

РЕДЖЕ-ЭЙКОНАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ
ВЫСОКОЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО УПРУГОГО
ДИФРАКЦИОННОГО НУКЛОН-НУКЛОННОГО
РАССЕЯНИЯ С МИНИМАЛЬНЫМ ЧИСЛОМ
РЕДЖЕОНОВ

*А. А. Годизов**, *В. А. Петров***

Институт физики высоких энергий, Протвино, Россия

ВВЕДЕНИЕ	243
ОСНОВЫ РЕДЖЕ-ЭЙКОНАЛЬНОЙ МОДЕЛИ	244
ПОВЕДЕНИЕ ТРАЕКТОРИЙ РЕДЖЕ В ОБЛАСТИ ДЕЙСТВИ- ТЕЛЬНЫХ ОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЙ АРГУМЕНТА	249
ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ МИНИМАЛЬНОГО ЭЙКОНАЛА	252
ОПИСАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ	254
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	258
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	258

*E-mail: godizov@sirius.ihep.su

**E-mail: Vladimir.Petrov@ihep.ru

РЕДЖЕ-ЭЙКОНАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ ВЫСОКОЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО УПРУГОГО ДИФРАКЦИОННОГО НУКЛОН-НУКЛОННОГО РАССЕЯНИЯ С МИНИМАЛЬНЫМ ЧИСЛОМ РЕДЖЕОНОВ

А. А. Годизов, В. А. Петров***

Институт физики высоких энергий, Протвино, Россия

Предложена феноменологическая редже-эйкональная модель с нелинейными монотонными параметризациями траекторий Редже, в которых явным образом учтено их асимптотическое поведение в пертурбативной области. На примере упругого протон-(анти)протонного рассеяния показано, что в кинематической области $\sqrt{s} > 23$ ГэВ, $0,005 < -t < 3$ ГэВ² дифракционная картина в основном определяется всего тремя траекториями Редже.

The phenomenological Regge-eikonal model is proposed with nonlinear monotonous parametrizations for Regge trajectories in which their asymptotic behavior in the perturbative region is taken into account explicitly. On the example of elastic proton-(anti)proton scattering it is shown that in the kinematical range $\sqrt{s} > 23$ GeV, $0.005 < -t < 3$ GeV² the diffractive pattern is determined mainly by only three Regge trajectories.

PACS: 12.40.Nn; 13.75.Cs

ВВЕДЕНИЕ

Целью работы является демонстрация на примере упругого протон-(анти)протонного рассеяния тех преимуществ (в рамках редже-эйконального подхода), которые дает явный учет следующего из квантовой хромодинамики (КХД) асимптотического поведения траекторий Редже при феноменологическом описании процессов упругой дифракции при высоких энергиях.

В наших рассуждениях мы будем исходить из того, что КХД является фундаментальной теорией сильного взаимодействия, а также из предположения о ренормгрупповой инвариантности траекторий Редже, которое основано на наблюдаемости связанных состояний и резонансов. При этом, как будет показано ниже, вследствие наличия асимптотической свободы траектории Редже

*E-mail: godizov@sirius.ihep.su

**E-mail: Vladimir.Petrov@ihep.ru

стремятся к константе при асимптотически больших значениях переданного импульса.

Хотя в современной литературе предположение о линейности траекторий Редже при небольших отрицательных значениях аргумента носит характер постулата, единственным существенным доводом в пользу такой постановки проблемы (помимо естественного желания продолжить кривые Чу–Фраучи в область рассеяния) являются результаты выделения в рамках борновского приближения вырожденной траектории ρ/a_2 из данных по обменным процессам $\pi^- + p \rightarrow \pi^0 + n$ и $\pi^- + p \rightarrow \eta + n$ [1]. Но, как следует из анализа тех же данных, адекватность самого борновского приближения (т. е. возможность пренебрежения абсорбтивными поправками) не очень обоснована [2]. При учете же абсорбтивных поправок сама процедура выделения траекторий Редже из угловых распределений настолько усложняется, что любые результаты, полученные при работе с доступным массивом экспериментальных данных, будут далеко не однозначными.

Поэтому с феноменологической точки зрения подходы, использующие линейные траектории Редже для описания дифракционных процессов, не имеют никаких преимуществ перед подходами, использующими нелинейные параметризации.

Но в случае приближения траекторий Редже монотонными функциями, в которых явным образом учтено их асимптотическое поведение, мы получаем два весомых преимущества перед использованием линейных параметризаций:

1) удается автоматически избежать возникновения трудностей, связанных с возможным появлением нефизических сингулярностей в сигнатурных множителях;

2) оказывается возможным воспроизвести с достаточно хорошей точностью экспериментально наблюдаемую дифракционную картину упругого рассеяния нуклонов при энергиях столкновения $\sqrt{s} > 23$ ГэВ в рамках минимальной феноменологической схемы, используя всего три траектории Редже.

При описании упругой дифракции мы будем использовать редже-эйкональную модель, преимущество которой перед простым реджевским подходом заключается в автоматическом учете абсорбтивных поправок, что в явном виде приводит к соблюдению условия унитарности для амплитуды рассеяния [3]. Поэтому (для замкнутости нашего изложения) прежде чем подробно обсудить асимптотические свойства траекторий Редже, покажем, как они возникают в рамках редже-эйконального подхода.

ОСНОВЫ РЕДЖЕ-ЭЙКОНАЛЬНОЙ МОДЕЛИ

Впервые сочетание эйконального представления с полюсами Редже было рассмотрено в [3]. Мы ограничимся кратким изложением основных положений и результатов.

Рассмотрим процесс упругого или обменного взаимодействия двух элементарных скалярных частиц (ниже при анализе данных по упругому нуклон-нуклонному рассеянию мы будем пренебрегать спиновыми эффектами), которые в дальнейшем мы будем условно называть «адронами». Основной физической характеристикой такой реакции является дифференциальное сечение рассеяния $d\sigma/dt$, которое в пределе высоких энергий может быть выражено через амплитуду упругого рассеяния $T(s, t)$ (здесь s — квадрат энергии столкновения в системе центра масс, t — квадрат переданного 4-импульса) следующим образом:

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{|T(s, t)|^2}{16\pi s^2}. \quad (1)$$

В случае короткодействующих сил мы можем ввести эйкональное представление амплитуды рассеяния

$$T(s, b) = \frac{e^{2i\delta(s, b)} - 1}{2i}. \quad (2)$$

Последняя формула (являющаяся по сути определением эйконала) записана в координатном представлении. Из одного представления в другое мы можем переходить с помощью преобразования Фурье–Бесселя

$$f(b) = \frac{1}{16\pi s} \int_0^\infty d(-t) J_0(b\sqrt{-t}) f(t), \quad f(t) = 4\pi s \int_0^\infty db^2 J_0(b\sqrt{-t}) f(b). \quad (3)$$

