$ . Это «тензорные» решения

$$S^\mu(\sigma_\pm) = \sum d_k^\mu \sigma_\pm^k,$$

которые образуют сектор Рамона [28], и «спин-тензорные»

$$S^\mu(\sigma_\pm) = \sum b_k^\mu \sigma_\pm^{k+1/2},$$

образующие сектор Неве–Шварца [29].

Отметим, что при  $R \rightarrow 0$  спираль моделирует одномерное суперсимметричное пространство. Смещение вдоль оси спирали возможно двумя способами: 1) перемещением непосредственно от кольца к кольцу, 2) перемещением по витку. Поскольку физическое движение по кольцу в классическом пределе  $\hbar \rightarrow 0$  описывается грассмановыми переменными  $\theta$ , ясно, что сдвиг  $\theta \rightarrow \theta + \epsilon$  генерирует сдвиг  $\delta x^\mu = -i\bar{\epsilon}\gamma^\mu\theta$ . В основе суперпространства лежит нетривиальная структура.

Если предположить, что по кольцу перемещаются *спинорные* возбуждения (спиноры пространства  $M^d$ ), то получается струна Грина–Шварца [30, 31]. Заключаем: изображенная на рис. 3, б система моделирует суперструну.

#### 4. МОДЕЛЬ ПРОСТРАНСТВА

Развиваемый подход позволяет увидеть место суперструны в картине мира. Действительно, допуская существование  $D$ -бран, двумерное пространство можно рассматривать, например, как «паркет», изображенный на рис. 5. Все линии на нем — суперструны или  $D1$ -браны. В крупномасштабном пределе (характерный масштаб  $L = \lim an$ ,  $n \rightarrow \infty$ ,  $a \rightarrow 0$ , где  $n$  — число концов струн на интервале  $L$   $D1$ -браны,  $a$  — расстояние между ними в метрике  $d$ -мерного пространства), приходим к квантово-полевой картине двумерного мира. Легко получить и трехмерный мир, т. е. теорию в пространстве-времени  $(3+1)$ . Для этого надо взять счетное множество «решеток», изображенных на рис. 5, и расположить их параллельно друг другу на одинаковых расстояниях (скажем, так, чтобы и «горизонтальные» струны на рис. 5 были параллельны).

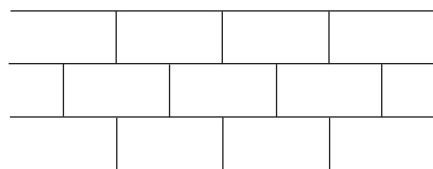


Рис. 5

Тогда, соединяя соответствующие горизонтальные струны разных слоев с вертикально расположенными струнами, в непрерывном пределе получаем модель суперпространства.

По существу, она будет являть собой модель, в которой единым образом описываются все взаимодействия, включая гравитационное. В самом

деле, в крупномасштабной картине (большие расстояния) возбуждения струн будут выглядеть как локальные возбуждения полей. Но все известные поля, включая гравитационное, суть возбуждения суперструн, поэтому такая модель есть пример объединения всех взаимодействий, в том числе и гравитационного. Вся конструкция помещается в пространство большей размерности ( $d$  равно 10 или 26). При этом автоматически снимается проблема квантового описания гравитационного поля (ввиду дискретности фундаментальных структур).

**4.1. Лагранжиан.** Выпишем лагранжиан соответствующей структуры. Начнем с одномерного пространства. Пусть длина струны есть  $l$ . Тогда одномерную теорию скалярного поля можно рассматривать как совокупность последовательно соединенных друг с другом струн. Каждой струне сопоставим целое число  $N$ : точка  $Nl$  есть «начало» струны, т. е. точка соединения данной струны с предыдущей. Пусть  $L_N$  — лагранжиан двух струн с общей точкой  $Nl$ :  $L_N = \int_{l(N-1)}^{lN} dx \mathcal{L} + \int_{lN}^{l(N+1)} dx \mathcal{L}$ , где  $\mathcal{L}$  — лагранжиан суперструны.

