ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА
2009. Т. 40. ВЫП. 7

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОПИСАНИЯ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ

С. С. Санников-Проскуряков

Институт теоретической физики им. А. И. Ахиезера ННЦ ХФТИ, Харьков, Украина

ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА
2009. Т. 40. ВЫП. 7

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОПИСАНИЯ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ

С. С. Санников-Проскуряков

Институт теоретической физики им. А. И. Ахиезера ННЦ ХФТИ, Харьков, Украина

В обзоре представлены разделы, которые составляют первую часть собрания трудов С. С. Санникова-Проскурякова. Первый и второй разделы составлены из ранних работ. Четыре статьи, помещенные в разд. 3–7, написаны в последние годы его жизни. Наиболее весомые результаты, полученные С. С. Санниковым-Проскуряковым, могут быть полезны для глубокого понимания той новой ситуации, к которой нас приводит современное развитие физики высоких энергий.

The sections that comprise Part I of the collected papers written by S. S. Sannikov-Proskuryakov are presented in the review. The first and second sections contain the early works. The four articles contained in Secs. 3–7 were written during the last years of his life. The essential results achieved by S. S. Sannikov-Proskuryakov may be helpful for a full appreciation of the new situation which the modern development of high energy physics has confronted us with.

PACS: 02.20.-a; 02.20.Sv; 02.30.Cj

ПРЕДИСЛОВИЕ

В марте 2007 г. ушел из жизни Сергей Семенович Санников-Проскуряков — самобытный и талантливый физик-теоретик. Его научная деятельность в основном связана с Харьковским физико-техническим институтом. Солидное математическое образование и глубокое понимание природы физических процессов дали ему возможность сформировать свою точку зрения на основные направления развития квантовой теории поля и известные проблемы мироздания.

Круг научных интересов Сергея Семеновича Санникова достаточно широк. Автор приводимых ниже работ имеет свое собственное мнение об обсуждаемых проблемах, не всегда совпадающее с общепризнанным.

Работы Санникова середины 1960-х гг., можно сказать, превзошли уровень понимания физических явлений того времени. Им были исследованы некомпактные группы и предсказано существование физических объектов, имеющих собственные моменты, отличные от моментов фермионов и бозонов, отвечающих спинам 1/4 и 3/4. В экспериментах, проведенных несколько лет назад, были получены косвенные указания на их существование.

Представляют интерес его работы 1990-х гг. и первого десятилетия этого века, посвященные исследованию вопросов эволюции Вселенной, происхождения жизни. Цикл этих работ Санникова будет рассмотрен отдельно.

Одно из оригинальных исследований — некомпактная группа Лоренца и ее бесконечномерные представления, отвечающие значениям инварианта Казимира 3/4 и 1/4, которые ассоциируются автором с некоторыми частицами — преонами — истинными неделимыми кирпичиками Природы. Это исследование стало актуальным при попытках объяснить так называемый спиновый кризис. Опыты по глубоконеупругому рассеянию, проведенные с целью измерения спина протона, дали неожиданный результат: вместо ожидаемого значения 1/2 в экспериментах было получено 1/4.

Триумфальное развитие теоретической физики с середины прошлого века основывалось на обширных экспериментальных данных. Тогда было предложено адекватное описание процессов взаимодействия лептонов с атомами и адронами при малых импульсах, передаваемых изучаемой мишени. Описание адронов с квантовыми числами фермионов с помощью 4-мерных спиноров, удовлетворяющих уравнению Дирака, считалось нормальным, а структура протона учитывалась в виде его формфакторов. Было сделано заключение об адекватности описания процессов и при любых переданных импульсах адрону в терминах унитарных представлений группы Пуанкаре (группы вращений), в частности, в терминах спиноров, соответствующих значению спина 1/2.

Успешное описание опытов при низких энергиях не дает, однако, основания для реалистических предсказаний в области больших переданных импульсов.

Сергей Семенович показал, что процедура Дирака «извлечения квадратного корня» из уравнения Клейна–Гордона, приводящая к уравнению Дирака, может быть продолжена построением неких новых уравнений для новых объектов (преонов). Эти уравнения формально можно понимать как «извлечение квадратного корня» из уравнения Дирака. Проводя эти исследования, он также пришел к тому, что дальнейшая процедура «извлечения корня» уже не приводит к появлению новых объектов.

Отметим, что идея их существования была подтверждена в работах Поля Дирака [6] (1971) при исследовании унитарных представлений группы Лоренца.

Аналогичный результат, исходя из идей суперсимметричного расширения формализма квантовой теории поля, получили Д. В. Волков и Д. П. Сорокин [7] (1993).

В духе идей Санникова кварк следует считать состоящим из двух преонов, и его подструктура может быть проявлена, в частности, в опытах по глубоконеупругому рассеянию на протонах. В экспериментах по глубоконеупругому рассеянию электронов высоких энергий на пучке поляризованных протонов, проведенных в DESY (Германия), измерялся спин протона. Результаты оказались неожиданными: вместо значения 1/2 было с хорошей точностью получено значение 1/4. Этот результат можно интерпретировать как проявление неэлементарной структуры кварка как связанного состояния двух преонов. И, таким образом, проникновение внутрь протона на расстояния, соответствующие переданным импульсам 15–20 ГэВ^2, подтверждает гипотезу Санникова.

Опыты с неполяризованными частицами в этой области энергий допускают, тем не менее, описание в рамках теории поля с точечными кварками. В экспериментах, проводимых в Национальной лаборатории им. Э. Ферми (FNAL, США), где переданные импульсы были на порядок больше, вновь возникли трудности в описании опытов с неполяризованными протонами в рамках моделей с точечными кварками.

Математическая структура микромира, по Санникову, основывается на том, что метрика на малых расстояниях не совпадает с метрикой на больших расстояниях. Пространство на малых расстояниях имеет прерывный характер. Понятие производной при этом теряет смысл. Интересно в связи с этим вспомнить слова Г. Кирхгоффа, которые описывают нашу привычку следовать старым добрым традициям: «Под математической физикой, начиная с 1850 г., подразумевалась физика, оперирующая с дифференциальными уравнениями на основе представления о непрерывности материи». В предложенном Сергеем Семеновичем подходе предполагалось, что на некотором множестве можно задать только три различных неэквивалентных между собой топологии. При этом получается, что стандартная квантовая механика соответствует обычной естественной топологии, которая задается измеримыми, по Лебегу, подмножествами конечной меры. Две другие топологии легли в основу разработанных Санниковым схем: квантовой механики в области высоких энергий, для случая, когда конфигурационное пространство представляет собой дисконтинуум, а соответствующее ему импульсное пространство — так называемый боровский конденсат, и низкоэнергетической квантовой теории, в которой импульсное пространство — дисконтинуум, а соответствующее ему конфигурационное пространство — боровский конденсат. В отличие от стандартной квантовой механики в последних двух схемах вместо меры Лебега используется мера Г. Бора, соответственно меняется преобразование Фурье и в описании появляются так называемые почти периодические функции, а равенство Планшереля заменяется равенством Парсеваля. Согласно Санникову, существование предложенных им двух квантовых теорий означает, что обычная квантовая теория не полна, и две его теории позволяют избавиться от этой проблемы неполноты.

Описание неунитарных представлений группы Пуанкаре возможно только в терминах бесконечномерных спиноров. Соответствующий математический аппарат не развит до сих пор. Остаются без ответа и такие вопросы, как возможность описания в терминах матрицы плотности.

Основа соответствующего математического аппарата была заложена в работах Санникова по исследованию состояний с комплексным моментом в квантовой механике и представлениях группы Пуанкаре, цитируемых ниже.

Также следует отметить тесную связь теории комплексных моментов с проводимыми ранее и планируемыми в ближайшем будущем (ЦЕРН, большой адронный коллайдер) экспериментами по периферическому рассеянию адронов, описание которых традиционно основывается на гипотезе полюсов Редже.

В связи с этим представляется актуальной публикация основных работ Сергея Семеновича Санникова в этой области.

Предлагаемый материал расположен следующим образом.

В разд. 1 рассматривается применение метода комплексных угловых моментов к нестабильным состояниям в квантовой механике. Здесь обсуждается определенный класс решений уравнения Шредингера, соответствующих свободному движению нестабильных частиц, связанным нестабильным состояниям и распадающимся состояниям ядер, которым отвечают полюса матрицы рассеяния $S_l(E)$ в области $\mathrm{Re}\, E < 0$. При описании всех таких состояний используются представления группы вращений с комплексным моментом.

В разд. 2 исследуется квантовый осциллятор с точки зрения группы Лоренца L_3, являющейся его группой симметрии. Волновые функции четных (нечетных) уровней осциллятора образуют неприводимые представления этой группы, отвечающие весам 1/4 (3/4). Автором получены некоторые соотношения между волновыми функциями, являющиеся следствием рассматриваемой симметрии. Здесь также рассматривается один класс неприводимых представлений с произвольным (и комплексным) весом группы L_3. Представления построены в реализации функциями комплексного переменного. Обсуждаются основные свойства таких представлений. В общем случае представления реализуются в бесконечномерных пространствах с индефинитной метрикой конечного ранга индефинитности. Найдены выражения матричных элементов рассматриваемых представлений. Отдельно рассмотрены два частных представления, связанных с квантовым (комплексным) осциллятором.

В разд. 3 предложена новая теория, описывающая объекты со спином 1/4. Такие объекты возникают при рассмотрении пространства-времени как дисконтинуума на очень малых расстояниях.

В разд. 4 показано, как устранение противоречия при обосновании интеграла Фурье в волновой теории приводит к новой промежуточной теории — волновой теории на боровском компакте, когда импульсное пространство — дисконтинуум. Здесь исследуется связь между двумя волновыми теориями — теорией на боровском компакте и теорией на лебеговом континууме, а также возможность применения такого подхода к биологическим структурам.

В разд. 5, на основе теории функциональных колец, для области высоких энергий проводится математически последовательный переход к новой волновой механике, являющейся расширением стандартной квантовой схемы, содержащей дополнительные переменные. Последними описываются конституенты фундаментальных частиц — гранулы. Дираковское квантование полей гранул приводит к грассмановой алгебре, с которой определенным образом связана алгебра Гейзенберга и нестандартная динамическая система — релятивистская бигамильтонова, образующая основу нового принципа квантования.

Разд. 6 и 7 посвящены полуспинорному анализу и ненеймановым представлениям группы вращений. Рассматриваются основные элементы полуспинорного анализа: определяется группа одномерных цепей, описываются ее свойства, устанавливается связь этой группы с ненеймановой группой преобразований топологического векторного пространства. Здесь также исследуется связь физической реальности с такими представлениями.

Материалы разд. 1–3 впервые были опубликованы соответственно в работах [1–3]. В разд. 4 и 5 представлены последние работы автора, которые ранее не публиковались. Разд. 6 и 7 являются двумя частями одной работы и впервые опубликованы на английском языке в [4, 5]. Готовится к публикации новая русскоязычная версия, объединяющая обе эти части, которую Сергей Семенович закончил незадолго до своей кончины. Обзор был подготовлен М. Г. Шатневым при поддержке автора.

Мы благодарны редакции журнала «Ядерная физика» за разрешение воспроизвести статью [1]. Мы также признательны редакции «Журнала экспериментальной и теоретической физики» за возможность повторной публикации статьи [2]. Мы выражаем нашу особую благодарность издательству «Elsevier» за разрешение опубликовать статью [3]. Наконец, мы признательны редакции международного физического журнала (издается в Украине) «Spacetime and Substance» за разрешение воспроизвести статьи [4] и [5].

Е. К. Кураев, Ю. П. Степановский, М. Г. Шатнев

1. О СОСТОЯНИЯХ С КОМПЛЕКСНЫМ МОМЕНТОМ В КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ

В связи с исследованиями аналитических свойств амплитуды потенциального рассеяния $S_l(E)$ по l и E в работе [8] было установлено существование полюсов $S_l(E)$ с комплексными значениями l и E (соответствующие полюса находятся в области $\mathrm{Re}\, E > 0$). Полюсам $S_l(E)$ отвечают определенные решения уравнения Шредингера. В работе Редже [9] рассматривались решения, соответствующие резонансным (комплексные энергии E, целые положительные угловые моменты l) и теневым состояниям (вещественные энергии, комплексные угловые моменты). Важно отметить, что особенности $S_l(E)$ как аналитической функции переменных E и l не изолированы, а заполняют некоторую двумерную аналитическую поверхность. На одной из таких поверхностей лежат резонансы и теневые состояния [8] (они являются разными сечениями одной и той же поверхности особенностей $S_l(E)$).

В работе [10] рассматривался еще один тип нестабильных состояний уравнения Шредингера — связанные нестабильные состояния. Такие состояния характеризуются комплексными E и l и находятся в области $\operatorname{Re} E < 0$.

Здесь мы рассмотрим дальнейшие применения комплексных угловых моментов в квантовой механике. Мы обсудим определенный класс решений уравнения Шредингера с комплексными энергиями, при рассмотрении которых оказываются необходимыми представления группы вращений с комплексными моментами, рассмотренные в работе [11]. Такие решения отвечают распадным состояниям (см. п. 1.1). Распадные системы не являются квантово-механическими состояниями в обычном смысле слова, поскольку их волновые функции, вообще говоря, квадратично не интегрируемы. В квантовой механике распадное состояние (как и всякая неизолированная система) должно описываться матрицей плотности. Поэтому предлагаемое нами описание таких состояний с помощью волновых функций является приближенным. В п. 1.2 метод комплексных угловых моментов применяется при рассмотрении распадающихся состояний ядер. Этот метод является естественным дополнением метода комплексных энергий, применявшегося ранее при описании нестабильных состояний (например, в теории α-распада ядер [12]), и может быть использован при рассмотрении сильно возбужденных состояний ядер. Отметим еще, что наш способ введения комплексного момента [11] отличается от реджевского [8] (см. также [13]) характером поведения волновых функций от угловых переменных. В связи с этим в п. 1.3 мы приведем разложение амплитуды рассеяния в терминах нашего подхода к комплексному моменту.

1.1. Нестабильные состояния уравнения Шредингера. 1. Прежде всего рассмотрим задачу на свободное движение нестабильных частиц. Пусть в точке $r = 0$ образуются нестабильные частицы, которые потом при своем движении распадаются. Нужно найти волновую функцию таких частиц. Рассматриваемое состояние описывается решением «стационарного» уравнения Шредингера с комплексной энергией E (используется система единиц, в которой $h = 2m = 1$, m — масса частицы):

$$-\Delta\psi = E\psi.$$

Разделяя переменные $\psi = r^{-1}\chi(r)Y(\theta,\varphi)$, получаем

$$\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}Y\right)+\frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}Y+\lambda(\lambda+1)Y=0, \tag{1.1}$$

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}+E-\frac{\lambda(\lambda+1)}{r^2}\right)\chi=0. \tag{1.2}$$

Рассматриваемой задаче отвечает решение уравнения (1.2), которое имеет асимптотику уходящей сферической волны. Таким решением является функция Ханкеля первого рода [14]

$$\chi_{E,\lambda}(r)=iA\left(\pi\sqrt{E}r\right)^{1/2}H^{(1)}_{\lambda+1/2}\left(\sqrt{E}r\right) \tag{1.3}$$

(A — нормировочный множитель). Решение (1.3) имеет асимптотики

$$\chi \underset{r\to 0}{\approx} c_1 r^{-\lambda}, \quad \chi \underset{r\to\infty}{\approx} c_2\exp\left(i\sqrt{E}r-i\frac{\pi}{2}\lambda\right) \quad \left(\operatorname{Re}\sqrt{E}=k>0\right). \tag{1.4}$$

Поскольку (1.3) описывает распадающиеся частицы, то должно быть $\operatorname{Im}\sqrt{E}=\kappa>0$. Тогда при больших r функция χ имеет затухающую асимптотику: $\chi\approx\exp(ikr-\kappa r)$. Казалось бы, при описании нестабильных частиц можно использовать решения уравнения (1.1), соответствующие целым положительным угловым моментам $\lambda=l$. Но при этом возникает неравноправие радиального движения, которое, как мы видели, имеет затухание по r, и кругового движения, которое не имеет затухания, поскольку при $\lambda=l$ решения уравнения (1.1) периодичны по φ. Непериодические решения уравнения (1.1) существуют только при комплексных λ. Эти решения имеют вид*

$$Y^{\lambda}_{\pm\mu}(\vartheta,\varphi)=c\,\mathrm{e}^{\pm i\mu\varphi}\sin^{-\mu}\vartheta C^{1/2-\mu}_m(\cos\vartheta), \tag{1.5}$$

где $C^{1/2-\mu}_m(\cos\vartheta)$ — полиномы Гегенбауэра [15], а $\mu=m-\lambda$, $m=0,1,2,\ldots,\lambda$. При комплексных λ функции (1.5) имеют необходимое затухание по φ.

В работе [11] показано, что функции (1.5) образуют базис бесконечномерного неприводимого представления группы вращений с комплексным моментом λ.

Следует отметить, что в квантово-механическом описании нестабильных состояний могут быть использованы только те функции бесконечного набора (1.5), у которых $m=0,1,2,\ldots,[\operatorname{Re}\lambda]$ ($[a]$ — целая часть числа a); при

---

*Функции Y^{λ}_{μ} являются собственными функциями оператора L_z: $L_zY^{\lambda}_{\mu}=\mu Y^{\lambda}_{\mu}$, кроме того, $L_+Y^{\lambda}_{\mu}=[\lambda(\lambda+1)-\mu(\mu+1)]^{1/2}Y^{\lambda}_{\mu+1}$, $L_-Y^{\lambda}_{\mu}=[\lambda(\lambda+1)-\mu(\mu-1)]^{1/2}Y^{\lambda}_{\mu-1}$, где $L_\pm=L_{x\pm i}L_y$ (подробнее о функциях с комплексным моментом см. в работе [11]).

этом, конечно, должно быть $\operatorname{Re}\lambda \geqslant 0$. Это связано с тем [11], что функции с указанными λ и m являются квадратично-интегрируемыми (принадлежат классу L^2), и поэтому только для этих функций имеет смысл понятие квантово-механической вероятности (функции с другими значениями m не принадлежат классу L^2).

Итак, свободное движение нестабильных частиц описывается волновыми функциями (1.3), (1.5) с комплексной энергией E и комплексным угловым моментом λ.

2. Рассмотрим теперь решения уравнения Шредингера с центрально-симметричным потенциалом $V(r)$, причем будем считать, что $|V(r)| \leqslant M_\alpha/r^{2\alpha}$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Уравнение для угловой функции Y по-прежнему имеет вид (1.1). Радиальная волновая функция χ удовлетворяет уравнению

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + E - V(r) - \frac{\lambda(\lambda+1)}{r^2}\right)\chi = 0. \tag{1.6}$$

Опять рассмотрим те решения уравнений (1.6), (1.1), которым отвечают комплексные энергии E и комплексные моменты λ. При этом следует различать два класса решений: класс А — $\operatorname{Re}E > 0$ и класс Б — $\operatorname{Re}E < 0$. Решения класса А, отвечающие резонансным состояниям при рассеянии, обсуждались в работе [8]. Поэтому мы рассмотрим только решения класса Б с асимптотическим поведением

$$\chi(r) \underset{r\to 0}{\approx} cr^{\lambda+1}, \quad \chi(r) \underset{r\to\infty}{\approx} \exp\left(-\sqrt{-E}r\right). \tag{1.7}$$

Условия (1.7) означают, что $\chi(r) \in L^2(0,\infty)$.

Пусть

$$V(r) = -\frac{M_\alpha}{r^{2\alpha}}, \quad M_\alpha > 0, \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1.$$

Из (1.6) при условии (1.7) вытекают равенства

$$\operatorname{Im}E\int_0^\infty |\chi|^2 dr - \operatorname{Im}\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)^2 \int_0^\infty r^{-2}|\chi|^2 dr = 0, \tag{1.8}$$

$$\int_0^\infty \left\{\left|\frac{d}{dr}\chi - \frac{\chi}{2r}\right|^2 - \operatorname{Re}E|\chi|^2 + \operatorname{Re}\left(\lambda+\frac{1}{2}\right) r^{-2}|\chi|^2 + V(r)|\chi|^2\right\} dr = 0. \tag{1.9}$$

Соотношение (1.8) устанавливает связь между мнимыми частями E и λ, а из (1.9) следует необходимое условие существования решений класса Б

$$-\operatorname{Re}E + r^{-2}\operatorname{Re}\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)^2 \leqslant -V(r) \tag{1.10}$$

где-либо на полуоси $0 \leqslant r < \infty$. Это условие выполняется по крайней мере тогда, когда $\operatorname{Re} E < 0$ и $V(r) < 0$.

Далее, из условия $\chi \in L^2$ всегда вытекает связь между энергией E и угловым моментом λ:

$$E = E(\lambda), \tag{1.11}$$

где $E(\lambda)$ — многозначная функция λ. Вещественная часть равенства (1.11) дает положение уровня, а мнимая часть — его ширину. Таким образом, решения класса Б с асимптотическим поведением (1.7) соответствуют связанным нестабильным состояниям ($\operatorname{Re} E < 0$, $\operatorname{Im} E \neq 0$). Многозначность волновой функции (1.5) по угловым переменным отвечает неустойчивости орбитального движения.

Если $V(r) = -M_\alpha / r^{2\alpha}$, то анализ [9] неравенства (1.10) дает

$$(-\operatorname{Re} E)^{1-\alpha} \left(\operatorname{Re} \left(\lambda + \frac{1}{2} \right)^2 \right)^\alpha \leqslant M_\alpha \alpha^\alpha (1-\alpha)^{1-\alpha}. \tag{1.12}$$

Из (1.12) можно получить ряд частных неравенств. Так, при $\alpha = 1/2$ (кулоновский потенциал) имеем

$$-\operatorname{Re} E \leqslant M_{1/2}^2 / 4 \operatorname{Re} \left(\lambda + \frac{1}{2} \right)^2;$$

кроме того, $-\operatorname{Re} E \leqslant M_0$ при $\alpha = 0$ и $\operatorname{Re}(\lambda + 1/2)^2 \leqslant M_1$ при $\alpha = 1$.

Аналогичным образом связанные нестабильные состояния могут быть получены и в других важных для атомной физики задачах (ротатор, пространственный осциллятор, сферический ящик).

1.2. Распадающиеся состояния ядер. Здесь мы применим метод комплексных угловых моментов к рассмотрению распадающихся состояний ядер. В качестве модели распадающегося ядра примем модель потенциальной ямы (см., например, [16]).

В теории распадающегося ядра важную роль играет логарифмическая производная радиальной волновой функции внутри ядра, взятая на поверхности ядра при $r = R$:

$$f_\lambda(E) = R \left(\frac{du_\lambda / dr}{u_\lambda} \right)_{r=R}. \tag{1.13}$$

Эта функция (в общем случае комплексная) задает граничные условия и зависит от структуры ядра. В модели потенциальной ямы радиальная волновая функция внутри ядра удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2}{d\rho^2} u + \frac{2}{\rho} \frac{d}{d\rho} u + \left(1 - \frac{\lambda(\lambda+1)}{\rho^2} \right) u = 0, \tag{1.14}$$

в котором $\rho = [(2m/\hbar^2)(E + |V|)]^{1/2} r$, где $|V|$ есть глубина потенциальной ямы. Регулярное внутри ямы решение имеет вид

$$u_\lambda \sim \sqrt{\frac{\pi}{2\rho}} J_{\lambda+1/2}(\rho), \quad r \leqslant R, \tag{1.15}$$

где $J_{\lambda+1/2}(\rho)$ — функция Бесселя. Вне ямы волновая функция удовлетворяет тому же уравнению (1.14), в котором теперь $\rho = \overline{\rho} = [(2m/\hbar^2)E]^{1/2} r$. В качестве решения для распадающегося ядра должна быть взята функция с асимптотикой в виде уходящей волны, т. е.

$$u_\lambda \sim \sqrt{\frac{\pi}{2\overline{\rho}}} H^{(1)}_{\lambda+1/2}\left(\overline{\rho}\right), \quad r \geqslant R, \tag{1.16}$$

где $H^{(1)}_{\lambda+1/2}(\overline{\rho})$ — функция Ханкеля первого рода.

В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением сильно возбужденных состояний ядер, когда выполняются неравенства $\rho, \overline{\rho} \gg \lambda + 1/2$. При этом ограничении условие сшивания функций (1.15) и (1.16) на границе ямы имеет вид

$$f_\lambda(E) = R[E + |V|]^{1/2} \frac{1 - \operatorname{tg}(\rho - (\pi/2)\lambda)}{1 + \operatorname{tg}(\rho - (\pi/2)\lambda)}\bigg|_{r=R} = iR\sqrt{E}. \tag{1.17}$$

Известно, что при целых вещественных $\lambda = l$ уравнение (1.17) разрешимо только в комплексных энергиях $E_l = \varepsilon_l - i\Gamma_l/2$. При этом ε и Γ интерпретируются как энергия и ширина распадающегося состояния ядра. Такая интерпретация допустима, если $\Gamma \ll D$, где D — расстояние между соседними уровнями. В случае сильно возбужденных уровней это неравенство не выполняется*, поэтому следует обратиться к другой интерпретации.

Другая возможность заключается в том, чтобы λ в (1.17) считать комплексной величиной. Тогда уравнение (1.17) разрешимо в вещественных E.

Положим $\lambda = l + i\delta$. Рассмотрим два предельных случая: $|V| \gg E$ и $|V| \ll E$. В первом случае уравнение (1.17) дает для l и δ (n — целое > 0)

$$l = \frac{2R}{\pi}\left[\frac{2m}{\hbar^2}(E + |V|)\right]^{1/2} - \frac{1}{2} - 2n, \quad \delta = -\frac{2}{\pi}\left(\frac{E}{|V|}\right)^{1/2}. \tag{1.18}$$

Во втором случае для l и δ получаем

$$l = \frac{2R}{\pi}\left(\frac{2m}{\hbar^2}E\right)^{1/2} - 2n, \quad \delta = -\frac{2}{\pi}\ln\frac{4E}{|V|}. \tag{1.19}$$

---

*В этом случае следует учитывать вклады большого числа резонансных уровней [17].

Полученные формулы мы интерпретируем следующим образом. Известна определенная связь между метастабильными состояниями ядер и резонансами при рассеянии на тех же ядрах [16] (это одни и те же состояния в разных задачах: распад, рассеяние). Наряду с резонансами при определенных условиях в рассеяние дают вклад и теневые состояния [18] (комплексные угловые моменты, вещественные энергии). Аналогом теневых состояний при распаде и являются рассматриваемые нами состояния с комплексным моментом.

Как указано Редже [9], при малых значениях δ теневые состояния можно интерпретировать как резонансы (в этом случае выполняются неравенства $\Gamma \ll D$). При больших значениях δ такая интерпретация невозможна (большим δ отвечали бы $\Gamma > D$). Аналогичная ситуация имеет место и в случае сильно возбужденных распадающихся состояний ядер*. Поэтому такие состояния (как и теневые состояния) следует описывать комплексными угловыми моментами и вещественными энергиями.

Отмеченное соответствие между состояниями рассеяния и распадающимися состояниями следующее:

Рассеяние	Распад
Резонансы (комплексные E)	Слабо возбужденные состояния ядер
Теневые состояния (комплексные l)	Сильно возбужденные состояния ядер

1.3. Комплексные моменты в амплитуде рассеяния. Как уже отмечалось в п. 1.1, наш способ введения комплексного углового момента в уравнение Шредингера отличается от реджевского. Здесь мы сформулируем задачу Редже (аналитическое продолжение по l амплитуды рассеяния) в терминах нового подхода к комплексным угловым моментам.

С этой целью рассмотрим уравнение Шредингера с потенциалом общего вида (не центрально-симметричным), включая и случай нелокального взаимодействия

$$(\Delta + E - \hat{V})\psi = 0. \tag{1.20}$$

В общем случае уравнение (1.20) не допускает разделения переменных в сферических координатах. Но это обстоятельство не усложняет дела, поскольку в задачах на рассеяние нужно знать только амплитуду рассеяния. При определенных ограничениях на $\hat{V}$ решение уравнения (1.20) на больших расстояниях от области взаимодействия может быть представлено в виде [19] (ось z направлена вдоль импульса падающей волны $\mathbf{k}$; $k^2 = E$)

$$\psi \approx \mathrm{e}^{ikz} + f(\mathbf{n})\frac{\mathrm{e}^{ikr}}{r}, \tag{1.21}$$

*Действительно, в случае $E \gg |V|$ имеем $\Gamma \sim \delta\sqrt{E}R^{-1}$, $D \sim \delta\sqrt{E}R^{-1}$. Поскольку $\delta > 1$, то $\Gamma > D$.

где $f(\mathbf{n})$ — амплитуда рассеяния ($\mathbf{n}$ — единичный вектор в направлении рассеяния). Как произвольную (однозначную) функцию на сфере ($\mathbf{n} = (\sin\vartheta\cos\varphi, \sin\vartheta\sin\varphi, \cos\vartheta)$) амплитуду $f(\mathbf{n})$ можно разложить по полной системе сферических функций $Y_l^m(\vartheta,\varphi)$:

$$f(\vartheta,\varphi) = (2ik)^{-1}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\sum_{m=-l}^{l} f_l(E,m)Y_l^m(\vartheta,\varphi). \tag{1.22}$$

Для аналитического продолжения по l (а также по m) формула (1.22) непригодна в том отношении, что пределы суммирования по m зависят от l, а Y_l^m не аналитически зависят от m (см., например, [20]).

Введем переменную $n = m + l$. Тогда суммирование по n будет проводиться от нуля до $2l$. Функции Y_l^{n-l} обозначим через $\mathcal{G}_l^n$, которые могут быть представлены в виде [11] ($x = \cos\vartheta$)

$$\mathcal{G}_l^n(\vartheta,\varphi) = 2^{l-n}\left[\frac{\Gamma(n+1)}{2\pi\Gamma(2l+1-n)}\right]^{1/2}\times$$
$$\times\,\Gamma\left(l+\frac{1}{2}-n\right)\mathrm{e}^{i(n-l)\varphi}(1-x^2)^{(l-n)/2}C_n^{\frac{1}{2}+l-n}(x), \tag{1.23}$$

где $C_n^{\frac{1}{2}+l-n}(x)$ (при целых $n \geqslant 0$) — полиномы Гегенбауэра. Функции (1.23) нормированы условием

$$\int_{-1}^{1}dx\int_{0}^{2\pi}\frac{d\varphi}{2\pi}\mathcal{G}_l^n(\mathcal{G}_{l'}^{n'})^* = \frac{2}{2l+1}\delta_{nn'}\delta_{ll'}. \tag{1.24}$$

Как и Y_l^m, функции $\mathcal{G}_l^n$ (при фиксированном целом $l > 0$, $n = 0,1,2,\ldots, 2l$) образуют конечномерные представления группы вращений на сфере [11]. Важно, что функции $\mathcal{G}_l^n$ аналитически зависят от l и n. Кроме того, при $n > 2l$ они обращаются в нуль. Поэтому разложение (1.22) по функциям $\mathcal{G}_l^n$ можно представить в виде

$$f(\vartheta,\varphi) = (2ik)^{-1}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{F}_l(E,n)\mathcal{G}_l^n(\vartheta,\varphi), \tag{1.25}$$

где функция $\mathcal{F}_l(E,n)$ связана с $f_l(E,m)$ соотношением $\mathcal{F}_l(E,n) = f_l(E,n-l)$.

К формуле (1.25) можно применить преобразование Ватсона–Зоммерфельда. Аналитические свойства парциальной амплитуды по переменным l и n вытекают из формулы

$$\mathcal{F}_l(E,n) = ik\int f(\vartheta,\varphi)(\mathcal{G}_l^n(\vartheta,\varphi))^*d\varphi\sin\vartheta d\vartheta \tag{1.26}$$

при определенных предположениях относительно $f(\vartheta, \varphi)$ как решения некоторого интегрального уравнения. Вопрос об аналитических свойствах $\mathcal{F}_l(E, n)$ требует отдельного рассмотрения. Здесь же мы только отметим, что полюса $\mathcal{F}_l(E, n)$ в комплексной плоскости (l) приводят к следующему вкладу в амплитуду рассеяния:

$$\beta_\lambda(E, n) = \mathcal{G}_l^n(\vartheta, \varphi). \tag{1.27}$$

При комплексном λ функции (1.27) многозначны по φ, в то время как (1.25) — однозначная функция. Если (1.27) асимптотически представляет (1.25), то мы встречаемся с ситуацией, напоминающей хорошо известное явление Стокса в теории аналитических функций (см. обсуждение теневых состояний в § 5 работы [9]).

