ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА
2010. Т. 41. ВЫП. 1

КОСМИЧЕСКИЕ КИРАЛЬНЫЕ ВИХРИ

*Ю. П. Рыбаков**

Российский университет дружбы народов, Москва

*E-mail: soliton4@mail.ru

ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА
2010. Т. 41. ВЫП. 1

КОСМИЧЕСКИЕ КИРАЛЬНЫЕ ВИХРИ

Ю. П. Рыбаков[*]

Российский университет дружбы народов, Москва

Обзор посвящен космическим киральным вихрям (струнам) и их возможной роли в эволюции ранней Вселенной. Получено точное цилиндрически-симметричное решение уравнений Эйнштейна в рамках $SU(2)$ сигма-модели для конфигурации, наделенной топологическим зарядом типа степени отображения. Прямым методом Ляпунова доказывается линеаризованная устойчивость решения относительно радиальных возмущений. Найденная метрика отвечает пространству конического типа с угловым дефицитом, пропорциональным топологическому заряду или линейной плотности массы вихря. Прямым интегрированием уравнений геодезической для светового луча, ортогонального вихрю, получен угол отклонения луча, близкий к угловому дефициту (эффект гравитационной линзы). Рассмотрено калибровочное обобщение модели с включением поля Янга–Миллса аксиально-симметричного вида. В приближении большого топологического заряда получено решение с собственным продольным магнитным полем и обнаружен эффект уменьшения энергии вихря. Рассматривается также эффект замыкания струны в приближении большого радиуса замыкания. С этой целью вычисляются тороидность замкнутой струны и поправка к энергии, обусловленная скирмовским членом.

The review concerns cosmic chiral vortices (strings) and their possible role in the evolution of the early Universe. Exact cylindrically symmetric solution to the Einstein equations is obtained within the scope of $SU(2)$ sigma-model for the configuration endowed with the topological charge of the degree type. The linearized stability of this solution with respect to radial perturbations is proven by Lyapunov's direct method. The metric found corresponds to the space of the conical type with the angular deficit proportional to the topological charge or linear mass density of the vortex. By integrating the geodesic equations for the light ray orthogonal to the vortex one finds the angular deflection of the ray, which is practically coincides with the angular deficit (gravitational lens effect). The gauge generalization of the model is considered, with the inclusion of axially symmetric Yang–Mills field. In the approximation of the large topological charge the solution with the proper longitudinal magnetic field is found, the fact of decreasing the vortex energy being discovered. The effect of closing the string is considered in the approximation of large closure radius. To this end one calculates the toroid moment of the closed vortex and the contribution to its energy generated by the Skyrme term.

PACS: 11.27.td; 12.39.Fe; 12.10.-g

ВВЕДЕНИЕ

Современные модели развития Вселенной в существенном опираются на достижения физики элементарных частиц, общей теории относительности и статистической физики, и поэтому настоящая работа посвящается Николаю Александровичу Черникову, внесшему значительный вклад в развитие

[*]E-mail: soliton4@mail.ru

всех указанных направлений и явившемуся создателем общерелятивистской теории кинетических уравнений. В связи с этим нельзя не упомянуть кинетическое уравнение Больцмана–Черникова [1], служащее основой для статистического описания релятивистских гравитирующих систем.

В данном обзоре в рамках общей теории относительности будет описан специальный класс вихревых (струнных) конфигураций, которые получили название космических струн и (по некоторым сценариям) могли играть заметную роль в эволюции Вселенной.

Космические струны, или вихри, могли возникнуть в ранней Вселенной как топологические дефекты в результате последовательности фазовых переходов, связанных со спонтанным нарушением ряда внутренних симметрий [2, 3]. По некоторым сценариям космическим струнам отводится важная роль в процессе формирования галактик и слоистых структур во Вселенной [4–8]. Так, быстро движущиеся космические струны могут порождать кильватерные волны (wakes), инициируя создание плоских структур (листов) [8].

В свою очередь, киральные поля возникают в результате спонтанного нарушения киральной симметрии в низкоэнергетическом приближении квантовой хромодинамики [9], и поэтому логично рассматривать их в качестве возможных кандидатов для описания космических струн.

В данной работе рассматривается простейшая $SU(2)$ сигма-модель и показывается, что уравнения кирального поля совместно с уравнениями Эйнштейна допускают статические вихревые решения, характеризуемые топологическим зарядом Q и угловым дефицитом Δ, который монотонно растет по мере удаления от оси вихря. Выясняется, что угловой дефицит на пространственной бесконечности, линейная плотность массы и топологический заряд вихря пропорциональны друг другу.