Само по себе эйкональное представление не дает каких-либо сдвигов в рассмотрении нашей проблемы, поскольку просто сводится к замене $T(s, t)$ на $\delta(s, t)$, не конкретизируя вид самого эйконала. Ключевым будет предположение, что эйконал с высокой степенью точности пропорционален «эффективному» (квази)потенциалу взаимодействия адронов, подобно тому, как это имеет место в нерелятивистской квантовой механике, только сам (квази)потенциал на этот раз является релятивистским. Согласно интерпретации Ван-Хова [4] релятивистского (квази)потенциала как «суммы» всех одночастичных обменов в t -канале мы можем представить эйконал в виде

$$\delta^{(f_1, f_2)}(s, t) = \sum_{j=0}^\infty \sum_{m_j} J_{\alpha_1 \dots \alpha_j}^{(f_1, j, m_j)}(p_1, \Delta) \frac{D_{(j, m_j)}^{\alpha_1 \dots \alpha_j, \beta_1 \dots \beta_j}(\Delta)}{m_j^2 - \Delta^2} J_{\beta_1 \dots \beta_j}^{(f_2, j, m_j)}(p_2, \Delta) \quad (4)$$

(здесь $\frac{D_{(j, m_j)}^{\alpha_1 \dots \alpha_j, \beta_1 \dots \beta_j}}{m_j^2 - \Delta^2}$ — пропагатор частицы со спином j и массой m_j ;

$J_{\alpha_1 \dots \alpha_j}^{(f, j, m_j)}$ — адронный ток (индекс f характеризует тип тока); Δ — переданный 4-импульс ($t = \Delta^2$); p_1, p_2 — 4-импульсы налетающих адронов;

\sum_{m_j} означает суммирование по всем частицам спина j с различной массой, которое в дальнейшем перейдет в сумму по траекториям Редже). Наложим на общую зависимость всевозможных адронных токов от Δ следующие ограничения: полную симметричность по всем α_k , поперечность по Δ_{α_k} ($k = 1, \dots, j$) и бесследовость по любой паре индексов. Первые два условия дают

$$J_{\alpha_1 \dots \alpha_j}^{(f, j, m_j)}(p, \Delta) = \sum_{k=0}^{[j/2]} \Gamma_k^{(f, j, m_j)}(p^2, \Delta^2, (p\Delta)) \times \\ \times \sum G_{\alpha_{\mu_1} \alpha_{\mu_2}} \dots G_{\alpha_{\mu_{2k-1}} \alpha_{\mu_{2k}}} P_{\alpha_{\mu_{k+1}}} \dots P_{\alpha_{\mu_j}},$$

где $\Gamma_k^{(f, j, m_j)}(p^2, \Delta^2, (p\Delta))$ — некоторые скалярные функции; $P_\alpha \equiv \frac{p_\alpha - \frac{p\Delta}{\Delta^2} \Delta_\alpha}{\sqrt{p^2 - \frac{(p\Delta)^2}{\Delta^2}}}$; $G_{\alpha\beta} \equiv -g_{\alpha\beta} + \frac{\Delta_\alpha \Delta_\beta}{\Delta^2}$; внутреннее суммирование проводится по всем неэквивалентным перестановкам лоренцевских индексов (всего $\frac{j!}{(2k)!(j-2k)!}$ слагаемых). Условие же бесследовости с учетом того, что

$$g^{\alpha\beta} G_{\alpha\beta} = -3, \quad P_\alpha P^\alpha = 1, \quad g^{\gamma\delta} G_{\alpha\gamma} G_{\beta\delta} = -G_{\gamma\delta}, \quad G_{\alpha\gamma} P^\beta = -P^\alpha,$$

приводит к рекуррентным соотношениям

$$\Gamma_k^{(f, j, m_j)}(p^2, \Delta^2, (p\Delta)) = \frac{\Gamma_{k-1}^{(f, j, m_j)}(p^2, \Delta^2, (p\Delta))}{2(j-k)+1}.$$

Отсюда находим

$$J_{\alpha_1 \dots \alpha_j}^{(f, j, m_j)}(p, \Delta) = \Gamma_0^{(f, j, m_j)}(p^2, \Delta^2, (p\Delta)) \times \\ \times \sum_{k=0}^{[j/2]} \frac{(2(j-k)-1)!!}{(2j-1)!!} \sum G_{\alpha_{\mu_1} \alpha_{\mu_2}} \dots G_{\alpha_{\mu_{2k-1}} \alpha_{\mu_{2k}}} P_{\alpha_{\mu_{k+1}}} \dots P_{\alpha_{\mu_j}}. \quad (5)$$

Подставляя (5) в (4) и учитывая поперечность и бесследовость адронных токов, получаем выражение для эйконала

$$\delta^{(f_1, f_2)}(s, t) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m_j} \frac{\gamma^{(f_1, f_2, j, m_j)}(\Delta^2)}{m_j^2 - \Delta^2} P_j \left(\frac{p_1 p_2 - \frac{(p_1 \Delta)(p_2 \Delta)}{\Delta^2}}{\sqrt{(p_1^2 - \frac{(p_1 \Delta)^2}{\Delta^2})(p_2^2 - \frac{(p_2 \Delta)^2}{\Delta^2})}} \right),$$

где $P_j(x)$ — полиномы Лежандра j -й степени, а

$$\gamma^{(f_1, f_2, j, m_j)}(\Delta^2) \equiv \Gamma_0^{(f_1, j, m_j)}(p_1^2, \Delta^2, (p_1 \Delta)) \Gamma_0^{(f_2, j, m_j)}(p_2^2, \Delta^2, (p_2 \Delta)) \frac{2^j (j!)^2}{(2j)!}.$$

Для одинаковых внешних частиц на массовой оболочке

$$p_{1,2}^2 = (p_1 - \Delta)^2 = (p_2 + \Delta)^2 = m^2. \quad (6)$$

Применяя кинематические соотношения

$$p_{1,2} \Delta = \pm \frac{\Delta^2}{2}, \quad p_1 p_2 = \frac{s}{2} - m^2, \quad \Delta^2 \equiv t,$$

упростим выражение для эйконала (в дальнейшем мы будем опускать индексы f_1, f_2 , характеризующие тип одночастичного обмена):

$$\delta(s, t) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m_j} \frac{\gamma^{(j, m_j)}(t)}{m_j^2 - t} P_j \left(\frac{s}{2m^2 - \frac{t}{2}} - 1 \right). \quad (7)$$

Разобьем сумму по j в правой части (7) на две, по четным и нечетным j соответственно:

$$\begin{aligned} \delta(s, t) &= \delta^+(s, t) + \delta^-(s, t) = \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{\eta=\pm 1} \sum_{m_{(\eta)j}} \frac{\eta + e^{-i\pi j}}{2} (-1)^j \frac{\gamma^{(\eta, j, m_{(\eta)j})}(t)}{m_{(\eta)j}^2 - t} P_j \left(\frac{s}{2m^2 - \frac{t}{2}} - 1 \right). \end{aligned} \quad (8)$$

Каждая из последовательностей $\gamma^{(\eta, j, m_{(\eta)j})}(t)$, $m_{(\eta)j}^2$ ($j = 0, 2, 4, \dots, 2n, \dots$ при $\eta = +1$ и $j = 1, 3, 4, \dots, 2n - 1, \dots$ при $\eta = -1$) по отдельности удовлетворяет условию теоремы Карлсона, которая утверждает, что если для функции комплексной переменной $f(x)$ выполнено условие $f(x) < e^{\pi|x|}$ при $|x| \rightarrow \infty$, то эта функция однозначно определяется своими значениями при целых x .