Выражаю благодарность А. И. Ахиезеру, Д. В. Волкову, Ю. П. Степановскому и Я. А. Смородинскому за обсуждения нестабильных связанных состояний и критические замечания.

Дополнение. Здесь мы приведем общие аргументы в пользу существования связанных нестабильных состояний уравнения Шредингера, характеризуемых комплексными E и l. Такие состояния являются частными сечениями поверхности особенностей матрицы рассеяния $S_l(E)$, на которой лежат также связанные состояния. Соответствующие таким состояниям полюса $S_l(E)$ находятся в области $\operatorname{Re} E < 0$. Рассмотрим парциальное уравнение Шредингера

$$\frac{d^2}{dr^2}\varphi + E\varphi - \frac{\lambda(\lambda+1)}{r^2}\varphi - V(r)\varphi = 0 \tag{Д.1}$$

с потенциалом типа потенциала Юкавы

$$V(r) = \int\limits_{m>0} \sigma(\mu)\frac{e^{-\mu r}}{r}d\mu. \tag{Д.2}$$

В (Д.1) считаем $\operatorname{Re}\lambda > -1/2$. Регулярное при $r \to 0$ решение уравнения (Д.1) можно представить в виде

$$\begin{gathered}\varphi(r) = (2ik)^{-1}[g(-k,\lambda)g(r,k,\lambda) - g(k,\lambda)g(r,-k,\lambda)],\\ \varphi(r) \sim r^{\lambda+1}, \quad r \to 0, \quad k^2 = E,\end{gathered} \tag{Д.3}$$

где $g(r, k, \lambda)$ — решение Йоста с асимптотикой

$$g\,(r, k, \lambda) \sim e^{-ikr}, \quad r \to \infty, \tag{Д.4}$$

а $g(k, \lambda)$ — функция Йоста. Через функции Йоста матрица рассеяния $S(k, \lambda)$ представляется в виде [8]

$$S(k, \lambda) = \frac{g(-k,\lambda)}{g(k,\lambda)}e^{i\pi\lambda}, \tag{Д.5}$$

так что полюсам $S(k,\lambda)$ отвечают нули $g(k,\lambda)$. Если потенциал (Д.2) допускает существование связанных состояний ($E<0$, $\operatorname{Im}k>0$, в (Д.3) $g(k,\lambda)=0$) — полюсов матрицы рассеяния в области $\operatorname{Re}E<0$, то в силу аналитической зависимости функции $g(k,\lambda)$ от k и λ^* эти полюса заполняют некоторую двумерную поверхность в четырехмерном комплексном многообразии (k,λ). Эти полюса и отвечают нестабильным связанным состояниям.

Интересно установить границы области, где пройдет поверхность особенностей. При условии $\operatorname{Re}E<0$, $\operatorname{Im}k>0$ и асимптотическом поведении решения (Д.3), (Д.4) (в (Д.3) $g(k,\lambda)=0$) из (Д.1) следуют равенства

$$\int\limits_0^\infty \left\{\left|\frac{d}{dr}\varphi-\frac{1}{2r}\varphi\right|^2-\operatorname{Re}E\,|\varphi|^2+\right.$$
$$\left.+\operatorname{Re}\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)^2 r^{-2}\,|\varphi|^2+V(r)\,|\varphi|^2\right\}dr=0, \quad (Д.6)$$

$$\operatorname{Im}E\int\limits_0^\infty|\varphi|^2\,dr-\operatorname{Im}\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)^2\int\limits_0^\infty r^{-2}\,|\varphi|^2\,dr=0. \quad (Д.7)$$

Умножим (Д.4) на $\sin\eta$, а (Д.5) на $\cos\eta$ и сложим ($0\leqslant\eta\leqslant\pi/2$):

$$\sin\eta\int\limits_0^\infty\left|\frac{d}{dr}\varphi-\frac{1}{2r}\varphi\right|^2dr+(-\operatorname{Re}E\sin\eta+\operatorname{Im}E\cos\eta)\int\limits_0^\infty|\varphi|^2\,dr+$$
$$+\left(\operatorname{Re}\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)^2\sin\eta-\operatorname{Im}\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)^2\cos\eta\right)\int\limits_0^\infty r^{-2}\,|\varphi|^2\,dr+$$
$$+\sin\eta\int\limits_0^\infty V(r)\,|\varphi|^2\,dr=0. \quad (Д.8)$$

Из (Д.8) следует, что где-либо на полуоси $0\leqslant r<\infty$ должно выполняться неравенство

*Хотя наш способ введения комплексного углового момента [11] (многозначные сферические функции $Y^{\mu}_{\lambda}(\vartheta,\varphi)$ (1.5)) отличается от реджевского (однозначные сферические функции $Y^m_l(\vartheta,\varphi)$), определение матрицы рассеяния (Д.5) (а следовательно, и ее аналитические свойства, которые следуют из уравнения Шредингера (Д.1)) то же самое, что и в теории Редже. Поэтому мы можем использовать основные результаты работы [8].

$$\mathrm{Re}\,E\sin\eta - \mathrm{Im}\,E\cos\,\eta +$$
$$+\left(-\mathrm{Re}\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)^2\sin\,\eta+\mathrm{Im}\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)^2\cos\,\eta\right)r^{-2}\geqslant \sin\,\eta V(r). \quad (Д.9)$$

Ограничимся той областью изучаемой поверхности, где

$$\begin{gathered}\sin\,\eta\,\mathrm{Re}\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)^2-\cos\,\eta\,\mathrm{Im}\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)^2\geqslant 0,\\ \cos\,\eta\,\mathrm{Im}\,E-\sin\,\eta\,\mathrm{Re}\geqslant 0.\end{gathered} \quad (Д.10)$$

При этих ограничениях для выполнения неравенства (Д.9) необходимо, чтобы $V(r) < 0$ (потенциал притяжения). Очевидно, потенциал типа (Д.2) ограничен сверху пределом

$$|V|\leqslant 2C/r. \quad (Д.11)$$

При условии (Д.11) из (Д.9) следует неравенство

$$(\cos\,\eta\,\mathrm{Im}\,E-\sin\,\eta\,\mathrm{Re}\,E)\times$$
$$\times\left(\sin\eta\,\mathrm{Re}\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)^2-\cos\,\eta\,\mathrm{Im}\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)^2\right)\leqslant C^2. \quad (Д.12)$$

Используя неравенства (Д.10), можно исключить из (Д.12) параметр η. В результате получим

$$-\mathrm{Re}\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)^2\mathrm{Re}\,E-\mathrm{Im}\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)^2\mathrm{Im}\,E-|E|\left|\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)^2\right|\leqslant 2C^2.$$

В переменных k и λ это неравенство эквивалентно следующему:

$$\left|\mathrm{Im}\,\lambda\,\mathrm{Re}\,k-\mathrm{Im}\,k\,\mathrm{Re}\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\right|\leqslant C. \quad (Д.13)$$

Неравенство (Д.13) устанавливает границы области, в которой находятся нестабильные связанные состояния (в (Д.13) $\mathrm{Im}\,k>0$, $\mathrm{Re}\,(\lambda+1/2)>0$).

2. О НЕКОМПАКТНОЙ ГРУППЕ СИММЕТРИИ ОСЦИЛЛЯТОРА

1. В работе Иордана и др. [21] по обобщенным способам квантования полей (парастатистики) был установлен изоморфизм между определенными билинейными комбинациями операторов рождения и уничтожения бозе-частиц

и инфинитезимальными операторами трехмерной группы Лоренца L_3 (см. также [22]). Здесь мы рассмотрим квантовый осциллятор с точки зрения группы L_3. Эта группа является группой симметрии осциллятора. Многие соотношения между волновыми функциями являются следствием этой симметрии (а также симметрии по отношению к группе вращений). Данное рассмотрение представляет интерес в связи с групповым подходом к некоторым динамическим задачам квантовой механики [23–25], а также в связи с исследованиями некоторых групп симметрии квантовых систем, обсуждавшимися М. Гелл-Манном на Весенней школе физики в Ереване (май 1965 г.) [26]. В дополнении 1 построены все неприводимые полубесконечные представления группы L_3. Эти представления (условие (Д1.3)) интересны в связи с рассматриваемой задачей и обобщенными способами квантования полей Бозе [21], а также в связи с теоретико-групповым подходом [27, 28] к изучению комплексного спина [29].

2. Операторы рождения и уничтожения одномерного квантового осциллятора a^+, a выражаются через координату x и импульс $p = -id/dx$ по формулам

$$a^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x - \frac{d}{dx}\right), \quad a = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x + \frac{d}{dx}\right). \tag{2.1}$$

Рассмотрим операторы

$$\begin{aligned} L_0 &= \frac{1}{4}(a^+a + aa^+) = \frac{1}{4}\left(x^2 - \frac{d^2}{dx^2}\right), \\ L_1 &= \frac{i}{4}(aa - a^+a^+) = \frac{i}{4}\left(x\frac{d}{dx} + \frac{d}{dx}x\right), \\ L_2 &= -\frac{1}{4}(aa + a^+a^+) = -\frac{1}{4}\left(x^2 + \frac{d^2}{dx^2}\right), \end{aligned} \tag{2.2}$$

являющиеся (с точностью до множителя $1/2$) соответственно гамильтонианом, пфаффианом и лагранжианом осциллятора* (динамические переменные записываются в системе единиц, в которой $\hbar = m = \omega = 1$).

Операторы (2.2) удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[L_0,\ L_1] = iL_2, \quad [L_1,\ L_2] = -iL_0, \quad [L_2,\ L_0] = iL_1, \tag{2.3}$$

которые имеют место для инфинитезимальных операторов трехмерной группы Лоренца L_3 (две пространственные координаты, одна временная). Следовательно, (2.2) образуют алгебру Ли группы L_3. Оператор L_0 является генератором преобразования вращения в плоскости двух пространственных координат

*В [30] эти операторы рассматривались в связи с четырехзначными представлениями группы вращений R_3.

(1–2), а L_1 и L_2 — генераторы лоренцевских преобразований в плоскостях (0–2) и (0–1).

Квадратичная форма $Q = L_1^2 + L_2^2 - L_0^2$ коммутирует со всеми операторами L_i, причем для операторов (2.2) $Q \equiv 3/16 = \lambda(1-\lambda)$. Отсюда находим $\lambda = 1/4$ и $\lambda = 3/4$. Следовательно, операторы (2.2) задают представления группы L_3 с весами $1/4$ и $3/4$. Известно [31], что при фиксированном λ у группы L_3 существует бесчисленное множество представлений. Все эти представления отличаются друг от друга числом ν_0, которое входит в определение канонического базиса представления $f_m^{(\lambda)}$, удовлетворяющего системе уравнений [31] ($L_\pm = L_1 \pm iL_2$)

$$\begin{aligned} L_0 f_m^{(\lambda)} &= (\nu_0 + m) f_m^{(\lambda)}, \\ L_+ f_m^{(\lambda)} &= -i[\lambda(1-\lambda) + (\nu_0+m)(\nu_0+m+1)]^{1/2} f_{m+1}^{(\lambda)}, \\ L_- f_m^{(\lambda)} &= i[\lambda(1-\lambda) + (\nu_0+m)(\nu_0+m-1)]^{1/2} f_{m-1}^{(\lambda)}, \end{aligned} \tag{2.4}$$

и которое (при фиксированном λ) может быть любым комплексным числом.

Для осциллятора

$$\begin{aligned} L_+ &= \frac{i}{4}\left(-\frac{d^2}{dx^2} + 2x\frac{d}{dx} - x^2 + 1\right), \\ L_- &= \frac{i}{4}\left(\frac{d^2}{dx^2} + 2x\frac{d}{dx} + x^2 + 1\right). \end{aligned} \tag{2.5}$$

Из формул (2.4) следует, что в случае $\lambda = 1/4$ и $\lambda = 3/4$ все представления (различные ν_0) бесконечномерны (число m принимает значения $m = 0,\ \pm1,\ \pm2, \ldots$). Из всех этих представлений осциллятору отвечают те, у которых число* $\nu_0 = \lambda$. В этом случае формулы (2.4) определяют бесконечномерные унитарные представления группы L_3 (матрицы инфинитезимальных операторов L_i эрмитовы), обрывающиеся снизу на $m = 0$ (если $\nu_0 = \lambda$, то число m принимает только целые положительные значения). Все эти представления неприводимы.

При условии $\nu_0 = \lambda$ функции канонического базиса удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}\left(x^2 - \frac{d^2}{dx^2}\right) f_m^{(1/4)} &= \left(m + \frac{1}{4}\right) f_m^{(1/4)}, \\ \frac{1}{4}\left(x^2 - \frac{d^2}{dx^2}\right) f_m^{(3/4)} &= \left(m + \frac{3}{4}\right) f_m^{(3/4)}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

*В дополнении 1 при условии $\nu_0 = \lambda$ рассмотрены все представления группы Лоренца L_3, отвечающие произвольным (и комплексным) значениям веса λ.

Решениями этих уравнений являются известные функции Эрмита четного и нечетного индексов:

$$f_m^{(1/4)}(x) = \psi_{2m}(x), \quad f_m^{(3/4)}(x) = \psi_{2m+1}(x),$$
$$\psi_n(x) = (\sqrt{\pi}2^n n!)^{-1/2}\, \mathrm{e}^{-x^2/2} H_n(x), \tag{2.7}$$

$H_n(x)$ — полиномы Эрмита.

Две бесконечные системы функций $\{\psi_{2m}\}$, $\{\psi_{2m+1}\}$ образуют ортонормированный базис в гильбертовых пространствах H_+ и H_-. Пространства H_+ и H_- образованы четными и нечетными относительно замены $x \to -x$ функциями с интегрируемым квадратом модуля. Скалярное произведение в H_+ и H_- задается в виде

$$(f, q) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \overline{f}(x) g(x)\, dx. \tag{2.8}$$

Полное пространство волновых функций осциллятора (векторов состояний) является прямой суммой пространств H_+ и H_-: $H = H_+ \oplus H_-$.

Таким образом, с точки зрения группы Лоренца L_3 вся бесконечная система уровней осциллятора разбивается на две подсистемы четных $(n = 2m)$ и нечетных $(n = 2m + 1)$ уровней. Волновые функции этих подсистем образуют неприводимые представления группы L_3, отвечающие весам $\lambda = 1/4$ и $\lambda = 3/4$.

Конечные преобразования группы L_3 в H_+ и H_- задаются операторами U, представимыми в виде

$$U = \exp(-i\gamma L_0) \exp(-i\beta L_2) \exp(-i\alpha L_0). \tag{2.9}$$

Чтобы покрыть всю группу L_3, параметры α, β, γ должны принимать значения из области $0 \leqslant \alpha$, $\gamma < 2\pi$, $0 \leqslant \beta < \infty$.

Рассматриваемые нами представления четырехзначны. Действительно, поскольку спектр оператора L_0 образован последовательностью чисел $m+1/4$ для $\lambda = 1/4$ или $m + 3/4$ для $\lambda = 3/4$, то

$$\exp(-2\pi ik L_0)\psi_{2m} = (-i)^k \psi_{2m},$$
$$\exp(-2\pi ik L_0)\psi_{2m+1} = i^k \psi_{2m+1},$$

только при четырехкратном обходе $(k = 4)$ возвращаемся к исходной функции. Поэтому в (2.9) параметры α, β, γ принимают значения из области $0 \leqslant \alpha$, $\gamma < 8\pi$, $0 \leqslant \beta < \infty$.

При преобразованиях (2.9) инфинитезимальные операторы (2.2) линейно преобразуются друг через друга:

$$UL_iU^{-1} = w_{ij}L_j \tag{2.10}$$

матрицей преобразования

$$w = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\gamma & \sin\gamma \\ 0 & -\sin\gamma & \cos\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\beta & -\operatorname{sh}\beta & 0 \\ -\operatorname{sh}\beta & \operatorname{ch}\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}. \tag{2.11}$$

При этом операторы координаты x и импульса $p = -id/dx$ подвергаются линейному преобразованию

$$UxU^{-1} = ax + bp, \quad UpU^{-1} = cx + dp \tag{2.12}$$

с вещественной матрицей

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\dfrac{\gamma}{2} & \sin\dfrac{\gamma}{2} \\ -\sin\dfrac{\gamma}{2} & \cos\dfrac{\gamma}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\dfrac{\beta}{2} & -\operatorname{sh}\dfrac{\beta}{2} \\ -\operatorname{sh}\dfrac{\beta}{2} & \operatorname{ch}\dfrac{\beta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\dfrac{\alpha}{2} & \sin\dfrac{\alpha}{2} \\ -\sin\dfrac{\alpha}{2} & \cos\dfrac{\alpha}{2} \end{pmatrix}, \tag{2.13}$$

$$ad - bc = 1.$$

Из формул (2.4) вытекают следующие рекуррентные соотношения между функциями Эрмита:

$$\begin{aligned} &\psi''_{2m} - 2x\psi'_{2m} + (x^2 - 1)\psi_{2m} = 4\left[(m+1)\,(m+1/2)\right]^{1/2} \psi_{2m+2}, \\ &\psi''_{2m} + 2x\psi'_{2m} + (x^2 + 1)\psi_{2m} = 4\left[m\,(m-1/2)\right]^{1/2} \psi_{2m-2} \end{aligned} \tag{2.14}$$

и аналогичные формулы для функций Эрмита нечетного индекса.

Далее, из формул преобразования (2.10) следует, что повернутые функции Эрмита $\psi_n(\sqrt{i}x)$ $(i = \sqrt{-1})$, являющиеся собственными функциями оператора L_2, получаются из степенных функций x^n (собственных функций оператора L_1) в результате поворота в плоскости (1–2) на угол $\pi/2$:

$$\psi_n(\sqrt{i}x) \sim \exp\left(-i\frac{\pi}{2}L_0\right) x^n. \tag{2.15}$$

Другие соотношения (в частности, связь функций Эрмита $\psi_n(x)$ с повернутыми функциями $\psi_n(\sqrt{i}x)$) вытекают из рассмотрения осциллятора с точки зрения группы вращений R_3.

Дополнение 1. 1. Изучение представлений группы Лоренца L_3 (некомпактной группы) представляет интерес прежде всего в связи с рассмотренной задачей и обобщенными способами квантования полей Бозе [21] (так называемые парастатистики Бозе). Именно, каждому неприводимому представлению группы L_3 отвечает определенная парастатистика Бозе. При этом на представления следует наложить условие (Д1.3) (полубесконечные представления), вытекающее из требования положительности числа частиц*. В этом случае мы приходим к унитарным представлениям (вещественные $\lambda > 0$) и к представлениям, унитарным в индефинитной метрике (все прочие значения λ).

Представления группы L_3 с произвольным весом λ интересны также в связи с комплексным угловым моментом [27].

Автором [27, 28] рассматривались представления группы вращений R_3 и группы Лоренца L_4 с комплексным спином. Известно [32, 33], что группа L_4 имеет три стационарных подгруппы: группу вращений R_3, трехмерную группу Лоренца L_3 и группу конуса, отвечающие соответственно времениподобным, пространственноподобным и изотропным векторам. Поскольку с группой L_3 также связаны классификации спиновых состояний квантовых систем, то интересно изучить представления группы L_3 с комплексным спином.

Здесь мы построим все представления (при условии (Д1.3)) в реализации функциями комплексного переменного. Два из этих представлений (с весами $1/4$ и $3/4$) связаны с одномерным квантовым осциллятором (эти представления отдельно рассмотрены в дополнении 2). Многие представления группы L_3 (однозначные и двухзначные) рассматривались Баргманом [31].

2. Представление инфинитезимальных операторов. Поскольку группа L_3 (как и циклическая группа) является бесконечносвязной [31] (в отличие от групп R_3 и L_4, которые являются двусвязными), то у нее существуют многозначные непрерывные представления. Ниже мы увидим, что все представления этой группы непрерывны (в отличие от группы R_3, у которой непрерывными являются только конечномерные представления [34]).

Всякое неприводимое представление группы L_3 определяется тремя инфинитезимальными операторами L_0, L_1, L_2, удовлетворяющими коммутационным соотношениям

$$[L_0, L_1] = iL_2, \quad [L_1, L_2] = -iL_0, \quad [L_2, L_0] = iL_1. \tag{Д1.1}$$

Квадратичная форма $Q = L_1^2 + L_2^2 - L_0^2$ коммутирует со всеми L_i и для неприводимого представления веса λ принимает значение $Q = \lambda(1-\lambda)$. В каноническом базисе $f_\nu^{(\lambda)}$ операторы L_i выражаются формулами ($L_\pm = L_1 \pm iL_2$)

$$L_0 f_\nu^{(\lambda)} = \nu f_\nu^{(\lambda)}, \quad L_+ f_\nu^{(\lambda)} = a_{\nu+1}^{(\lambda)} f_{\nu+1}^{(\lambda)}, \quad L_- f_\nu^{(\lambda)} = a_\nu^{(\lambda)} f_{\nu-1}^{(\lambda)}, \tag{Д1.2}$$

где $a_\nu^{(\lambda)} = [\lambda(1-\lambda) + \nu(\nu-1)]^{1/2}$ [31]. Как и в случае группы вращений R_3, при фиксированном (комплексном) λ мы ограничимся рассмотрением только

*Такое же условие было принято при рассмотрении представлений группы вращений [27]. Там это ограничение было связано с унитарностью соответствующих представлений.

одного представления, у которого ν принимает значения

$$\nu = n + \lambda \tag{Д1.3}$$

(n — целое число). Из (Д1.2) следует, что такие представления обрываются снизу на $n = 0$ и, следовательно, n принимает только положительные значения. Значность этих представлений, определяемая спектром оператора L_0, связана, таким образом, с самим весом λ (при рациональном $\lambda = l/s$, l и s — взаимно простые числа, представление s-значно, при иррациональном и комплексном λ представления бесконечнозначны). Баргманом [31] рассматривались только однозначные и двухзначные представления. В этом случае независимо от λ величина ν принимает только целые или полуцелые значения.

При $\lambda = -m/2$ (m — положительное целое число) формулы (Д1.2) дают конечномерные представления (в этом случае представление обрывается на $n = 0$ и $n = m$; такие представления реализуются в пространствах с размерностью $m+1$). При всех других значениях λ представления бесконечномерны. При $\lambda > 0$ формулы (Д1.2) определяют унитарные представления.

3. Представление в целом задается операторами T, которые в переменных Эйлера записываются в виде

$$T(L) = \exp(-i\gamma L_0)\exp(-i\beta L_2)\exp(-i\alpha L_0). \tag{Д1.4}$$

Для s-значных представлений параметры α, β, γ принимают значения из области

$$0 \leqslant \alpha, \quad \gamma < 2\pi s, \quad 0 \leqslant \beta < \infty. \tag{Д1.5}$$

Из коммутационных соотношений (2.3) следует, что

$$TL_iT^{-1} = L_{ij}L_j, \tag{Д1.6}$$

где матрица

$$L_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\gamma & \sin\gamma \\ 0 & -\sin\gamma & \cos\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\beta & -\operatorname{sh}\beta & 0 \\ -\operatorname{sh}\beta & \operatorname{ch}\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}. \tag{Д1.7}$$

Построим теперь в явном виде представление веса λ в реализации функциями комплексного переменного $z = x + iy$.

Прежде всего известно, что дробно-линейные преобразования

$$z \to z' = \sigma z = \frac{az + \overline{b}}{bz + \overline{a}} \tag{Д1.8}$$

с матрицей

$$\sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ \overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-i\gamma/2} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{i\gamma/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\,\dfrac{\beta}{2} & -\mathrm{sh}\,\dfrac{\beta}{2} \\ -\mathrm{sh}\,\dfrac{\beta}{2} & \mathrm{ch}\,\dfrac{\beta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-i\alpha/2} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{i\alpha/2} \end{pmatrix},$$

$$a\overline{a} - b\overline{b} = 1, \tag{Д1.9}$$

осуществляют конформное отображение внутренности круга единичного радиуса $|z| < 1$ на себя*. Рассмотрим функции, аналитические в круге $|z| < 1$. В классе таких функций представление веса λ зададим формулой

$$T(L)f(z) = (bz + \overline{a})^{-2\lambda} f(\sigma z), \tag{Д1.10}$$

обобщающей соответствующую формулу работы Баргмана [31]. В (Д1.10) λ — любое комплексное (фиксированное) число. Формула (Д1.10) определяет аналитическое преобразование аналитических в круге $|z| < 1$ функций $f(z)$.

Инфинитезимальные операторы, отвечающие преобразованиям (Д1.10), имеют вид

$$L_0 = z\frac{d}{dz} + \lambda, \quad L_+ = z^2\frac{d}{dz} + 2\lambda z, \quad L_- = \frac{d}{dz}. \tag{Д1.11}$$

Они удовлетворяют перестановочным соотношениям (Д1.1), причем $Q \equiv \lambda(1-\lambda)$.

Функции канонического базиса $f_\nu^{(\lambda)}$ представления веса λ удовлетворяют уравнениям (Д1.2) и имеют вид

$$f_\nu^{(\lambda)}(z) = A_\nu^{(\lambda)} z^n, \quad A_\nu^{(\lambda)} = \left(\frac{\Gamma(n+2\lambda)}{n!\,\Gamma(2\lambda)}\right)^{1/2} = (C_n^{n+2\lambda-1})^{1/2}. \tag{Д1.12}$$

4. Скалярное произведение. При $\lambda > 0$ рассматриваемые представления унитарны. В этом случае существует инвариантное скалярное произведение

$$(f, q)_\lambda = \int \overline{f}(z) g(z) \omega_\lambda(z)\, dz, \quad dz = dx\, dy, \tag{Д1.13}$$

где интегрирование выполняется по области $|z| < 1$ (круг единичного радиуса).

*Матрицы (Д1.9) унитарны в индефинитной метрике: $\widetilde{\sigma} = \sigma_3 \sigma^+ \sigma_3^{-1} = \sigma^{-1}$, $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Весовая функция ω_λ определяется из условия инвариантности формы (Д1.13) относительно преобразований (Д1.10): $(Tf, Tg)_\lambda = (f, g)_\lambda$ и равна

$$\omega_\lambda(z) = \frac{2\lambda - 1}{\pi}\left(1 - |z|^2\right)^{2(\lambda-1)}. \tag{Д1.14}$$

Форма (Д1.13) является эрмитовой положительно определенной билинейной формой. Функции базиса (Д1.12) ортогональны по скалярному произведению (Д1.13):

$$(f_\mu^{(\lambda)},\, f_\nu^{(\lambda)})_\lambda = \delta_{\mu\nu}. \tag{Д1.15}$$

Представления $\lambda > 0$ реализуются в гильбертовых пространствах H_λ со скалярным произведением (Д1.13). H_λ образовано функциями

$$f = \sum_n f_n z^n, \quad g = \sum_n g_n z^n,$$

для которых

$$\begin{gathered}\|f\|_\lambda^2 = \sum_n |f_n|^2 \left(C_n^{n+2\lambda-1}\right)^{-1} < \infty, \\ (f, q)_\lambda = \sum_n \overline{f}_n g_n \left(C_n^{n+2\lambda-1}\right)^{-1}.\end{gathered} \tag{Д1.16}$$

Инвариантное скалярное произведение может быть определено и для представлений с любым комплексным весом λ. В этом случае оно задается регуляризованной (если $\operatorname{Re}\lambda < 0$) билинейной формой*

$$(f^{(\lambda)}, q^{(\lambda)})_\lambda = \operatorname{per}\int \overline{f}^{(\overline{\lambda})}(z) g^{(\lambda)}(z)\omega_\lambda(z)\, dz \tag{Д1.17}$$

с регуляризацией в особых точках $|z|^2 = 1$ (полюсного типа) весовой функции (Д1.14) (λ — комплексное).

На функциях базиса (Д1.12) форма (Д1.17) принимает значения

$$\begin{gathered}\left(f_\mu^{(\lambda)},\, f_\nu^{(\lambda)}\right)_\lambda = \delta_{\mu\nu}\eta_\nu^{(\lambda)}, \\ \eta_\nu^{(\lambda)} = \overline{\left(\Gamma\left(\overline{\nu} + \overline{\lambda}\right)/\Gamma\left(2\overline{\lambda}\right)\right)^{1/2}} / \left(\Gamma(\nu + \lambda)/\Gamma(2\lambda)\right)^{1/2}.\end{gathered} \tag{Д1.18}$$

При $\operatorname{Re}\lambda > 0$ $\eta_\nu^{(\lambda)} = 1$. При $\operatorname{Re}\lambda < 0$ и $n < -[2\operatorname{Re}\lambda]$ ($[a]$ — целая часть числа a) $\eta_\nu^{(\lambda)} = (-1)^n$, а при $n > -[2\operatorname{Re}\lambda]$ $\eta_\nu^{(\lambda)} = \mp 1$, в зависимости

*Такое скалярное произведение для представлений группы вращений было введено ранее [27].

от того, четным или нечетным числом является $-[2\,\mathrm{Re}\,\lambda]$. Таким образом, при $\mathrm{Re}\,\lambda < 0$ скалярное произведение является эрмитовой индефинитной билинейной формой. Ранг индефинитности равен $-[2\,\mathrm{Re}\,\lambda]+1$. В частности, все конечномерные представления группы L_3 ($\lambda = -m/2$) реализуются в конечномерных пространствах с индефинитной метрикой. Отметим еще, что представления с индефинитной метрикой унитарны в своей индефинитной метрике.

5. Матричные элементы представления получаются в результате разложения сдвинутой функции $T(L)f_\nu^{(\lambda)}(z)$ по функциям базиса (Д1.12):

$$T(L)f_\nu^{(\lambda)}(z) = \sum_\mu T_{\mu\nu}^{(\lambda)}(L)f_\mu^{(\lambda)}(z). \tag{Д1.19}$$

Мы имеем

$$T_{\mu\nu}^{(\lambda)}(L) = \mathrm{e}^{-i\mu\gamma} t_{\mu\nu}^{(\lambda)}(\beta)\,\mathrm{e}^{-i\nu\alpha}, \quad \mu = m+\lambda, \quad \nu = n+\lambda, \tag{Д1.20}$$

$$t_{\mu\nu}^{(\lambda)}(\beta) = (-1)^{-2\lambda-\kappa}\left[\frac{k!\Gamma(\rho-\kappa)/\Gamma(2\lambda)}{\Gamma(\rho-\kappa-2\lambda)\Gamma(k+2\lambda)/\Gamma(2\lambda)}\right]^{1/2}\times$$
$$\times(1-x)^{\rho/2}(1+x)^{\kappa/2}P_k^{(\rho,\,\kappa)}(x), \tag{Д1.21}$$

где $x = \mathrm{ch}\,\beta$, $P_k^{(\rho,\,\kappa)}(x)$ — полиномы Якоби,

$$\rho = |\mu-\nu|, \quad \kappa = -(\mu+\nu), \quad k = -\lambda-(\rho+\kappa)/2.$$

Матричные элементы $T_{\mu\nu}^{(\lambda)}(L)$ удовлетворяют уравнению*

$$\left\{\frac{\partial^2}{\partial\beta^2} + \mathrm{cth}\,\beta\frac{\partial}{\partial\beta} + \frac{1}{\mathrm{sh}^2\beta}\left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial\gamma^2} - 2\,\mathrm{ch}\,\beta\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\gamma}\right) + \lambda\,(1-\lambda)\right\}\times$$
$$\times T_{\mu\nu}^{(\lambda)}(L) = 0. \tag{Д1.22}$$

Отметим, что для рассматриваемых представлений (с условием (Д1.3)) не существует соотношений ортогональности, так что матричные элементы $T^{(\lambda)}$ и $T^{(\lambda')}$ не ортогональны друг другу.