Тогда лагранжиан всей совокупности струн есть  $L = \frac{1}{2} \sum_{N=-\infty}^{N=\infty} L_N$ . Множитель  $1/2$  перед суммой учитывает тот факт, что каждая струна входит в сумму дважды. Обобщение на структуру произвольной «размерности» тривиально. Каждый узел характеризуется целым вектором  $\mathbf{N}(N_1, \dots, N_k)$ . Если в узле три струны, то в  $L_{\mathbf{N}}$  входят три члена с пределами интегрирования  $(l(N_i - 1), lN_i)$ ,  $(lN_i, l(N_i + 1))$  и  $(lN_j, l(N_j + 1))$ ,  $i \neq j$ ; лагранжиан пространства таков:

$$L = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{N}} L_{\mathbf{N}}. \quad (4.1)$$

Если узел есть общая точка  $r$  концов струн, то  $L_{\mathbf{N}}$  есть сумма  $r$  соответствующих членов. Фрагмент допредельного лагранжиана взаимодействия, описывающий стык, например, трех струн в точке  $x_0$ , есть

$$L_{\text{int}} = \frac{1}{2} [\dots + (x_0 - x_{-1})^2] + \frac{1}{2} [(x_1 - x_0)^2 + \dots] + \frac{1}{2} [(y_1 - x_0)^2 + \dots]. \quad (4.2)$$

Очевидно, здесь  $D1$ -брана составляется из двух струн, т. е. в данной модели нет принципиальной разницы между струной и  $D1$ -браной, поскольку ее нет в допредельной (дискретной) модели.

**4.2. Брана как сеть.** В предлагаемом подходе  $p$ -браны ( $p \geq 2$ ) можно считать не элементарными (фундаментальными) объектами, а составными, построенными из струн и  $D1$ -бран подобно тому, как строились 2- и 3-мерные пространства, т. е. последние можно рассматривать как бесконечные (или очень большие) 2- и 3-браны. Очевидно, в такой картине нет свободных открытых и свободных замкнутых струн (они вне дву- или трехмерного пространства). Концы любой струны должны всегда принадлежать  $D1$ -бранам. Фермионные возбуждения последних могут обладать квантовыми числами кварка и антикварка, и данную конфигурацию можно считать прообразом мезона. Замкнутая струна есть контур «элементарной ячейки», представленной на рис. 5. «Перемещение» замкнутой струны есть перенос возбуждения от

данной ячейки к соседней. Компактные  $p$ -браны ( $p \geq 2$ ) в крупномасштабном пределе есть компактные пространства.

Итак, в данной модели нет принципиальной разницы между струной и  $D1$ -браной. Естественным образом разрешается и следующая известная трудность теории суперструн: с одной стороны, гравитоны есть возбужденные состояния суперструн и должны формировать физическое пространство, с другой стороны, струны как будто в нем и существуют. В данной модели этой проблемы нет. Струны существуют в объемлющем пространстве размерности 10 (или 26), а все возбуждения струн (включая гравитоны) есть возбуждения сети.

Модель обладает еще одним важным качеством: в ней нет проблемы компактификации дополнительных измерений (в рамках идеи Калуцы–Клейна–Манделя–Фока [32–35]). «Материя» (возбуждение струн) неотделима от сети.

Конечно, струны можно надстраивать в дополнительных измерениях; при этом они могут оканчиваться и на «пространствообразующих» струнах ( $D1$ -бранах), т. е. на струнах, из которых они исходят. Если считать, что размер последних  $l$  характеризуется длиной Планка  $l_P$ , то таким же должен быть и масштаб компактифицированных струн. Подобные структуры, впрочем, хотя и возможны, но не обязательны. Разумеется, в этом дополнительном подпространстве могут образовываться и многомерные компактные структуры ( $p$ -браны).

## 5. МОДЕЛЬ ЧЕРНОЙ ДЫРЫ

В предлагаемом подходе столь же естественно моделируются черные дыры. Предположим, что в какой-то области пространства избыточная энергия струн привела к их разрушению (например, они распались на фрагменты, погруженные в термостат и не связанные с неповрежденной сетью) или длины возбужденных струн некоторой ячейки и ее соседей оказались столь большими, что они сформировали слой, образующий поверхность черной дыры. Тогда слово «дыра» приобретает буквальный смысл. Струны, образующие границу этого дефекта пространства, находятся в необычном состоянии по сравнению с остальными струнами. Через границу дыры не может пройти возбуждение из внешнего пространства. Оно поглощается струнами границы.