Теперь мы сделаем следующее ключевое предположение о возможности аналитического однозначного, в силу теоремы Карлсона, продолжения (8) в область комплексных значений j (гипотеза Редже или постулат максимальной аналитичности второй степени). В нашем случае оно сводится к утверждению того, что $m_{(\eta)j}^2$ и $\gamma^{(\eta, j, m_{(\eta)j})}(t)$ в (7) являются значениями аналитических (голоморфных по комплексной переменной j) функций при целых неотрицательных значениях j . Обозначим эти функции $m_{\eta}^2(j)$ и $\gamma^{(\eta)}(t, j, m_{\eta}^2(j))$

соответственно. С помощью преобразования Зоммерфельда–Ватсона [5] заменим сумму по j в (8) на интеграл по контуру C в комплексной плоскости переменной j , огибающему действительную положительную полуось, включая точку $j = 0$, так, что полуось все время остается справа:

$$\delta(s, t) = \frac{1}{2i} \oint_C \frac{dj}{\sin(\pi j)} \sum_{\eta=\pm 1} \sum_{m_\eta} \left(-\frac{\eta + e^{-i\pi j}}{2} \right) \times \\ \times \frac{\gamma^{(\eta)}(t, j, m_\eta^2(j))}{m_\eta^2(j) - t} P \left(j, \frac{s}{2m^2 - \frac{t}{2}} - 1 \right)$$

(здесь $P(j, x)$ — аналитическое продолжение полиномов Лежандра $P_j(x)$ в область комплексных j).

Поскольку (согласно нашему предположению) единственными источниками сингулярностей подынтегрального выражения в области $\text{Re } j > -1/2$ являются нули функций $\sin(\pi j)$ и $m_\eta^2(j) - t$, то, деформируя контур C и переходя к контуру, идущему параллельно мнимой оси, $\text{Re } j = -1/2$, приходим к

$$\delta(s, t) = \frac{1}{2i} \int_{-\frac{1}{2}-i\infty}^{-\frac{1}{2}+i\infty} \frac{dj}{\sin(\pi j)} \sum_{\eta=\pm 1} \sum_{m_\eta} \left(-\frac{\eta + e^{-i\pi j}}{2} \right) \times \\ \times \frac{\gamma^{(\eta)}(t, j, m_\eta^2(j))}{m_\eta^2(j) - t} P \left(j, \frac{s}{2m^2 - \frac{t}{2}} - 1 \right) + \\ + \sum_{\eta=\pm 1} \sum_n \left(-\frac{\eta + e^{-i\pi\alpha_n^{(\eta)}(t)}}{\sin(\pi\alpha_n^{(\eta)}(t))} \right) \frac{d\alpha_n^{(\eta)}(t)}{dt} \frac{\pi\gamma^{(\eta)}(t, \alpha_n^{(\eta)}(t), t)}{2} \times \\ \times P \left(\alpha_n^{(\eta)}(t), \frac{s}{2m^2 - \frac{t}{2}} - 1 \right),$$

где функции $\alpha_n^{(\eta)}(t)$ — корни уравнений $m_\eta^2(j) - t = 0$ и, таким образом, соответствуют полюсам эйконала в области комплексных значений j . Эти полюсы называют полюсами Редже, а сами функции $\alpha_n^{(\eta)}(t)$ — траекториями Редже (C -четными при $\eta = +1$ и C -нечетными при $\eta = -1$). При $s \gg 2m^2 - \frac{t}{2}$ вкладом фонового интеграла можно пренебречь, а полиномы Лежандра могут быть описаны лидирующими членами разложения. Поэтому, вводя

новую функцию

$$\beta_n^{(\eta, s_0)}(t) \equiv \frac{d\alpha_n^{(\eta)}(t)}{dt} \frac{\pi\gamma^{(\eta)}(t, \alpha_n^{(\eta)}(t), t)}{2} \times \\ \times \frac{\Gamma(2\alpha_n^{(\eta)}(t) + 1)}{2^{\alpha_n^{(\eta)}(t)} \Gamma^2(\alpha_n^{(\eta)}(t) + 1)} \left(\frac{s_0}{2m^2 - \frac{t}{2}} \right)^{\alpha_n^{(\eta)}(t)},$$

где s_0 — любой наперед выбранный масштаб (например, $s_0 = 1$ ГэВ²); $\Gamma(x)$ — гамма-функция Эйлера (заметим, что функция $\beta_n^{(\eta, s_0)}(t)$ зависит от выбранного масштаба s_0 , в дальнейшем мы будем опускать индекс s_0 в ее обозначении), в пределе высоких энергий получаем

$$\delta(s, t) = \sum_n \left(i + \operatorname{tg} \frac{\pi(\alpha_n^+(t) - 1)}{2} \right) \beta_n^+(t) \left(\frac{s}{s_0} \right)^{\alpha_n^+(t)} + \\ + \sum_n \left(i - \operatorname{ctg} \frac{\pi(\alpha_n^-(t) - 1)}{2} \right) \beta_n^-(t) \left(\frac{s}{s_0} \right)^{\alpha_n^-(t)}. \quad (9)$$

Последняя формула (отметим, что она подходит и к тем одночастичным обменам, для которых нарушено (6)) вместе с эйкональным представлением амплитуды (2) и составляет содержание редже-эйкональной модели.

Таким образом, практическая польза редже-эйконального подхода заключается в возможности уменьшения функционального произведения путем сведения неизвестной функции двух переменных $T(s, t)$ к нескольким функциям одной переменной, каковыми являются траектории Редже и реджевские вычеты.

ПОВЕДЕНИЕ ТРАЕКТОРИЙ РЕДЖЕ В ОБЛАСТИ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЙ АРГУМЕНТА

Как уже было отмечено выше, единственными твердо установленными ограничениями на функциональную форму траекторий Редже в области отрицательных значений аргумента являются их вещественность и ренорминвариантность. Для получения более детальной информации об этих функциях необходимо обратиться к рассмотрению конкретных квантово-полевых моделей.