Дополнение 2. Здесь мы рассмотрим одну частную реализацию представлений группы L_3 с весами $1/4$ и $3/4$ аналитическими (целыми) функциями во всей комплексной плоскости (z) (а не в круге $|z| < 1$, как в дополнении 1).

---

*Многие формулы этого пункта могут быть получены из соответствующих формул представлений группы вращений [27] заменой $\beta \to i\beta$.

Эти представления тесно связаны с одномерным (комплексным) осциллятором и отличаются от представлений, рассмотренных в основном тексте.

Рассмотрим три оператора:

$$L_0 = \frac{1}{4}(zd + dz), \; L_1 = \frac{1}{4}\left(d^2 + z^2\right), \; L_2 = \frac{i}{4}\left(d^2 - z^2\right), \; d \equiv \frac{d}{dz}, \tag{Д2.1}$$

являющихся соответственно пфаффианом, лагранжианом и гамильтонианом одномерного (комплексного) осциллятора. Операторы (Д2.1) удовлетворяют перестановочным соотношениям (Д1.1), причем $L_+ = z^2/2$, $L_- = d^2/2$, а $Q \equiv 3/16$, так что $\lambda = 1/4$ и $3/4$. При преобразованиях операторы z и d преобразуются по формулам

$$TzT^{-1} = az + bd, \quad TdT^{-1} = \overline{b}z + \overline{a}d \tag{Д2.2}$$

с матрицей (Д1.9).

Решением уравнений (Д1.2) с $\lambda = 1/4$ и $3/4$ являются соответственно функции

$$f_n^{(1/4)} = \frac{z^{2n}}{\sqrt{(2n)!}}, \quad f_n^{(3/4)} = \frac{z^{2n+1}}{\sqrt{(2n+1)!}}. \tag{Д2.3}$$

В рассматриваемой реализации представления задаются формулой

$$T(L)f(z) = Tf(z)T^{-1}(T \cdot 1) = f(TzT^{-1})\kappa(z;\, L) = f(az + bd)\kappa(z;\, L), \tag{Д2.4}$$

где $\kappa\,(z;\, L) = T \cdot 1$ и может быть легко найдено:

$$\kappa(z;\, L) = \mathrm{e}^{-i(\alpha+\gamma)/4}\left(\operatorname{ch}\frac{\beta}{2}\right)^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2}z^2\,\mathrm{e}^{-i\gamma}\operatorname{th}\frac{\beta}{2}\right). \tag{Д2.5}$$

Функции (Д2.3) образуют ортогональные системы по скалярному произведению $(dz = dx\,dy)$:

$$(f_m^{(\lambda)}, f_n^{(\lambda)}) = \int \overline{f}_m^{(\lambda)}(z) f_n^{(\lambda)}(z)\rho(z)\,dz = \delta_{m,\,n} \tag{Д2.6}$$

с весовой функцией

$$\rho(z) = \pi^{-1}\exp\left(-|z|^2\right), \tag{Д2.7}$$

определяемой из условия инвариантности формы (Д2.6) относительно преобразований (Д2.4) (причем $(f^{(1/4)}, f^{(3/4)}) = 0$). В (Д2.6) интегрируется по всей комплексной плоскости (z).

Представления с $\lambda = 1/4$ и $3/4$ реализуются в классе целых функций $f^{(1/4)}(z) = \sum\limits_n f_n z^{2n}$ (или $f^{(3/4)}(z) = \sum\limits_n f_n z^{2n+1}$), четных или нечетных относительно замены $z \to -z$, для которых

$$\|f\|^2 = (f,\, f) = \sum_n |f_n|^2\,(2n)! < \infty$$

(или $\sum\limits_{n} |f_n|^2 (2n+1)! < \infty$). Эти классы функций образуют гильбертовы пространства со скалярным произведением (Д2.6).

Матричные элементы рассмотренных представлений выражаются формулами (Д1.20), (Д1.21), в которых нужно положить $\lambda = 1/4$ или $3/4^*$.

3. DYNAMICAL STRUCTURE OF SPACE-TIME DISCONTINUUM AND SPIN 1/4

It seems that spin 1/4 was recently observed in so-called deep inelastic scattering experiments [37]. Apparently its explanation is not packed in the frame of quark-gluon model of elementary particles. However, the new theory [38] surely contains these objects with spin 1/4. Such objects appear if we consider our space–time at very small distances as a discontinuum. Thus, two things are connected: spin 1/4 and space-time discontinuum.

1. First of all, it is hereby announced that the high energy limit (region of very small distances) is connected with a new quantum theory, principally distinguished from the well-known Heisenberg–Schroedinger quantum mechanics and from its generalization to quantum field theory. It turns out that the usual quantum mechanics is not a single quantum theory. It is not complete, and therefore may be completed. We can now say that there are at least two else quite different quantum mechanics, one of which we call high energy quantum mechanics (HEQM).

In order to understand «Why is that so?», it will be sufficient to notice that the Lebesgue measure on momentum space A_p, used in the usual quantum theory and equaled infinity for whole A_p, does not permit one to go to a large momentum region. Ultimately, the obstacle here is the well-known symmetry between momentum space and configuration space given by the well-known Fourier transformation used in the usual quantum theory and expressed by a pair of formulas:

$$p = -i\partial/\partial X, \qquad X = i\partial/\partial p. \tag{3.1}$$

It is the so-called Dirac symmetry of the usual quantum theory [39].

---

*Статья, представленная в данном разделе, поступила в редакцию ЖЭТФ 13 июля 1965 г.

Примечание при корректуре (4 ноября 1965 г.). В недавних работах Барута и др. [35] тоже рассматривался вопрос о некомпактной группе симметрии (динамической группе) осциллятора. В этих работах осциллятору ставится в соответствие представление $D_{1/2}$ группы Лоренца L_3. Интересно отметить, что к осциллятору можно также отнести представление двухпараметрической группы, инфинитезимальные операторы которой I_1 и I_2 удовлетворяют коммутационным соотношениям $[I_1, I_2] = I_2$. В нашем случае нужно положить $I_1 = H$, $I_2 = a$ (H — гамильтониан осциллятора, a — оператор уничтожения). Тогда вся система уровней образует одно представление этой группы. Но эта группа не полупростая, поскольку тензор $g_{ik} = C^l_{im} C^m_{lk} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (C^l_{ik} — структурные константы) не имеет обратного [36].

2. However, there is another measure which allows one to go to the large momentum region. It was discovered by H. Bohr [40] in his theory of almost periodical functions. Henceforth we call it the Bohr measure. It is finite for whole A_p. We think that the HEQM which uses the Bohr measure in the momentum space (we emphasize: in the momentum space) is well adopted, firstly, to the description of fragments (or constituents) of fundamental particles, and, secondly, to the construction of the mathematically consistent theory of elementary particles and their interactions, being free from the so-called ultraviolet catastrophe.

We also consider that the simple combination of demands of relativity [41] with the principles of the Heisenberg–Schroedinger quantum theory [42], used in the so-called axiomatic approach to the quantum field theory [41] was insufficient to construct the mathematically consequent particle theory. For this purpose a new quantum theory is needed, which is connected with the so-called Bohr compactification of momentum space denoted as bA_p. bA_p is the momentum space A_p with the Bohr measure.

Hence, the new theory is connected with the almost periodical functions on the momentum space A_p. The set of these functions forms the nonseparable Hilbert space H' with the following scalar product (for simplicity we consider the one-dimensional case):

$$(\psi, \varphi)' = bmv \int \overline{\psi}(p)\varphi(p)\, dp. \tag{3.2}$$

Here bmv means «Bohr mean value» determined by the formula:

$$\lim_{P\to\infty} \frac{1}{2P} \int_{-P}^{P} dp\, \overline{\psi}(p)\, \varphi(p). \tag{3.3}$$

The measure in this integral we call the Bohr measure. So the new quantum theory is connected with the Bohr measure on the momentum space and almost periodical functions on it. A nonseparable Hilbert space H' underlies the theory.

For comparison, we write the scalar product used in the usual quantum mechanics [39]:

$$(\psi, \varphi) = \int \overline{\psi}(p)\varphi(p)\, dp, \tag{3.4}$$

(here dp is the Lebesgue measure).

It is interesting to notice that the topology on bA_p induced by the topology of the space H' is the weakest non-Hausdorff topology (it is the so-called topology of sticked-together points). In the new quantum mechanics configuration space A_X connected with the Bohr compactificafion of momentum space by means of the Fourier–Bohr transformation [40]

$$\psi(X) = bmv \int \psi(p)\, \mathrm{e}^{-iXp}\, dp, \tag{3.5}$$

has the strongest (or discrete) topology. Under such a topology A_X is a quite non-connected set of its points or discontinuum denoted as A'_X*.

We write the inverse of the direct transformation (3.5) as the Fourier series [40]:

$$\psi(p) = \sum_i \mathrm{e}^{ipX_i} \psi'(X_i), \tag{3.6}$$

where (X_i) is a countable set of points in A'_X determining almost periodical Bohr's function on momentum space A_p.

3. Obviously, on discontinuum there may be no differential equations because it loses the differential (Newtonian) structure. So the HEQM is the field theory on configuration discontinuum [43]. We can say that in the new quantum mechanics the configuration space splits into its isolated points, while the momentum space is compressed to the non-Hausdorff space (I would say that the new quantum mechanics is non-Lagrangian because in it the Lagrangian plane is not a differential manifold). This is illustrated schematically below. So for the usual moderate energy quantum mechanics (MEQM) we have

$$A_p \quad \bigcirc \qquad \underset{F^{-1} \;\; - \;\; \text{transform}}{\overset{F \;\; - \;\; \text{transform}}{\longleftrightarrow}} \qquad \bigcirc \quad A_X$$

Lebesgue measure on A_p and A_X
Hausdorff topology on A_p and A_X

For the HEQM we have

$$bA_p \quad \bullet \qquad \underset{\text{Fourier} \qquad \text{series}}{\overset{F.B \;\; - \;\; \text{transform}}{\longleftrightarrow}} \qquad \ddots \quad A'_X$$

Topology of sticking points on bA_p
Discrete topology on discontinuum A'_X

And for the LEQM we have

$$A'_p \quad \ddots \qquad \underset{\text{Fourier} \qquad \text{series}}{\overset{F.B \;\; - \;\; \text{transform}}{\longleftrightarrow}} \qquad \bullet \quad bA_X$$

Discrete topology on discontinuum A'_p
Topology of sticking points on bA_X

As a result, in the HEQM the formula $X = i\partial/\partial p$ has the meaning, while another formula $p = -i\partial/\partial X$ makes no sense.

*Another limit of the usual quantum mechanics, when the momentum space is discontinuum, we call the low energy quantum mechanics (LEQM). It is not considered here.

The HEQM has some peculiarities. For example, any function on the configuration discontinuum may be written in the form of [43]:

$$\psi(X) = \sum_i \psi'(X_i)\delta_{XX_i}, \tag{3.7}$$

where δ_{XX_i} is the Kronecker delta-symbol. Here the point-like value $\psi'(X_i)$ describes what we call granule (hence, in the suggested theory particle constituents are point-like objects).

It is very important to notice that in the high energy limit the particle wave function $\psi(X)$ is reduced to sum (3.7) and, hence, the particle in the high energy region is a coherent ensemble of granules. From this it follows that granules have all symmetry properties of the particle (in particular, proton's granules have spin 1/2 and electric charge 1). For comparison, we remind that the particle wave function in the quark model is a product of the quark wave functions.

We would like to notice that the Kronecker symbol has all properties of the projection operator. As a result, the particle current $\overline{\psi}\gamma_\mu\psi$ in the high energy limit may be written as the sum of granule currents:

$$\overline{\psi}\gamma_\mu\psi = \sum_i \overline{\psi}'(X_i)\gamma_\mu\psi'(X_i)\delta_{XX_i}, \tag{3.8}$$

where $\overline{\psi}'(X_i)\gamma_\mu\psi'(X_i)$ is the granule current.

4. Further it turns out that the second quantized version of the granule theory is trivial in the following sense. The permutation relations for field variables in the momentum representation (on the space bA_p) are written in the usual form because the space bA_p remains a differentiable and integrable manifold, see (3.5) (here we are again considering the one-dimensional case):

$$[\widehat{\varphi}(p),\, \widehat{\pi}(p')] = \delta(p-p'), \tag{3.9}$$

$$\{\widehat{\psi}(p), \widehat{\overline{\psi}}(p')\} = \delta(p-p'), \tag{3.10}$$

here $\delta(p)$ is the usual Dirac delta-function [39] and $\widehat{\pi}(p') = (\partial/\partial t)\widehat{\varphi}(p')$. The right-hand side here is not an almost periodical function, so if we pass from the momentum picture to the configuration one, using the Fourier–Bohr transformation (3.5), we obtain the following result [43]:

$$\{\widehat{\psi}(X), \widehat{\overline{\psi}}(X')\} = 0 \tag{3.11}$$

(now the Bose case is omitted, the most important is the Fermi one).

Now we can prove the following *statement*. The solution of Eqs. (3.11) as operators acting on the Hilbert space is zero:

$$\widehat{\psi}\,(X) = 0 \tag{3.12}$$

(see [43]).We omit here the proof of this statement because it is a well-known theorem from algebra.

From the theorem it follows that the so-called Grassmann fields and the particles standing behind them do not exist in the theory. This means, in any case, that the granules are not the usual particles, they are not quantized fields, they are the Grassmann numbers only. Moreover, we would say that Eq. (3.11) determining the so-called Grassmann numbers has neither operator nor matrix realization. It is therefore not possible to develop the theory in the usual direction (this way is completely closed). In such a situation a new way of development of the theory may be undertaken. It is connected with a consideration of the dynamical structure of granules [43].

5. We see that the Dirac–Grassmann ring (3.11) (let us denote it as $S_8^{(*)}(G)$) has no matrix (or operator) realizations. But it may be realized by means of an extension of the basic ring of scalars R (or C), over which the ring $S_8^{(*)}(G)$ is considered.

In a pure mathematical language we will deal with some extension of the Grassmann number ring or an enclosure of the latter into the new wider ring of ideal numbers, having already operator realization. It turns out that the ring R is algebraically not closed and allows for a noncommutative extension.

Omitting some details we just consider the enclosure of the Dirac–Grassmann ring $S_8^{(*)}(G)$ into the Heisenberg ring $h_8^{(*)}$: $S_8^{(*)}(G) \to h_8^{(*)}$, or $\psi'_\alpha \to \Phi_\alpha$, $\overline{\psi}'_\alpha \to \overline{\Phi}_\alpha$, where Φ, $\overline{\Phi}$ satisfy the commutation relations [43]:

$$\left[\Phi_\alpha, \overline{\Phi}_\beta\right] = \delta_{\alpha\beta}, \quad [\Phi_\alpha, \Phi_\beta] = \left[\overline{\Phi}_\alpha, \overline{\Phi}_\beta\right] = 0, \tag{3.13}$$

determining the Heisenberg algebra $h_8^{(*)}$ with the Dirac involution $\Phi \to \overline{\Phi}$.

We call this mapping the quantization of the Dirac–Grassmann fiber, which is, of course, not a homomorphism (similarly, the Clifford–Dirac mapping of the vector space $R_{3,1}$ into the Clifford algebra C_4 is not a homomorphism). So through the Heisenberg algebra $h_8^{(*)}$ the Grassmann numbers $S_8^{(*)}(G)$ get a realization. The algebra $h_8^{(*)}$ has a few representations.

Further we consider the envelope algebra $U[h_8^{(*)}]$ over $h_8^{(*)}$ with the usual (inner) multiplication law. We also consider the tensor algebra $T[h_8^{(*)}]$ with the Grassmann (external) multiplication law $\wedge$, i.e., the algebra $T^\wedge[S_8^{(*)}]$, where $T[h_8^{(*)}]$ is the direct sum $T[h_8^{(*)}] = \oplus_{n=0}^{\infty} T^n[h_8^{(*)}]$ with $T^n[h_8^{(*)}] = \overbrace{h_8^{(*)} \otimes \cdots \otimes h_8^{(*)}}^{n}$ hereat in $T^\wedge[S_8^{(*)}]$ the relations are fulfilled

$$T^n \wedge T^m - (-1)^{nm} T^m \wedge T^n = 0. \tag{3.14}$$

We would like to emphasize that the inverse mapping $T[h_8^{(*)}] \to S_8^{(*)}(G)$ is already a homomorphism described by formula (3.15).

6. All internal dynamical properties of individual granule are determined by the algebra $h_8^{(*)}$ and its automorphism group $\mathrm{Sp}^{(*)}(4, C)$ and are described by the algebra $U[h_8^{(*)}]$. It is not difficult to show that the internal dynamics of the system is described by the two Hamiltonian 4-flows $p_\mu = i\overline{\Phi}\gamma_\mu P_+\Phi$ and $\dot{p}_\mu = -i\overline{\Phi}\gamma_\mu P_-\Phi$ (here γ_μ and $P_+ = \dfrac{1}{2}(1+\gamma_5)$, $P_- = \dfrac{1}{2}(1-\gamma_5)$ are the Dirac matrices) which do not commute with each other. Such systems were called bi-Hamiltonian systems [43]. All statistical properties of the ensemble of granules are described by the algebra $T^\wedge[S_8^{(*)}]^*$.

Here we do not elaborate the description of the inner dynamics of the bi-Hamiltonian system (vertical motion in fiber connected with $U[h_8^{(*)}]$ algebra) and external dynamics described by the tensor algebra $T[h_8^{(*)}]$ (horizontal motion, space–time dynamics) in spite of their great interest (see [43]). We neither elaborate the non-Fock representation of the Heisenberg algebra $h_8^{(*)}$ and the non-unitary representation of its automorphism group $\mathrm{Sp}^{(*)}(4, C)$ (the dynamical group of the system), which underlies the theory, see [44]. (We only mentioned that these representations are built in the dual pair of topological vector spaces F and $\dot{F}$ connected one to another by the non-Hermitian form $\langle \dot{F}, F\rangle$ (see [44]. This part of the theory is called non-unitary quantum mechanics).

7. Here we will be interested only in the spin structure of the granule field (let us remember that these are the Grassmann numbers which do not have the operator realization). In the suggested theory its structure is described by the formula:

$$\psi'_\alpha = \langle \dot{f}, \Phi_\alpha f\rangle, \tag{3.15}$$

where the right-hand side is non-Hermitian form of the non-unitary theory. The Grassmann number may only have such a representation and nothing else.

Equation (3.15) is the transition matrix element of the bi-Hamiltonian system from the state f to the state $\dot{f}$. In (3.15) $f \in F$ and $\dot{f} \in \dot{F}$, where F and $\dot{F}$ are carrier spaces of the non-Fock representation of the Heisenberg algebra $h_8^{(*)}$ (we remind that the usual quantum scheme is connected with one self-adjoint or unitary Hilbert space H). The entities f and $\dot{f}$ are called fundors. They are non-Lagrangian fields (no Lagrangians exist for such fields) existing inside the

*It is interesting to note that the statistical properties of granules are connected with the individual one by a simple condition of complexification of the coordinate x_0 in (3.16), $x_0 \to x_0 - i/T_f$, where T_f is the temperature of ensemble of granules, see [45].

fiber and obeying the equations [43]:

$$-i\frac{\partial}{\partial x_\mu}f(x) = p_\mu f(x), \tag{3.16}$$

$$-i\frac{\partial}{\partial \dot{x}_\mu}\dot{f}(\dot{x}) = \dot{p}_\mu \dot{f}(\dot{x}), \tag{3.17}$$

or (as $p^2 = \dot{p}^2 = 0$) $p_\mu(\partial/\partial x_\mu)f(x) = 0$, $\dot{p}_\mu(\partial/\partial \dot{x}_\mu)\dot{f}(\dot{x}) = 0$. These equations describe the so-called «vertical» motion (inside the fiber or in an isolated point of discontinuum) of f and $\dot{f}$. Here x_μ and $\dot{x}_\mu$ are coordinates in the fiber, namely, on the groups $T_{3,1}$ and $\dot{T}_{3,1}$ generated by the 4-momentum p_μ and $\dot{p}_\mu$, correspondingly. Here the entity f is characterized by the strictly positive energies $p_0 > 0$, while the entity $\dot{f}$ is characterized by the negative energies $\operatorname{spec}\dot{p}_0 \leqslant 0$. Therefore, the non-Lagrangian fields $f(x)$ and $\dot{f}(\dot{x})$ do not allow for the second quantization procedure (they are not anti-f and anti-$\dot{f}$), they are pure c-number fields. Fundor (non-Lagrangian) fields are characterized by the spin values $\ldots -3/4$, $-1/4$, $1/4$, $3/4\ldots$ which are not limited neither from below nor from above (therefore, already such fields do not permit second quantization procedure). Literally speaking, fundors are the square root of spinors (see [38]).

8. If we substitute now expression (3.15) into the granule current $\overline{\psi}'\gamma_\mu\psi'$ (3.8) we get

$$\overline{\psi}'\gamma_\mu\psi' = \overline{f}_n(\Gamma_\mu)_{nm}f_m, \tag{3.18}$$

where

$$(\Gamma_\mu)_{nm} = \overline{(\langle\dot{f} \mid \Phi_\alpha)_n}(\gamma_\mu)_{\alpha\beta}(\langle\dot{f} \mid \Phi_\beta)_m \tag{3.19}$$

is the vertex of the entity f. It is an infinite dimensional matrix. Very likely the interaction $\overline{f}\Gamma_\mu f A_\mu$ was observed in the above-mentioned experiments.

Because of the c-number nature of fundor fields $f(x)$ (there is no Green function for such fields) at this level there are no radiative corrections to the interaction and, hence, ultraviolet divergences in the theory are absent.

It is also interesting to note that after taking matrix elements (see (3.15)) a nontrivial right-hand side in (3.14) will appear. It is connected with the Pauli–Jordan function, that gives rise to the well-known permutation relations between particle fields $\psi(X)$ (see [45]).

9. It should be noticed that the dynamical structure of granules (the existence of waves f and $\dot{f}$) may be connected with the idea of quantization of space–time. Under the space quantization procedure we understand, first of all, dismemberment of the space into its smallest more indivisible entities, i.e., points (Euclide; compare with the quantization procedure of matter, there the smallest indivisible portion of matter is elementary particle). Mathematically it means that we go

over from the usual topology on the space used in the Schroedinger wave mechanics, for example, to the strongest or discrete one, when the space becomes a discontinuum. Hereby, under the physical space–time we understand its spinor (or Dirac and also other physical) fibration. Then, secondly, we quantize the Dirac–Grassmann fiber. As a result, we come to the fundor dynamical structure of the spinor fiber, i.e., to the bi-Hamiltonian dynamical system and its states f and $\dot{f}$. The system of waves $(f, \dot{f})$ connected with the isolated point of discontinuum we propose to call space waves (in analogy with the de Broglie's matter waves ψ). Sometimes the component f we will also call ether waves.

10. In conclusion, we stop at the mathematical carcass of the theory. It consists, first of all, in the base $A_{3,1}$, affine space–time (we call it as the Poincare space). If we introduce the differentiable structure on it (Newton), we shall obtain (in each point $X \in A_{3,1}$) the Minkowski vector space $R_{3,1}$ in the form of the cotangent space $T^*_X A_{3,1}$ with the base dX_μ, i.e., the vector fiber and the local ring $U[dX]$ in X, the latter is the envelope algebra over dX_μ. In connection with this we would like to note that here we have to consider a more general construction, the construction of the tensor ring $T[dX]$ with the following homomorphism $T[dX] \to S[dX] = U[dX]$, where $S[dX]$ is the symmetric ring (see [46]). We also may construct the cotangent fibration $(A_{3,1},\, T^*A_{3,1})$ and to get fields (vector, tensor and so on) as any sections of this fibration (Maxwell, Riemann, Einstein). Classical physics is connected with this fibration.

It turns out that the ring $U[dX]$ is algebraically non-closed and allows for an extension in the form of the spinor ring $U[S_8^{(*)}]$, where $S_8^{(*)}$ is the Dirac spinor space (Dirac). As a result, we get the local spinor fiber $S_8^{(*)}$ in each point X and the spinor fibration $(A_{3,1},\, S_8^{(*)})$. Its sections are the Dirac fields $\psi(X)$, $\overline{\psi(X)}$. Quantum physics is connected with this fibration.

The Clifford algebra C_4 of Dirac matrices γ_μ is connected with the spinor fiber $S_8^{(*)}$. It is interesting to notice that we have to consider the ring extension $U[dX] \subset U[S_8^{(*)}]$ (where $\psi, \overline{\psi}$ play the role of the Kummer ideal numbers) as the extension of the Kummer type. Another extension, namely, $R \subset C_4$, is of the Galois type. As a result, $(dX_\mu)_X$ may be written in the form of $(dX_\mu)_X = i\overline{\psi}(X)\gamma_\mu\psi(X)ds$, where $ds = \sqrt{dX_\mu dX_\mu}$ (we emphasize that this procedure is possible only for $dX \in R_{3,1}$, but not for $X \in A_{3,1}$).

We have again to consider from the beginning the tensor ring $T[S_8^{(*)}]$ and then two homomorphisms, one of them being $T[S_8^{(*)}] \to S[S_8^{(*)}] = U[S_8^{(*)}]$ (it is described in [46]).

In the high energy limit where the space–time is the discontinuum A'_X we must consider another homomorphism $T[S_8^{(*)}] \to \wedge[S_8^{(*)}] = U^\wedge[S_8^{(*)}]$ described in [46] too. We call it the high energy quantum homomorphism. A new quantum theory (HEQM, or granule theory) is connected with the fibration $(A'_{3,1},\, \wedge[S_8^{(*)}])$.

It turns out that the Dirac–Grassmann ring $\wedge[S_8^{(*)}]$ is algebraically non-closed yet, and therefore allows for the extension to the fundor ring $T^{\wedge}[F]$ with which the Heisenberg algebra $h_8^{(*)}$ is connected. The states of the bi-Hamiltonian dynamical system and a new level of physical reality (ether or subquantum physics) are connected with the latter*. As a result, we may write $\psi'_\alpha = \langle \dot{f},\, \Phi_\alpha f\rangle$ and may speak about the dynamical (ether) structure of the spinor field $\psi(X)$.

This mathematical carcass of physics is, of course, a godlike picture and we think that it is God's plan of His creation of the Universe.

I am grateful to M. Cabbolet and M. Konchatny for some improvement of this material.

4. К ТЕОРИИ ПОЛЯ НА БОРОВСКОМ КОМПАКТЕ

1. Как известно, в волновой теории, рассматриваемой на некомпактном конфигурационном многообразии M — лебеговом континууме (в одномерном случае это вещественная ось $R =]-\infty,\ \infty[$), наделенном лебеговой мерой, бесконечной на всем M, существенную роль играет преобразование (интеграл) Фурье и его обращение, записываемые в виде

$$\psi(p) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-ipq}\psi(q)\,dq, \quad \psi(q) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{ipq}\psi(p)\,dp. \tag{4.1}$$

Здесь $\psi(q)$ $(q \in M)$ и $\psi(p)$ $(p \in M')$ — многообразия, двойственные к M в смысле Понтрягина, представляющие собой, как и M, некомпактный лебегов континуум — функции на M и, соответственно, M', принадлежащие, вообще говоря, разным классам, а dq и dp — меры Лебега на этих многообразиях (в волновой механике обычно рассматривается класс квадратично-интегрируемых функций на M и M'). При этом выполняется равенство Планшереля

$$(\psi,\ \varphi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \overline{\psi}(q)\varphi(q)\,dq = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \overline{\psi}(p)\varphi(p)\,dp. \tag{4.2}$$

Эта теория обладает так называемой дираковской симметрией, выражаемой формулами $\hat{p} = -i\partial/\partial q$ (на M) и $\hat{q} = i\partial/\partial p$ (на M') [47]. Однако к ней

---

*It is interesting to notice that at the classical level we have three quite distinct categories — substance, accidence and space–time (Newton, Kant). At the quantum level two of them (substance and accidence) are combined in one category of matter. So at this level there are only two categories — matter and space–time (Schroedinger). At the subquantum level matter and space–time are combined in one category of pre-matter (or ether).

имеется ряд претензий (несмотря на внешнее сходство, обе формулы в (4.1) по существу очень разные, см. [48]).

2. Обычно формулы (4.1) выводят исходя из другой теории, в которой M компактно (в одномерном случае это окружность S^1 радиуса L/π или компакт $[-L, L]$), используемой, в частности, в теории кристаллов, к которой меньше претензий. В этом случае вместо (4.1) имеем

$$\psi_n = \frac{1}{2L}\int\limits_{-L}^{L} \exp\left(-i\frac{\pi n}{L}q\right)\psi(q)\,dq, \quad \psi(q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \psi_n \exp\left(i\frac{\pi n}{L}q\right), \tag{4.3}$$

а вместо (4.2) — равенство Парсеваля

$$(\psi,\, \varphi) = \frac{1}{2L}\int\limits_{-L}^{L} \overline{\psi}(q)\varphi(q)\,dq = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{\psi}_n\varphi_n. \tag{4.4}$$

Гильбертово пространство на компакте $[-L, L]$ со счетным базисом $\left\{\exp\left(i\frac{\pi n}{L}q\right)\right\}_{n=-\infty}^{\infty}$ обозначим как H_L. В этой теории дираковской симметрии нет: если на M формула $\hat{p} = -i\partial/\partial q$ сохраняет смысл (M — дифференцируемое многообразие), то другая формула теряет его (двойственное к S^1 импульсное пространство дискретно — решетка Z).

Считается, что к формулам (4.1) можно прийти, устремляя в (4.3) $L \to \infty$ (см., например, [48]). Однако процедуру, которая при этом используется, ни в коей мере нельзя считать математически корректной, так как при этом возникает реальное противоречие, недопустимое с точки зрения общей теории множеств*. Оно говорит о том, что переход от решетки (счетного множества)

*Противоречие заключается в следующем. Обозначая в (4.3) $\pi n/L = p_n$ и полагая $\Delta p = \pi/L$, нельзя в формуле $\sum\limits_n \Delta p \int\limits_{-L}^{L} \psi(q')\,\mathrm{e}^{ip_n(q'-q)}dq'$ (см. [48, с. 420]) устремить $L \to \infty$ и получить формулу $\int\limits_{-\infty}^{\infty} dp \int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi(q')\,\mathrm{e}^{ip(q'-q)}dq'$, так как $L \to \infty$ при количестве точек $p_n \in R' =]-\infty, \infty[$, по которым здесь суммируется, а значит, и количество интервалов, на которое разбивается R', все время остается счетным (см. формулу (4.6)), несмотря на то, что расстояние между соседними точками — длины интервалов — $\Delta p \to 0$. Из известной теоремы Бореля следует, что счетное количество интервалов нулевой длины не может покрыть все R' (и даже любой интервал конечной длины; однако несчетное количество точек уже может это сделать, см. дальше). В лучшем случае счетное множество точек (обозначим его через D) может быть плотным в R'. Поэтому сумму $\sum\limits_D \Delta p$ никак нельзя превратить в интеграл $\int\limits_{R'} dp$ (их носители имеют разные мощности: $\operatorname{card} D < \operatorname{card} R'$). Но если даже принять, что предельный интервал dp содержит несчетное количество точек, то это множество не будет измеримым и счетная к континууму (несчетному множеству) на самом деле невозможен. Тем не менее выполнить корректным образом предельный переход $L \to \infty$ можно, более того, с физической точки зрения он просто необходим в связи с расширением Вселенной и образованием особого фазового состояния конфигурационного пространства — боровского компакта, см. [50]. При этом импульсное многообразие представляет собой дисконтинуум (распыленный континуум).

3. Не станем, как в [48], подставлять первую формулу из (4.3) во вторую, а перейдем сразу к пределу $L \to \infty$ в первой формуле, обозначив через $\pi n/L = p_n$ (при этом, конечно, вместе с $L \to \infty$ и $n \to \infty$ так, что $\lim \pi n/L$ становится некоторым вещественным числом, которое обозначается через p_n). В результате приходим к формуле

$$\psi(p_n) = \lim_{L\to\infty} \frac{1}{2L} \int\limits_{-L}^{L} \mathrm{e}^{-p_n q}\, \psi(q)\, dq. \tag{4.5}$$

Функции $\psi(q)$, которые должны при этом рассматриваться, чтобы $\psi(p_n) \neq 0$ было тождественно, не должны обращаться в нуль при $|q| \to \infty$. Это следует из того, что правую часть в (4.5) можно записать, положив $q/L = x$, в виде $\lim\limits_{L\to\infty} \frac{1}{2} \int\limits_{-1}^{1} F(Lx)\, dx$ (при этом интегрирование и взятие предела не переставимы).