Итак, естественно предположить, что черная дыра моделируется сеткой из струн ( $D1$ -бран), покрывающей сферу радиуса  $r_g = 2l^2 M$ , где  $l = l_P$ ,  $M$  — масса черной дыры («двумерная компактная сетка с топологией и симметрией сферы»; используется система единиц  $\hbar = c = 1$ ). Возбуждение струны связано с ее растяжением. Покрытие сферы сеткой из струн отличается от соответствующего покрытия части плоскости, поэтому струны в этом случае должны находиться в возбужденном состоянии со средней энер-

гией  $E_s$ , характеризуемой температурой  $T$  ( $T$  отлична от температуры термостата в разд. 2). Подсчитаем энтропию и температуру сетки для незаряженной невращающейся черной дыры, полагая, что число ее независимых степеней свободы равно числу струн  $N$ . Число ячеек сетки пропорционально  $N$ , поэтому площадь поверхности сферы  $A$  есть

$$A = c_1 l^2 N, \quad c_1 = \text{const.} \quad (5.1)$$

Полагая далее, что вероятность обнаружить струну в одном из возможных состояний равна  $p$ , имеем для вероятности  $P$  найти сетку в данном состоянии  $P \sim \exp(N \ln p)$ . Тогда энтропия ( $S = -\ln P$ ) дается формулой

$$S = cc_1 N = c \frac{A}{l^2}, \quad c = \text{const.} \quad (5.2)$$

Учитывая, что  $A = 4\pi r_g^2$ , из термодинамического соотношения  $dM = TdS$  находим выражение для температуры черной дыры:

$$T = \frac{dM}{dS} = \frac{dM}{d(cA/l^2)} = \frac{1}{c \cdot 16\pi r_g}. \quad (5.3)$$

Из (5.2) и (5.3) видно, что при  $c = 1/4$  энтропия черной дыры совпадает с энтропией Бекенштейна–Хокинга  $S_{\text{BH}} = A/4l^2$ , а ее температура — с температурой Хокинга  $T_H = 1/4\pi r_g$ .

Если еще воспользоваться соотношением

$$M = N \langle E_s \rangle, \quad (5.4)$$

где  $\langle E_s \rangle$  — средняя энергия струны, и предположить, что связь с температурой такая же, как у релятивистской частицы в двумерном пространстве, т. е.  $\langle E_s \rangle = 2T$ , то из (5.1) и (5.3) имеем

$$M = 2 \frac{A}{c_1 l^2} T = \frac{M}{cc_1},$$

т. е.  $cc_1 = 1$  и  $c_1 = 4$  при  $c = 1/4$ . Полученное число не противоречит имеющимся в литературе данным (например, согласно [36, 37]  $c_1 = 4 \ln 2$ ). Отметим, что в этом случае  $M = 2TN = N/(4\pi l^2 M)$  и для заряженных вращающихся черных дыр квадрат экстремального заряда (в гауссах) и экстремальный угловой момент равны  $q^2 = |\mathbf{J}| = l^2 M^2 = N/4\pi$ . Отметим также, что при  $N = 1$  экстремальный угловой момент равен  $|\mathbf{J}| = \hbar/4\pi = \hbar/2$  и что выражение  $q^2 = 1/4\pi$  следует соотнести с постоянной Великого объединения  $\alpha_{\text{GUT}} \approx 1/25$  [38]:  $\alpha_{\text{GUT}} \approx \alpha_{\text{extr}}/2$ , т. е.  $q_{\text{GUT}}^2 = \alpha_{\text{GUT}} \hbar c \approx q^2/2 = \alpha_{\text{extr}} (\hbar/2)c$  (здесь  $c$  — скорость света).

Наконец, предлагаемая модель позволяет оценить натяжение струны  $\Theta$ . Полагая в (5.4), что энергия возбужденной струны пропорциональна ее растяжению  $\Delta L$ :  $\langle E_s \rangle = \Theta \Delta L$ , и учитывая, что  $\Delta L \sim r_g/N$  (линейные размеры струн растут пропорционально  $r_g$ , а растяжение отдельной струны составляет часть  $1/N$  общего растяжения), находим

$$M = \frac{r_g}{2l_P^2} \sim N\Theta \frac{r_g}{N},$$

т. е.  $\Theta \sim 1/l_P^2$ . Это означает, что граница черной дыры образована суперструнами, а параметр, характеризующий натяжение суперструны, определяется гравитационной постоянной.