Вычисляя вторую вариацию энергии E вихря по отношению к радиальным вариациям метрики и кирального поля, удается установить ее положительную определенность, что свидетельствует об устойчивости вихря по Ляпунову. Путем интегрирования уравнений геодезической для фотона в гравитационном поле струны вычисляется угол его отклонения при движении ортогонально вихрю. Наконец, учитывается влияние на струну ее продольного магнитного поля, которое рассматривается в рамках калибровочного обобщения модели.

1. СТРУКТУРА ПРОСТЕЙШЕГО ВИХРЕВОГО РЕШЕНИЯ

Начнем с рассмотрения простейших вихревых конфигураций. Лагранжеву плотность модели зададим в виде

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4\lambda^2}\mathrm{tr}\,(\ell_\mu \ell^\mu) + \frac{1}{2\varkappa}R, \tag{1}$$

где λ — параметр длины модели (в естественных единицах $\hbar = c = 1$); $\varkappa = 8\pi G$; G — гравитационная постоянная Ньютона; R — скалярная кривизна гравитационного поля; $\ell_\mu = U^+\partial_\mu U$ — левый киральный ток, выражаемый через матрицу $U \in SU(2)$; греческие индексы пробегают значения 0, 1, 2, 3. Направляя ось Z вдоль вихря, зададим цилиндрически-симметричную метрику

$$ds^2 = \mathrm{e}^{2\mu}dt^2 - \mathrm{e}^{2\alpha}dx^2 - \mathrm{e}^{2\beta}d\varphi^2 - \mathrm{e}^{2\gamma}dz^2, \tag{2}$$

где φ — азимутальный угол, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, а x — обобщенная радиальная переменная, $-\infty \leqslant x \leqslant \infty$. При этом значение $x = -\infty$ соответствует оси вихря, а $x = \infty$ — пространственной бесконечности. Метрические функции μ, α, β, γ в (2) зависят только от x и предполагаются удовлетворяющими гармоническому координатному условию [10]

$$\alpha = \mu + \beta + \gamma. \tag{3}$$

Киральное поле $U(x, \varphi)$ предполагается имеющим структуру «ежового» анзаца в поперечном сечении вихря [11], т. е. считается инвариантным относительно группы преобразований

$$G = T(z) \otimes \mathrm{diag}\,[SO(2)_I \otimes SO(2)_S]\,, \tag{4}$$

включающей сдвиги вдоль оси Z и согласованные вращения вокруг третьей оси в изотопическом (I) и координатном (S) пространствах. Такие поля имеют вид

$$U = \exp{(\imath\tau\psi)}, \quad \tau = \tau_1 \cos\phi + \tau_2 \sin\phi, \quad \phi = n\varphi, \tag{5}$$

где $\tau_1,\ \tau_2$ — матрицы Паули; $\psi = \psi(x)$ — киральный угол; n — целое число, в дальнейшем считающееся положительным, которое является числом намоток, т. е. значением топологического заряда типа степени отображения $Q = \deg\left(S^2 \to S^2\right)$. В последнем можно убедиться, если задать сферу $S^2 \subset SU(2)$ углами ϕ и ψ, положив

$$Q = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{S^2} d\phi\, d\psi \sin\psi. \tag{6}$$

Тогда $Q = n$ при выполнении граничных условий

$$\psi(-\infty) = 0, \quad \psi(\infty) = \pi. \tag{7}$$

Поскольку в модели Скирма соответствующий заряд (но для отображения $S^3 \to S^3$) интерпретируется как барионный, мы также будем связывать n с барионным числом. В дальнейшем мы выясним, что топологический заряд замкнутой струны пропорционален n.

Принимая во внимание инвариантность метрики (2) и кирального поля (5) относительно преобразований из группы (4), можно воспользоваться принципом Коулмена–Пале [12], позволяющим находить критические точки инвариантных функционалов, ограничившись классом инвариантных вариаций. Подставляя (2) и (5) в функционал действия системы (1):

$$\mathcal{A} = \int d^4x\,\sqrt{-g}\mathcal{L}, \quad g = \det\bigl(g_{\mu\nu}\bigr), \tag{8}$$

выделяем в (8) радиальную часть, задаваемую функционалом

$$E = \frac{\pi}{\lambda^2}\int dx\,\mathrm{e}^{\mu+\gamma}\Biggl[-\frac{2\lambda^2}{\varkappa}\mathrm{e}^{\beta-\alpha}\left(\beta'\gamma' + \mu'\beta' + \mu'\gamma'\right) + \\ + \mathrm{e}^{\beta-\alpha}{\psi'}^2 + n^2\mathrm{e}^{\alpha-\beta}\sin^2\psi\Biggr], \tag{9}$$

который имеет смысл линейной плотности энергии вихря.