Формула (4.5) — основная формула теории почти периодических функций Г. Бора [51], и $\psi(q)$, следовательно, должны быть именно такими функциями. При этом $\psi(q)$ представляются в виде обобщенного ряда Фурье (а не интеграла, как в (4.1))

$$\psi(q) = \sum_n \psi(p_n)\, \mathrm{e}^{ip_n q}, \tag{4.6}$$

где $\{p_n\}$ — некоторая не более чем счетная последовательность вещественных чисел (множество же всех последовательностей, как и всех точек на импульсном пространстве, несчетно). Подчеркнем, что формулы (4.5), (4.6) принципиально отличаются от формул (4.1).

Меру в интеграле (4.5) назовем боровской. Квадратично-интегрируемые с такой мерой функции на M образуют несепарабельное гильбертово простран-

---

сумма таких множеств тоже будет неизмеримым множеством (т. е. противоречие останется, так как многообразие R' измеримо). Таким образом, переход от решетки к континууму невозможен, и, следовательно, теории поля на этих структурах не эквивалентны (в самом деле, теория на решетке всегда конечна, теория же на континууме содержит, как известно, ультрафиолетовые расходимости). Теперь известно, что континуум c (как связное множество точек с кардинальным числом $\aleph_0 < \operatorname{card} c \leqslant \aleph_1$ вместе с формулами (4.1)) можно только постулировать. Однако физика предлагает совсем другое решение проблемы континуума, см. [49].

ство почти периодических функций*, которое обозначим через H'. Обозначая интеграл в (4.5) через $bm\nu\int dq$, запишем равенство Парсеваля в виде

$$bm\nu\int|\psi(q)|^2dq=\sum_n|\psi(p_n)|^2. \tag{4.7}$$

Связанное с интегралом (4.5) скалярное произведение $(\psi,\ \varphi)'=bm\nu\int\overline{\psi}(q)\times\varphi(q)\,dq$ и норму $\|\cdot\|'=\sqrt{(\cdot,\cdot)'}$ назовем боровскими.

Множество M, наделенное боровской мерой, называется боровским компактом и обозначается через bM. Существенно, что любая область в M, имеющая конечную лебегову меру, имеет нулевую боровскую меру, а боровская мера всего M (имеющего бесконечную лебегову меру) равна 1. Топология на M, индуцированная боровской мерой, не отделима, база такой топологии образована всего лишь двумя подмножествами $(\oslash,\ bM)$, образующими вырожденную булеву алгебру ($\oslash$ — пустое множество). При этом двойственное к bM импульсное пространство M' является дисконтинуумом (несчетным, как M, однако вполне несвязным множеством точек)**.

4. Теория поля (в частности волновая механика) на боровском компакте bM (импульсное пространство — дисконтинуум) в определенном смысле является промежуточной между теориями поля на лебеговом компакте (импульсное пространство — решетка) и на лебеговом континууме, имеющем бесконечную лебегову меру (импульсное пространство — тоже лебегов континуум). И теперь, чтобы перейти от дисконтинуума к континууму, необходимо с математической точки зрения всего лишь расслабить топологию на импульсном пространстве (на физическом языке — добавить клей), при этом никакого противоречия с теорией множеств не возникнет. Но в математике никакого клея нет, вместо него есть аксиома связности. Поэтому и при таком подходе континуум можно только постулировать***. Однако, повторим, физика предлагает совсем другое решение этой проблемы.

---

*Последовательно это пространство строится так. Рассматривается объединение $\bigcup\limits_L H_L$ всех гильбертовых пространств с целыми L и его линейная оболочка l. c.$\bigcup\limits_L H_L$. Замыкание последней по норме $\|\cdot\|'$ (см. дальше) приводит к H'.

**В связи с топологией имеет смысл ввести понятие энтропии пространства, определив его как логарифм мощности базы топологии (числа подмножеств, образующих базу). Так, если множество состоит из m элементов, то его энтропия $S\leqslant m\ln 2$. Энтропия боровского компакта (независимо от его размерности) равна $S_{bM}=\ln 2$. Энтропия пустого множества минимальна: $S_0=\ln 1=0$. Согласно данному определению энтропия боровского компакта bM меньше энтропии лебегова континуума M.

***Дело в том, что в отличие от конфигурационного пространства, в котором физический клей имеется в виде особой субстанции [49], в импульсном пространстве не только математического, но и физического клея нет. В отличие от импульсного конфигурационный дисконтинуум обладает определенной динамической структурой: в отдельных его точках скрыта динамическая

Остановимся на некоторых особенностях волновой теории на боровском компакте. Из представления волновых функций на конфигурационном многообразии в виде сумм (4.6) следует, что в этой теории невозможно образовать волновые пакеты и, следовательно, в ней нет понятия групповой скорости, есть только фазовая скорость (волновые пакеты, как известно, играют важную роль при переходе от волновой механики к классической). Стало быть, новая теория не имеет классического предела и ее объекты не имеют классического аналога. Более того, на боровском компакте (в отличие от лебегова континуума) классическая механика вообще невозможна. С несуществованием волновых пакетов связана невозможность локализации объектов этой теории: нужной для этого дельта-функции Дирака в теории нет. Следовательно, на bM не существует точечных источников поля и, в частности, функций Грина G как решений неоднородного уравнения $\left((1/c^2)(\partial^2/\partial t^2) - \nabla^2\right) G(\mathbf{X}, t) = \delta(t)\delta^3(X)$, а также потенциалов $V(\mathbf{X})$, связанных с G формулой $V(\mathbf{X}) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} G(\mathbf{X}, t)\, dt$ и удовлетворяющих уравнению $\triangle V(\mathbf{X}) = -\delta^3(X)$. Все эти функции имеют нулевые боровские средние и поэтому неэффективны.

Однако в этой теории в качестве эффективных потенциалов могут использоваться почти периодические функции. Тогда, например, стационарное уравнение Шредингера с таким потенциалом $-(1/2m)(d^2\psi/dq^2) + V\psi = E\psi$ будет иметь нетривиальные почти периодические решения. При этом возникает следующая проблема: найти почти периодические решения системы уравнений Шредингера и Максвелла, другими словами, построить электродинамику на боровском компакте (частично эта проблема рассматривается в дополнении).

Ясно, что должна существовать определенная связь между двумя волновыми теориями — теорией на боровском компакте и теорией на лебеговом континууме — в виде (допустимого законом возрастания энтропии) одностороннего перехода из новой теории в старую, в которой достигается известное равновесие между конфигурационным и импульсным многообразиями, выражаемое дираковской симметрией, и в которой энтропия принимает свое максимальное значение (ясно, что физические объекты, существующие в пространствах bM и M, имеют, как и сами пространства, разную энтропию).

5. С целью установить связь между двумя этими теориями рассмотрим конкретный пример — одномерный осциллятор, у которого частота стремится к нулю [50] (оказывается, это универсальная и единственная в своем роде ди-

---

система — поля эфира $f(x)$, $f(\dot{x})$, см. [49]. Теперь, если поля, связанные с разными точками, перекрываются, то это означает, что точки склеиваются. Важную роль при этом (чтобы точки не слипались) играет принцип исключения Паули. Асимметрия между X и p, как видно, еще более углубляется.

намическая система, описываемая новой волновой механикой). В одномерном случае гамильтониан осциллятора записывается в виде $\hat{H}(\omega) = \hat{p}^2 + \omega^2 q^2/2$ (масса и константа Планка положены равными 1). Его спектр, как известно, равен $E_n(\omega) = \omega(n + 1/2)$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$, а собственные функции $\psi_n(q,\omega) = (\omega/\pi)^{1/4}(2^n n!)^{-1/2} \exp\left(-\dfrac{\omega}{2}q^2\right) H_n(\sqrt{\omega}q)$ (H_n — полиномы Эрмита). Гильбертово пространство, натянутое на эти функции как на базис, обозначим через H_ω (это сепарабельное пространство L_2 со скалярным произведением (4.2)). При $\omega \to 0$ гамильтониан $\hat{H}(0) = \hat{p}^2/2$, его спектр E_n (при любом n) стягивается в одну точку 0 и все ψ_n и их нормы $\|\psi_n\| = \sqrt{(\psi_n, \psi_n)}$ обращаются в нуль*. Это означает, что не только пространство L_2, но и любое его топологическое расширение, натянутое на тот же самый базис $\{\psi_n(q,\omega)\}$, что и L_2, но с растущими коэффициентами разложения, например, оснащенное гильбертово пространство, представляющее собой тройку пространств $\Phi \subset L_2 \subset \Phi'$ (где Φ' — пространство линейных непрерывных функционалов, заданных скалярным произведением (4.2) и рассматриваемых на пространстве основных функций Φ), при $\omega \to 0$ стягиваются к нулю**. Важно подчеркнуть, что при этом осциллятор как динамическая система ни математически, ни физически не эквивалентен свободной частице. В самом деле, свободная частица (тот же гамильтониан $\hat{H} = \hat{p}^2/2m$) характеризуется непрерывным спектром E и описывается решениями стационарного уравнения $-(1/2m)(d^2\psi/dq^2) = E\psi$, имеющими вид $\mathrm{e}^{\pm i\sqrt{2mE}q} \in \Phi'$. Из последних можно строить волновые пакеты $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{ipq}\psi_n(p)\,dp \in \Phi$, которые можно ортогонализовать по Шмидту и нормировать, т. е. построить оснащенное гильбертово пространство $\Phi \subset L_2 \subset \Phi'$. В случае же осциллятора с частотой $\omega \to 0$ такого пространства, как видно, нет. В этом случае функции $\psi = C\,\mathrm{e}^{\pm i\sqrt{2E}q}$ принадлежат совсем другому пространству H'. Следует обратить внимание, что множества $\Phi' \backslash H$ и H' образованы одними и теми же

*В самом деле, по определению несобственного интеграла, например, для нормы (ψ_0, ψ_0) состояния ψ_0 имеем $\lim\limits_{L\to\infty}\lim\limits_{\omega\to 0}\sqrt{\omega}\int\limits_{-L}^{L}\mathrm{e}^{-\omega q^2}\,dq = \lim\limits_{L\to\infty}\lim\limits_{\omega\to 0}\int\limits_{-\sqrt{\omega}L}^{\sqrt{\omega}L}\mathrm{e}^{-x^2}dx \leqslant \lim\limits_{L\to\infty}\lim\limits_{\omega\to 0}2\sqrt{\omega}L = 0$ (в нуле норма рвется: любой элемент $\psi \neq 0$ можно нормировать на единицу, взяв $\psi/\|\psi\|$, но $\|0\| = 0$).

**Напомним, что топологическое пространство M стягиваемо к нулю, если $\varepsilon M \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, т. е. для любого элемента $m \in M$ имеем $\varepsilon m \to 0$. В частности, любое векторное пространство, в том числе и вещественная ось $R =]-\infty, \infty[$ (открытое множество), стягиваемо. В том, что при $\omega \to 0$ вместе с L_2 стягивается к нулю и Φ', можно убедиться, разложив, например, функцию e^{ipq} в ряд по $\psi_n(q\omega)$. Коэффициенты разложения $c_n(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{ipq}\psi_n(q\omega)\,dq = i^n\sqrt{2\pi}\psi_n(p/\omega) \underset{\omega\to 0}{\longrightarrow} 0$ как $\mathrm{e}^{-p^2/2\omega}/\sqrt{\omega^{n+1/2}}$.

функциями e^{ipq}, но смысл у них разный (ср. с [52]). Φ' включает в себя еще и функции из H, но H' таких функций не содержит (норма $\|H'\| = 0$).

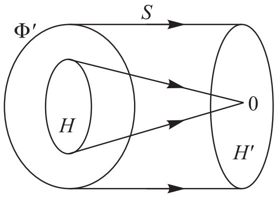

Рис. 1. Переход от лебеговой меры к боровской

Связь между Φ' и H' показана на рисунке: переход от лебеговой меры к боровской задается отображением S (не следует смешивать S со стягиванием). S отображает подпространство $H \subset \Phi'$ в $0 \in H'$ (так что H является ядром отображения S)*. Чтобы перейти от теории на bM к теории на M, нужно задать ядро $S^{-1}(0)$. С чисто математической точки зрения эта процедура не однозначна: множество функций $S^{-1}(0)$ можно выбирать по-разному. Таким образом, отображение S^{-1}, не являющееся, очевидно, гомоморфизмом, устанавливает связь между теорией поля на боровском компакте и теорией на лебеговом континууме. При этом информация, конечно, увеличивается за счет появления H, энтропия возрастает и данный переход, следовательно, является необратимым.

6. Нетрудно убедиться, что, из какой бы динамической системы (какого бы Φ') ни исходить, S приводит к одной и той же динамической системе — осциллятору с нулевой частотой. С этой целью рассмотрим реальный случай $M = R_3$ и систему с гамильтонианом $\hat{H} = \hat{\mathbf{p}}^2/2m + V(\mathbf{r})$, где, например, $V = -e^2/|\mathbf{r}|$ — кулоновский потенциал. Устремляя $e \to 0$, получим уже известный гамильтониан, при этом боровский спектр $E_n = -me^4/2n^2 \to 0$ (предел $e \to 0$ эквивалентен пределу $n \to \infty$, см. [53]), а радиальные волновые функции $R_{nl} \to 0$ как $1/n^{3/2}$. Следовательно, и здесь спектр и гильбертово пространство стягиваются в нуль. Но и в этом случае уравнение $-(h^2/2m)\triangle\psi = E\psi$ имеет решения в пространстве H' вида $\psi(\mathbf{x}) = \sum\limits_i \psi_i\, e^{i\mathbf{p}_i\mathbf{x}}$, где при любом $\mathbf{p}_i^2/2m = E$ (в [50] такими решениями описываются структуры, называемые почти периодическим кристаллом). В этом случае боровское среднее $bm\nu \int |\psi(\mathbf{r})|^2\, d^3r = \lim\limits_{R\to\infty} \dfrac{1}{R^3}\int\limits_0^R |\psi(\mathbf{r})|^2\, r^2\, dr\, d\Omega$ (Ω — угловые переменные на сфере). И вообще, если $\int \overline{\psi} V \psi\, d^3r < \infty$, то $bm\nu \int \overline{\psi} V \psi\, d^3r = 0$.

В [50] рассматриваются также решения с разделяющимися радиальными и угловыми переменными вида $\psi = e^{ipr} Y(\theta, \varphi)$, где $Y(\theta, \varphi)$ — многозначные функции на сфере. Такими функциями описываются объекты с оболочкой (естественно при этом считать, что чем больше пар особых точек на сфере,

*Точнее, в нуль отображаются не только функции ψ с лебеговой нормой $\|\psi\| < \infty$, но и функции, удовлетворяющие при $L \to \infty$ условию $\left|\int\limits_{-L}^{L} \psi(q)\, dq\right| \leqslant CL^\alpha$ с $\alpha < 1$ и $C < \infty$.

тем выше, используя биологическую терминологию, иммунитет оболочки). Существенно подчеркнуть, что рост почти периодических структур с оболочкой сопровождается их делением (чего не наблюдается при росте, скажем, обычного кристалла).

Дополнение. 1. Рассмотрим стационарное уравнение Шредингера $(-\Delta/2m + V(\mathbf{r}))\psi = E\psi$ с *внешним* почти периодическим потенциалом V, обобщающее уравнение Матье. Его точные решения неизвестны. Поэтому будем считать V малым возмущением исходного уравнения $-(\Delta/2m)\psi_0 = E_0\psi_0$. Каждое его решение, имеющее вид $\psi_0(\mathbf{r}) = \sum\limits_i \psi_0(\mathbf{p}_i)\,\mathrm{e}^{i\mathbf{p}_i\mathbf{r}}$, характеризуется некоторым счетным множеством импульсов $\{\mathbf{p}_i\}_{i=1}^{\infty}$ (спектром состояния ψ_0), лежащих на энергетической поверхности — сфере радиусом $\sqrt{\mathbf{p}_i^2} = \sqrt{2mE_0}$ (так как сфера — компактное многообразие, то данное множество векторов имеет хотя бы один предельный вектор; энергия E_0, таким образом, сильно вырождена). V как внешний потенциал характеризуется некоторым своим спектром импульсов $\{\mathbf{k}_n\}_{n=1}^{\infty}$, так что $V(\mathbf{r}) = \sum\limits_n V(\mathbf{k}_n)\,\mathrm{e}^{i\mathbf{k}_n\mathbf{r}}$. Полагая в рамках теории возмущений $\psi = \psi_0 + \psi_1$ и $E = E_0 + \triangle E$, где ψ_1 и $\triangle E$ — малые поправки, обусловленные V, и используя невозмущенное уравнение, пренебрегая при этом величинами второго порядка малости, получим $(V - \Delta E)\psi_0 + (-\Delta/2m - E_0)\psi_1 = 0$. Отсюда при условии $(\psi_0, \psi_0)' = 1$ следует формула $\Delta E = (\psi_0, V\psi_0)' + (\psi_0, (-\Delta/2m - E_0)\psi_1)'$. Так как в классе почти периодических функций дифференциальный оператор $\hat{\mathbf{p}} = -i(\partial/\partial\mathbf{r})$ самосопряжен: $(\psi, \hat{\mathbf{p}}\varphi)' = (\hat{\mathbf{p}}\psi, \varphi)'$, то $(\psi_0, (\Delta/2m + E_0)\psi_1)' = ((\Delta/2m + E_0)\psi_0, \psi_1)' = 0$. Поэтому поправка к энергии равна

$$\Delta E = (\psi_0, V\psi_0)' = \bar{V} = \sum_{i,j} \bar{\psi}_0(p_i) V_{ij} \psi_0(p_j), \tag{Д.1}$$

где $V_{ij} = bm\nu \int V(\mathbf{r})\,\mathrm{e}^{i(\hat{p}_j - \hat{p}_i)\mathbf{r}}\,d^3r$. Может оказаться, что для данного спектра $\{\mathbf{p}_i\}_{i=1}^{\infty}$ все $V_{ij} = 0$ (так будет, если импульсы $\mathbf{k}_n$ не удовлетворяют правилам отбора $\mathbf{k}_n = \mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j$). Это будет означать, что под действием V меняется только волновая функция. В общем случае поправка к ней ψ_1 равна

$$\psi_1 = \left(\frac{\Delta}{2m} + E_0\right)^{-1} (V - \Delta E)\psi_0. \tag{Д.2}$$

При этом в разложении $\psi_1(\mathbf{r}) = \sum\limits_i \psi_1(\mathbf{q}_i)\,\mathrm{e}^{i\mathbf{q}\mathbf{r}}$ импульсы $\mathbf{q}_i$ могут принадлежать некоторой более сложной, нежели сфера, энергетической поверхности.

Рассмотрим теперь случай, когда внешнее поле V зависит от времени в виде $V(\mathbf{r}, t) = \mathrm{e}^{-i\omega t} V_\omega(\mathbf{r})$, где $V_\omega(\mathbf{r}) = \sum\limits_n V_\omega(\mathbf{k}_n)\,\mathrm{e}^{i\mathbf{k}_n\mathbf{r}}$. Как и в обычной квантовой механике, $\psi(\mathbf{r}, t)$ будем искать (путем вариации коэффициентов разложения) в форме ряда $\psi(\mathbf{r},t)=\sum\limits_{E}\mathrm{e}^{-iEt}\,\psi_E(\mathbf{r})a_E(t)$, где $\psi_E(\mathbf{r})$ являются решениями стационарного уравнения Шредингера $-(h^2/2m)\Delta\psi=E\psi$ и записываются в уже знакомом нам виде (см. раньше). Так как $(\psi_E,\psi_E)'=\delta_{EE'}$, то для коэффициентов разложения $a_E(t)$ получаем следующее уравнение: $i(\partial/\partial t)a_E(t)=\sum\limits_{E'}V_{\omega,E-E'}(t)\,\mathrm{e}^{i(E-E')t}a_{E'}(t)$, где $V_{\omega,E-E'}(t)=(\psi_E,V_\omega\psi_{E'})'$. Записывая $a_E(t)$ в виде $\delta_{E'E_0}+a^{(1)}_{E'}(t)$, где $a^{(1)}_{E'}(t)$ — малая величина, получаем для $a^{(1)}_{E'}(t)$ уравнение $i(\partial/\partial t)a^{(1)}_{E}(t)=V_{\omega,E-E_0}(t)\,\mathrm{e}^{i(E-E_0)t}$, откуда интегрированием получаем

$$a^{(1)}_E=-i\int\limits_{-\infty}^{\infty}dtV_{\omega,E-E_0}(t)\,\mathrm{e}^{i(E-E_0)t}=2\pi\delta(E-E_0-\omega)V_{\omega,E-E_0}. \qquad (\text{Д}.3)$$

Здесь $\delta(E-E_0-\omega)$ — обычная дельта-функция Дирака (время t не подвергается боровской компактификации), а $V_{\omega,E-E'}=\sum\limits_{i,j,k}\bar{\psi}_E(\mathbf{q}_j)V_\omega(\mathbf{k}_n)\psi_{E_0}(\mathbf{p}_i)\times\delta_{\mathbf{k}_n,\mathbf{q}_j-\mathbf{p}_i}$. Вероятность перехода $\psi_{E_0}\to\psi_E$ в единицу времени при этом равна $w=2\pi\left|V_{EE_0}\right|^2$. Опять же она может быть равна нулю, если правила отбора $\mathbf{k}_n=\mathbf{p}_i-\mathbf{p}_j$ не выполняются.

2. Правила отбора будут выполняться, если поле V создается самим полем ψ согласно уравнению $\big((1/c^2)(\partial^2/\partial t^2)-\Delta\big)\,V=\varepsilon\bar{\psi}\psi$. Рассмотрим далее случай электромагнитного поля $A_\mu=(\mathbf{A},A_0)$, удовлетворяющего уравнению Максвелла $\big((1/c^2)(\partial^2/\partial t^2)-\Delta\big)\,A_\mu=ej_\mu$. Поле A_μ берется в лоренцевой калибровке $\operatorname{div}\mathbf{A}+\partial A_0/\partial t=0$, следующей из закона сохранения тока $\operatorname{div}\mathbf{j}+\partial\rho/\partial t=0$, где $\mathbf{j}=(1/2m)[\bar{\psi}\hat{\mathbf{p}}\psi-(\hat{\mathbf{p}}\bar{\psi})\psi]$. Подчеркнем, что поскольку пространство R_3 подвергается боровской компактификации, а время t остается обычным, то о лоренцевой инвариантности в таком случае говорить не приходится.

Прежде всего необходимо отметить принципиальное отличие электродинамики на боровском компакте от электродинамики на лебеговом континууме*. Так, например, в стационарном случае (нет зависимости от t) решение уравнения Максвелла для A_0 на лебеговом континууме записывается (при использовании преобразования Фурье (4.1)) в виде интеграла $A_0(\mathbf{r})=e\int(\rho(\mathbf{k})/\mathbf{k}^2)\,\mathrm{e}^{i\mathbf{kr}}\,d^3k$ и существует даже тогда, когда $\rho(0)\neq 0$. На боровском

*Чтобы лучше понять разницу между пространствами R_3 и bR_3, обратимся к простому алгебраическому уравнению $x\varphi(x)=0$. В классе непрерывных функций (в частности, в H', случай bR_3) это уравнение имеет единственное решение $\varphi(x)=0$. В классе же обобщенных функций Φ' (случай R_3) существует второе решение в виде дельта-функции $\varphi(x)=\delta(x)$. Другой пример: при $-1<\alpha<0$ интеграл по k $\int\limits_0^K k^\alpha\,dk<\infty$, сумма же (по целым k) $\sum\limits_{k=0}^{K}k^\alpha=\infty$.

же компакте (при использовании преобразования Фурье (4.5), (4.6)) решение записывается в виде суммы $A_0(\mathbf{r}) = e\sum\limits_n (\rho(\mathbf{k}_n)/\mathbf{k}_n^2)\,\mathrm{e}^{i\mathbf{k}_n\mathbf{r}}$, в которой нулевая мода с $\mathbf{k}_n = 0$ обязательно имеется ($\bar{\rho} = bm\nu\int\bar{\psi}\psi\,d^3r \neq 0$). И поскольку $\rho(0) = (\psi,\psi)' \neq 0$, так как $\psi \neq 0$ (подчеркнем, что в пространстве H' из условия $(\psi,\psi)' = 0$ следует, что $\psi = 0$), то это решение не имеет смысла (обращается в бесконечность), т. е. на боровском компакте уравнения Максвелла невозможны. В самом деле, беря боровское среднее от уравнения Максвелла, приходим к противоречию $0 = e(\psi,\psi)' \neq 0$, выход из которого заключается в том, чтобы допустить, что в боровском пространстве (в частности, в живой клетке) электромагнитная волна (фотон) характеризуется некоторой массой κ. Поэтому вместо уравнений Максвелла следует принять уравнения*

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta + \kappa^2\right)A_\mu = ej_\mu. \tag{Д.4}$$

В случае тока $j_\mu(\mathbf{r},t) = \mathrm{e}^{-i(E_1-E_2)t}j_\mu(\mathbf{r})$ решение этого уравнения записывается в виде

$$A_\mu(\mathbf{r},t) = \mathrm{e}^{-i\omega t}\sum_n \frac{ej_\mu(\mathbf{k}_n)}{\mathbf{k}_n^2+\kappa^2-\omega^2}\,\mathrm{e}^{i\mathbf{k}_n\mathbf{r}}, \tag{Д.5}$$

где $\omega = E_1 - E_2$, $\mathbf{k}_n = \mathbf{p}_i - \mathbf{q}_j$, а $j_\mu(\mathbf{k}_n) = [(1/2m)(\mathbf{p}_i + \mathbf{q}_j)\bar{\psi}(\mathbf{q}_j)\psi(\mathbf{p}_i),\ \bar{\psi}(\mathbf{q}_j)\psi(\mathbf{p}_i)]$. В случае тока, не зависящего от времени, имеем $\bar{A}_0 = e/\kappa^2$, а $\bar{\mathbf{A}} = \bar{\mathbf{p}}\bar{A}_0$. Измеряя боровское среднее потенциала $\bar{A}_0$ в живой клетке, можно определить параметр κ.

5. КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА В ОБЛАСТИ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

1. После построения математического аппарата нерелятивистской квантовой механики (фон Нейман [52], см. также Дирак [47]) в виде теории операторов в сепарабельном гильбертовом пространстве нередко предпринимались попытки расширить эту схему с целью получить ответ на ряд чисто физических вопросов, остававшихся нерешенными (например, проблема селекции частиц, явление редукции и статистический характер волн Ψ). Невозможность ответить на эти вопросы в рамках существующей схемы означает, что квантовая механика Гейзенберга–Шредингера не полна.

Предпринятая затем релятивизация квантовой схемы (своего рода расширение), основу которой составил метод вторичного квантования полей Ψ,

*Здесь можно было бы усмотреть некую аналогию с электродинамикой в сверхпроводнике, где роль массы играет лондон-пиппардоский параметр δ, с которым связано явление выталкивания магнитного поля из сверхпроводника.

мало что изменила в этих проблемах, однако привела к дополнительной трудности — ультрафиолетовой катастрофе*. Стало ясно, что аксиом обычной квантовой механики и требований специальной теории относительности [54] недостаточно для построения математически последовательной полевой теории частиц [55] (используемую при этом процедуру бесконечной перенормировки ни в коей мере нельзя считать математически корректной).

Для дальнейшего важно заметить, что дуализм «волна–частица», провозглашенный волновой механикой (картина Шредингера), на самом деле не был реализован**: частицы появляются лишь при интерпретации волновой функции Ψ, хотя при этом и рассматриваются только такие волны Ψ, которые подчиняются уравнению Шредингера (в котором связь между энергией и импульсом — закон дисперсии — берется из классической механики частиц). Важно подчеркнуть, что шредингеровское понимание частиц как волновых образований не прошло (такие образования расплываются, частицы же нет), хотя волновые пакеты в этой теории играют важную роль при переходе к классической механике и формулировке принципа соответствия. Получается так, что эксперимент имеет дело с частицами, а теория — с волнами. В другой картине — картине Гейзенберга — волновые переменные Ψ вообще удается исключить: в квантовой схеме, использующей сепарабельное гильбертово пространство, имеются проекционные операторы, и состояние $\Psi = |\Psi\rangle$ вполне можно заменить таким оператором (матрицей), представив его в виде $P_\Psi = |\Psi\rangle\langle\Psi|$ [47, 52]. При этом одна из основных формул квантовой меха-

*Удивительно, но большинство физиков (за исключением Гейзенберга, Дирака, Фейнмана) не придавало серьезного значения этой проблеме и рассматривало ее не как фундаментальную, а как чисто техническую трудность. Однако уже тогда имелась необходимая математическая основа (в виде теории меры и теории функциональных колец) для ее решения и построения корректной теории взаимодействий частиц.

**В связи с этим интересно вспомнить, что де Бройль [56] пытался построить теорию так называемого двойного решения $\Psi + \Psi'$, где Ψ была бы обычной (в общем случае расплывающейся) волной вероятности, подчиняющейся уравнению Шредингера, а Ψ' описывала бы частицу как некую сингулярность. В [57], исходя из анализа экспериментов по глубоконеупругому рассеянию, под частицей понимается когерентный ансамбль составляющих ее точечных конституентов — гранул (зерен), в связи с чем полагается $\Psi'(X) = \sum\limits_j \Psi_j \delta_{X,X_j}$, где δ_{X,X_j} — символ Кронекера (существенно, что такой ансамбль не расплывается). Поскольку партонной структурой, без сомнения, обладают барионы, то данное расширение волновой механики касается прежде всего нуклонов. Именно Ψ' описывает саму частицу и дает возможность ответить на вопросы, перечисленные в начале. Однако Ψ' как функция, определяемая некоторой совокупностью пар $\{(X_j, \Psi_j)\}$, где Ψ_j зависят от времени не только посредством e^{-iEt}, и заданная на подмножестве конфигурационного многообразия нулевой лебеговой меры, непосредственно не наблюдаема в том смысле, что $\|\Psi + \Psi'\| = \|\Psi\|$, где $\|\Psi\|$ — обычная (лебегова) норма функции, используемая в теории Гейзенберга–Шредингера. Подчеркнем, что гранулы не следует смешивать с кварками, которые, как и частицы, описываются обычными волновыми функциями Ψ, подверженными расплыванию.

ники записывается в виде $\overline{A}_\Psi = \mathrm{Sp}\, AP_\Psi$, где A — оператор наблюдаемой, а $\overline{A}_\Psi$ — среднее значение этой наблюдаемой в состоянии $|\Psi\rangle$. Существенно, что в матричной механике исчезает неопределенность, связанная не только с неоднозначностью волновой функции $|\Psi\rangle$ по мере $(|\Psi\rangle \to |\Psi\rangle + |\Psi'\rangle)$, но и с фазовой неоднозначностью $|\Psi\rangle$ $(|\Psi\rangle \to \mathrm{e}^{i\alpha}|\Psi\rangle)$, которой обусловлено включение взаимодействий между полями. Однако не следует забывать, что то новое, что привнесла квантовая механика в физическую картину мира, суть волновые свойства материи (хотя и статистические по своей природе). Оказалось, что состояние частицы (ее поведение в пространстве) диктуется той макрообстановкой, тем ансамблем, к которому она принадлежит (вероятностная же природа состояния $|\Psi\rangle$ обусловлена другим ансамблем, который входит в нее в виде $|\Psi'\rangle$, см. дальше). В картине Гейзенберга эти свойства полностью скрыты. Поэтому, несмотря на формально установленную эквивалентность обеих картин [52], эти картины существенно не эквивалентны. Более того, как будет видно дальше, в смысле замкнутости картина Гейзенберга более замкнута, нежели картина Шредингера*. Поэтому далее, стремясь расширить (пополнить) квантовую схему, мы будем исходить из шредингеровской картины.