Заключаем: модель пространства как сети, образованной из суперструн, и модель черной дыры согласованы и дают разумные результаты.

## 6. КОСМОЛОГИЧЕСКАЯ ПОСТОЯННАЯ

Представляется существенным, что предлагаемая модель квантовой механики позволяет по-новому взглянуть на проблему космологической постоянной («темная энергия») в теории гравитации. Оказывается, что учет нестационарности описываемых амплитудами вероятности состояний осцилляторов в термостате ведет к появлению во всех полевых уравнениях добавочных членов, означающих, в частности, появление масс у безмассовых полей [39].

Важно, что правило перехода к кинетике (1.39) пригодно также и для полей, потому что поля есть упорядоченные наборы гармонических осцилляторов. Гамильтониан счетного множества осцилляторов одномерной теории в надлежащих единицах имеет вид (см. п. 1.3)

$$H = \int_{-\pi}^{\pi} dk \omega(k) a^*(k) a(k), \quad \omega(k)^2 = m^2 + 4 \sin^2 \frac{k}{2} \approx m^2 + k^2, \quad (6.1)$$

и согласно (1.38) массы меняются:  $m^2 \rightarrow m^2 + \alpha^2$ . Отметим, впрочем, что  $\omega(k)$  в (6.1) не имеет прямой связи с  $\omega$  в (1.1): последнее относится к «первичным» осцилляторам (это  $\omega$  входит в определение  $\hbar = 1/\beta\omega$ ), тогда как  $\omega(k)$  характеризует коллективные возбуждения их линейных множеств. Фактически  $\omega(k) \gg \alpha$ .

Итак, после подстановки (1.39) безмассовые поля становятся «массивными». Например, в случае скалярного поля  $\phi$  имеем

$$(\square - m^2)\phi = 0 \longrightarrow [\square - 2\alpha\partial_t - (m^2 + \alpha^2)]\phi = 0 \quad (\square = -\partial_t^2 + \Delta). \quad (6.2)$$

В атомной и субатомной физике влияние  $\alpha$  чрезвычайно мало (если  $t_r$  взять порядка времени жизни Вселенной  $T_U \sim 10^{10}$  лет, то  $\alpha \sim 10^{-33}$  эВ).

Может показаться, что это важно для калибровочных полей, ибо массовые члены в лагранжиане нарушают калибровочную инвариантность. В действительности ситуация не столь проста.

1) Подстановку (1.39) нельзя использовать в лагранжианах. Например, в случае осциллятора лагранжиан  $L = (\dot{q}^2/\omega - \omega q^2)/2$  превращается в

$$L' = L + \frac{\alpha}{\omega} \dot{q}q + \frac{\alpha^2}{2\omega} q^2 \quad (6.3)$$

с уравнением движения

$$\ddot{q} + (\omega^2 - \alpha^2)q = 0, \quad (6.4)$$

отличным от (1.38) (отсутствие трения, «неправильное» изменение частоты). Очевидно, это есть следствие того, что в данном случае вариационный принцип Гамильтона уже неприменим (неприменимость теоремы Лиувилля, кинетика).

2) Подстановка нарушает лоренцеву инвариантность теории (второй член в уравнении (6.2) не есть инвариант). Это нельзя считать недостатком, ибо теперь время и пространственные координаты теряют свою эквивалентность. Появляется абсолютное время. Данный факт отражает существо модели.

Отсутствие лагранжева формализма делает бессмысленным требование «калибровочной инвариантности». Разумной представляется следующая стратегия: в калибровочной теории исключаются все нефизические переменные [17], а затем в уравнениях движения делается подстановка (1.39). Впрочем, можно пользоваться уравнениями движения в произвольной калибровке. Например, для свободного электромагнитного поля в калибровке Фейнмана получаем аналог (6.2):

$$(\square - 2\alpha\partial_t - \alpha^2)A_\mu = 0. \quad (6.5)$$

Масса фотона становится существенной лишь при очень низких энергиях,  $E \sim 10^{-33}$  эВ.