В случае квантовой хромодинамики любая ренорминвариантная функция одной динамической переменной может быть представлена в области асимптотически больших отрицательных значений этой переменной (когда можно

пренебречь массовыми эффектами кварковых полей) в форме общего решения уравнения Овсянникова [6]

$$f(t) \equiv \tilde{f}\left(\frac{t}{\mu^2}, \alpha_s(\mu)\right) = \Phi\left(\frac{t}{\mu^2} e^{K(\alpha_s(\mu))}\right),$$

где $\Phi(x)$ — некоторая аналитическая функция; μ — размерный параметр схемы перенормировки; $\alpha_s(\mu) \equiv g_s^2(\mu)/4\pi$ — бегущая константа связи; $K'(\alpha_s) = 1/\beta(\alpha_s) \equiv \left(\mu^2 \frac{\partial \alpha_s}{\partial \mu^2}\right)^{-1}$ (вследствие асимптотической свободы $K(\alpha_s(\mu)) \rightarrow -\infty$ при $\mu \rightarrow +\infty$). Переходя к пределу $\mu = \sqrt{-t}$, $t \rightarrow -\infty$, получаем

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} f(t) = \Phi(0) = \text{const.} \quad (10)$$

В теории потенциального рассеяния наклон траектории Редже $\alpha(t)$ связан с квадратом эффективного радиуса взаимодействия, порождающего эту траекторию, приближенным соотношением [5, 7] $R^2 \sim \alpha'(t)(2\alpha(t)+1)$. Поэтому в квантово-механическом смысле $\lim_{t \rightarrow -\infty} \alpha(t) = \text{const}$ действительно соответствует малым расстояниям и пределу свободных полей при асимптотически больших значениях переданного импульса (отметим, что такое соответствие отсутствует для $\alpha(t) = \alpha_0 + \alpha'_0 t$, $\alpha'_0 > 0$, когда $R^2 \rightarrow -\infty$ при $t \rightarrow -\infty$).

Дополнительная к (10) информация о поведении конкретных траекторий Редже может быть получена из количественных оценок в области применимости пертурбативных методов (заметим, что использование теории возмущений возможно уже при $-t > 6 \text{ ГэВ}^2$, поскольку бегущая константа связи на таких масштабах $\alpha_s(\sqrt{-t}) < 0,3$ [8]). Так, для траекторий, соответствующих обменам парой «кварк–антикварк» в пертурбативном секторе, было получено [9]

$$\alpha_{\bar{q}q}(t) = \sqrt{\frac{8}{3\pi}} \alpha_s(\sqrt{-t}) + o(\alpha_s^{1/2}(\sqrt{-t})). \quad (11)$$

Для траекторий, соответствующих мультиглюонным обменам в области асимптотически больших значений переданного импульса, имеет место предельное соотношение [10–12]

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \alpha_{gg\dots g}(t) = 1, \quad (12)$$

и, в частности, для серии траекторий, отвечающих обмену двумя глюонами в пертурбативной области [13],

$$\alpha_{gg}^{(r)}(t) = 1 + \frac{12 \ln 2}{\pi} \alpha_s(\sqrt{-t}) \left[1 - \alpha_s^{2/3}(\sqrt{-t}) \left(\frac{7\zeta(3)}{2 \ln 2} \right)^{1/3} \times \right. \\ \left. \times \left(\frac{r + 3/4}{11 - 2/3 n_f} \right)^{2/3} + o(\alpha_s^{2/3}(\sqrt{-t})) \right], \quad (13)$$

где $\zeta(x)$ — дзета-функция Римана; n_f — число кварковых ароматов; r — индекс, принимающий значения $0, 1, 2, \dots$

В настоящее время все полезные с практической точки зрения предсказания КХД о поведении лидирующих мезонных траекторий Редже в области рассеяния ограничиваются соотношениями (11)–(13), поэтому при описании дифракционных процессов приходится прибегать к построению феноменологических схем. При этом в каждой корректной феноменологической модели, использующей реджевский подход, должна быть учтена применимость соотношений (11)–(13) в пертурбативном секторе.

Очевидным следствием (11)–(13) является фундаментальная нелинейность траекторий Редже, хотя сами по себе эти соотношения не накладывают никаких ограничений на функциональную форму траекторий Редже при достаточно малых t . Чтобы получить эти ограничения, мы прибегнем к некоторым естественным допущениям касательно поведения мнимой части лидирующих траекторий на физическом листе.

Любая траектория Редже $\alpha(t)$ является вещественно-аналитической функцией на комплексной плоскости с разрезом вдоль полупрямой $(t_T, +\infty)$, $t_T > 0$ [5], и мы предположим, что $\text{Im } \alpha(t + i0)$ растет достаточно медленно при $t \rightarrow +\infty$ (например, не быстрее, чем $Ct \ln^{-1-\epsilon} t$, $\epsilon > 0$), так что для $\alpha(t)$ на физическом листе будут иметь место дисперсионные соотношения с не более чем одним вычитанием, т. е.

$$\alpha(t) = \alpha_0 + \frac{t}{\pi} \int_{t_T}^{+\infty} \frac{\text{Im } \alpha(t' + i0)}{t'(t' - t)} dt',$$

а также предположим, что $\text{Im } \alpha(t + i0) \geq 0$ при $t \geq t_T$. При таких условиях (отметим, что в общем случае они не являются строго доказанными, хотя явно выполнены в теории потенциального рассеяния и теории возмущений [5]) $\alpha(t)$ с необходимостью оказывается функцией Герглотца [5], т. е.

$$\frac{d^n \alpha(t)}{dt^n} > 0 \quad (t < t_T, n = 1, 2, 3, \dots). \quad (14)$$

В дальнейшем мы будем считать, что для истинных траекторий Редже, дающих лидирующие вклады в амплитуду дифракционного рассеяния, выполнены соотношения (14).

Тем не менее для феноменологического описания процессов упругой дифракции при высоких энергиях в качестве чисто количественных приближений к истинным траекториям Редже в области дифракционного рассеяния вполне могут быть использованы не только функции Герглотца, но и любые функции, монотонные вместе с одной или несколькими первыми производными, предполагающие возможность осуществления достаточно гладкой сшивки с пертурбативным сектором.

В связи с этим следует отметить, что лидирующая траектория из (13) $\alpha_{gg}^{(0)}(t)$ не может быть монотонным образом сшита с траекторией $\alpha_P(t)$, дающей основной вклад в эйконал в дифракционной области (обычно $\alpha_P(t)$ называют «мягким помероном»), из-за феноменологического ограничения $\alpha_P(0) < 1,15$, в то время как $\alpha_{gg}^{(0)}(-M_Z^2) \approx 1,28$, $M_Z \approx 91,2$ ГэВ. Поэтому далее мы будем предполагать, что траектория $\alpha_{gg}^{(0)}(t)$ соответствует так называемому «жесткому» померону с пересечением $\alpha_{gg}^{(0)}(0) > 1,3$ [14], а обмен «мягким» помероном соответствует обмену более чем двумя глюонами при асимптотически больших передачах импульса, и единственными ограничениями на функциональную форму феноменологических параметризаций траектории «мягкого» померона остаются асимптотическое условие (12) и предположение о монотонности.