2. Уже отмечалось, что в конфигурационном (X) представлении волна Ψ' не наблюдаема. Но, как мы увидим дальше, в импульсном (p) представлении положение меняется радикальным образом. Поэтому мы уже сейчас перейдем к этому представлению. Но прежде заметим, что даже в нерелятивистской квантовой механике (где не учитывается связь между спином и статистикой) волновые переменные $\Psi(X)$ используются не только как элементы некоторого линейного пространства L, но и как элементы некоторого коммутативного кольца (алгебры) A. В самом деле, при описании взаимодействий используются произведения полей типа $\Psi(X)\varphi(X)$ ($X \in M_X$ — конфигурационное многообразие), а также интегралы вида $\int\limits_{M_X} \Psi(X)\varphi(X)\, dX$ (dX — лебегова мера на M_X), которые, конечно же, должны иметь смысл. В импульсном представлении, связанном с конфигурационным преобразованием Фурье

$$\Psi(X) = \int\limits_{M_p} \Psi(p)\, \mathrm{e}^{ipX}\, dp \tag{5.1}$$

*Как известно, расширить картину Гейзенберга, включив в нее некие скрытые параметры, не удается по той причине, что проекционный оператор P_Ψ невозможно разложить в сумму $\alpha P_1 + \beta P_2\, (\alpha + \beta = 1)$ двух других проекционных операторов P_1, P_2 (теорема фон Неймана [52]). Этот факт фон Нейман рассматривал как абсолютную невозможность ввести скрытые параметры в рамки квантовой механики. Однако оператор P_Ψ может быть представлен в виде (прямого) произведения двух других операторов, за которыми стоят некие скрытые сущности (см. дальше).

(здесь $p \in M_p$ — импульсное многообразие; dp — мера Лебега на M_p; говорят, что многообразие M_p дуально M_X в смысле преобразования Фурье), появляется свертка функций $\Psi * \varphi = \int\limits_{M_p} \Psi(p)\varphi(q-p)\,dp$ в качестве закона композиции и интегралы $\int\limits_{M_p} \Psi(p)\varphi(-p)\,dp$. В связи с этим рассматривается также обычное умножение $\Psi(p)\varphi(p)$ функций на M_p.

Если M_p локально компактное, но некомпактное (как и M_X) многообразие с мерой Лебега $\mu_L(M_p) = \infty$ (что как раз и имеет место в квантовой механике частиц, в которой существует определенное равновесие между многообразиями M_X и M_p, устанавливаемое преобразованием Фурье и лебеговой мерой), кольцо A может быть топологизировано различным образом. Прежде всего следует определить объем (запас функций) кольца A. Обычно на M_p рассматривается класс измеримых абсолютно интегрируемых функций $\Psi(p)$, удовлетворяющих условию $\lim\limits_{|p|\to\infty} \Psi(p) = 0$. Такие функции образуют нормированное (банахово) кольцо L_1 с законом композиции $*$, снабженное нормой $\|\Psi\|_1 = \int |\Psi(p)|\,dp$, удовлетворяющей условию $\|\Psi * \varphi\|_1 \leqslant \|\Psi\|_1\|\varphi\|_1$. Эта норма связана с лебеговой мерой dp на M_p-обстоятельство, исключительно важное для физики. Итак, кольцо A (в X-представлении) с обычным умножением и кольцо L_1 (в p-представлении) со сверткой можно считать *изоморфными* [48]. Пользуясь этим изоморфизмом, можно свободно переходить от A к L_1 и обратно.

Примечательно то, что $L_1(\sim A)$ является кольцом без единицы e: оно не содержит функцию $\Psi(p) = 1$ (единицу относительно обычного умножения)* и поэтому по общей теории колец может быть пополнено (несмотря на то, что оно топологически замкнуто) с сохранением закона композиции $*$ и обычного умножения (но без сохранения меры на M_p и M_X, см. дальше). Расширенное кольцо обозначим через A'.

3. Обозначим через Υ множество максимальных регулярных идеалов кольца A (с обычным умножением функций; при этом кольцу A в p-представлении изоморфно кольцо L_1 в X-представлении). Максимальный идеал $I_p \subset A$ образован функциями, обращающимися в нуль в точке $p \in M_p$. Ясно, что Υ изоморфно многообразию M_p. Ясно также, что кольцо A может быть вложено в кольцо A' в виде максимального идеала $I_\infty = A \subset A'$. Все множество максимальных идеалов кольца A' обозначим через Υ'.

---

*На первый взгляд может показаться, что относительно свертки δ-функция Дирака может считаться единицей в L_1. Однако, будучи функцией (а не функционалом), заданной на множестве нулевой лебеговой меры, ее норма $\|\delta\|_1 = \int \delta(p)\,dp = 0 \neq 1 = \|e\|_1$, на что в свое время было указано фон Нейманом [52].

Согласно абстрактной теории коммутативных колец [58] множество Υ можно получить из Υ', выкалывая один-единственный идеал $I_\infty = A$, содержащий функции, удовлетворяющие условию $\Psi(\infty) = 0$. В свою очередь множество Υ' может быть получено из $\Upsilon \sim M_p$ посредством замыкания последнего, так что $\Upsilon' \sim \overline{M}_p$. В отличие от Υ множество Υ' замкнуто и, следовательно, *компактно*. Таким образом, A можно связать с Υ, а A' — с Υ'.

Важность кольца A' заключается в следующем: как обычно, более широкое кольцо содержит дополнительные (скрытые с точки зрения A) элементы, за которыми стоят более фундаментальные (в определенном смысле) объекты, нежели частицы, стоящие за A. *Расширение кольца $A \subset A'$ является той основой, на которую опирается наш подход к проблеме пополнения волновой механики.*

4. Кольцо A' можно сделать топологическим. Обычно оно отождествляется с нормированным (банаховым) кольцом ограниченных рефлексивных функций L_∞, топология которого порождается метрикой $\rho(\Psi, \chi) = \|\Psi - \chi\|_\infty$, где $\|\Psi\|_\infty = \max\limits_{p \in M_p} |\Psi(p)|$ — норма, удовлетворяющая условию $\|\Psi\varphi\|_\infty \leqslant \|\Psi\|_\infty \|\varphi\|_\infty$. С такой топологией L_∞ является *сильно несепарабельным* кольцом [58].

Примечательно также, что норма $\| \, \|_\infty$, вообще говоря, никак не связана с мерой на M_p*. Это обстоятельство объясняет, почему кольцо L_∞ не используется в квантовой механике, в которой процесс измерения на M_p играет важную роль. В квантовой механике (как и в функциональном анализе) кольцо $L_\infty (\sim A')$ рассматривается как дуальное (сопряженное) пространство пространству L_1 измеримых (по мере Лебега на M_p) функций, т. е. как пространство линейных функционалов над пространством L_1. При этом L_∞ снабжается слабой топологией, в которой оно является *слабо сепарабельным* кольцом. Таким образом, в контексте квантовой механики кольцо L_∞ (как пространство функционалов) не идентично кольцу A'. В дальнейшем это несоответствие, конечно, нами будет устранено.

5. Только ради простоты дальше рассматривается одномерный случай, когда $M_p \sim R_p =]-\infty, \infty[$ является вещественной осью. В этом случае (как и в случае любой другой размерности) имеется три различных способа компактификации R (см. [59]). Это следующие многообразия:

i) расширенная числовая ось $\overline{R} = [-\infty, \infty]$,

ii) компактификация Александрова $\widetilde{R} = R \cup \infty \sim S^1$,

iii) компактификация Г. Бора (в этом случае бесконечно удаленная точка не присоединяется).

---

*Хотя в [59] норма $\max\limits_{p \in M_p} |\Psi(p)|$ считается как-то зависящей от меры на M_p.

Как известно, в случае ii) полностью, а в i) частично утрачивается линейная структура и линейное упорядочение пространства R. Дуальным пространством к $\widetilde{R} \sim S^1$ является решетка Z. Этот случай мы не рассматриваем вовсе, так как конфигурационное пространство в виде Z не имеет отношения к физике частиц*.

Как известно, обычное преобразование Фурье (5.1) (с лебеговой мерой на R_p) не чувствительно к различию между R_p и $\overline{R}_p$. Дуальным пространством и к R_p, и к $\overline{R}_p$ является одно и то же пространство R_X. Класс функций на R_p и $\overline{R}_p$ также один и тот же. При этом можно рассматривать довольно широкий спектр нормированных пространств $L_q\,(1 \leqslant q \leqslant \infty)$, рассматриваемых как функционалы на нормированном пространстве L_p с $p = q/(q-1)$, а также локально выпуклые (в частности, счетно-нормированные) топологические векторные пространства. Нормы

$$\|\Psi\|_q = \left(\int |\Psi(p)|^q \, dp \right)^{1/q}, \tag{5.2}$$

связанные с лебеговой мерой dp на R_p, называются нами лебеговыми.

Квантовая теория, связанная с $\overline{R}_p$, полностью эквивалентна теории Гейзенберга–Шредингера, связанной с R_p, в которой используется лебегова мера на R_p и сепарабельное пространство функций на нем. По чисто физическим соображениям (исключительной важности скалярного произведения) квантовая теория обычно связывается с гильбертовым пространством L_2 [52]. Дальнейшее обобщение схемы, связанное с оснащенным гильбертовым пространством $\Phi \subset L_2 \subset \Phi'$, включающим в себя обобщенные функции типа δ-функции Дирака, ничего не изменило по существу, а только разрушило кольцевую структуру класса функций. Следует обратить внимание (на что указывал фон Нейман [52]), что такое обобщение не только не желательно, но и не корректно с точки зрения теории функций**. Переносить же эту идею в теорию квантованных полей просто недопустимо. Именно с введением δ-функций связано появление ультрафиолетовой катастрофы.

Следует также обратить внимание на то обстоятельство, что хотя $\overline{R}_p$ замкнуто (компактно), его мера Лебега $\mu_L(\overline{R}_p) = \mu_L(R_p) = \infty$. Поэтому для $\Psi(p) = 1 \in A'$ свертка $\int\limits_{\overline{R}_p} dp = \infty\,(= 2\pi \int \delta^2(X) dX = 2\pi\delta(0))$. Именно с этой бесконечностью $\delta(0)$ связана ультрафиолетовая катастрофа в обычной

*В самом деле, при увеличении радиуса окружности S^1 (т. е. уменьшении шага решетки Z) невозможно прийти к несчетному количеству точек, из которого состоит конфигурационное многообразие R_X — континуум. В лучшем случае можно прийти к счетному множеству точек D, может быть, плотному в R_X, см. [57].

**По-видимому, известный спор между Дираком и фон Нейманом следует решить в пользу фон Неймана.

теории поля. Суть проблемы в бесконечной мере пространства $\overline{R}_p$. То обстоятельство, что компактное многообразие $\overline{R}_p$ имеет бесконечную меру, рассматривается нами как противоречие, несоответствие между топологией и мерой*.

6. Таким образом, основное противоречие в подходе i) заключается в том, что компактное многообразие $\overline{R}_p$ имеет бесконечную (лебегову) меру. Устранить его можно, только изменив меру на R_p. Оказывается, компактификация R_p путем iii) является единственным средством полностью решить эту проблему.

В [60] Г. Бор фактически показал, что кольцо L_∞ с нормой $\| \, \|_\infty$ может быть вложено в новое топологическое кольцо, связанное с новой мерой на R_p. В теории Бора A' отождествляется с несепарабельным гильбертовым пространством L_2' почти периодических функций на R_p, снабженным скалярным произведением

$$(\Psi, \varphi)' = \lim_{P\to\infty} \frac{1}{2P} \int_{-P}^{P} \overline{\Psi}(p)\varphi(p)\,dp \tag{5.3}$$

и нормой $\|\Psi\|' = \sqrt{(\Psi,\varphi)'}$, называемой нами боровской. При этом норма $\| \, \|_\infty$ мажорирует норму $\| \, \|'$. В самом деле, мы имеем

$$\sqrt{\lim_{P\to\infty} \frac{1}{2P} \int_{-P}^{P} \overline{\Psi}(p)\varphi(p)\,dp} \leqslant \sqrt{\max_{p\in\overline{R}_p} |\Psi(p)|^2 \lim_{P\to\infty} \frac{1}{2P} \int_{-P}^{P} dp} = \\ = \max_{p\in\overline{R}_p} |\Psi(p)| = \|\Psi\|_\infty \,.$$

Так что здесь $L_\infty \subset L_2'$. В боровской теории свертка функций определяется формулой $\Psi * \varphi = \lim\limits_{P\to\infty} 1/2P \int_{-P}^{P} \Psi(p)\varphi(q-p)\,dq$. Многообразие R_p, снаб-

*Следует иметь в виду, что топология многообразия и мера на нем, вообще говоря, никак не связаны между собой. Задать топологию на многообразии — значит рассмотреть некоторую систему его подмножеств, удовлетворяющую определенным аксиомам, см. [48]. Задать же меру означает рассмотреть некоторую функцию множества, удовлетворяющую определенным требованиям [48]. При одной и той же топологии может существовать несколько различных неэквивалентных мер. Так, лебегова мера μ_L не эквивалентна боровской мере μ_B: $\mu_L(R) = \infty, \mu_B(R) = 1$. Но если соблюсти соответствие между мерой и топологией (к чему мы стремимся), то в случае боровской меры на R следует рассматривать топологию, индуцированную этой мерой. Многообразие R с такой топологией является боровским компактом bR. Что же касается топологии на классе функций, рассматриваемых на R, то она существенным образом связана с мерой на R. Кольцо A' образовано одними и теми же функциями независимо от того, на каком пространстве, $\overline{R}$ или bR, они рассматриваются. Но как топологическое кольцо $L_\infty(\overline{R})$ слабо сепарабельно, а $A'(bR)$ не сепарабельно, т. е. эти кольца принципиально различны, см. дальше, а также [57].

женное боровской мерой (инвариантной, как и лебегова мера, относительно трансляций $p \to p + a$), обозначается через bR_p. Очевидно, $\mu_B(R_p) = 1$. При этом кольцо A' остается несепарабельным, но bR_p является нехаусдорфовым многообразием [57].

Факторизуя A' по идеалу A (носителями функций из A являются подмножества в R_p нулевой боровской меры), получим кольцо боровских почти периодических функций на R_p, обозначаемое через L'_2: $A'/A = L'_2$. Свойства этого кольца детально изучены Г. Бором [60].

Важность кольца A' заключается в том, что *с ним связана расширенная волновая механика**. Не только частицы (подкольцо A с лебеговой мерой), но и составляющие частиц — гранулы (фактор-кольцо L'_2 с боровской мерой) описываются кольцом A'. Подчеркнем еще раз, что несепарабельное кольцо A' не изоморфно слабо сепарабельному кольцу L_∞, используемому в обычной квантовой механике (хотя они имеют один и тот же запас функций, который, напомним, может быть топологизирован различным образом [52]).

Очевидно, операторы в волновой механике, основанной на несепарабельном кольце функций (несепарабельном гильбертовом пространстве), не могут быть представлены матрицами, в такой схеме не существует и проекционных операторов, а следовательно, и так называемой квантовой логики (ср. с [52]).

Дуальным к bR_p пространством является вполне несвязное конфигурационное многообразие, т. е. дисконтинуум R'_X (R'_X, как и R_X, состоит из несчетного количества точек). Топология на R'_X, индуцированная классом почти периодических функций на R_p, является самой сильной, дискретной.

Новая волновая механика (теория поля на дисконтинууме) является теорией нового уровня физической реальности — теорией гранул.

7. Переход к волновой механике гранул становится совершенно прозрачным, если полную волновую функцию в X-представлении — сумму $\Psi(X) + \Psi'(X)$ (см. сноску ** на с. 342) записать в p-представлении. Для этого, как всегда, представим $\Psi(X)$ в виде обычного преобразования Фурье (5.1), а $\Psi'(X)$, используя для символа Кронекера $\delta_{X,\,X'}$ его выражение из боровской теории $\delta_{X,\,X'} = \lim\limits_{P\to\infty} 1/2P \int\limits_{-P}^{P} \mathrm{e}^{ip(X-X')}\,dp$, представим в виде

$$\Psi'(X) = \lim_{P\to\infty} \frac{1}{2P} \int\limits_{-P}^{P} \mathrm{e}^{ipX}\,\Psi'(p)\,dp, \tag{5.4}$$

*В [57] данное расширение используется с целью построения единой теории элементарных частиц и их взаимодействий, свободной от ультрафиолетовых расходимостей.

где

$$\Psi'(p) = \sum_j \Psi_j \, \mathrm{e}^{-ipX_j} \tag{5.5}$$

— почти периодическая функция от p. Пара разных по характеру функций $(\Psi(p), \Psi'(p))$, где $\Psi(p) = 1/2\pi \int \mathrm{e}^{-ipX} \Psi(X)\, dX$, а $\Psi'(p)$ — (5.5), сопоставляется частице и входящему в нее ансамблю гранул. Если под полной волновой функцией в p-представлении понимать сумму $\Psi(p) + \Psi'(p)$, то ее лебегова норма $\|\Psi + \Psi'\|$ (в отличие от X-представления) не существует (равна ∞). Боровская же норма $\|\Psi + \Psi'\|' = \|\Psi'\|'$, поскольку для функции $\Psi(p) \in A$ боровская норма $\|\Psi\|' = 0$. Таким образом, по сравнению с X-представлением в p-представлении все наоборот. Получается, что для описания частиц хорошо приспособлено X-представление, а для описания гранул — p-представление.

8. Как уже отмечалось, релятивизация волновой механики связана с переходом от c-числовых полей $\Psi(X)$ к q-числовым величинам — операторам $\widehat{\Psi}(X)$, действующим на некотором топологическом векторном пространстве. Эта процедура, называемая квантованием волновых функций, обычно логически никак не обосновывается. Ясно, однако, что метод операторов рождения и уничтожения отражает какую-то очень важную особенность частиц, до сих пор еще не раскрытую*. Метод естественным образом формулируется в p-представлении. И естественно считать, что квантование полей $\Psi(X)$ является продолжением квантования полей гранул $\Psi'(X)$, т.е. следствием того, что $\Psi'(X)$ представляет собой ансамбль гранул.

В случае, когда M_p — континуум, одновременные перестановочные соотношения (антикоммутаторы) для дираковских биспиноров $\Psi_\alpha(\mathbf{p}, t)$ записываются так (частицы с разными импульсами независимы; нами рассматривается только случай ферми-полей как наиболее фундаментальных: в схеме ферми-поля играют выделенную роль, как и электромагнитные поля в специальной теории относительности):

$$\left\{ \widehat{\Psi}_\alpha(\mathbf{p}, t), \widehat{\Psi}^\dagger_\beta(\mathbf{p}', t) \right\} = \delta_{\alpha\beta} \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}'),$$

*В самом деле, этот метод, пожалуй, не имеет смысла применять даже к таким самым простым составным объектам, как ядра или атомы (существующим благодаря взаимодействиям), не говоря уже о звездах или галактиках. При столкновении (взаимодействии) эти объекты распадаются на составляющие их структуры (в частности, на частицы). Частицы же при столкновении не распадаются на гранулы: процесс заканчивается появлением новых частиц в уже готовом виде. Это говорит о том, что если частицы и состоят из гранул, то совсем в другом смысле, нежели, скажем, ядра. В [57] показано, что в гранулах скрыта динамическая система, продуцирующая при определенных условиях частицы (потенциально одна частица способна породить 10^{12} других частиц). Именно этот механизм (а не взаимодействия) делает столь эффективным метод операторов рождения применительно к частицам. По-видимому, кварк-глюонная модель, буквально копирующая структуру ядер, не адекватна реальному положению дел.

где † — эрмитово сопряжение (инволюция). Поскольку в случае гранул импульсное многообразие bM_p также является континуумом, то те же перестановочные соотношения следует написать и для полей гранул:

$$\left\{\widehat{\Psi}'_\alpha(\mathbf{p},t), \widehat{\Psi}'^\dagger_\beta(\mathbf{p}',t)\right\} = \delta_{\alpha\beta}\delta^3(\mathbf{p}-\mathbf{p}'). \tag{5.6}$$

Оказывается, какой бы ни была правая часть в (5.6), в X-представлении (на дисконтинууме) будем иметь [57]

$$\left\{\widehat{\Psi}'_\alpha(\mathbf{X},t), \widehat{\Psi}'^\dagger_\beta(\mathbf{X}',t)\right\} = 0, \tag{5.7}$$

а также $\left\{\widehat{\Psi}'_\alpha(\mathbf{X},t), \widehat{\Psi}'_\beta(\mathbf{X}',t)\right\} = \left\{\widehat{\Psi}'^\dagger_\alpha(\mathbf{X},t), \widehat{\Psi}'^\dagger_\beta(\mathbf{X}',t)\right\} = 0$ (поскольку далее рассматриваются только поля гранул, шляпки и штрихи над ними будут опускаться). Однако величин $\Psi_\alpha(\mathbf{X},t)$ как операторов, плотно определенных на сепарабельном гильбертовом пространстве, не существует (такой реализации, другими словами, матричных представлений алгебра (5.7) не имеет): в этом контексте соотношения (5.7) имеют только тривиальное решение [57]

$$\Psi_\alpha = \Psi^\dagger_\beta = 0. \tag{5.8}$$

Отсюда по меньшей мере следует, что дираковское квантование полей гранул не может служить причиной квантования полей частиц. Причина в другом.

9. Прежде всего заметим, что соотношениями (5.7) определяется некоторая бесконечномерная грассманова алгебра, образующими которой являются $\Psi(\mathbf{X}_i,t), \Psi^\dagger(\mathbf{X}_j,t)$, взятые в любых точках $\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j$. При этом как линейная система она рассматривается над некоторым коммутативным кольцом. В фиксированной точке $\mathbf{X}_i$ мы имеем *конечномерную* грассманову алгебру с инволюцией «$+$», которую обозначим через $g_8^{(+)}$. Этой алгеброй описываются *внешние* взаимоотношения между гранулами — связь спина со статистикой. И только. Но гранулы обладают еще и *внутренними* динамическими свойствами. Дело в том, что с каждой грассмановой алгеброй связана некоторая нильпотентная алгебра Ли [57]*. Этот класс алгебр (называемых в теории динамических систем гейзенберговыми) лежит в основе теории канонических

*Например, рассматривая самую простую грассманову алгебру $g_2 = U[u_1, u_2]$ (U — взятие обертывающей алгебры) с двумя образующими, удовлетворяющими условиям $\{u_i, u_j\} = 0$, и базисом из трех элементов $u_1, u_2, 2u_1u_2$, имеем возможность наряду с грассмановым (ассоциативным) умножением рассмотреть еще и лиево (не ассоциативное) умножение, задаваемое коммутаторами $[u_i, u_j] = \varepsilon_{ij}2u_1u_2$ (ε_{ij} — тензор Леви-Чивиты). Видно, что существует гомоморфизм нильпотентной алгебры Ли n_3 с тремя образующими a_1, a_2, a_3 в алгебру $g_2 : a_1 \to u_1$, $a_2 \to u_2$, $a_3 \to 2u_1u_2$ (обратное отображение не обязано быть гомоморфизмом). В случае неприводимого представления $a_3 = 1$, а $a_1 = d/d\varphi$, $a_2 = \varphi$ представляют собой образующие гейзенберговой алгебры h_2. (Как известно, в коммутативные алгебры вкладываются абелевы алгебры Ли, в общем случае имеет место теорема Адо.)

систем. Одной из гейзенберговых алгебр как раз и описываются динамические свойства гранул. Опуская детали (см. [57]), рассмотрим сразу вложение алгебры $g_8^{(+)}$ в *конечномерную* алгебру Гейзенберга $h_8^{(+)}$. Генераторами последней являются величины, обозначаемые через $\Phi_\alpha, \overline{\Phi}_\beta$ $(\alpha, \beta = 1, 2, 3, 4)$ и подчиняющиеся коммутационным соотношениям

$$\left[\Phi_\alpha, \overline{\Phi}_\beta\right] = \delta_{\alpha\beta} \tag{5.9}$$

(остальные нули). Они играют роль канонических переменных нового типа динамической системы — релятивистской бигамильтоновой. В [57] отображение

$$\Psi_\alpha \to \Phi_\alpha, \quad \overline{\Psi}_\alpha \to \overline{\Phi}_\alpha \tag{5.10}$$

$(\overline{\Psi} = \Psi^\dagger \gamma_4)$ называется квантованием дирак-грассманова слоя. С вложением (5.10) связан новый *математически последовательный* принцип квантования ферми-гранул*.

Пространство, в котором действуют операторы $\Phi_\alpha, \overline{\Phi}_\beta$, представляет собой пространство векторов состояний нашей динамической системы. В [57] рассматривается нестандартное (неприводимое, несамосопряженное, неунитарное, называемое нефоковым) представление обертывающей алгебры $U[h_8^{(*)}]$ и ее группы автоморфизмов в дуальной паре топологических векторных пространств $(\dot{F}, F)$, двойственных относительно инвариантной неэрмитовой полуторалинейной формы $\langle \dot{F}, F\rangle$. В этом представлении образующие алгебры $\Phi_\alpha, \overline{\Phi}_\beta$ записываются в виде

$$\Phi = \begin{pmatrix} \varphi_\alpha \\ \partial/\overline{\varphi}_\alpha \end{pmatrix}, \quad \overline{\Phi} = (-\partial/\varphi_\beta, \overline{\varphi}_\beta), \tag{5.11}$$

где $\varphi_\alpha\,(\alpha = 1, 2)$ — комплексные переменные. Элементами пространств $\dot{F}, F$ являются функции переменных $\varphi_\alpha, \overline{\varphi}_\beta$ и дополнительных переменных $\varphi \doteq \varphi_2, \overline{\varphi} \doteq \overline{\varphi}_2$ (наличием последних нефоково представление отличается от обычного фокова).

Бигамильтонова система — это двухуровневая система. Ее верхний (начальный) уровень $f \in F$ характеризуется положительной энергией и описывается полями $f(x, \varphi)$, а нижний (конечный) $\dot{f} \in \dot{F}$ — отрицательными энергиями и полями $\dot{f}(\dot{x}, \varphi)$. Поля фундаментальных частиц появляются в результате необратимого (схема не унитарна) квантового перехода $f \to \dot{f}$, описываемого амплитудой перехода

$$O^\Sigma(X, Y) = \big\langle\big\langle \dot{f}(\dot{x}), f^\Sigma(x)\big\rangle\big\rangle = \int d\mu_{\dot{f}} \big\langle \dot{f}(\dot{x}), f^\Sigma(x)\big\rangle, \tag{5.12}$$

---

*В отличие от метода вторичного квантования $\Psi(X) \to \widehat{\Psi}(X)$, в котором используются алгебры локальных операторов с бесконечным несчетным числом образующих. Однако Вайтманом фактически доказано, что таких алгебр не существует.

где

$$\langle \dot{f}(\dot{x}), f^{\Sigma}(x) \rangle = \int d\mu_f(\varphi) \overline{\dot{f}(\dot{x}, \varphi)} f^{\Sigma}(x, \varphi) \tag{5.13}$$

— матричный элемент перехода. Здесь Σ — набор квантовых чисел, определяющих сорт частицы* (далее в формулах Σ опускается), $d\mu_f$ и $d\mu_{\dot{f}}$ — меры начальных и конечных состояний системы, а $X = 1/2(x + \dot{x})$, $Y = 1/2(x - \dot{x})$ — пространственно-временные координаты внешнего и внутреннего пространств. Явный вид полей $f, \dot{f}$ найден в [57].

В [57] показано, что каждая (но только адронная) амплитуда перехода $O(X, Y)$ представляет собой ортогональную сумму (относительно штюкельберговского скалярного произведения) двух полей**

$$O(X, Y) = G(X, Y) \oplus \Psi(X, Y), \tag{5.14}$$

в которой $G(X, Y) = \delta(0) g(X, Y)^{***}$ — неизмеримое (непосредственно ненаблюдаемое) решение неоднородного уравнения Клейна–Гордона (поле «духов»; такими же функциями являются и амплитуды перехода $O(X, Y)$), а $\Psi(X, Y)$ — непрерывное измеримое (наблюдаемое) билокальное поле, сопоставляемое фундаментальной частице (адрону) и представляющее собой решение соответствующего однородного уравнения. Появляющиеся функции M являются функциями двух переменных всех X и Y, осуществляющихся вместе с неунитарным квантовым переходом ($f \to \dot{f}$), осуществляющим связь двух миров: наблюдаемого, связанного с функциями наблюдаемой материи M, и поля неизмеримых идеальных платоновских форм материи $f, \dot{f}$. В свою очередь x, $\dot{x}$ записываются в виде $x = X + Y$, $\dot{x} = X - Y$, здесь Y представляют собой элементы обычного стандартного лейбниц-ньютонова анализа, в котором базовые элементы строятся из того же материала, что и X. В нашей литературе Y — это элементы так называемых робинсовых расслоений, а в целом (X, Y) — это элементы нестандартного анализа, в котором Y — функционально независимые от X числа. Существенной частью предлагаемой теории является переход от стандартного к нестандартному анализу. Такой переход обеспечивает внутреннюю непротиворечивость всей схемы. В самом деле, проектируя (X, Y) на $(X, 0)$, будем иметь дело с полями $M(X, 0)$,

---

*В частности, фермионные амплитуды — это спиноры $O_\alpha = \langle\langle \dot{f}, \Phi_\alpha f \rangle\rangle$.

**Ортогональная сумма означает, что интеграл $\int G(X, Y) \overline{\Psi(X, Y')}\, d^4X = 0$. Для лептонов $G = 0$.

***Смысл символа $\delta(0)$ будет ясен, если заметить, что в теории $\delta(0) = \lim\limits_{T \to \infty} 1/\pi \int\limits_0^T dt$, где $t = X_0$ — временная координата X_μ (см. предыдущую сноску, где нужно положить $G = O - \Psi$; детали см. в [57]).

квантовая теория которых, как известно, содержит ультрафиолетовые расходимости. С точки зрения данной теории, континуум X появляется при выталкивании точек спейсускулы наружу. При этом внутри слоя остается некий дисконтинуум, изоморфный канторову совершенному множеству П, называемому в теории динамических систем репелером. С этим дисконтинуумом связан новый уровень физической реальности — эфир. В нестандартном анализе по неучтенным Y усредняется (интегрируется). В результате квантовая теория поля, использующая нестандартный анализ, оказывается свободной от внутренних противоречий — ультрафиолетовых расходимостей. Если еще учесть, что дифференциальным уравнением определяется только непрерывное решение, то вместо (5.14) следует написать

$$O(X,Y) = G(X,Y) + \Psi(X,Y) + \Psi'(X,Y), \tag{5.15}$$

где Ψ' — точечная функция* (производная последней почти всюду равна нулю, см. [48]).

Итак, шредингеровская картина (теория c-числовых полей) может быть реально расширена в рамках классической теории функций действительного переменного. На наш взгляд, наиболее важным моментом является неунитарное расширение волновой механики, связанное с динамической структурой гранул — релятивистской бигамильтоновой системой и ее состояниями $f(x), \dot{f}(\dot{x})$. В формулах (5.12), (5.13) эти поля играют роль скрытых параметров (зависящих от переменных φ, по которым там проинтегрировано). Высокоэнергетическая квантовая механика, таким образом, неунитарна. Ее основной объект — релятивистская бигамильтонова материя — новый источник энергии.

После перехода $f \to \dot{f}$ (из (5.12) следует, что частица как бы склеена из f и $\dot{f}$) в реальной частице f и $\dot{f}$ не могут разойтись на большие расстояния. Среднее расстояние между ними является некоторой фундаментальной характеристикой материи — фундаментальной длиной, и относительные координаты $Y = (x - \dot{x})/2$ связаны с ней. Ее роль в теории играет универсальное волновое число $k \sim 10^{14}$ см$^{-1}$ [57]. Полагая $Y = u/k$, напишем $\Psi(X, u/k)$. При $k \to \infty$ величины $\Psi(X,0) = \Psi(X)$ являются локальными функциями обычной волновой механики. Подчеркнем, что квантовать можно только би-

*Подчеркнем, что Ψ' как функция, заданная на дисконтинууме, отлична от нуля только внутри фундаментальной частицы. Ее появление связано с тем, что внешнее пространство A_3 (континуум координат X — носитель поля Ψ) образуется в результате выталкивания точек пространства спейсускулы $(f(x), \dot{f}(\dot{x}))$ наружу. Это происходит вследствие перехода $f \to \dot{f}$, сопровождаемого выделением энергии. Однако часть точек при этом остается внутри частицы, они и составляют дисконтинуум — носитель гранул Ψ' (в теории динамических систем такие множества называются репелерами).