Ситуация меняется в гравитации. Гравитационные уравнения для метрического тензора  $g_{\mu\nu}$  также содержат вторые производные по времени, поэтому

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} \rightarrow G_{\mu\nu} - \alpha\partial_t g_{\mu\nu} - \frac{\alpha^2}{2}g_{\mu\nu} + \dots \quad (6.6)$$

Коэффициент при  $g_{\mu\nu}$  в последнем члене есть не что иное, как космологическая постоянная в уравнениях Эйнштейна–Гильберта ( $\Lambda = \alpha^2/2$ ). Включение в теорию космологического члена не нарушает общей ковариантности теории. Именно он объясняет недавно обнаруженный эффект ускорения разбегания удаленных галактик [40] (см. также обзор [41]).



Кроме того, постоянная  $\alpha$  позволяет оценить время жизни Вселенной  $T_U \sim t_r \sim 1/\alpha$ . Из неравенства  $\alpha \ll \omega$  можно оценить снизу температуру термостата:  $\omega = T$  (в единицах  $\hbar = k = 1$ ), т. е.  $\alpha \ll T$ . Взяв  $T_U \sim 1/\alpha$ , получаем  $\alpha \sim 10^{-29}$  К, следовательно,  $T \gg 10^{-29}$  К.

Итак, в предлагаемой модели космологическая постоянная появляется как ее непреременный атрибут [39]. Можно сказать даже так: если бы эксперимент исключал существование космологической постоянной, то это свидетельствовало бы о иной причине появления амплитуд вероятности в нашем мире. Важно, что «вакуумная плотность энергии», которую имитирует  $\Lambda$ , не имеет ничего общего с вакуумной плотностью энергии материи. Будучи массой гравитона,  $\alpha$  превращает потенциал Ньютона в потенциал Юкавы, что дает наглядное объяснение эффекту ускорения разбегания удаленных галактик [40] — силы тяготения на достаточно больших расстояниях убывают экспоненциально. Заслуживает внимания и тот факт, что в суперсимметричных теориях вакуумная энергия струн, полей равна нулю.

## 7. ОБСУЖДЕНИЕ

Предлагаемая модель показывает, каким образом могут появиться вероятностные теории со «вспомогательными функциями» (амплитудами вероятностей), через которые выражаются плотности вероятностей. Появление таких «комплексных вероятностей» — следствие специфики элементарных систем и особенностей образуемых ими сложных структур. Формально квантовую механику можно рассматривать как чисто техническое обобщение стандартного аппарата теории вероятностей для описания сложных систем специального вида; его появление, однако, диктуется особенностями задачи. Физически квантовая механика (квантовая теория поля) появляется при описании возбуждений (т. е. нестационарных состояний) цепочки гармонических осцилляторов в термостате при условии, что мера Гиббса отождествляется с мерой объема фазового пространства. Новый аппарат не находится в противоречии со стандартной теорией вероятностей и не накладывает ограничений на возможности вероятностного описания процессов в пространстве-времени [5]. В теории естественным образом появляется постоянная Планка  $\hbar$ , причем становится ясным ее физический смысл (см. разд. 1). Еще раз подчеркнем главные особенности модели.

1. Описание с помощью амплитуд вероятности возникает в «неравновесной гамильтоновой механике» гармонических осцилляторов в термостате с большим временем релаксации; характерные черты модели: комплексные канонические переменные, малые отклонения от состояния равновесия. В этом перечне все важно:

а) гармонический осциллятор: все поля и струны есть совокупности гармонических осцилляторов;

б) комплексные канонические переменные  $\bar{z}, z$ : они порождают комплексные амплитуды вероятности;

в) термостат: источник хаоса;

г) неравновесные распределения: описание с помощью амплитуды вероятности появляется в классической физике только для неравновесных состояний;

д) большое время релаксации ( $t_r \gg \omega^{-1}$ ): в этом случае система может рассматриваться как квазистационарная и можно положить  $t_r = \infty$ ;

е) малость отклонений от состояния равновесия: произвольные отклонения могут радикально изменить распределение Гиббса и классические уравнения движения.