В отличие от померонной траектории для вторичных траекторий, соответствующих семействам наблюдаемых мезонных резонансов, удается подобрать функции Герглотца, одновременно имеющие асимптотику (11) и демонстрирующие разумное (с феноменологической точки зрения) поведение в области дифракционного рассеяния.

Заметим также, что, в совокупности, выполнение условий (11), (12) и (14) автоматически приводит к отсутствию нефизических особенностей в сигнатурных множителях в области рассеяния и связанных с этими сингулярностями проблем.

ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ МИНИМАЛЬНОГО ЭЙКОНАЛА

Помимо «мягкого» померона существуют, по крайней мере, четыре вторичные мезонные траектории, дающие заметный вклад в эйконал (9), а именно C -четные реджеоны f_2 и a_2 и C -нечетные реджеоны ω и ρ . Мы будем предполагать, что траектории вторичных реджеонов с одинаковой сигнатурой приближенно совпадают вследствие изоспиновой симметрии кварковых ароматов, т. е. $\alpha_{a_2}(t) \approx \alpha_{f_2}(t) \approx \alpha_+(t)$ и $\alpha_\rho(t) \approx \alpha_\omega(t) \approx \alpha_-(t)$. Поэтому минимальный эйконал имеет вид ($s_0 \equiv 1$ ГэВ²)

$$\begin{aligned} \delta(s, t) &= \delta_P(s, t) + \delta_+(s, t) \mp \delta_-(s, t) = \\ &= \left(i + \operatorname{tg} \frac{\pi(\alpha_P(t) - 1)}{2} \right) \beta_P(t) \left(\frac{s}{s_0} \right)^{\alpha_P(t)} + \\ &+ \left(i + \operatorname{tg} \frac{\pi(\alpha_+(t) - 1)}{2} \right) \beta_+(t) \left(\frac{s}{s_0} \right)^{\alpha_+(t)} \mp \\ &\mp \left(i - \operatorname{ctg} \frac{\pi(\alpha_-(t) - 1)}{2} \right) \beta_-(t) \left(\frac{s}{s_0} \right)^{\alpha_-(t)}, \quad (15) \end{aligned}$$

где $\alpha_P(t)$, $\alpha_+(t)$, $\alpha_-(t)$ — траектории померона и вторичных реджеонов; $\beta_P(t)$ — вычет померона; $\beta_+(t) \equiv \beta_{f_2}(t) + \beta_{a_2}(t)$ и $\beta_-(t) \equiv \beta_\omega(t) + \beta_\rho(t)$ — суммы вычетов C -четных и C -нечетных вторичных траекторий соответственно, знак минус (плюс) перед C -нечетным вкладом соответствует рассеянию частицы на частице (античастице).

Феноменологическую параметризацию для вклада померона в эйконал выберем в форме

$$\begin{aligned}\alpha_P(t) &= 1 + p_1 \left[1 - p_2 t \left(\operatorname{arctg}(p_3 - p_2 t) - \frac{\pi}{2} \right) \right], \\ \beta_P(t) &= B_P e^{b_P t} (1 + d_1 t + d_2 t^2 + d_3 t^3 + d_4 t^4).\end{aligned}\quad (16)$$

Данное приближение для траектории померона $\alpha_P(t)$ является монотонным, и для него явным образом выполнено асимптотическое условие (12). Вклады вторичных реджеонов параметризуем функциями

$$\alpha_\pm(t) = \left(\frac{8}{3\pi} \alpha_s(\sqrt{-t + c_\pm}) \right)^{1/2}, \quad \beta_\pm(t) = B_\pm e^{b_\pm t}, \quad (17)$$

где

$$\alpha_s(\mu) = \frac{4\pi}{11 - \frac{2}{3}n_f} \left(\frac{1}{\ln \frac{\mu^2}{\Lambda^2}} + \frac{1}{1 - \frac{\mu^2}{\Lambda^2}} \right) \quad (18)$$

— так называемая однопетлевая аналитическая бегущая константа связи [15]; $n_f = 3$ — число учитываемых кварковых ароматов; $\Lambda \equiv \Lambda^{(3)} = 0,346$ ГэВ — размерный параметр КХД (значение взято из [8]), а феноменологические параметры c_+ , $c_- > 0$ достаточно малы, чтобы не испортить асимптотического поведения (11) вторичных траекторий в пертурбативном секторе.

Заметим, что даже при асимптотически больших значениях переданного импульса поведение используемого приближения (16) траектории «мягкого» померона имеет явно непertурбативный характер

$$\alpha_P(t) - 1 \sim \frac{1}{-t} \sim \exp \left(-\frac{\operatorname{const}}{\alpha_s(\sqrt{-t})} \right) \quad (t \rightarrow -\infty)$$

и этим качественно отличается от пертурбативного поведения вторичных траекторий (11).

Отметим также, что мы пренебрегли вкладом в эйконал траектории, называемой в литературе «оддероном», которая является C -нечетным партнером померона. Хотя возможность такого пренебрежения при малых углах рассеяния феноменологически обоснована приближенным равенством полных сечений протон-протонного и протон-антипротонного рассеяния при энергиях

столкновения $\sqrt{s} > 200$ ГэВ, адекватность этого приближения для углов рассеяния $-t < 3$ ГэВ² может быть проверена лишь при наличии угловых распределений в указанной кинематической области для обеих реакций: $p+p \rightarrow p+p$ и $\bar{p}+p \rightarrow \bar{p}+p$. К сожалению, в настоящее время отсутствуют данные по упругой дифракции для процесса $p+p \rightarrow p+p$ при энергиях $\sqrt{s} > 62,5$ ГэВ. Тем не менее пренебрежение вкладом оддерона в эйконал (15) диктуется нашим стремлением построить минимальную феноменологическую схему, описывающую дифракционную картину при высоких энергиях.

ОПИСАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

Обратимся к описанию процессов упругой дифракции при высоких энергиях. Единственными реакциями, измеренными в достаточно широком диапазоне энергий, являются процессы $p+p \rightarrow p+p$ и $\bar{p}+p \rightarrow \bar{p}+p$. Результаты фитирования по угловым распределениям в кинематической области $\sqrt{s} > 23$ ГэВ, $0,005 < -t < 3$ ГэВ² (при бóльших углах рассеяния необходимо учитывать вклады так называемых «жестких» померонов и оддеронов, дающих доминирующий вклад в эйконал в пертурбативной области) [16]* представлены в табл. 1, 2 и рис. 1, 2.