локальные поля, так как именно они продуцируются бигамильтоновой системой (теория таких полей не содержит ультрафиолетовых расходимостей [57]).

Теперь нетрудно расширить и гейзенбергову картину. Для этого нужно O, G, Ψ обозначить через $|O\rangle$, $|G\rangle$, $|\Psi\rangle$, учесть, что $|O\rangle = |G \oplus \Psi\rangle = |G\rangle \oplus |\Psi\rangle$, и рассмотреть оператор $\widetilde{P} = Q(\varphi) \otimes Q^{+}(\varphi')$, отображающий пространство $F \otimes \overline{\dot{F}}$ в $F \otimes \overline{\dot{F}}$, где

$$Q(\varphi) = |f(\varphi)\rangle\langle \dot{f}(\varphi)|, \quad Q^{+}(\varphi') = |\dot{f}(\varphi')\rangle\langle f(\varphi')| \tag{5.16}$$

(здесь $Q(\varphi)$ — проекционный оператор на состояние $f \in F$ вдоль состояния $\dot{f} \in \dot{F}$). Обозначим $\widetilde{P}_O = \mathrm{Sp}\,Q\,\mathrm{Sp}\,Q^{+}$, где $\mathrm{Sp}\,Q = |O\rangle$ (Sp означает интегрирование по φ), тогда можно написать $\widetilde{P}_O = |O\rangle\langle O|$. Это, конечно, не проекционный оператор, так как $|O\rangle$ принадлежит особому множеству функций неограниченной вариации, не образующих какого-либо хорошего пространства. При этом имеем $\widetilde{P}_O = \widetilde{P}_G + P_\Psi$, где P_Ψ — уже настоящий проекционный оператор в гильбертовом пространстве, поскольку функция $|\Psi\rangle$ принадлежит именно такому пространству. Отсюда следует, что $P_\Psi = \widetilde{P}_O - \widetilde{P}_G$. Таким образом, гейзенбергова картина может быть расширена с помощью операторов $\widetilde{P}$, $\widetilde{P}_O$, $\widetilde{P}_G$.

6. NON-NEUMANNIAN REPRESENTATIONS OF ROTATION GROUP (TO THE ETHER THEORY). 1

> Jesus saith unto them, did ye never read in the scriptures, The stone which the builders rejected, the same is become the head of the corner: this is the Lord's doing, and it is marvellous in our eyes?
>
> Matthew (21:42)

For some reason or other mankind pays attention to the ideas that were materialized in the exact meaning of this word. Ancient thinkers remembered mankind three greatest *a priori* ideas about real: these are (in order of their generality) 1) hypothesis about existence of Creator of our Universe called God as an embryo of all being, 2) hypothesis of the ether as a God's emanation and the nearest reason of appearance of observed matter, and at last, 3) atomic (quantum) hypothesis of the matter building. To the present time only the latter was elaborated. Nowadays the time comes for the second one*.

---

*Concerning the first hypothesis see Plato's «Timaeus» and [61].

Interesting sagacity of philosophers has been the thought that the ether is a binding link between the space and matter and the reason of both. However, if the studying of space–time (mathematics) and matter (physics) is highly successful and rather deep, then ether has meanwhile slipped away from concrete description and became once even incongruous. The point is that every time it may be swooped for a pure *mathematical (namely, geometrical) substance*. The well-known substance in question is at present the Poincare–Minkowski 4-dimensional space–time continuum (pseudoeuclidean space). So till now one considered that ether = space–time (or metric; Poincare). It is, from a certain point of view, a nonproper phenomenological description of the ether*.

Of course, from pure physical point of view ether is first of all *a material (dynamical) substance*. Physical theory of ether itself demands for its description the usage of proper, adequate mathematics (it is algebra as the most irreproachable part of mathematics). Therefore, first of all we have to look for in mathematics of the past the fit tools for description of such a physical reality as ether. It turns out that the algebra in the 19th century elaborated such a tool: it is Kummer's theory of ideal numbers. In [61] this idea is fitted to the fundamental particles situation.

In a certain sense elementary particles are the numbers: their spin properties are described by finite dimensional unitary representations of the rotation group $SO(3)$ and its covering $SU(2)$ (we call it further the spin group) the set of which forms ring-like usual numbers. This ring turns out to be algebraically non-closed [61] and permits unique extension to the more fundamental (prime,

---

*However, in quantized field theory the necessity in a special physical substance regularizing the ultraviolet divergences is feeling long ago (for example, at the Pauli–Willars regularization procedure it appeared as the fictive fields with indefinite metric and extreme large masses; not to mix it of course with physical vacuum as the zero vibrations of the real fields!).

Already in that time a question about extension of the Heisenberg–Schroedinger quantum theory in the region of very small distances was arisen (one considered that the theory to be a theory of moderate energies is insufficient for description of particle interactions in high energy region). Its direct generalization (extension of application region) — relativistic quantum field theory — it seemed must allow one to penetrate this region. However, this extension, strictly speaking, is as a matter of fact illegal transfer of mathematical apparatus of quantum mechanics (finite number of degrees of freedom) to the dynamical systems with infinite uncountable number of freedom degrees (fields), and troubles with ultraviolet divergences testify this. It turns out that the usual quantum mechanics is not complete in principle and may be completed. We think that the suggested in [62] new extended quantum theory based on the ether dynamics is well adopted to the description of the very high energy situation. Moreover, we can say now that ether theory is the ground of particle theory and cosmology. It is interesting to pay attention to the following remark. In empty space M with measure μ completeness condition of any system of local functions $\{\psi_n(X)\}$, $X \subset M$ on this space written as $\Sigma_n \psi_n(X)\psi_n(X') = \delta_\mu(X - X')$ contains the Dirac delta-function respectively the measure μ. Due to the δ_μ-function ultraviolet divergences in quantized field theory considered in such a space arise. But in the space M filled by ether (in which any function is a bilical one $\psi(X, Y)$, see [63]) smearing $\delta_\mu(X - X'; Y, Y')$-function appears due to which ultraviolet divergences are absent.

ideal) nonunitary representations of spin group which are studied here and from which finite dimensional ones are built like usual numbers may be built from the Kummer's ideal ones.

Elementary particles to be observed (measurable) form of matter exist in space–time continuum $A_{3,1}$ endowed by *differential structure and measure*. The symmetry group of this space is the Poincare group P . Due to such a structure, space H of sections $\psi(X)$ of vector fibration $E = (A_{3,1}, S)$ used in particle theory (here $S = \Sigma_\Sigma S^\Sigma$ is the Whitney sum for the group $SO(3)$; among S^Σ there is a spinor fibre with symmetry group $SU(2)$) is endowed by the Hermitian scalar product $(\psi, \psi') = \int \overline{\psi}(\mathbf{X}, t)\psi'(\mathbf{X}, t)d^3X$. Due to this, representations of the Poincare group P and its subgroup $SO(3)$ in H are unitary. We see unitary axiom in quantum theory is conditioned ultimately by the measurablement property of space–time continuum*.

Symmetry group of the latter ($SO(3)$ and its complex extension $SO(3,1)$ — the special Lorentz group) is enlarged in the framework of material fibration E to the spin group ($SU(2)$ and its complex extension $SL(2, C)$). Moreover, inside the spinor fiber the latter may be enlarged to the general linear group $GL(2, C) = SL(2, C) \otimes U(1) \otimes H(1)$, where $U(1)$ and $H(1)$ are elliptic and hyperbolic phase transformations with which so-called fermionic charge F and dilatation D of fermions are connected correspondingly.

Further, we have to consider that at very small distances (inside the particle) physical space–time is splitting into its isolated points [62], i.e., becomes a discontinuum**. Such a space loses differential structure and measure. Hereby

*So space $A_{3;1}$ is considered to be a measurable (in Lebesgue sense) set of points. This circumstance has a pure physical reason: from elementary particles existing in this space macro-objects in particular measuring equipment may be constructed by means of which physical measurements may be made. Hence, the measurablement property of space–time is connected only with the so-called immediately observed forms of matter. Not any set of points is measurable. For example, differentials dX as an uncountable quantity of points are not measurable sets, see [62]. Therefore, the space and the forms of matter which might exist inside the differentials are not measurable. For description of such a matter form unusual nonmeasurable numbers are needed of course. These numbers come to life (are displayed) if our space becomes discontinuum (see further). It is very important remark for further consideration.

**Particle constituents are connected with the discontinuum [62]. In its own (discrete) topology discontinuum is an uncountable set of isolated points. Due to the theorem about homeomorphism between any discontinuum (for example, «dispersed» or «pulverized» interval $[0, 1]'$) and Cantor's perfect set Π we can consider our discontinuum inside the particle to be set Π. So nothing losing in generality and proceeding from the fact that our discontinuum is a continuation (into fundamental particle) of usual (external) space endowed by usual topology and measure in which our discontinuum is the set of zero measure and dimension, we will consider it to be set each point of which is (from the point of view of external usual topology) the point of *condensation*. This circumstance intensifies the confinement property of particle constituents. So inside the particle there is «crumpted» (homeomorphic to) Cantor's perfect set and nothing more. However, this set (Cantor's «spiral») has complicated dynamical structure, see [62].

the space which stays inside the isolated point (inside the fiber or differential d^3X) has no Lebesgue measure, i.e., is nonmeasurable, see [62]. At such a condition the unitary axiom is invalid and nonunitary representations of physical groups $SU(2)$, $SL(2,C)$, $GL(2,C)$ corresponding to the arbitrary spin (a sea of complex spin) are used thereat. A sapid elegant mathematics is connected with arbitrary spin. It is the theory of non-Neumannian representations of classical Lie groups, monoids and connected with them 1-chain fibrations (bundles).

Strictly speaking, all these (multivalued indeed) representations corresponding to arbitrary spins are exact ones of a new group $\tilde{G}L(2,C)$ (and others) — Lie group of one-dimensional chains on $GL(2,C)$ (briefly called 1-chain group), built over $GL(2,C)$ and locally isomorphic to the latter. They play the role of mentioned above Kummer's ideal numbers in usual representation theory and particle physics.

A new physical reality stands behind the 1-chain groups and their representations. Obviously it exists inside the isolated point of discontinuum, and therefore is immediately nonobservable. We call it bi-Hamiltonian form of matter, prematter (or ether).

Bi-Hamiltonian dynamical system (see [63]) is connected with the Heisenberg algebra $h_8^{(*)}$ and its automorphism group $\mathrm{Sp}^{(*)}(4,C)$ (dynamical group of the system). It is a kind of two-level systems described by the non-Lagrangian fields $f(x)$ (upper level) and $\dot{f}(\dot{x})$ (lower level) correspondingly. In the beginning of our Universe there were only fields $f(x)$. Above-mentioned nonunitary representations of $GL(2,C)$ are realized in the space of these fields.

Bi-Hamiltonian (ether) dynamics includes the irreversible quantum transition (jump) $f \to \dot{f}$ described by matrix element $\langle \dot{f}(\dot{x}), f(x)\rangle$ (in the framework of quantum theory 2), where the state $\dot{f}$ enters with complex conjugation, see [63]. Fundamental particles arise in this process. This part of the theory is connected with a dual pair of spaces $(\dot{F}, F)$, where $f \in F$, $\dot{f} \in \dot{F}$. With it the Gaussian decomposition N_+HN_- of $GL(2,C)$ (and dynamical group too) is associated. (Such a decomposition appears when the so-called singular elements Δ' of the group are pricked out.)

Indeed, the jump $f \to \dot{f}$ is prepared by real turning f into $\dot{f}$ which is connected with topological closedness of the group $GL(2,C)$ to the monoid $M(2,C) = GL(2,C) \cup J(2,C)$, where $J(2,C) = \{g \in M | \det g = 0\}$. Since $MJ = JM \subset J$, so we call the set J to be *absorbed* one. Due to this citcumstance any vector f is transferred into one and the same vector $\dot{f}$ under the action of J.

Turning f into $\dot{f}$ (in the framework of quantum theory 1) is connected with the sucking of field $f(x)$ into the point of discontinuum (picturally speaking like Jinn into the bottle) to which a quantum f is fastened. The latter process goes only in ensemble of the systems (we call it as a gas of quanta f or ether in whole). This dynamical system, left itself, begins gradually to collapse, i.e., to contract (like shagreen skin). Only after all these processes quantum jump is beginning (see Sec. 7).

We see that ether dynamics is quite a complicated thing. After the quantum transition $f \to \dot{f}$ (it is necessary to emphasize that namely due to the irreversible quantum transition $f \to \dot{f}$ ground state $\dot{f}$ loses physical meaning at the next stages of Universe evolution, because $\dot{f} \sim \delta(0)$, see [63]) and arising fundamental particles and space–time continuum, the subset J is pricked out and another closedness process of Gaussian decomposition goes genesis of the symmetry group $SL(2,C)$ (matter) and $SO(3,1)$ (space–time as a carrier of matter).

Here we study the infinite dimensional irreducible (non-Neumannian) representations of the spin group $GL(2,C)$ only and connected with it monoid $M(2,C)$. Although this group is any subgroup of the dynamical group of the system, it contains the main information about the processes just described. Hereby our consideration is delivered in the volume and at the level of strictness that usually is accepted in physical literature.

Some words about the character of investigation. We use infinitesimal approach to the representation theory (rising to E. Cartan): in the beginning representations of the Lie algebra are built, then local group (groupuscle) and, at last, the group in whole are considered. In connection with the latter we apply to new mathematical objects: *1-chain Lie group and spaces of probe and generalized functions of exponential type* well adopted to the problem. The case of $\tilde{G}L(2,C)$ is considered in detail.

We do not refer to the well-known classical papers of E. Wigner and V. Bargman concerning unitary representations of the (small) Lorentz group. Reader sees a connection with those representations which is affinitally to the connection between Lobachevsky and Riemann geometries.

Mathematical part of the present paper is based on the first manuscript of series of papers [61] which has been discussed in the past with Prof. S. D. Berman.

6.1. Basic Initial Theorem. Semispinor Representation of the Lie Algebra and Local Group. a) The way leading to a new class of $SU(2)$ representations meets the theorem concerning nonclosedness of the ring of finite dimensional (unitary) representations of the $SU(2)$ group. If to denote the latter $\overline{D}$ (it is endowed by usual addition and Kronecker multiplication laws; its subring of exact $SO(3)$ representations is denoted $D \subset \overline{D}$), so we can write $\overline{D} = D[D(1/2)]$, where $D(1/2)$ is the fundamental representation of $SU(2)$ corresponding to the spin $1/2$. Structure constants of $\overline{D}$ are the Clebsch–Gordan coefficients.

$D(1/2)$ is realized in the complex vector (spinor) space $S_2(G)$ considered over Grassmann algebra G [61] by the Pauli 2×2-matrices $(1/2)\boldsymbol{\sigma}$.

Theorem 1. Ring $\overline{D}$ is algebraically non-closed and permits the extention to the ring of infinite dimensional semispinor representations corresponding in general case to arbitrary complex spin.

Proof of the theorem see in [61]. It follows from the construction of the proof that semispinor representation $D^+(-1/4)$ with spin $-1/4$ may be considered to be a generator of a new ring $\tilde{D} = \overline{D}[D^+(-1/4)]$ (minimal semispinor ring is given rise indeed by the representation $D^+(-1/2)$). Like from spinor representations elements of D may be constructed, so from semispinor representations $D^+(-1/4)$ and $D^+(-3/4)$ elements of $\overline{D}$ may be constructed. From explicite form of Clebsch–Gordan coefficients for semispinor representations, see [61], it follows that the ring $\tilde{D}$ is algebraically closed.

b) Semispinor representation $D^+(\lambda)$ [61] exists at arbitrary complex spin $\lambda \in C$ and is setting by three operators $L_k^{(\lambda)}$ $(k = 1, 2, 3)$ satisfying the commutation relations $[L_k^{(\lambda)}, L_m^{(\lambda)}] = i\epsilon_{kmn} L_n^{(\lambda)}$. We formulate the main properties of such a representation:

i) it is infinite dimensional algebraically and topologically irreducible [61]; it is completely characterized by its junior Cartan vector $f_0^{(\lambda)}(L_-^{(\lambda)} f_0^{(\lambda)} = 0, L_\pm^{(\lambda)} = L_1^{(\lambda)} \pm i L_2^{(\lambda)})$;

ii) it is realized in the topological vector space $F_\lambda^\tau = \overline{M}_\lambda^\tau$, where $M_\lambda = U\ [L_+^{(\lambda)}] f_0^{(\lambda)} = \text{l.c.}\,\{f_n^{(\lambda)}\}$ (τ is topology, from here the sign $+$ in D^+, l, c means linear cover), and $f_n^{(\lambda)}$ is the canonical Cartan–Weyl basis;

iii) in it operators $L_k^{(\lambda)}$ are setting by the formulas:

$$\begin{aligned} L_3^{(\lambda)} f_n^{(\lambda)} &= (n-\lambda) f_n^{(\lambda)}, \\ L_+^{(\lambda)} f_n^{(\lambda)} &= \alpha_{n+1}^{(\lambda)} f_{n+1}^{(\lambda)}, \\ L_-^{(\lambda)} f_n^{(\lambda)} &= \alpha_n^{(\lambda)} f_{n-1}^{(\lambda)}, \end{aligned} \tag{6.1}$$

where $\alpha_n^{(\lambda)} = -i\sqrt{n(n-2\lambda-1)}$. Thus,

iv) $D^+(\lambda)$ is a representation of the type I (or ladder one) in which operators $L_3^{(\lambda)}$, $\mathbf{L}^{(\lambda)^2}$ are diagonalized ($\mathbf{L}^{(\lambda)^2} f_n^{(\lambda)} = \lambda(\lambda+1) f_n^{(\lambda)}$).

It follows from (6.1) that

v) spectrum of operator $L_3^{(\lambda)}$ does not possess the Weyl symmetry: at the Weyl reflection w we have $wD^+(\lambda) = D^-(\lambda)$ (such a representation we call therefore non-Weyl one: $D^+(\lambda)$ contains only half of all possible projections of spin λ; from here the name *semispinor*).

Further, we use the realization in which $L_k^{(\lambda)}$ are written in the form [61]:

$$L_3^{(\lambda)} = \zeta \frac{d}{d\zeta}, \quad L_+^{(\lambda)} = \zeta, L_-^{(\lambda)} = -\zeta \frac{d^2}{d\zeta^2} + 2\lambda \frac{d}{d\zeta}. \tag{6.2}$$

Hereby the Cartan–Weyl basis is the set of functions:

$$f_n^{(\lambda)} = i^n \frac{\zeta^n}{\sqrt{n!\Gamma(n-2\lambda)}}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{6.3}$$

(note, that in this realization there are not finite dimensional representations).

vi) $D^+(\lambda)$ is non-self-ajoint representation dual to which is the representation $D^+(\overline{\lambda})$. This pair of representations is tied for invariant sesquilinear form [61]:

$$\langle f^{(\overline{\lambda})}, g^{(\lambda)} \rangle_\lambda = \int \overline{f^{(\overline{\lambda})}}(\zeta) I g^{(\lambda)}(\zeta)\, d\mu_\lambda(\zeta), \tag{6.4}$$

where measure is $d\mu_\lambda(\zeta) = \dfrac{i}{\pi}\dfrac{1}{|\zeta|^{2\lambda+1}} K_{2\lambda+1}(2|\zeta|) d\zeta \wedge d\overline{\zeta}$ (here K_n are MacDonald's functions, $\wedge$ is the external multiplication, and $Ig(\zeta) = g(-\zeta)$.

vii) The carrier spaces $F_{\overline{\lambda}}^{\tau'}$, F_λ^τ form dual pair relatively the form (6.4) (concretely topologies (τ', τ) will be given further).

c) As always [64] integration of the Lie algebra representation leads to the exponent $\mathrm{e}^{iL_k\theta_k} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(iL_k\theta_k)^n}{n!}$ which covers a certain neighbourhood of group unity and determines formal local group or groupuscle (that follows from the Campbell–Hausdorff formula $\mathrm{e}^{iL''}\,\mathrm{e}^{iL'} = \mathrm{e}^{iL}$, here $L'' = L_k\theta''{}_k$, $L' = L_k\theta'_k < L = L_k\theta_k$, where $\theta = \theta(\theta'', \theta')$ is multiplication law in coordinates θ). As L_k are non-self-adjoint operators, so $\mathrm{e}^{iL_k\theta_k}$ are *nonunitary* ones and in general case are *unbounded*. Therefore, convergence conditions of exponents are essential.

Now some general definitions.

Definition 1. Representation of Lie algebra l given by operators L_k is integrable in a topological vector space F^τ if exponents $\mathrm{e}^{iL_k\theta_k}$ are converged on a certain common dense subset $D \subset F^\tau$ when $|\theta_k| < \epsilon_\tau$, i.e., $\mathrm{e}^{iL_k\theta_k} f \in F^\tau$ if $f \in D$.

Neighbourhood $|\theta_k| < \epsilon_\tau$ may be contracted (in dependence on topology τ) in zero (in point), then the representation is considered to be nonintegrable. Convergence demand of the exponential process at the vector $f \in F^\tau$ restricts the usage of exponential mapping by a certain neighbourhood $U_f(e)$ of group unity e (exp is nonsurjection mapping). In connection with this it is natural to take the following.

Definition 2. If in the image of exponential mapping $\exp$ there are only elements of infinite small neighbourhood of the group unity $\tilde{\epsilon}(\tilde{e})$ (or nowhere dense set in group), so the Lie algebra and group in whole given rise by it are called nonclassical. If $\exp$ covers the group almost completely, so such an algebra and group are called classical.

The first situation takes place when $\mathrm{e}^{iL_k\theta_k}$ are unbounded operators (in this case obstacles exist). In the framework of general topological groups this situation has been discovered by A. I. Maltcev [65].

Let G be a classical Lie group with Lie algebra l and $\epsilon(e) \subset G$ be its groupuscle. Let $T(l)$ be a nonclassical Lie algebra isomorphic to l and $\tilde{\epsilon}(\tilde{e})$ be a local group given rise by $T(l)$. Then $\tilde{\epsilon}(\tilde{e}) \approx \epsilon(e)$ (that follows from the Campbell–Hausdorff formula).

As is known, connected component of a topological group is given rise by local group (see [66], Theorem 44). This means that any element of the group in whole may be written in the form of left-ordered product (P is ordering symbol) of exponents $\mathrm{e}^{iT(l^{(N)})} \cdots \mathrm{e}^{iT(l^{(1)})} = \prod\limits_{i\in I} \mathrm{e}^{iT(l^{(i)})} = P \exp\left(i \sum\limits_{i\in I} T(l^{(i)})\right)$ (here $l^{(i)} = l_k \theta_k^{(i)}$ and $I = [1, N]$) at sufficiently large N, where all $\mathrm{e}^{iT(l^{(i)})} = T(g_i) \in \tilde{\epsilon}(\tilde{e})$ and $g_i = \mathrm{e}^{il^{(i)}} \in \epsilon(e)$. Of course we have to take now into account the convergence condition for the product of exponents (see further).

Set of elements $\{g_i\}_{i\in I}$ defines on G a certain discrete chain denoted $\tilde{g}$ which is formed by group elements $e, g_1, g_2 g_1, \ldots, g_N \cdots g_1 = g$, where e is the start of chain and g is its end, denoted $p(\tilde{g}) = g$.

Statement 1 (another definition of the nonclassical Lie group). For nonclassical Lie group products $\prod\limits_{i\in I} \mathrm{e}^{iT(l^{(i)})}$ depend on chains $\tilde{g}$ by essential manner, i.e., $\prod\limits_{i\in I} \mathrm{e}^{iT(l^{(i)})} = T(\tilde{g})$.

At the limit when $g_i \to e, N \to \infty$ (hereby the end g of the chain is fastened) a continuous chain $\tilde{g}$ on G is obtained. (This conventional reason of standard analysis is in fact self-contradictory, therefore further we go over to the nonstandard analysis, see [67].)*

An Example [61]. Let h_2 be the Heisenberg algebra with two generators a^α ($\alpha = 1, 2$) and commutation relations $[a^\alpha, a^\beta] = \epsilon^{\alpha\beta}$ ($\epsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$). Its automorphism group as a linear group of operators $T(v)$ acting in a topological vector space and entering into formula

$$T(v) a^\alpha T^{-1}(v) = v^\alpha_\beta a^\beta, \tag{6.5}$$

where

$$v = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}\,(1, C) \approx SL(2, C), \tag{6.6}$$

is a nonclassical Lie group $\tilde{\mathrm{Sp}}\,(1, C)$. We will see further that $T(v)$'s depend indeed on 1-chains $\tilde{v}$ on $\mathrm{Sp}\,(1, C)$, i.e., we have in fact the mapping $\tilde{v} \to T(\tilde{v})$. Remarkable that from $p(\tilde{v}) = p(\tilde{v}')$ and $T(\tilde{v}) a^\alpha T^{-1}(\tilde{v}) = T(\tilde{v}') a^\alpha T^{-1}(\tilde{v}')$ it does not follow that $T(\tilde{v}) = T(\tilde{v}')$ (with such a situation one deals at consideration of covering structures).

---

*In fact, at such a process we obtain a countable set of elements on G only, but not uncountable, moreover, continuous one.

This example shows that the space of 1-chains over a classical group must be rather natural object in quantum theory.

6.2. 1-Chain Group over Topological Group (Elementary Description). *Definition 3.* Let G be a connected, linearly one connected topological group. 1-chain space $\Gamma(G, e)$ over G is the set of chains $\tilde{g}$ starting in unity $e \in G$. The end of $\tilde{g}$ is $p(\tilde{g}) = g$ (p is projection: $\Gamma(G, e) \to G$). Subspace of closed 1-chains starting in e and ending in e denoted $C(G, e)$ is called space of cycles (loops). The subset of limiting 1-cycles called «moustache» is denoted $C_0(G, e)$ [68]*.

Theorem 2 [68]. Factor-set $\Gamma(G, e)/C_0(G, e) = \tilde{G}$ is topological group called 1-chain group over G. It is free group in which multiplication of two chains $\tilde{g}_1$ and $\tilde{g}_2$ denoted $\tilde{g}_1 \circ \tilde{g}_2$ is a chain $\tilde{g}$ consisting of $\tilde{g}_1$ and $\tilde{g}_2 \cdot g_1$ (the latter is right translation of 1-chain $\tilde{g}_2$ in G along the group by means of group element $g_1 = p(\tilde{g}_1)$, which does not belong, generaly speaking, to $\Gamma(G, e)$, $\cdot$ is multiplication in G) so that the end of $\tilde{g}_1 \in \Gamma$ and the start of $\tilde{g}_2 \cdot g_1$ coinside ($\circ$ is the so-called word multiplication law). Factor $C/C_0 = \tilde{\Omega}$ is invariant subgroup of cycles in $\tilde{G}$. Mapping p gives isomorphism $\tilde{G} \to \tilde{G}/\tilde{\Omega} = G$.

One can look at $\tilde{G}$ as an extention of G by means of cycle set $\tilde{\Omega}$. It is possible because the sequence $\tilde{\Omega} \to \tilde{G} \to G$ is exact (in fact, the kernel of mapping $\tilde{G} \to G$ being $\tilde{\Omega}$ is the image of mapping $\tilde{\Omega} \to \tilde{G}$).

One can else look at $\tilde{G}$ as a locally nontrivial fibration or bundle $(\tilde{G}, G, p)$ with base G, fiber $p^{-1} = \tilde{\Omega} \circ \tilde{g}$ over $g \in G$ and projection p: $\tilde{G} \to G$. Hereby topology on $\tilde{G}$ is determined by product of topologies on G and $\tilde{\Omega}$, see [68] (topology on $\tilde{\Omega}$ is induced by topology on G). In such a topology $\tilde{G}$ is a group with small subgroup (all these are contained in $\tilde{\Omega}$) and is not a Lie group. Further, only such representations T of $\tilde{G}$ will be considered for which $T(\tilde{\Omega})$ is a commutative set of operators (although $\tilde{\Omega}$ in general case is not central subgroup in $\tilde{G}$).

Introducing the notion of invariant subgroup of lasso $Y \subset \tilde{\Omega}$ as infinite small cycles of the form $\tilde{g} \circ \tilde{\omega} \circ \tilde{g}^{-1}$ (hereby infinite small neighbourhood of unity $\epsilon(e) \subset G$ is considered in the spirit of nonstandard analysis, i.e., G is considered to be hyperreal structure) and factorizing $\tilde{G}$ over Y, we come to the locally Euclidean group $\tilde{G}/Y$, i.e., to the Lie group $\tilde{G}_L$ locally isomorphic to the classical Lie group G. Hereby the factor $\tilde{\Omega}/Y$ is completely non-closed invariant subgroup in $\tilde{G}/Y$ so that $(\tilde{G}/Y)/(\tilde{\Omega}/Y) = G$.

It is interesting to notice that with $\tilde{G}$ such homogeneous spaces like $G^*_f = \tilde{G}/\tilde{\Omega}(U_f)$ are connected. Here $U_f \subset G$ is the analysity region of singular function $f(g) = T(g)f$ considered on G. We call G^*_f the Riemannian surface. It

*1-chain may be determined as track of path in G [68]. Such a class of groups (with another multiplication of chains) one became to use in two-dimensional quantum field theory, see for example [69].

is minimal covering for U_f. Measure on G_f^* is obtained by means of sheet lifting of measure dg on G, see [61].

6.3. Non-Neumannian Representations of a Topological Group (Main Definitions). A Little Generalization. It is very important that a finite system of axioms for non-Neumannian representations may be given.

Definition 4. Let G be a topological group. Non-Neumannian representation of G is three $\{(\dot{F}, F'), G, T(g)\}$, where $(\dot{F}, F')$ is a pair of topological vector spaces dual relatively some invariant sesquilinear form $\langle\cdot,\cdot\rangle$ and $g \to T(g)$, $g \in G$ is homomorphism of G into set of unbounded operators $T(g)$ acting on F' (carrier space of representation) and satisfying the following axioms: i) $e \to T(e) = 1$, ii) $T(g_2)T(g_1^{-1}) = T(g_2 g_1^{-1})$ on common domain (subspace) $D_{T(g_2)T(g_1^{-1})} \cap D_{T(g_2 g_1^{-1})}$, iii) $T(g^{-1}) = T^{-1}(g)$, iv) $(T(g_3)T(g_2))T(g_3) = T(g_3)(T(g_2)T(g_1))$, v) $\cap_{g\in G} D_{T(g)} = 0$, where $D_{T(g)} \in F'$ is a dense domain of definition of operator $T(g)$ — a non-closed subspace in F'.

It follows from these axioms that such a representation is setting by operators $T(g)$ without defect, i.e., 1) for every g operator $T(g)$ is dense defined on F' (it means that all $D_{T(g)}$'s are dense in F'), 2) for every g subspace $R_{T(g)} = T(g)D_{T(g)} = \operatorname{Im} D_{T(g)}$ is dense in F', and $\operatorname{Ker}T(g) = 0$, therefore for every $T(g)$ there exists inverse operator $T^{-1}(g)$ with domain of definition $D_{T^{-1}(g)} = R_{T(g)}$ and domain of rate $R_{T^{-1}(g)} = D_{T(g)}$, 3) for every pair of elements $g_1, g_2 \in G$ subspace $D_{T(g_2)T(g_1)}) = D_{T(g_2)} \cap R_{T(g_1)}$ is dense in F', hereby intersection $D_{T(g_2 g_1)} \cap D_{T(g_2)T(g_1)}$ is dense in F' too, 4) if $Q \subset G$ is a countable everywhere dense subset in G, so v′) $\cap_{g\in Q} D_{T(g)}$ is dense in F', 5) every operator $T(g)$ is continuous on its subspace of definition $D_{T(g)}$ in topology induced by topology in F', i.e., if $f_n \to f \in D_{T(g)}$, so $T(g)f_n \to T(g)f$.