Таким путем получается теория с постоянной Планка  $\hbar$ , пространством Фока и уравнением Шредингера. Гармония порядка (уравнение Шредингера) и хаоса (вероятности), характерная для квантовой механики, есть следствие того факта, что в паре канонических переменных  $\varphi, r$  одна ( $\varphi$ ) — фактически чисто классическая (никакого влияния термостата, уравнение (1.19)), тогда как другая ( $r$ ) — чисто стохастическая (она характеризуется распределением Гиббса). Данный факт одновременно проясняет специфику спектра энергии гармонического осциллятора  $E_n = \hbar\omega(n + 1/2)$ : первый член  $\hbar\omega n$  отвечает классическому движению ( $\dot{z}^n = -i\omega n z^n$ ), тогда как «вакуумная энергия»  $\hbar\omega/2$  универсальна и обязана своим происхождением термостату.

2. Представляется удовлетворительным, что гамильтонова механика допускает обобщение на кинетику (уравнения (1.33)–(1.35)).

3. Квантовое описание появляется только в нестабильных системах. Разумеется, это не обесценивает стандартную квантовую механику: последняя может быть *определена* как самосогласованная теория, но в рамках классической теории она появляется как кинетика.

4. Еще одна положительная черта подхода — нестабильность. Вселенная нестационарна, и это согласуется с требованием ее нестабильности. Довольно неожиданно в теории появляется космологическая постоянная  $\Lambda$ , которая отождествляется с  $\alpha^2/2$ . Это позволяет оценить  $\alpha^{-1} \sim 10^{10}$  лет.

5. Все возбуждения осцилляторов (и полей) затухают с течением времени ( $t \rightarrow \infty$ ). Представляется, что наш мир еще менее стабилен, чем это следует из общей теории относительности.

6. Лагранжев формализм теряет смысл. В результате лоренц-инвариантность, калибровочная инвариантность, общая ковариантность также теряют смысл (или подлежат модификации).

7. Проблема вакуумной энергии пока остается нерешенной. Ее решение зависит от конкретной модели физического пространства. Если моделировать

3D-пространство сетью, построенной из суперструн, то вакуумная энергия суперструн равна нулю.

Обсудим теперь возможность экспериментальной проверки предлагаемого подхода. Разумеется, экспериментальное изучение физики на планковских расстояниях — дело весьма далекого будущего. На существующих или строящихся ускорителях возможна проверка лишь следствий модели. Вместе с тем модель содержит принципиальное утверждение, для выяснения истинности которого достаточно поставить сравнительно простой опыт. Это отождествление волновой функции частицы с функцией, описывающей одночастичное возбуждение поля. Непосредственным следствием данного утверждения является возможность «дробить» кванты (частицы). Действительно, если частица есть возбуждение поля, а размеры области возбуждения характеризуют ее длину когерентности, то в принципе ничто не запрещает разделить это возбуждение, скажем, на две части (с помощью макротел). Именно таким образом, с предлагаемой точки зрения, следует рассматривать феномен дробного квантового эффекта Холла [42] и сообщения о наблюдении объектов с дробными электрическими зарядами [43]. Разумеется, такие опыты возможны не только с электронами. В [5] был предложен опыт с фотонами. Можно поставить эксперимент и с ультрахолодными нейтронами. Естественно предположить, например, что при «делении нейтрона» пополам с помощью сплиттера (аналога полупрозрачного зеркала) постоянная электрослабого взаимодействия половинок (заряженный ток) и их энергии будут в два раза меньше. Вероятность распада последних пропорциональна  $(g/M_W)^4(m_n - m_p)^5$ , т. е. вероятность распада половинки уменьшается в  $2^5$  раз ( $g \rightarrow g/2$ ,  $M_W \rightarrow M_W/2$ ,  $m_{n,p} \rightarrow m_{n,p}/2$ , и эта половинка будет жить в 32 раза дольше). В конечном состоянии появляются половинки протона, электрона и антинейтрино.

Итак, предлагаемая модель не только объясняет природу квантового поведения «элементарных частиц», но и дает пример действительно единой теории, естественным образом объединяющей и сильное, и электрослабое, и гравитационное взаимодействия. Одновременно моделируется пространство. Ввиду дискретности исходной структуры теория свободна от ультрафиолетовых расходимостей.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

**Квантование систем со связями 2-го рода.** В отличие от связей 1-го рода квантование систем со связями 2-го рода встречается с трудностями. Суть проблемы в следующем. По существу, связи 1-го рода есть условия, накладываемые на импульсы, скажем,  $p_s = 0$ . При квантовании эти равенства нельзя превратить в операторные (тогда нарушатся коммутационные соот-