Таблица 1. Результаты подгонки свободных феноменологических параметров

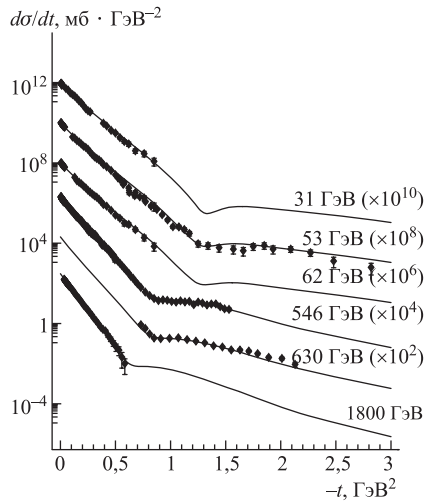
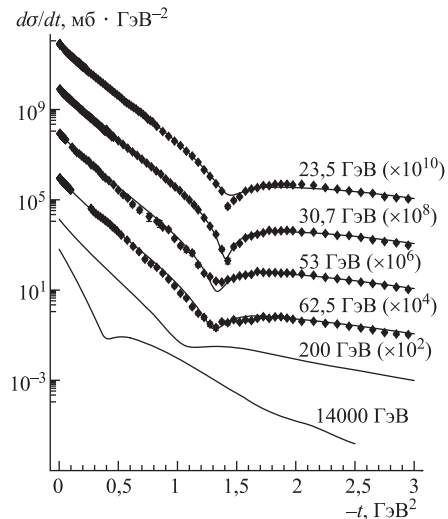
Параметры	Померон	Параметры модели	f_2/a_2 -реджеон	Параметры модели	ω/ρ -реджеон
p_1	0,123	c_+	0,1 ГэВ ²	c_-	0,9 ГэВ ²
p_2	1,58 ГэВ ⁻²				
p_3	0,15				
B_P	43,5	B_+	153	B_-	46
b_P	2,4 ГэВ ⁻²	b_+	4,7 ГэВ ⁻²	b_-	5,6 ГэВ ⁻²
d_1	0,43 ГэВ ⁻²				
d_2	0,39 ГэВ ⁻⁴				
d_3	0,051 ГэВ ⁻⁶				
d_4	0,035 ГэВ ⁻⁸				
$\alpha_P(0)$	1,123	$\alpha_+(0)$	0,78	$\alpha_-(0)$	0,64
$\alpha'_P(0)$	0,28 ГэВ ⁻²	$\alpha'_+(0)$	0,63 ГэВ ⁻²	$\alpha'_-(0)$	0,07 ГэВ ⁻²

На рис. 3 и 4 представлены предсказания соответственно для полного сечения рассеяния и отношения реальной части амплитуды рассеяния вперед

*Для вычисления электромагнитных поправок к амплитуде рассеяния мы воспользовались рецептом, взятым из [17]; см. также [18].

Таблица 2. Качество описания экспериментальных угловых распределений

Массив данных	Число точек	χ^2
$\sqrt{s} = 23$ ГэВ (pp)	124	280
$\sqrt{s} = 31$ ГэВ (pp)	154	467
$\sqrt{s} = 53$ ГэВ (pp)	85	423
$\sqrt{s} = 62$ ГэВ (pp)	107	409
$\sqrt{s} = 31$ ГэВ ($\bar{p}p$)	38	108
$\sqrt{s} = 53$ ГэВ ($\bar{p}p$)	60	336
$\sqrt{s} = 62$ ГэВ ($\bar{p}p$)	40	156
$\sqrt{s} = 546$ ГэВ ($\bar{p}p$)	181	352
$\sqrt{s} = 630$ ГэВ ($\bar{p}p$)	19	78
$\sqrt{s} = 1800$ ГэВ ($\bar{p}p$)	50	129
Всего	858	2738

Рис. 1. Дифференциальные сечения для процесса $\bar{p}p \rightarrow \bar{p}p$ при различных значениях энергии столкновенияРис. 2. Дифференциальные сечения для процесса $pp \rightarrow pp$ при различных значениях энергии столкновения

к мнимой в зависимости от энергии столкновения. В частности, для коллайдеров RHIC и LHC имеем $\sigma_{\text{tot}}(200 \text{ ГэВ}) \approx 52 \text{ мб}$, $\sigma_{\text{tot}}(14 \text{ ТэВ}) \approx 111 \text{ мб}$.

На рис. 5 изображены приближенные траектории Редже «мягкого» померона $\alpha_P(t)$ и вторичных реджеонов $\alpha_+(t)$, $\alpha_-(t)$, полученные в результате подгонки параметров. Отметим, что хотя пересечения $\alpha_+(0)$, $\alpha_-(0)$ распо-

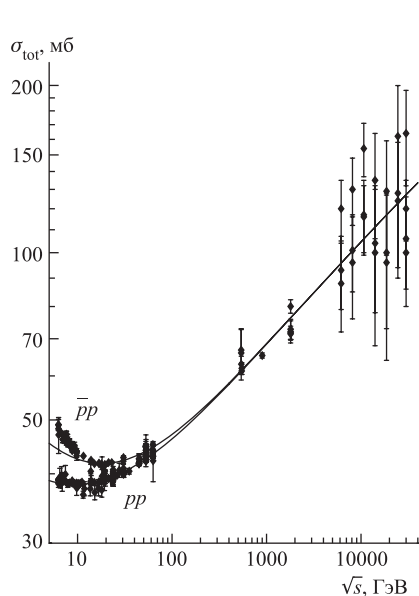


Рис. 3. Зависимость полного сечения нуклон-нуклонного рассеяния от энергии столкновения (экспериментальные данные взяты из базы данных Particle Physics Data System. <http://www.ppds.ihep.su:8001/ppds.html>)

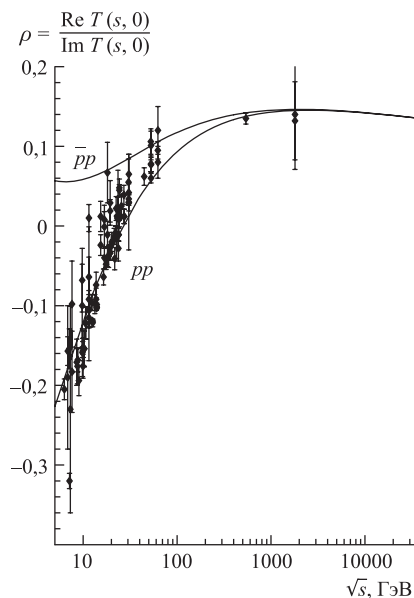


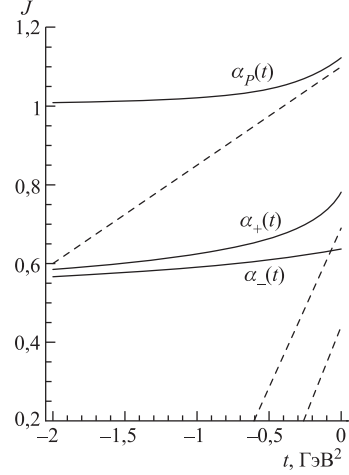
Рис. 4. Отношение реальной части амплитуды нуклон-нуклонного рассеяния вперед к мнимой как функция энергии столкновения (экспериментальные данные взяты из базы данных Particle Physics Data System. <http://www.ppds.ihep.su:8001/ppds.html>)

ложены выше пересечений соответствующих кривых Чу–Фраучи, но имеют значительно меньшие наклоны при $t = 0$ (см. табл. 1). Поэтому не исключена возможность гладкой и монотонной сшивки кривых Чу–Фраучи в резонансной области и наших приближений к мезонным траекториям в области рассеяния, и, таким образом, представленные количественные оценки для вторичных траекторий в области $0 < -t < 2 \text{ ГэВ}^2$ не противоречат ни асимптотическим пертурбативным соотношениям (11), ни феноменологии, ни соотношениям (14).