We will see further that space F' which contains $D_{T(g)}$ at every $g \in G$ is the space of generalized functions of exponential type.

As usually [70] we may consider the set of all subsets $D_{T(g)}$ and their finite intersections denoting it $\Re_{F'}$. This set is invariant relatively operators $T(g)$ because $T(g)$ transfers $D_{T(g)}$ into $D_{T(g^{-1})}$ (these both subsets belong to $\Re_{F'}$). We say that a representation $g \to T(g)$ is Neumannian, if the condition v′) draws the following condition: v″) intersection $\cap_{g\in G} D_{T(g)}$ is dense in F' [71]. In such a case we can consider the latter to be carrier space of the representation. In general case condition v″) does not follow from v′) [68]. In such a case we say that the representation is non-Neumannian one.

From axiom v) it follows that at fixed $f \in F'$ there are such elements $g^f \in G$ that $T(g^f)f \notin F'$, i.e., $f \notin D_{T(g^f)}$. On the other hand, at fixed $g \in G$ there are such vectors $f^g \in F'$ that $f^g \notin D_{T(g)}$ (as operators $T(g)$ are in general case unbounder, so $D_{T(g)} \neq F'$). If F' is the space of generalized functions of exponential type, so for every $f \in F'$ there exists at least infinite small neighbourhood $U_f(e) \subset G$ that $T(g)f \in F'$ when $g \in U_f(e)$. Hereby common area $\cap_{f\in F'} U_f(e)$ is either unity of group or some closed subgroup in G of zero measure. Thus,

Statement 2. If $g \to T(g)$ is non-Neumannian representation of G in F', so $\cap_{f\in F'} U_f(e)$ is nowhere dense closed subgroup in G.

This statement is dual to the axiom v).

Representation $g \to T(g)$ is continuous if from $g_n \to g_0$ (in topology on G) the convergence of sequence $T(g_n)f \to T(g_0)f$ follows (in topology on F') when f belongs to some dense subspace in F' (for example, to the $\cap_{g\in U(g_0)} D_{T(g)}$, where $U(g_0)$ is a neighbourhood of element g_0 and $g_n \in U(g_0)$ beginning from any n).

Quite analogous way differentiable and analytical representations are defined. Speaking about irreducible and equivalent representations we understand the topologically irreducible and equivalent ones.

It is obviously that non-Neumannian representations exist for continuous groups only for such a group axiom that v$''$) does not follow in general case from axiom v$'$).

It turns out that axioms i)–v) (and statements 1)–5)) determine a new mathematical category: non-Neumannian group of a topological vector space.

Let us consider the set $\hat{T}$ of all unbouded reversible operators of a topological vector space F' satisfying the axioms i)–v). Hereat it is convenient to generalize the axiom ii) formulating it in the form of ii$'$): operators T_1 and T_2 are equivalent if on common dense subspace $D_{T_1} \cap D_{T_2} \subset F'$ the equality $T_1 = T_2$ takes place.

Now we have to apply to the above-mentioned set $\Re_{F'}$. On the definition we have $TD_T = R_T = D_{T^{-1}}$, so that operators $T \in \hat{T}$ act on $\Re_{F'}$ mapping subsets of $\Re_{F'}$ one to another $D_T \to D_{T^{-1}}$. We said already that set $\Re_{F'}$ is invariant relatively of set of operators $\hat{T}$. Factorizing $\hat{T}$ over above-formulated equivalence relation (see [70]), we get the group $\tilde{T}$ of classes unbouded reversible operators of space F' which we call *the non-Neumannian group of space* F' (in our consideration it plays the role analogous to the role of group of unitary operators of Hilbert space).

Subgroup of bounded operators we call Neumannian group of F'.

By quite analogous way one may define non-Neumannian ring of operators on space F'.

Now non-Neumannian representation of group G in space F' one may define to be homomorphism G into $\tilde{T}$ [72].

6.4. The Space of Fit and Generalized Functions of Exponential Type. At consideration of infinite dimensional representations of algebras and in particular of associative (Neumannian) rings of unbounded operators $T(l)$ the space of generalized functions of *degree* type (so-called L. Schwartz space, see [61, 48]) is well adopted. In fact, from formula (6.1) it follows that $T^k(l)f_n \sim n^k f_n$ at $n \to \infty$ and arbitrary entire $k < \infty$.

In the case of finite dimensional Lie algebra integration of its infinite dimensional representation leads to the exponent $\exp(iT(l)\theta) = T(\theta)$, and therefore $T(\theta)f_n \sim \exp(\theta n)f_n \sim K^n f_n$ ($T(l)$ is non-self-adjoint operator; $|K| < \infty$). So that side by side with linear envelope of elements of Cartan–Weyl basis elements $K^n f_n$ and their infinite sums must belong to the carrier space of group representation in whole. Space including such vectors we call the space of generalized vectors of *exponential* type [72].

If in the case of Lie algebra representation there exists invariant (respectively envelope algebra $U[T(l)]$) space (it is the space of fit functions of degree type, therefore $U[T(l)]$ is always Neumannian ring), so in the case of non-Neumannian irreducible representation of Lie group in whole such a space does not exist (see axiom v)).

Building the space, we interested, we may begin from consideration of pre-Hilbert space H with scalar product $(\psi,\varphi)_1 = \Sigma_n \overline{\psi}_n \varphi_n$, where φ_n are components of vector φ in orthonormed basis e_n: $\varphi = \Sigma_n \varphi_n e_n$. Then one may consider the infinite countable system of scalar products $(\psi,\varphi)_K = \Sigma_n |K|^n \overline{\psi}_n \varphi_n$, where $|K| = 1, 2, 3, \ldots$ Completion of H by means of norm $\|\varphi\|_K = \sqrt{(\varphi,\varphi)_K}$ lets us denote H_K. Obviously we have $H_1 \supset H_2 \supset \ldots H_K \supset \ldots$ Limit of this narrowed sequence of complete Hilbert spaces we call the space of fit vectors of exponential type F [72], so that $F = \cap_K H_K$. Topology on such a countable-Hilbert space is set by usual manner, see [48]. It is not difficult to show that the space of this type is nuclear [72].

Omitting further details the space of generalized function of exponent type F' we determine as the space of linear continuous functionals (F', F) on the space F. Not difficult to show that F' is the Frechet space, see [72]. Further, we will consider a sesquilinear form $\langle F', F\rangle$ connecting the pair of spaces F and F'.

Namely, F' (the space of generalized functions of exponential type) is the carrier space for non-Neumannian representation (see the following Sec. 7).

7. NON-NEUMANNIAN REPRESENTATIONS OF ROTATION GROUP (TO THE ETHER THEORY). 2

7.1. Non-Neumannian Representations of Rotation Group (Effective Construction). Further, we use concrete realization of $U(2)$ representations and its complexification $GL(2,C)$ connected with formulas (6.2)–(6.4) (see [4] (previous part) further called as Sec. 6).

i) First of all every regular element $g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in GL(2,C)$ ($\delta \neq 0$) may be written in the form of Gaussian decomposition $g = n_+ h_\Delta n_-$, where

$n_+ = \begin{pmatrix} 1 & \beta/\delta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{(\beta/\delta)\sigma_+}$, $h_\Delta = \begin{pmatrix} \Delta/\delta & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix} = e_\Delta h$, $e_\Delta = \begin{pmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{(\sigma_0+\sigma_3)\theta/2}$, $h = \begin{pmatrix} \delta^{-1} & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{-\sigma_3 \ln\delta}$, $n_- = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \gamma/\delta & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{(\gamma/\delta)\sigma_-}$ and $\Delta = \det g = \alpha\delta - \beta\gamma = \mathrm{e}^\theta$ (here θ is a complex number).

Here the following matrix notations are used: $\sigma_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Due to the local isomorphism between $T_\lambda(g)$ and g^* we may write $T_\lambda(g) = T_\lambda(n_+)T_\lambda(e_\Delta)T_\lambda(h)T_\lambda(n_-)$, where

$$\begin{aligned} T_\lambda(n_+) &= \mathrm{e}^{(\beta/\delta)T_\lambda(\sigma_+)} = \mathrm{e}^{(\beta/\delta)L_+^{(\lambda)}}, \\ T_\lambda(e_\Delta) &= \mathrm{e}^{(T_\lambda(\sigma_0)+T_\lambda(\sigma_3))\theta/2} = \mathrm{e}^{(L_0^{(\lambda)}+2L_3^{(\lambda)})\theta/2}, \end{aligned} \tag{7.1}$$

$$\begin{aligned} T_\lambda(h) &= \mathrm{e}^{-T_\lambda(\sigma_3)\ln\delta} = \mathrm{e}^{-2L_3^{(\lambda)}\ln\delta}, \\ T_\lambda(n_-) &= \mathrm{e}^{(\gamma/\delta)T_\lambda(\sigma_-)} = \mathrm{e}^{(\gamma/\delta)L_-^{(\lambda)}} \end{aligned} \tag{7.2}$$

are 1-parametric subgroups.

We have (see Sec. 6 and footnote on page 361):

$$\begin{aligned} L_+^{(\lambda)} &= \zeta, \quad L_-^{(\lambda)} = -\zeta\frac{d^2}{d\zeta^2} + 2\lambda\frac{d}{d\zeta}, \\ L_3^{(\lambda)} &= \zeta\frac{d}{d\zeta} - \lambda, \quad L_0^{(\lambda)} = 2\lambda. \end{aligned} \tag{7.3}$$

Of course we have to distinguish the group unity $e = g^0$ from σ_0 because $T_\lambda(e) = 1 \neq T_\lambda(\sigma_0) = 2\lambda$.

Let us act on the junior Cartan vector $f_0^{(\lambda)}(\zeta) = 1$ by operator $T_\lambda(g)$. As $L_-^{(\lambda)} f_0^{(\lambda)} = 0$, so we may write $T_\lambda(g)1 = \delta^{2\lambda}\,\mathrm{e}^{(\beta/\delta)\zeta} = \kappa_\lambda(\zeta; g)$. The latter as a function on the group is the orbit of element $f_0^{(\lambda)}$. For regular g ($\delta \neq 0$) it is wholly situated in the space of generalized functions of exponential type F'_λ which includes (in our realization) all entire analytical functions of complex variable ζ of order $\rho \leqslant 1$ and type $0 \leqslant \tau < \infty$, see [73].

*The isomorphism is setting by formula (σ_μ are the Pauli matrices): $T_\lambda(\sigma_\mu) = {}^{(\lambda)}\overline{\varphi}\sigma_\mu\varphi$, where φ, $\overline{\varphi}$ are determined in [73]: $\varphi = \begin{pmatrix} d/d\zeta \\ 1 \end{pmatrix}$, ${}^{(\lambda)}\overline{\varphi} = (\zeta, -\zeta d/d\zeta + 2\lambda)$.

In fact, let us decompose the function $e^{(\beta/\delta)\zeta}$ into series over functions of canonical basis $f_n^{(\lambda)}$ (see [73]): $e^{(\beta/\delta)\zeta} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-i(\beta/\delta))^n\sqrt{(\Gamma(n-\lambda))/n!}f_n^{(\lambda)}(\zeta)$. Decomposition coefficients $a_n = (-i(\beta/\delta))^n\sqrt{(\Gamma(n-\lambda))/n!}$ at $n\to\infty$ satisfy the condition $|a_n| \leqslant |\beta/\delta|^n < K^n$, where $0 \leqslant K < \infty$. Elements from F'_λ obey just such a condition (see Sec. 6).

ii) As is known, if the representation $g \to T_\lambda(g)$ is irreducible, so the orbit $T_\lambda(g)f$ of any element f is dense in carrier space F'_λ. Concerning the junior vector 1 it means that linear envelope of infinite countable set of functions $e^{\tau_n\zeta}$ at any collection of in pairs inequaled complex numbers τ_n is dense in F'_λ. To convince of this we have to show that some function $f(\zeta) \in F'_\lambda$ may be approximated (in topology of F'_λ) by the series $\Sigma_n A_n\, e^{\tau_n\zeta}$, i.e., we can choose coefficients A_n so that difference $f(\zeta) - \Sigma_n A_n\, e^{\tau_n\zeta} = \varphi(\zeta) \in U_p(\epsilon)$, where $U_p(\epsilon)$ is a weak neighborhood of zero in F'_λ which is setting by vectors φ satisfying the condition $|\langle f_m, \varphi\rangle_\lambda| < \varepsilon$. Here $\{f_m\}$ $(m < p)$ is any finite set of vectors in F'_λ and $\langle\cdot,\cdot\rangle_\lambda$ is the form (6.4). In particular, as $\{f_m\}$ we can take $\{f_m^{(\lambda)}\}$, then weak neighborhood of zero is determined by seminorms $\left|\langle f_m^{(\overline{\lambda})}, \varphi\rangle_\lambda\right| < \varepsilon$.

Let us denote $\left|\langle f_m^{(\overline{\lambda})}, f\rangle_\lambda\right| = a_m(-1)^m\eta_m^{(\lambda)}$, where $\eta_m^{(\lambda)} = \dfrac{(\Gamma(m-2\overline{\lambda}))^{1/2}}{(\Gamma(m-2\lambda))^{1/2}}$.

By choice of A_n we may achieve that $\langle f_m^{(\overline{\lambda})}, \varphi\rangle_\lambda = 0$ at $m = 1, 2, 3, \ldots, p$. From the latter condition the equations for determining of A_n follow:

$$\sum_{n=0}^{p} A_n\tau_n^m = i^m\sqrt{\frac{m!}{\Gamma(m-2\lambda)}}a_m, \quad m = 0, 1, 2, \ldots, p. \tag{7.4}$$

Determinant of the system is the Vandermonde one:

$$V_{p+1}(\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_p) = \det\begin{vmatrix} 1 & 1 & . & . & . & 1 \\ \tau_0 & \tau_1 & . & . & . & \tau_p \\ \tau_0^2 & \tau_1^2 & . & . & . & \tau_p^2 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ \tau_0^p & \tau_1^p & . & . & . & \tau_p^p \end{vmatrix} = \Pi_{n>m}(\tau_n - \tau_m), \tag{7.5}$$

which is not equal to zero because all τ_n are in pairs different. Therefore, our system is solvable concerning A_n.

With A_n got by such a way the series $\Sigma_n A_n\, e^{\tau_n\zeta}$ approximates the function $f(\zeta) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} a_m f_m^{(\lambda)}(\zeta)$ in the sense of weak convergence in F'_λ.

iii) We define now the action of operator $T_\lambda(g)$ on the function $e^{\tau\zeta}$. As we can write $e^{\tau\zeta} = T_\lambda(n_+(\tau))\cdot 1$, where $n_+(\tau) = \begin{pmatrix} 1 & \tau \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, so we have

$T_\lambda(g)\,\mathrm{e}^{\tau\zeta} = T_\lambda(gn_+(\tau))\cdot 1$. As $gn_+(\tau) = n_+(g,\tau)h_\Delta(g,\tau)n_-(g,\tau)$, where

$$n_+(g,\tau) = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad h_\Delta = \begin{pmatrix} \dfrac{\Delta}{\gamma\tau+\delta} & 0 \\ 0 & \gamma\tau+\delta \end{pmatrix},$$

$$n_-(g,\tau) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{\gamma}{\gamma\tau+\delta} & 1 \end{pmatrix}, \qquad T_\lambda(n_-(g,\tau))\cdot 1 = 1,$$

so we obviously obtain [73]:

$$T_\lambda(g)\,\mathrm{e}^{\tau\zeta} = (\gamma\tau+\delta)^{2\lambda}\exp\left(\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}\zeta\right). \tag{7.6}$$

iv) Define else the result of action of $T_\lambda(g)$ on arbitrary element of canonical basis $f_n^\lambda(\zeta)$ (see formula (6.3)). As $\zeta = L_+^{(\lambda)} = T_\lambda(\sigma_+)$, so we may write (for arbitrary function $f(\zeta)$) the formula $T_\lambda(g)f(\zeta) = f(T_\lambda(g)\zeta T_\lambda(g^{-1}))T_\lambda(g)\times 1 = f(T_\lambda(g\sigma_+g^{-1}))\kappa_\lambda(\zeta;g)$ (κ_λ is the above-defined function). Here matrix $g\sigma_+g^{-1}$ is $\dfrac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} -\alpha\gamma & \alpha^2 \\ -\gamma^2 & \alpha\gamma \end{pmatrix} = \dfrac{1}{\Delta}(\alpha^2\sigma_+ - \gamma^2\sigma_- - \alpha\gamma\sigma_3)$.

As $T_\lambda(1/2\overrightarrow{\sigma}) = \overrightarrow{L^{(\lambda)}}$ (see (6.2)), so we have

$$\begin{aligned} T_\lambda(g\sigma_+g^{-1}) &= \frac{1}{\Delta}(\alpha^2 L_+^{(\lambda)} - \gamma^2 L_-^{(\lambda)} - 2\alpha\gamma L_3^{(\lambda)}) = \\ &= \frac{1}{\Delta}\left[\alpha^2\zeta + \gamma^2\left(\zeta\frac{d^2}{d\zeta^2} - 2\lambda\frac{d}{d\zeta}\right) - 2\alpha\gamma\left(\zeta\frac{d}{d\zeta} - \lambda\right)\right]. \end{aligned}$$

Let us denote $\Phi = (\beta/\delta)\zeta$. Then we may write

$$T_\lambda(g\sigma_+g^{-1}) = \frac{\beta\gamma^2}{\Delta\delta}\left[\Phi\left(\frac{\alpha\delta}{\beta\gamma} - \frac{d}{d\Phi}\right) + 2\lambda\right]\left(\frac{\alpha\delta}{\beta\gamma} - \frac{d}{d\Phi}\right) = D. \tag{7.7}$$

Now it is not difficult to define the action of $T_\lambda(g)$ on ζ^n. We have

$$\begin{aligned} T_\lambda(g)\zeta^n &= D^n\kappa_\lambda(\zeta,g) = \\ &= \delta^{2\lambda}\left(\frac{\beta\gamma^2}{\Delta\delta}\right)^n\left\{\left[\Phi\left(\frac{\alpha\delta}{\beta\gamma} - \frac{d}{d\Phi}\right) + 2\lambda\right]\left(\frac{\alpha\delta}{\beta\gamma} - \frac{d}{d\Phi}\right)\right\}^n \mathrm{e}^{\Phi}. \end{aligned} \tag{7.8}$$

Here right-hand side may be represented in the form of $\delta^{2\lambda}P_n^{(\lambda)}(\Delta\Phi/\beta\gamma)\,\mathrm{e}^{\Phi}$, where $P_n^{(\lambda)}(x)$ is a polynomial about $x = \Delta\Phi/\beta\gamma$ of degree n. As on definition we have $D(P_n^{(\lambda)}(\Delta\Phi/\beta\gamma)\,\mathrm{e}^{\Phi}) = P_{n+1}^{(\lambda)}(\Delta\Phi/\beta\gamma)\,\mathrm{e}^{\Phi}$, so we come to the following relation between polynomials $P_n^{(\lambda)}(x)$:

$$\frac{\gamma}{\delta}\left[x\frac{d^2}{dx^2} - 2(x+\lambda)\frac{d}{dx} + x + 2\lambda\right]P_n^{(\lambda)}(x) = P_{n+1}^{(\lambda)}(x).$$

If to put $P_n^{(\lambda)}(x) = (-\gamma/\delta)^n n! Q_n^{(\lambda)}(x)$, so the above-obtained relation may be written in the form:

$$\left[x\frac{d^2}{dx^2} - 2(x+\lambda)\frac{d}{dx} + x + 2\lambda\right] Q_n^{(\lambda)}(x) = -(n+1)Q_{n+1}^{(\lambda)}(x).$$

The same relation takes place for the Laggere polynomials $L_n^{(-2\lambda-1)}(x)$.

In fact, from the equation for $L_n^{(\alpha)}(x)$:

$$\left[x\frac{d^2}{dx^2} + (n+\alpha+1-x)\frac{d}{dx} + n\right] L_n^{(\alpha)}(x) = 0$$

and recurrent relation

$$\left[x\frac{d}{dx} + (n+\alpha+1-x)\right] L_n^{(\alpha)}(x) = (n+1)L_{n+1}^{(\alpha)}(x),$$

(see [74]) we get

$$\left[x\frac{d^2}{dx^2} - 2\left(x - \frac{\alpha+1}{2}\right)\frac{d}{dx} + x - \alpha - 1\right] L_n^{(\alpha)}(x) = -(n+1)L_{n+1}^{(\alpha)}(x).$$

Comparising this relation with the previous (for $Q_n^{(\lambda)}$) one, we see that it must be $-\alpha - 1 = 2\lambda$, and hence $Q_n^{(\lambda)}(x) = L_n^{(-2\lambda-1)}(x)$. Therefore, we can write $T_\lambda(g)\zeta^n = \delta^{2\lambda}(-\gamma/\delta)^n n! L_n^{(-2\lambda-1)}(\Delta\zeta/\gamma\delta)\,\mathrm{e}^{(\beta/\delta)\zeta}$. As a result, we come to the formula:

$$T_\lambda(g) f_n^{(\lambda)}(\zeta) = \sqrt{\frac{n!}{\Gamma(n-2\lambda)}}\delta^{2\lambda}\left(-i\frac{\gamma}{\delta}\right)^n L_n^{(-2\lambda-1)}\left(\frac{\Delta\zeta}{\gamma\delta}\right)\mathrm{e}^{(\beta/\delta)\zeta}. \qquad (7.9)$$

Now for arbitrary function $f(\zeta) = \Sigma_n f_n \zeta^n$ we may write

$$T_\lambda(g) f(\zeta) = \delta^{2\lambda}\,\mathrm{e}^{(\beta/\delta)\zeta}\Sigma_n f_n n!\left(-\frac{\gamma}{\delta}\right)^n L_n^{(-2\lambda-1)}\left(\frac{\Delta\zeta}{\gamma\delta}\right). \qquad (7.10)$$

v) It follows from formula (7.6) that at a fixed g operator $T_\lambda(g)$ is not defined on function $\mathrm{e}^{\tau\zeta}$ when $\tau = -\delta/\gamma$, i.e., on the function $\exp(-(\gamma/\delta)\zeta)$. It means that $D_{T_\lambda(g)} \neq F'_\lambda$, so that $T_\lambda(g)$ are in general case unbounded operators on F'_λ.

From all rest functions $\mathrm{e}^{\tau\zeta}$ ($\tau \neq -\delta/\gamma$) an infinite countable function system $\{\mathrm{e}^{\tau_n\zeta}\}$ dense in F'_λ may be chosen. Linear envelope $U[\{\mathrm{e}^{\tau_n\zeta}\}]$ is included in the subspace of definition $D_{T_\lambda(g)}$ of operator $T_\lambda(g)$, i.e., $T_\lambda(g)$ at every g is dense defined operator on F'_λ.

Complex plane $C \ni \tau$ (the point $\tau = \infty$ is considered to be always pricked out) without point $-\delta/\gamma$ is denoted $C(-\delta/\gamma)$. Instead of δ we may use the parameter τ from $\tau = -\delta/\gamma$. Then we can say that the manifold $C(\tau)$ is associated with the set of elements $g_\tau = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\Delta/(\alpha\tau+\beta) & \tau\Delta/(\alpha\tau+\beta) \end{pmatrix} \in GL(2, C)$ with arbitrary α and β.

vi) It follows from formula (7.7) that operator $T_\lambda(g_0)$, corresponding to the singular elements $g_0 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & 0 \end{pmatrix} \in \Delta'$ is not defined on the functions of canonical basis $\{f_n^\lambda\}$. Therefore, linear envelope $U[\{f_n^\lambda\}] \notin D_{T_\lambda(g_0)}$. Moreover, such operators are not defined on the subspace of fit functions of exponential type F_λ which contains functions of order $\rho < 1$ and type $0 \leqslant \tau < \infty$. Hence, $F_\lambda \notin D_{T_\lambda(g_0)}$. However, every operator $T_\lambda(g)$ corresponding to the regular element g ($\delta \neq 0$) is defined on F_λ.

It is remarkable that none from more narrow subspace than F'_λ may be considered to be a carrier space for group $GL(2, C)$ in whole. For example, considering the Hilbert space $H_\lambda \subset F'_\lambda$ including side by side with F_λ also the functions of order $\rho = 1$ and type $0 \leqslant \tau < 1$, we may define only those operators $T_\lambda(g)$ which correspond to the elements g satisfying the condition $|(\alpha\tau+\beta)/(\gamma\tau+\delta)| < 1$ and, of course, $|\tau| < 1$.

vii) Further, when g runs the Gaussian area $N_+HN_- = GL(2, C) - \Delta'$ (i.e., $\delta \neq 0$), number β/δ runs the complex plane C (without infinite far point), see above. In formula (7.9) number β/δ determines the type of function $\mathrm{e}^{(\beta/\delta)\zeta}$. It follows from here that none function from analytical functions about ζ of the order $\rho = 1$ includes in common subspace of definition $D(N_+HN_-) = \cap_{g\in N_+HN_-} D_{T_\lambda(g)}$ of operator $T_\lambda(g)$, corresponding to the Gaussian region. From (7.9) it follows also that $D(N_+HN_-)$ coinsides with F_λ. On the other hand, it follows from vi) that F_λ is not included in common region of definition $D(\Delta') = \cap_{g_0\in\Delta'} D_{T_\lambda(g_0)}$ of operators $T_\lambda(g_0)$, corresponding to the singular elements $g_0 \in \Delta'$*. Therefore, we have $D(N_+HN_-) \cap D(\Delta') = \cap_{g\in GL(2,C)} D_{T_\lambda(g)} = 0$. Hence, representations we considered are non-Neumannian ones.

viii) So far we have considered elements g taking their values from Gaussian area of the $GL(2, C)$ group. It turns out all our formulae may be continued to the Gaussian area of the monoid $M(2, C)$.

*«Ideal» elements (vectors, functions) of the type $\mathrm{e}^{\infty\zeta}$ are nonproper functions. Such functions as nonexisting ones ($\notin F'_\lambda$) we have so far excluded from the rate domain $R_{T_\lambda(g)}$ of operator $T_\lambda(g)$: usually one considers that operator may not remake the existing (true) vector into nonexisting (false) one (namely, it is a reason why the function $\mathrm{e}^{-(\delta/\gamma)\zeta}$ does not enter definition domain $D_{T_\lambda(g)}$ of operator $T_\lambda(g)$, where $g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$). However, *material implication law* seems to permit one to ramake false (nonexisting) vector into true (existing) one. Then «ideal» elements of the type $\mathrm{e}^{\infty\zeta}$ may be added to the definition domain D and function $\mathrm{e}^{(\alpha/\gamma)\zeta}$ is not excluded from rate domain R (i.e., we have to connect D with $\overline{C} = C \cup \{\infty\}$ and R with C; hereby $\overline{C}$ and D become of course nonlinear manifolds). The space with «ideal» elements is denoted $\widetilde{F'_\lambda}$ (it is the Frechet space still).

Under the multiplication law the set of all 2×2-matrices g forms monoid denoted $M(2, C)$. Here we consider only the subset of matrices g with $\Delta \geqslant 0$ which form the submonoid denoted $M^+(2, C)$. The latter contains the group $GL^+(2, C)$ of matrices g with $\Delta > 0$.

Subset in $GL^+(2, C)$ with $\Delta = 1$ is the special $SL(2, C)$ group. Special submonoid $J = \{g \in M^+(2, C) \mid \det g = \Delta = 0\}$ possesses the property $JM \subset J$ and $MJ \subset J$. We call it the attractive submanifold* (see below). Hereby we have $M^+(2, C) = GL^+(2, C) \cup J$. Further elements of J are denoted j.

Contraction $GL(2, C) \to J$ arises under the condition when the space–time is too little (or there is not at all; such a situation takes place when the spaceuscle, i.e., ether quanta or field $f(x)$ is pressed into the point, see [80]). Submanifold J plays very important role in the ether dynamics: at the contraction $GL(2, C) \to J$ ether field $f(x)$ (first component of the bi-Hamiltonian system belonging to the space F', more exactly to the subspace F) transmutes into the second one — field $\dot{f}(\dot{x})$ belonging to the space F' too (see below). Only after this quantum transition takes place (it is indeed the jump of $\dot{f}$ from the space F' into the complex conjugated space $\dot{F}'$).

If to prick out the submanifold Δ' described by equation $\delta = 0$ we get the Gaussian area $N_+ H_\Delta N_-$ of $M^+(2, C)$ at $\delta \neq 0$. Hereby monoid $M^+(2, C)$ (and also submonoid J and groups $GL(2, C)$, $SL(2, C)$) decays into two open submonoids (subgroups) $B_+(\Delta)$ and $B_-(\Delta)$ called Borelean ones. Elements j from Gaussian area are written as $j = \begin{pmatrix} \beta\gamma/\delta & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$. Such j's form 3-dimensional complex manifold. Intersection $J \cap \Delta'$ is obviously 2-complex matrices $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, or $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \gamma & 0 \end{pmatrix}$.

It is very important to notice that *symmetry properties* of observed (Lagrangian) forms of matter (fundamental particles) are described by the group $SL(2, C)$ (the condition $\Delta = 1$ means that there exist invariants of symmetry). Symmetry properties of space–time are described, hereby, by the factor-group $SL(2, C)/Z_2$ — by the Lorentz group $SO(3, 1)$ (the Poincare–Minkowski metric is invariant under the latter). (Note that being connected with covering group, matter is more refined structure than the space–time continuum).

It is remarkable that the *dynamical properties* of spinor fiber (dynamical structure of particle constituents or bi-Hamiltonian matter) are described by the group $GL(2, C)$ which permits the closure to the monoid $M^+(2, C)$. Hereby

*In the ring theory (structures with two composition laws) subrings with this property are named ideals.

if submanifold J ($\Delta = 0$) is added to the group $GL(2, C)$ (by means of topological closure of the latter), so the manifold Δ' ($\delta = 0$) of the so-called singular elements must be considered to be pricked out, i.e., in this case monoid $M^+(2, C)$ indeed decays into two open Borelean submonoids B_+ and B_-. Further, we will consider representations of all these substructures in order to clear the situation.

ix) We begin to consider the simplest manifold — the Cartan subgroup H_Δ of diagonal matrices $h_\Delta = \begin{pmatrix} \Delta/\delta & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}$. It follows from (7.10) at $\gamma = 0$ that $T_\lambda(h_\Delta)f(\zeta) = \delta^{2\lambda} f(\Delta\zeta/\delta^2)$, where $f(\zeta)$ is an arbitrary function from the space F'_λ. We see that representation of H_Δ in F'_λ is reduced onto one-dinemsional representations realized in one-dimensional subspaces (see [73]).

At $\Delta = 0$ we have ($h_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}$): $T_\lambda(h_0)f(\zeta) = \delta^{2\lambda} f(0)$, i.e., any function $f(\zeta)$ is projected onto one and the same function — the junior Cartan vector $f_0^{(\lambda)}$ with projection equaled $f(0)$. It is remarkable that (as $2\lambda \neq 0, 1, 2, \ldots$) we cannot put here $\delta = 0$, although $T_\lambda(0) = 0$ (singular elements are sources of branching).

x) Now we consider the more complicated structure — the Borel submonoid $B_-(\Delta)$ of matrices $b_-(\Delta) = \begin{pmatrix} \Delta/\delta & 0 \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$. Proceeding from (7.9) we have

$$T_\lambda(b_-(\Delta))\zeta^n = \delta^{2\lambda} \left(-\frac{\gamma}{\delta}\right)^n n! L_n^{(-2\lambda-1)} \left(\frac{\Delta\zeta}{\gamma\delta}\right). \tag{7.11}$$

It follows from here that both linear envelope $U[\{f_n^{(\lambda)}\}]$ and space F_λ are invariant under the operators $T_\lambda(b_-(\Delta))$. Hereby representation of $B_-(\Delta)$ in F_λ is not completely reducible (see [73]).