ношения  $[\hat{q}_k, \hat{p}_s] = i\hbar\delta_{ks}$ . Достаточно потребовать выполнения связей на векторах физического гильбертова пространства  $\hat{p}_s\psi_{\text{ph}} = 0$ . Связи 2-го рода есть, по существу, условия, накладываемые на координаты и канонически сопряженные им импульсы ( $q_s = p_s = 0$ ). Теперь нельзя даже потребовать, чтобы соответствующие операторы обращались в нуль на векторах  $\psi_{\text{ph}}$  — легко видеть, что это противоречит коммутационным соотношениям. Было предложено несколько рецептов квантования (см. анализ в [44]). Например, Дирак [45] предложил видоизменить скобки Пуассона для нефизических переменных. Другой метод («абелевой конверсии» [46]) заключается в удвоении числа нефизических переменных и числа связей в предположении, что исходные связи можно превратить в связи 1-го рода. Наиболее естествен так называемый «метод тонкого слоя» [25], в котором вместо поверхности, выделяемой связями, рассматривается тонкий слой, толщина которого в конце вычислений стремится к нулю. К сожалению, уже в случае простейшей задачи все три метода дают разные результаты [44]. Это означает, что, по крайней мере, два из этих методов некорректны и что нельзя произвольно менять гамильтонову механику нефизического сектора. В разд. 3 использован метод редукции к связям 1-го рода [26], удобный для приложений. Его суть в следующем.

Пусть  $Q_s$  и  $q_i$  — координаты в  $R^N$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ;  $s = 1, 2, \dots, m$ ;  $n + m = N$ ), такие, что условия  $Q_s - C_s = 0$ ,  $C_s = \text{const}$  определяют гиперповерхность в  $R^N$ . Пусть, далее,  $P_s$  — канонически сопряженные  $Q_s$  импульсы, подчиняющиеся условиям  $P_s = 0$ , т. е.  $Q_s - C_s$  и  $P_s$  — связи 2-го рода. Метод основан на замечании, что если ограничиться условиями

$$\hat{P}_s\psi_{\text{ph}} = 0 \quad (\text{П.1})$$

(т. е. учесть только связи  $P_s = 0$ ), то для векторов  $\psi_{\text{ph}}$  уже несущественно, какие значения имеют  $Q_s$ , поскольку согласно (П.1)  $\psi_{\text{ph}}$ , по существу, от  $Q_s$  не зависят и при вычислении вероятностей (или средних) по ним не интегрируются. В операторах же следует сначала все  $\hat{P}_s$  перенести направо от остальных операторов (с учетом коммутационных соотношений) и положить их равными нулю (ибо операторы применяются лишь к физическим состояниям  $\psi_{\text{ph}}$ ). Переменные  $Q_s$  в операторах (и в якобианах) следует положить равными  $C_s$ , поскольку теперь это не канонические переменные, а внешние параметры. В условиях нормировки

$$\int dq^n \sqrt{g_{\text{ph}}} |\psi_{\text{ph}}|^2 = 1 \quad (\text{П.2})$$

интегрируется только по физическим переменным  $q_i$ . Физически эти условия естественны, а сам метод прозрачен: требование (П.1) исключает движение, нормальное к гиперповерхности  $Q_s = C_s$ , а учет этого последнего условия