Для сравнения в табл. 3 показано качество описания данных, полученное другими авторами при феноменологическом описании тех же процессов.

Особо выделим работу [25], где представлено лучшее в настоящее время феноменологическое описание данных в столь обширной кинематической области. В этой работе используется так называемая модель «дипольного» померона, в которой член, дающий основной вклад в амплитуду рассеяния,

Рис. 5. Приближенные траектории Редже «мягкого» померона и реджеонов f_2/a_2 и ω/ρ , полученные при подгонке свободных параметров (штриховые линии: $\alpha_f^{\text{lin}}(t) = 0,69 + 0,81 t$ и $\alpha_\omega^{\text{lin}}(t) = 0,44 + 0,92 t$ — продолжения кривых Чу-Фраучи для реджеонов f_2 и ω , а $\alpha_P^{\text{lin}}(t) = 1,1 + 0,25 t$ — обычно используемая в литературе линейная траектория «мягкого» померона)



имеет вид

$$a_d(s, t) \sim \frac{\partial}{\partial j} \left[\frac{\beta_d(j, t)}{\sin \frac{\pi j}{2}} \left(-i \frac{s}{s_0} \right)^{j-1} \right] \Bigg|_{j=\alpha_d(t)} = \left[\frac{\partial \ln \beta_d(j, t)}{\partial j} \Bigg|_{j=\alpha_d(t)} + \right. \\ \left. + \frac{\pi}{2} \operatorname{tg} \frac{\pi(\alpha_d(t) - 1)}{2} + \ln \left(-i \frac{s}{s_0} \right) \right] \times \frac{\beta_d(\alpha_d(t), t)}{\sin \frac{\pi \alpha_d(t)}{2}} \left(-i \frac{s}{s_0} \right)^{\alpha_d(t)-1},$$

где $s_0 = 1 \text{ ГэВ}^2$, $\alpha_d(t) = 1 + \alpha'_d t$, $\alpha'_d \approx 0,31 \text{ ГэВ}^{-2}$.

Таблица 3. Информация о качестве описания данных по упругому нуклон-нуклонному рассеянию другими авторами

Ссылка	$\chi^2/\text{d.o.f.}$	Кинематическая область	
[19]	Не представлено	$23 \leq \sqrt{s} \leq 546 \text{ ГэВ}$,	$0 < -t \leq 4 \text{ ГэВ}^2$
[20]	2,0	$53 \leq \sqrt{s} \leq 630 \text{ ГэВ}$,	$0 < -t \leq 5 \text{ ГэВ}^2$
[21]	2,4	$19 \leq \sqrt{s} \leq 1800 \text{ ГэВ}$,	$0,1 \leq -t \leq 14 \text{ ГэВ}^2$
[22]	2,6	$23 \leq \sqrt{s} \leq 1800 \text{ ГэВ}$,	$0,01 \leq -t \leq 14 \text{ ГэВ}^2$
[23]	4,3	$23 \leq \sqrt{s} \leq 1800 \text{ ГэВ}$,	$0 < -t \leq 6 \text{ ГэВ}^2$
[24]	2,8	$23 \leq \sqrt{s} \leq 1800 \text{ ГэВ}$,	$0,01 \leq -t \leq 14 \text{ ГэВ}^2$
[25]	1,5	$6 \leq \sqrt{s} \leq 1800 \text{ ГэВ}$,	$0,1 \leq -t \leq 6 \text{ ГэВ}^2$

К сожалению, при описании экспериментальных данных автор [25] пренебрегает первым и вторым слагаемым в квадратных скобках, что, в общем

случае, неверно в области $\sqrt{s} < 50$ ГэВ, $-t > 1$ ГэВ², когда $\left| \frac{\pi}{2} \operatorname{tg} \frac{\pi(\alpha_d(t) - 1)}{2} \right| > 0,8$ и $\ln \left(\frac{s}{s_0} \right) < 8$. Во избежание этой трудности при описании данных в кинематической области $\sqrt{s} > 6$ ГэВ, $0,1 < -t < 6$ ГэВ² необходимо наложить специфическое ограничение на поведение неизвестной аналитической функции $\beta_d(j, t)$:

$$\left| \frac{\partial}{\partial j} \left[\ln \frac{\beta_d(j, t)}{\sin \frac{\pi j}{2}} \right] \right|_{j=1+\alpha'_d t} \ll \ln \left(\frac{s}{s_0} \right) \quad (\sqrt{s} > 6 \text{ ГэВ}, 0,1 < -t < 6 \text{ ГэВ}^2)$$

(знак \ll в последнем неравенстве означает, что мы можем пренебречь соответствующим членом в амплитуде без существенного изменения $\chi^2/\text{d.o.f.}$).

Это ограничение, не упоминаемое в [25], но тем не менее явно присутствующее в модели «дипольного» померона, не имеет какого-либо обоснования из КХД или общих принципов и, на наш взгляд, лишает представленную в [25] феноменологическую схему твердого теоретического фундамента (та же аргументация может быть применена и к модели «трипольного» померона, также рассмотренной в [25]).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Подведем итоги. На примере упругого дифракционного протон-(анти)протонного рассеяния было показано, что явный учет асимптотических свойств траекторий Редже в пертурбативном секторе позволяет не только избежать проблем, связанных с возникновением нефизических сигнатурных сингулярностей в области рассеяния, но и качественно воспроизвести дифракционную картину в достаточно широкой кинематической области в рамках имеющей прозрачный физический смысл минимальной феноменологической схемы, учитывая лишь те траектории Редже, существенность вклада которых не может быть подвергнута сомнению. В этом и состоит основное практическое преимущество предложенного подхода перед использованием линейных траекторий Редже, когда более или менее удовлетворительное описание экспериментальных данных возможно лишь при использовании большего числа реджеонов [20–22, 25].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kaidalov A. B.* Some Problems of Diffraction at High Energies. hep-ph/0612358.
2. *Godizov A. A., Petrov V. A.* Nonlinearity of Regge Trajectories in the Scattering Region. hep-ph/0701121.