At $\Delta = 0$ we have $T_\lambda(b_-(0))\zeta^n = \delta^{2\lambda}(-\gamma/\delta)^n(\Gamma(n-2\lambda)/\Gamma(-2\lambda))$. Again after putting $\Delta = 0$ we cannot put further (in ζ-realization) $\delta = 0$, although at $\delta = 0$ for matrices we have $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \gamma & 0 \end{pmatrix} = \gamma\sigma_-$, and hence due to the local isomorphism we must have $T_\lambda(\gamma\sigma_-) = \gamma L_-^{(\lambda)}$. According to the known formula (see (6.3)), we have $T_\lambda(\gamma\sigma_-)\zeta^n = \gamma L_-^{(\lambda)}\zeta^n = \gamma(\alpha_n^{(\lambda)})^2\zeta^{n-1}$.

We already know that on the space F'_λ operators $T_\lambda(b_-(\Delta))$ are unbounded. In fact, this follows, for example, from formula (7.6) at $\beta = 0$ (hereby $\alpha = \Delta/\delta$)

$$T_\lambda(b_-(\Delta))\, \mathrm{e}^{\tau\zeta} = (\gamma\tau + \delta)^{2\lambda} \exp\left(\frac{\Delta\tau\zeta}{\delta(\gamma\tau + \delta)}\right). \tag{7.12}$$

At $\Delta = 0$ we have $T_\lambda(b_-(0))\, \mathrm{e}^{\tau\zeta} = (\gamma\tau + \delta)^{2\lambda}$.

If to put here $\delta = 0$ we get $(\gamma\tau)^{2\lambda}$. But $\gamma L_-^{(\lambda)}\, \mathrm{e}^{\tau\zeta} = \gamma\tau(-\tau\zeta + 2\lambda)\, \mathrm{e}^{\tau\zeta}$, i.e., quite another result*.

xi) Consider further another Borel submanifold $B_+(\Delta)$ of matrices $b_+(\Delta) = \begin{pmatrix} \Delta/\delta & \beta \\ 0 & \delta \end{pmatrix}$. We have (see (7.10))

$$T_\lambda(b_+(\Delta))f(\zeta) = \delta^{2\lambda} \exp\left(\frac{\beta}{\delta}\zeta\right) f\left(\frac{\Delta\zeta}{\delta^2}\right). \tag{7.13}$$

It follows from here that F'_λ is invariant space under the action of operators $T_\lambda(b_+(\Delta))$. The representation is not completely reducible (see [78]).

At $\Delta = 0$ we obviously have $T_\lambda(b_+(0))f(\zeta) = \delta^{2\lambda} \exp\left((\beta/\delta)\zeta\right) f(0)$. We cannot take here $\delta = 0$. But at $\Delta = 0$ and $\delta = 0$ for $b_+(0)$ we have $\beta\sigma_+$, and therefore $T_\lambda(\beta\sigma_+)f(\zeta) = \beta L_+^{(\lambda)} f(\zeta) = \beta\zeta f(\zeta)$ (see previous footnote).

All these observations are summed up in the following general

Statement 3. The most dangerous submanifold in $M(2, C)$ is the intersection $J \cap \Delta'$ (elements of the latter are denoted j_0). Hereby in the framework of space F'_λ we have $\lim\limits_{j\to j_0} T_\lambda(j) \neq T_\lambda(\lim\limits_{j\to j_0} j) = T_\lambda(j_0)$.

This means that in the framework of space F'_λ we cannot close Gaussian area of monoid $M(2, C)$ to get the monoid in whole. In [75] such a situation is called polarization of the relativistic bi-Hamiltonian dynamical system. In connection with this we would like to emphasize that the existence of Gaussian decomposition of semisimple Lie groups has always been a puzzle.

We may even say that if $\Delta = 0$ so $\delta \neq 0$. On the contrary, if $\delta = 0$ so $\Delta \neq 0$, i.e., subsets J and Δ' are in complimentary condition to each other.

Further, it is worthwhile to consider the realization of $GL(2, C)$ on complex plane $\tau \in C$. In this case we have $\tau \to \tau' = (\alpha\tau + \beta)/(\gamma\tau + \delta)$, where $\alpha = (\Delta + \beta\gamma)/\delta$. We see that at $\Delta = 0$ complex plane is projected onto one and the same fixed complex number β/δ.

Let $f(\tau)$ be a function of complex variable τ belonging to the representation $T_\lambda(g)$. Then we have $T_\lambda(g)f(\tau) = (\gamma\tau + \delta)^{2\lambda} f(\alpha\tau + \beta/(\gamma\tau + \delta)$. At $\Delta = 0$ the right-hand side is $(\gamma\tau + \delta)^{2\lambda} f(\beta/\delta)$, i.e., arbitraty function is projected onto one and the same function $(\gamma\tau + \delta)^{2\lambda}$ with projection $f(\beta/\delta)$.

---

*This property of $T_\lambda(g)$ is a consequence of the common situation in the theory of non-Neumannian representations of topological groups: mapping exp is not surjection. Here is the simplest example of it. For matrices we have $\mathrm{e}^{\tau\sigma_+} = 1 + \tau\sigma_+$. Taking T_λ from the right-hand side we obtain $T_\lambda(1 + \tau\sigma_+) = 1 + \tau L_+^{(\lambda)} = 1 + \tau\zeta$. But T_λ from the left-hand side gives (see before) $T_\lambda(\mathrm{e}^{\tau\sigma_+}) = \mathrm{e}^{\tau L_+^{(\lambda)}} = \mathrm{e}^{\tau\zeta} \neq 1 + \tau\zeta$.

In τ-realization canonical Cartan–Weyl basis is formed by functions:

$$f_n^{(\lambda)}(\tau) = (i\tau)^n \sqrt{\frac{\Gamma(n-2\lambda)}{n!}}.$$

Hereby we have

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(\lambda)}(\zeta)\eta_n^{(\lambda)}\overline{f_n^{(\overline{\lambda})}(\overline{\tau})} = \mathrm{e}^{\tau\zeta},$$

where $\eta_n^{(\lambda)}$ is the metric in space representation T_λ (see above).

Returning to the ζ-realization we remark that for arbitrary function $f(\zeta) = \Sigma_n f_n \zeta^n$ of ζ we have at $\Delta = 0$: $T_\lambda(j)f(\zeta) = C_f(j)\exp((\beta/\delta)\zeta)$, where $C_f(j) = \delta^{2\lambda}\Sigma_n(-\gamma/\delta)^n(\Gamma(n-2\lambda)/\Gamma(-2\lambda))f_n$ and $j = \begin{pmatrix} \beta\gamma/\delta & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$.

So, we formulate

Theorem 1. At contraction $GL(2,C) \to J$ every vector $f \in F'_\lambda$ is projected onto one and the same vector $\exp((\beta/\delta)\zeta)$ with projection $C_f(j)$, see [75].

Vector $\exp((\beta/\delta)\zeta)$ is the ground state of the relativistic bi-Hamiltonian dynamical system $\dot{f}$. So, the ground state $\dot{f}$ of this system arises as a result of evolution of states f described by contraction $GL(2,C) \to J$ (the latter is analog of the Schroedinger evolution equation). We may say that the ground state $\dot{f}$ is associated with attractive submonoid J.

Of course this evolution process (in general case reversible) may not be mixed with quantum (irreversible) transition $f \to \dot{f}$ described by transition matrix element $\langle \dot{f}, f\rangle$ containing complex conjugated state $\dot{f}$.

xii) Further, we come back to the group representations, namely, to $SL(2,C)$. Its subgroups ($SU(1,1)$ and especially $SU(2)$) will be considered also.

Because of multiplier $(\gamma\tau+\delta)^{2\lambda}$ in (7.6) elements $T_\lambda(v)f$ ($v \in SL(2,C)$, $\lambda \neq p/2$) as the functions on group $SL(2,C)$ are multivalued (it is not difficult to be convinced that at $\lambda = p/2$ in $F'_{p/2}$ there are vectors f orbits of which $T_{p/2}(v)f$ are multivalued functions on $SL(2,C)$ too). We write this property of $T_\lambda(v)$ so: $v \to \{T_\lambda(v)\}$, where $\{T_\lambda(v)\}$ is the set of operators corresponding to the group element v. For uniformization of our mapping $T_\lambda(v)$ and functions $T_\lambda(v)f$ the space of 1-chains over linearly one-connected group $SL(2,C)$ is very adopted (see earlier). Hereby concrete representative from $\{T_\lambda(v)\}$ is determined by chain $\widetilde{v}$ beginning in unity $e \in SL(2,C)$ and ending in $v \in SL(2,C)$. Mapping we considered is exact mapping of 1-chain group $\widetilde{SL}(2,C)$ determined in Sec. 6: $\widetilde{v} \to \widetilde{SL}(2,C)$. In fact, let us act on element $T_\lambda(\widetilde{v}_1)f$ by operator $T_\lambda(\widetilde{v}_2)$ (hereby it is supposed that f belongs to the definition subspace of $T_\lambda(\widetilde{v}_1)$ and $T_\lambda(\widetilde{v}_1)f$ belongs to the definition subspace of operator $T_\lambda(\widetilde{v}_2)$; such subspaces exist, see further). Element $T_\lambda(\widetilde{v}_2)(T_\lambda(\widetilde{v}_1)f)$ may be obtained as a result of growing of chain $\widetilde{v}_1$ by chain $\widetilde{v}_2$: from the end of chain $\widetilde{v}_1$ as from unity of group $\widetilde{SL}(2,C)$

the chain $\widetilde{v}_2$ outgoes (namely, this circumstance permits one to consider group $\widetilde{SL}(2,C)$ to be *free* group over $SL(2,C)$). Chain obtained by such a way is the chain $\widetilde{v}_2 \circ \widetilde{v}_1$ composed from $\widetilde{v}_1$ and $\widetilde{v}_2$ (it is very important to emphasize because another chain multiplication laws are possible, see, for example, [72]). Therefore, we have $T_\lambda(\widetilde{v}_2)T_\lambda(\widetilde{v}_1)f = T_\lambda(\widetilde{v}_2 \circ \widetilde{v}_1)f$, i.e., $\widetilde{v} \to T_\lambda(\widetilde{v})$ is homomorphism.

When a chain (beginning in e and ending in v) is drawn on the group $SL(2,C)$ then simultaneously on $\overline{C} \ni \tau$, a chain $\widetilde{\tau}$ (beginning in $\tau = \infty$ and ending in τ) is drawn too. To establish the connection between both these chains it is worthwhile to consider the fibration $(\overline{C}, M)$ of $SL(2,C)$ where $\overline{C}$ is the base (Riemannian sphere) to every point of which τ the matrix $\widehat{\tau} = \dfrac{1}{\sqrt{1+|\tau|^2}}\begin{pmatrix} \overline{\tau} & 1 \\ -1 & \tau \end{pmatrix}$ corresponds and M_τ is a fiber over τ elements of which are described by matrices $m_\tau = \dfrac{1}{\sqrt{1+|\tau|^2}}\begin{pmatrix} \alpha\tau+\beta & \beta\overline{\tau}-\alpha \\ 0 & (1+|\tau|^2)/(\alpha\tau+\beta) \end{pmatrix}$ (α, β are arbitrary complex variables). In parametrization connected with this fibration element v (denoted v_τ) is written in the form of $v_\tau = m_\tau\widehat{\tau}$. At fixed τ elements v_τ (at arbitrary α, β) are those which may not be defined on the functions of the type $\mathrm{e}^{\tau\zeta}$.

It follows from here that if in $\overline{C}$ the chain $\widetilde{v}_0$ is pricked out, so the functions $\mathrm{e}^{\tau\zeta}$ corresponding to the rest of τ's form a dense definition domain of all operators $T_\lambda(\widetilde{v}_0)$, where $\widetilde{v}_0$ is a lifting of $\widetilde{\tau}_0$ (in other words, $\widetilde{\tau}_0$ is projection of $\widetilde{v}_0$ onto $\overline{C}$). If chain $\widetilde{\tau}$ in $\overline{C}$ ($\widetilde{v}$ in $SL(2,C)$) is dense in $\overline{C}$ (in $SL(2,C)$) (so-called fractal curve), nevertheless, there are very many points in $\overline{C}$ and corresponding them set of functions $\mathrm{e}^{\tau\zeta}$ dense in F'_λ (see Sec. 6).

xiii) It follows from (7.10) that all vectors from F'_λ are analytical ones for the representation $b_+ \to T_\lambda(b_+)$ (first in representation theory such vectors were considered in [76]). Differentiating (7.10) over β and δ (putting then $\beta = 0$ and $\delta = 1$), we get the generators ζ and $\zeta d/d\zeta - \lambda$ coinciding with $L_+^{(\lambda)}$ and $L_3^{(\lambda)}$ in (6.2).

It follows from (7.10) that all vectors from linear envelope $U[\{f_n^{(\lambda)}\}]$ are analytical for representation $b_- \to T_\lambda(b_-)$. Differentiating (7.10) over γ (putting then $\gamma = 0$ and $\delta = 1$), we get the generators $\left(2\lambda - \dfrac{\zeta d}{d\zeta}\right)\dfrac{d}{d\zeta}$ coinciding with $L_-^{(\lambda)}$ in (6.2).

xiv) As is seen, in the space F'_λ there is a dense set of analytical vectors for representation $T_\lambda(v)$, where $v \in N_+HN_-$. It turns out every function $f \in F'_\lambda$ is analytical vector for $T_\lambda(v)$ at v belonging to the enough small neighbourhood $\epsilon_f(e) \subset SL(2,C)$. In fact, every function of order $\rho < 1$ is analytical vector for Gaussian area. Let us consider now functions of order $\rho = 1$ and of the type $0 \leqslant \tau < \infty$. From (7.10) it follows that as in $\mathrm{e}^{\tau\zeta}$ ($\tau \in C$ all points of C are inner) $|\tau| < \infty$ (only such functions belong to F'_λ), so there is a neighbourhood of unity $\epsilon(e)$ with δ/γ obeying the condition $|\tau| < |\delta/\gamma| < \infty$ in which $T_\lambda(v)\,\mathrm{e}^{\tau\zeta}$ is analytical function about v. It means that for every $f \in F'_\lambda$ there is a neighbourhood of unity $\epsilon_f(e) \subset SL(2,C)$ and a chain $\widetilde{v}$ disposed in whole in this neighbourhood so that equality $T_\lambda(\widetilde{v}) = T_\lambda(v)$ takes place, where v is the end of chain $\widetilde{v}$: $v = p(\widetilde{v})$.

The condition may be written in the form: if $\widetilde{\omega}$ is a cycle (loop) disposed in whole in $\epsilon_f(e)$, so $T_\lambda(\widetilde{\omega})f = f$. Besides it follows from (7.10) that on dense subset of the form $U[\{f_n^{(\lambda)}\}]$ for every pair of cycles $\widetilde{\omega}_1, \widetilde{\omega}_2 \in \widetilde{\Omega}$ we have $T_\lambda(\widetilde{\omega}_2 \circ \widetilde{\omega}_1)f = T_\lambda(\widetilde{\omega}_1 \circ \widetilde{\omega}_2)f$. It means that subgroup $\widetilde{\Omega}$ may be considered to be Abelian one. Hereby if $\widetilde{v}_2^{-1} \circ \widetilde{v}_1 \in \widetilde{\Omega}$, so $T_\lambda(\widetilde{v}_2^{-1} \circ \widetilde{\omega} \circ \widetilde{v}_2)f = T_\lambda(\widetilde{v}_1^{-1} \circ \omega \circ \widetilde{v}_1)f$. Commutativity of the group $\widetilde{\Omega}$ plays very important role at topology introducing in group $\widetilde{SL}(2,C)$.

xv) Because $T_\lambda(\widetilde{v})f = T_\lambda(v)f$ (see above) we may differentiate the right-hand side over parameters of $v \in \epsilon(e)$ and get Lie algebra representation, realized by operators (6.2). Inversely at very small $|\boldsymbol{\theta}| \ll 1$ process $\exp\left(iT_\lambda(1/2)\boldsymbol{\sigma\theta}\right) f = T_\lambda(v)f$ converges for every vector $f \in F'_\lambda$ and determines an analytical function in neighbourhood $\epsilon_f(e) \ni v$. Hereby product $T_\lambda(v^N)\cdots T_\lambda(v^1)f$ (here all $v^i \in \epsilon(e)$) determines an element $T_\lambda(\widetilde{v})f$ depending on discrete chain $\widetilde{v}$. Hereat it is necessary to look after the fulfilment of condition $T_\lambda(v^{i-1})\cdots T_\lambda(v^1)f \in D_{T_\lambda(v^i)}$, i.e., $f \in D_{T_\lambda(\widetilde{v})}$. For this purpose it is enough to prick out the chain $\widetilde{\tau}(\widetilde{v})$ in C, and rest τ's to connect with $f \in D_{T_\lambda(\widetilde{v})}$.

xvi) The property $T_\lambda(\widetilde{v})f = T_\lambda(p(\widetilde{v}))f$, where all points of $\widetilde{v}$ are situated in $\epsilon_f(e) \subset SL(2,C)$, tells that space F'_λ guarantees the existence of neighbourhood of unity $\widetilde{\epsilon}(\widetilde{e}) \subset \widetilde{SL}(2,C)$ free from small subgroups. Such a neighbourhood exists for every $\widetilde{v}$ (it follows from the homogeneity of group). In other words, from existence of differentiable representations $T_\lambda(\widetilde{v})$ in F'_λ the existence of the kernal $Y_{F'_\lambda}$ follows that $\widetilde{SL}(2,C)/Y_{F'_\lambda}$ is a locally Euclidean group locally isomorphic to the Lie group $SL(2,C)$, i.e., it is a Lie group denoted $\widetilde{SL}'(2,C)$. It means that the Fifth Hilbertian Problem has positive solution for 1-chain groups considered over classical groups.

Of course $\widetilde{SL}'(2,C)$ is only locally (in small) Lie group. In whole, $\widetilde{SL}'(2,C)$ is neither analytical group nor (finite dimensional) manifold at all. As a topological structure it possesses the property that dimensionality of neighbourhood of every its element depends on size of this neighbourhood. Idea about existence of such structures takes its rise in Riemann's dissertation [77].

xvii) In the case of $SU(1,1)$-subgroup of matrices $v = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix}$ we have $|\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1$, and hence $|\beta/\alpha| < 1$. At transformation $\tau \to \dfrac{\alpha\tau + \beta}{\overline{\beta}\tau + \overline{\alpha}}$ interior of circle $|\tau| < 1$ is mapped into itself so that $\left|\dfrac{\alpha\tau+\beta}{\overline{\beta}\tau+\overline{\alpha}}\right| < 1$. The Hilbert space H_λ earlier considered is invariant under the operators $T_\lambda(v)$, $v \in SU(1,1)$. In particular, if $\mathrm{e}^{\tau\zeta} \in H_\lambda$, so $T_\lambda(v)\,\mathrm{e}^{\tau\zeta} = (\widetilde{\beta}\tau + \widetilde{\alpha})^{2\lambda} \exp\left(\dfrac{\alpha\tau+\beta}{\overline{\beta}\tau+\overline{\alpha}}\right) \in H_\lambda$. Hence, on H_λ operators $T_\lambda(v)$ are bounded and we have there usual Neumannian irreducible representation $D^+(\lambda)$ of $SU(1,1)$. At $\lambda \neq p/2$ $D^+(\lambda)$ is multivalued representation of $SU(1,1)$ (this group is infinitely linearly connected). At $\lambda < 0$ representations are unitary. The group $SU(1,1)$ is used in usual (unitary) quantum mechanics.

xviii) Let us consider else subgroup $SU(2)$. Here situation is quite another. In τ-realization group elements are written in the form $u_\tau = \begin{pmatrix} (1-|\beta|^2)/\tau\overline{\beta} & \beta \\ -\overline{\beta} & \tau\overline{\beta} \end{pmatrix}$, hereby $|\beta| = \dfrac{1}{\sqrt{1+|\tau|^2}}$. In this parametrization elements are written in the splitted form $u_\tau = m\hat{\tau}$, where now $m = h = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{i\varphi} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-i\varphi} \end{pmatrix}$ and $\varphi = \arg\beta$. In this case our fibration is isomorphic to the well-known Hopf fibration (S^2, S^1) so that 1-chain group $\widetilde{SU}(2)$ may be understood to be $\widetilde{S^2}\overline{S^1}$, where $\overline{S^1}$ is the universal covering of Cartan subgroup H (1-circle) and $\widetilde{S^2}$ is 1-chain space over sphere S^2. $\widetilde{SU}(2)$ is used in the ether theory (see [78]).

7.2. Conclusion. Now we know three several Lie groups with one and the same Lie algebra $SO(3,1)$ behind which very different physical entities stand. They are 1) the Lorentz group $SO(3,1)$ (symmetry group of the Poincare–Minkowski space) with which integer angular momenta are connected, 2) its covering manifold $SL(2,C)$ (symmetry group of the Dirac fiber) with which halfinteger spins are connected, and 3) 1-chain Lie group $\widetilde{SL}(2,C)$ (symmetry group of ether) with which arbitrary spins are connected.

We have considered here only hidden physical medium (ether) connected with special covering of rotation group $SO(3)$ — 1-chain Lie group $\widetilde{SU}(2)$, and described by linear representations of the latter. Dependence on chains says about multivalued turbulent character of motion of the medium, see [78]. As is known, usage of linear representations is a sign of quantum theory. From this point of view ether is quantum system.

In classical approach there is only configuration space and its symmetry group. We can see that such an approach is not always sufficient for description of physical phenomena (see [78]): 1-chain fibration over space and its symmetry group — 1-chain group — are needed also. At classical approach this mathematical tool we consider may be transferred onto real media — gases and liquids. We hope that by means of this tool turbulence regime of real media may be described.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Санников С. С.* О состояниях с комплексным моментом в квантовой механике // ЯФ. 1966. Т. 4, вып. 4. С. 896–904.
2. *Санников С. С.* О некомпактной группе симметрии осциллятора // ЖЭТФ. 1965. Т. 49, вып. 6(12). С. 1913–1922.
3. *Sannikov-Proskuryakov S. S.* Dynamical Structure of Space–Time Discontinuum and Spin 1/4 // Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.). 2001. V. 102&103. P. 328–333.
4. *Sannikov-Proskuryakov S. S.* Non-Neumannian Representation of Rotation Group (to the Ether Theory). 1 // Spacetime & Substance. 2005. V. 6, No. 1(26). P. 1–7.
5. *Sannikov-Proskuryakov S. S.* Non-Neumannian Representation of Rotation Group (to the Ether Theory). 2 // Ibid. P. 21–27.
6. *Dirac P. A. M.* // Proc. Roy. Soc. A. 1971. V. 322. P. 435.
7. *Sorokin D. P., Volkov D. V.* Drawing an Analogy between the Dirac–Maxwell–Einstein Theory and a Field Model for Semions // Письма в ЖЭТФ. 1993. Т. 57, вып. 6. С. 330–333.
8. *Bollino A., Longoni A. M., Regge T.* // Nuovo Cim. 1962. V. 23. P. 954.
9. *Regge T.* // Nuovo Cim. 1960. V. 18. P. 947.
10. *Sannikov S. S.* // Phys. Lett. 1965. V. 19. P. 216.
11. *Санников С. С.* // ЯФ. 1965. Т. 2. С. 570.
12. *Брейт Г.* Теория резонансных ядерных реакций. Л.: Изд-во иностр. лит., 1961.
13. *Beltrametti E. G., Luzatto G.* // Nuovo Cim. 1963. V. 29. P. 1003.
14. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблица интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962.
15. *Бейтман Г., Эрдейн А.* Высшие трансцендентные функции. 1. М.: Физматгиз, 1965.
16. *Блатт Дж., Вайскопф В.* Теоретическая ядерная физика. М.: Изд-во иностр. лит., 1954.
17. *Rebolia L., Viano G. A.* // Nuovo Cim. 1962 V. 26. P. 1426.
18. *Ford K. W., Wheeler J. A.* // Ann. Phys. 1959. V. 7. P. 259.
19. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Квантовая механика. М.: Физматгиз, 1963.
20. *Гельфанд И. М., Минлос Р. А., Шапиро З. Я.* Представления группы вращений и группы Лоренца и их применения. М.: Физматгиз, 1958.
21. *Jordan T. F., Mukunda N., Pepper S. V.* // J. Math. Phys. 1963. V. 4. P. 1089.
22. *von Neumann J.* // Math. Ann. 1931. V. 104. P. 570.
23. *Fock V. A.* // Z. Phys. 1935. V. 98. P. 145.
24. *Jauch J. M., Hill E. L.* // Phys. Rev. 1940. V. 57. P. 641.
25. *Backer G. A.* // Phys. Rev. 1956. V. 103. P. 1119.
26. *Gell-Mann M.* Доклад на Весенней школе физики, Ереван, 1965.

27. *Санников С. С.* // ЯФ. 1965. Т. 2. С. 570; Укр. физ. журн. 1966. Т. 3. С. 6.

28. *Санников С. С.* // ЯФ. 1966. Т. 3. С. 6; Укр. физ. журн. 1965. Т. 10. С. 10.

29. *Regge T.* // Nuovo Cim. 1959. V. 14. P. 951.

30. *Санников С. С.* // Укр. физ. журн. 1964. Т. 9. С. 1139; 1965. Т. 10. С. 684.

31. *Bargmann V.* // Ann. Math. 1947. V. 48. P. 568.

32. *Wigner E.* // Ann. Math. 1939. V. 40. P. 149.

33. *Виленкин Н. Я., Гельфанд И. М., Граев М. И.* Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представления // Обобщенные функции. Вып. 5. М.: Физматгиз, 1962.

34. *Наймарк М. А.* Линейные представления группы Лоренца. М.: Физматгиз, 1958.

35. *Barut A. O., Budini P., Fronsdal C.* Preprint. Trieste, 1965;
Barut A. O. // Phys. Rev. B. 1965. V. 139. P. 1433.

36. *Salam A.* Theoretical Physics. Lectures. Trieste, 1963.

37. *Ashman J. et al.* // Nucl. Phys. B. 1989. V. 328. P. 1;
Adeva B. et al. // Phys. Lett. B. 1993. V. 302. P. 533;
Anthony P. L. et al. // Phys. Rev. Lett. 1993. V. 71. P. 959.

38. *Sannikov S. S.* // Ukr. J. Phys. 1964. V. 9. P. 1139; 1965. V. 10. P. 664; Nucl. Phys. B. 1967. V. 1. P. 868; Theor. Math. Phys. 1978. V. 34. P. 34;
Sorokin D. P., Volkov D. V. // Nucl. Phys. B. 1993. V. 409. P. 547.

39. *Dirac P. A. M.* The Principles of Quantum Mechanics. Oxford, 1958.

40. *Bohr H.* Fastperiodische Funktionen. Berlin, 1932.

41. *Streater R. F., Wightman A. S.* PCT, Spin and Statistics and All That. W. A. Benjamin, 1964.

42. *von Neumann J.* Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik. Berlin, 1932.

43. *Sannikov-Proskuryakov S. S.* // Ukr. J. Phys. 2000. V. 45. P. 639; 778.

44. *Sannikov-Proskuryakov S. S.* // Ukr. J. Phys. 2001. V. 46. P. 129; 263.

45. *Sannikov-Proskuryakov S. S.* // Rus. Phys. J. 1999. V. 11. P. 52; Ukr. J. Phys. 2001. V. 46. P. 5.

46. *Lang S.* Algebra. Addison-Wesley Publ. Comp., 1965.

47. *Дирак П. А. М.* Принципы квантовой механики. М.: Наука, 1960.

48. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1981.

49. *Санников-Проскуряков С. С.* // Укр. физ. журн. 2000. Т. 45, № 1. С. 9–15.

50. *Санников-Проскуряков С. С.* // Изв. вузов. Физика. 2004. № 5. С. 27–37.

51. *Бор Г.* Почти периодические функции. М.: Гостехиздат, 1934.

52. *фон Нейман И.* Математические основы квантовой механики. М.: Наука, 1964.

53. *Фок В. А.* Начала квантовой механики. М.: Наука, 1976.

54. *Фейнман Р.* Теория фундаментальных процессов. М.: Наука, 1978.

55. *Боголюбов Н. Н., Логунов А. А., Тодоров И. Т.* Основы аксиоматического подхода в квантовой теории поля. М.: Наука, 1969.
56. *де Бройль Л.* Соотношения неопределенностей Гейзенберга. М.: Мир, 1986.
57. *Санников-Проскуряков С. С.* // Изв. вузов. Физика. 1999. № 1. С. 52–61; Укр. физ. журн. 2000. Т. 45, № 1. С. 9–15; № 6. С. 639–648; 2001. Т. 46, № 3. С. 263–271; № 10. С. 1019–1227; 2002. Т. 47, № 7. С. 615–628; Nucl. Phys. B (Suppl.). 2001. V. 102–103. P. 328–333.
58. *Наймарк М. А.* Нормированные кольца. М.: Наука, 1968.
59. *Бурбаки Н.* Общая топология. М.: Наука, 1958.
60. *Бор Г.* Почти периодические функции. М.: Гостехиздат, 1934.
61. *Sannikov S. S.* Non-Neumannian Representations of Rotation Group and Quantum Scheme with Hidden Parameters. M.: VINITI, 1982. No. 6249. P. 32; *Sannikov-Proskuryakov S. S.* // Ukr. J. Phys. 2002. V. 47, No. 9. P. 819; Yad. Fiz. 1965. V. 1, No. 9. P. 570; Ukr. J. Phys. 2001. V. 46, No. 2. P. 138; Preprint ITP-67-34R. Kiev, 1967; Preprint ITP-67-35R. Kiev, 1967; D. Phys. Math. Sci. Thesis. Kiev: ITP, 1991; Ukr. J. Phys. 1995. V. 40, No. 7. P. 650; No. 9. P. 901; *Sannikov-Proskuryakov S. S., Cabbolet M. J. T. F.* // Ukr. J. Phys. 2001. V. 46, No. 10. P. 1019.
62. *Sannikov-Proskuryakov S. S.* // Ukr. J. Phys. 2000. V. 45, No. 1. P. 9; 2001. V. 46, No. 7. P. 661.
63. *Sannikov-Proskuryakov S. S.* // Ukr. J. Phys. 2000. V. 45, No. 7. P. 778; 2001. V. 46, No. 1. P. 5.
64. *Serre J.-P.* Lie Algebras and Lie Groups. M.: Mir, 1969 (in Russian).
65. *Maltcev A. I.* // Dokl. Akad. Nauk SSSR. 1941. V. 39, No. 9. P. 606.
66. *Pontrjagin L. S.* Continuous Groups. M.: Nauka, 1984 (in Russian).
67. *Robinson A.* // Proc. Koninkl. Ned. Akad. Wet. A. 1961. V. 64. P. 432.
68. *Sannikov S. S.* // Dokl. Akad. Nauk SSSR. 1971. V. 198, No. 2. P. 297.
69. *Pressly A., Segal G.* Loop Groups. M.: Mir, 1990 (in Russian).
70. *Bourbaki N.* Set Theory. M.: Mir, 1966 (in Russian).
71. *von Neumann J.* Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin, 1927. S. 76.
72. *Sannikov S. S.* // Dokl. Akad. Nauk SSSR. 1968. V. 178, No. 4. P. 800.
73. *Sannikov-Proskuryakov S. S.* // Ukr. J. Phys. 2001. V. 46, No. 2. P. 139; D. Phys. Math. Sc. Thesis. Kiev, ITP, 1991.
74. *Gradshtein I. S., Ryzhik I. M.* Tables of Integrals, Series and Products. 4th ed. N. Y.: Academic, 1965.
75. *Sannikov-Proskuryakov S. S.* // Ukr. J. Phys. 2001. V. 46, No. 3. P. 263; Dokl. Akad. Nauk SSSR. 1973. V. 209, No. 2. P. 324.
76. *Nelson E.* // Ann. Math. 1959. V. 70. P. 572.
77. *Riemann B.* About Hypotheses Founding Geometry. M.: Nauka, 1956 (in Russian).
78. *Sannikov-Proskuryakov S. S.* // Rus. Phys. J. 2003. No. 7. P. 52–58.