в операторах и якобианах гарантирует, что движение происходит именно на гиперповерхности. Проверка показывает, что данный метод дает те же результаты, что и метод тонкого слоя [25] (см. [47, 48]).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Грин М., Шварц Дж., Виттен Э. Теория суперструн. М.: Мир, 1990. Т. 1, 2.
2. Strominger A., Vafa C. // Phys. Lett. B. 1996. V. 379. P. 99.
3. Hawking S. W. // Phys. Rev. D. 1976. V. 14. P. 2460.
4. 't Hooft G. // Class. Quant. Grav. 1999. V. 16. P. 3263.
5. Прохоров Л. В. // ЯФ. 2004. Т. 67. С. 1322.
6. Prokhorov L. V. Quantum Mechanics as Kinetics. quant-ph/0406079.
7. Дирак П. А. М. Лекции по квантовой теории поля. М.: Мир, 1971.
8. Strocchi F. // Rev. Mod. Phys. 1966. V. 38. P. 36.
9. Синай Я. Г. Введение в эргодическую теорию. М.: ФАЗИС, 1996.
10. Прохоров Л. В. // Вестн. СПбГУ. Сер. 4. 2005. Вып. 4. С. 3.
11. Переломов А. М. Обобщенные когерентные состояния и их применения. М.: Наука, 1987.
12. Bargmann V. // Commun. Pure Appl. Math. 1961. V. 14. P. 187.
13. Харт Н. Геометрическое квантование в действии. М.: Мир, 1985.
14. Коортман В. А. // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1931. V. 17. P. 315.
15. Neumann J. V. // Ann. Math. 1932. Bd. 33. S. 587.
16. Лозв М. Теория вероятностей. М.: Иностран. лит., 1962.
17. Прохоров Л. В. // УФН. 1988. Т. 154. С. 299.
18. Прохоров Л. В. // ЭЧАЯ. 2000. Т. 31. С. 47.
19. Барбашов Б. М., Нестеренко В. В. Модель релятивистской струны в физике адронов. М.: Энергоатомиздат, 1987.
20. Golovnev A. V., Prokhorov L. V. // Intern. J. Theor. Phys. 2006. V. 45(5). P. 942–951.
21. Гольфанд Ю. А., Лихтман Е. П. // Письма в ЖЭТФ. 1971. Т. 13. С. 452.
22. Gervais J.-L., Sakita B. // Nucl. Phys. B. 1971. V. 34. P. 632.
23. Волков Д. В., Акулов В. П. // Письма в ЖЭТФ. 1972. Т. 16. С. 621.
24. Wess J., Zumino B. // Nucl. Phys. B. 1974. V. 70. P. 39.
25. da Costa R. C. T. // Phys. Rev. A. 1981. V. 23. P. 1982.
26. Prokhorov L. V. // Proc. of VI Intern. Conf. on Path Integrals, Florence, 1998, London. 1999. P. 249.
27. Fletcher N. H. // Am. J. Phys. 2004. V. 72. P. 701.
28. Ramond P. // Phys. Rev. D. 1971. V. 3. P. 2415.
29. Neveu A., Schwarz J. H. // Nucl. Phys. B. 1971. V. 31. P. 86.
30. Green M., Schwarz J. H. // Nucl. Phys. B. 1982. V. 198. P. 252.
31. Green M., Schwarz J. H. // Phys. Lett. B. 1984. V. 136. P. 367.

32. *Kaluza Th.* // Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Math. Phys. Kl. 1921. S. 966.
33. *Klein O.* // Z. Phys. 1926. Bd. 37. S. 895.
34. *Mandel H.* // Ibid. Bd. 39. S. 136.
35. *Fock V.* // Ibid. S. 226.
36. *Муханов В. Ф.* // Письма в ЖЭТФ. 1986. Т. 44. С. 50.
37. *Коган Я. И.* // Там же. С. 209.
38. *Arkani-Hamed N., Dimopoulos S., Dvali G.* // Physics Today. 2002. P. 35.
39. *Prokhorov L. V.* Quantum Mechanics and the Cosmological Constant. gr-qc/0602023.
40. *Riess A. G. et al.* // Astron. J. 1998. V. 116. P. 1009;  
*Perlmutter S. et al.* // Astrophys. J. 1999. V. 517. P. 565.
41. *Барбаилов Б. М., Первушин В. Н., Проскурин Д. В.* // ЭЧАЯ. 2003. Т. 34. С. 138.
42. *Tsui D. C., Störmer H. L., Gossard A. C.* // Phys. Rev. Lett. 1982. V. 48. P. 1559.
43. *de-Picciotto R. et al.* // Nature. 1997. V. 389. P. 162;  
*Reznikov M. et. al.* // Nature. 1999. V. 399. P. 238.
44. *Klauder J. R., Shabanov S. V.* // Nucl. Phys. B. 1998. V. 511. P. 713.
45. *Дирак П. А. М.* Лекции по квантовой механике. М.: Мир, 1968.
46. *Faddeev L. D., Shatashvili S. L.* // Phys. Lett. B. 1986. V. 167. P. 225.
47. *Nuramatov A. G., Prokhorov L. V.* On Quantization of Systems with Second Class Constraints. quant-ph/0507038.
48. *Golovnev A. V.* Thin Layer Quantization in Higher Dimensions. quant-ph/0508111.