3. *Arnold R. C.* Optical Potential for High-Energy Physics: Theory and Applications // *Phys. Rev.* 1967. V. 153. P. 1523–1546.
4. *Van Hove L.* Regge Pole and Single Particle Exchange Mechanisms in High Energy Collisions // *Phys. Lett. B.* 1967. V. 24. P. 183–184.
5. *Коллинз П., Сквайрс Ю.* Полюса Редже в физике частиц. М.: Мир, 1971;
Коллинз П. Введение в реджевскую теорию и физику высоких энергий. М.: Атомиздат, 1980.
6. *Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В.* Введение в теорию квантованных полей. М.: Наука, 1984. 491 с.
7. *Regge T.* Bound States, Shadow States and Mandelstam Representation // *Nuovo Cim.* 1960. V. 18. P. 947–956.
8. *Bethke S.* Determination of the QCD Coupling Alpha(s) // *J. Phys. G.* 2000. V. 26. P. R27–R66.
9. *Kwiecinski J.* Leading q Anti- q Regge Singularities in Perturbative Quantum Chromodynamics // *Phys. Rev. D.* 1982. V. 26. P. 3293–3296;
Kirschner R. Regge Asymptotics of Scattering with Flavour Exchange in QCD // *Z. Phys. C.* 1995. Bd. 67. S. 459–466.
10. *Cheng H., Wu T. T.* High-Energy Elastic Scattering in Quantum Electrodynamics // *Phys. Rev. Lett.* 1969. V. 22. P. 666–669.
11. *Low F. E.* Model of the Bare Pomeron // *Phys. Rev. D.* 1975. V. 12. P. 163–173;
Nussinov S. Perturbative Recipe for Quark–Gluon Theories and Some of Its Applications // *Phys. Rev. D.* 1976. V. 14. P. 246–257.
12. *Collins P. D. B., Kearney P. J.* Regge Theory and QCD in Large Angle Scattering // *Z. Phys. C.* 1984. Bd. 22. S. 277–288.
13. *Kirschner R., Lipatov L. N.* Bare Reggeons in Asymptotic Free Theories // *Z. Phys. C.* 1990. Bd. 45. S. 477–483.
14. *Лунатов Л.Н.* Затравочный померон в квантовой хромодинамике // *ЖЭТФ.* 1986. Т. 90, вып. 5. С. 1536–1552.
15. *Shirkov D. V., Solovtsov I. L.* Analytic Model for the QCD Running Coupling with Universal Alpha- s (0) Value // *Phys. Rev. Lett.* 1997. V. 79. P. 1209–1212.
16. <http://durpdg.dur.ac.uk/hepdata/reac.html>
de Kerret H. et al. Evidence for a Change of Slope in Large- t Elastic Proton–Proton Scattering at $\sqrt{s} = 53$ GeV // *Phys. Lett. B.* 1977. V. 68. P. 374–376;
Amaldi U., Schubert K. R. Impact Parameter Interpretation of Proton–Proton Scattering from a Critical Review of All ISR Data // *Nucl. Phys. B.* 1980. V. 166. P. 301–320;
Breakstone A. et al. A Measurement of $\bar{p}p$ and pp Elastic Scattering at ISR Energies // *Nucl. Phys. B.* 1984. V. 248. P. 253–260;
Breakstone A. et al. Measurement of $\bar{p}p$ and pp Elastic Scattering in the Dip Region at $\sqrt{s} = 53$ GeV // *Phys. Rev. Lett.* 1985. V. 54. P. 2180–2183;
Amos N. et al. Measurement of Small-Angle Antiproton–Proton and Proton–Proton Elastic Scattering at the CERN Intersecting Storage Rings // *Nucl. Phys. B.* 1985. V. 262. P. 689–714;

- Battiston R. et al. (UA4 Collab.).* Proton–Antiproton Elastic Scattering at Four-Momentum Transfer up to 0.5 GeV^2 at the CERN SPS Collider // *Phys. Lett. B.* 1983. V. 127. P. 472–475;
- Bozzo M. et al. (UA4 Collab.).* Elastic Scattering at the CERN SPS Collider up to a Four-Momentum Transfer of 1.55 GeV^2 // *Phys. Lett. B.* 1985. V. 155. P. 197–202;
- Bernard D. et al. (UA4 Collab.).* The Real Part of the Proton–Antiproton Elastic Scattering Amplitude at the Centre of Mass Energy of 546 GeV // *Phys. Lett. B.* 1987. V. 198. P. 583–589;
- Bernard D. et al. (UA4 Collab.).* Large- t Elastic Scattering at the CERN SPS Collider at $s^{1/2} = 630 \text{ GeV}$ // *Phys. Lett. B.* 1986. V. 171. P. 142–144;
- Amos N. et al. (E-710 Collab.).* Antiproton–Proton Elastic Scattering at $s^{1/2} = 1.8 \text{ TeV}$ from $t = 0.034$ to 0.65 (GeV/c)^2 // *Phys. Lett. B.* 1990. V. 247. P. 127–130.
17. *Cahn R.* Coulombic-Hadronic Interference in an Eikonal Model // *Z. Phys. C.* 1982. Bd. 15. S. 253–260.
 18. *Petrov V. A., Prokudin A. V., Predazzi E.* Coulomb Interference in High-Energy pp and $\bar{p}p$ Scattering // *Eur. Phys. J. C.* 2003. V. 28. P. 525–533.
 19. *Donnachie A., Landshoff P. V.* Dynamics of Elastic Scattering // *Nucl. Phys. B.* 1986. V. 267. P. 690–701.
 20. *Jenkovszky L. L., Struminsky B. V., Shelkovenko A. N.* Odd C Exchange in High-Energy $\bar{p}p$ and pp Scattering // *Z. Phys. C.* 1987. Bd. 36. S. 495–502.
 21. *Desgrolard P., Giffon M., Martynov E.* Elastic pp and $\bar{p}p$ Scattering in the Modified Additive Quark Model // *Eur. Phys. J. C.* 2000. V. 18. P. 359–367.
 22. *Petrov V. A., Prokudin A. V.* The First Three Pomerons... // *Eur. Phys. J. C.* 2002. V. 23. P. 135–143.
 23. *Bourrely C., Soffer J., Wu T. T.* Impact Picture Phenomenology for $\pi^\pm p$, $K^\pm p$ and pp , $\bar{p}p$ Elastic Scattering at High Energies // *Eur. Phys. J. C.* 2003. V. 28. P. 97–105.
 24. *Avila R. F. et al.* Phenomenological Analysis Connecting Proton–Proton and Antiproton–Proton Elastic Scattering // *Eur. Phys. J. C.* 2006. V. 47. P. 171–186.
 25. *Martynov E.* Elastic pp and $\bar{p}p$ Scattering in the Models of Unitarized Pomeron. hep-ph/0703248.