Заметим, что функционал (9) и координатное условие (3) симметричны относительно замены $\mu \rightleftarrows \gamma$, и поэтому в качестве частного решения можно выбрать $\mu = \gamma$. В дальнейшем удобно ввести новые переменные

$$w = \alpha - \beta - 2\gamma, \quad u = 4(\beta + \gamma), \quad v = 4\beta, \tag{10}$$

в которых функционал (9) принимает вид

$$E = \frac{\pi}{\lambda^2}\int dx\,\left[\left(\frac{1}{\nu}\left(v'^2 - u'^2\right) + {\psi'}^2\right)\mathrm{e}^{-w} + n^2\sin^2\psi\mathrm{e}^{w+u-v}\right], \tag{11}$$

где обозначено $\nu = 8\varkappa/\lambda^2$.

Так как уравнение для поля ψ является следствием уравнений Эйнштейна, достаточно проварьировать функционал (11) по переменным $w,\ u,\ v$, получив с учетом (10) и (3) условие $w = 0$ и систему уравнений вида

$$\frac{1}{\nu}\left(u'^2 - v'^2\right) = {\psi'}^2 - n^2\sin^2\psi\,\mathrm{e}^{u-v}, \tag{12}$$

$$\frac{2}{\nu}u'' = -n^2\sin^2\psi\,\mathrm{e}^{u-v}, \tag{13}$$

$$\frac{2}{\nu}v'' = -n^2\sin^2\psi\,\mathrm{e}^{u-v}. \tag{14}$$

Нас будет интересовать простейшее симметричное решение уравнений (12), (13) и (14), когда полагается

$$u = v. \tag{15}$$

В таком случае уравнение (12) с учетом граничных условий (7) допускает решение типа доменной стенки в модели синус-Гордона:

$$\psi(x) = 2\mathrm{arctg}\, \mathrm{e}^{nx}. \tag{16}$$

При интегрировании оставшихся уравнений (13) и (14) необходимо принять во внимание условие локальной евклидовости пространства на оси вихря [10], т. е. при $x \to -\infty$ имеем

$$\mathrm{e}^{\alpha} dx \to d\,\mathrm{e}^{\beta} = \mathrm{e}^{\beta} d\beta. \tag{17}$$

Подставляя в (13) или (14) выражение (16), т. е. полагая

$$\sin\psi = \frac{1}{\mathrm{ch}\,(nx)}, \tag{18}$$

находим с учетом (10), (15) и (17) следующую структуру метрики:

$$\alpha = \beta = x - \frac{\varkappa}{\lambda^2} \ln\left(1 + \mathrm{e}^{2nx}\right) + C, \tag{19}$$

где C — постоянная интегрирования, и, кроме того,

$$\mu = \gamma = 0. \tag{20}$$

Заметим, что полученная метрика (19) и (20) вне оси вихря (при $x \neq -\infty$) характеризуется угловым дефицитом

$$\Delta(x) = 2\pi\left(1 - \mathrm{e}^{\beta-\alpha}\beta'\right),$$

т. е. отклонением от 2π отношения длины окружности к ее радиусу. Таким образом, пространство вне оси вихря относится к коническому типу, что является общим свойством космических струн [2]. Подсчитаем, в частности, используя (19), угловой дефицит на пространственной бесконечности:

$$\Delta \equiv \lim_{x\to\infty} 2\pi\,(1 - \beta') = \frac{4\pi\varkappa}{\lambda^2} n. \tag{21}$$

Интересно сравнить выражение (21) с линейной плотностью энергии вихря E. Подставляя (15) и (18) в (11), найдем

$$E = \frac{\pi}{\lambda^2} \int dx\, \left(\psi'^2 + n^2 \sin^2\psi\right) = \frac{4\pi}{\lambda^2} n. \tag{22}$$

Таким образом, из сравнения (21) и (22) видим, что угловой дефицит на пространственной бесконечности пропорционален линейной плотности энергии вихря:

$$\Delta = \varkappa E = 8\pi G E, \tag{23}$$

что также является известным свойством космических струн [2].

2. УСТОЙЧИВОСТЬ КИРАЛЬНЫХ КОСМИЧЕСКИХ ВИХРЕЙ

Исследуем полученное решение на устойчивость по Ляпунову [13] по отношению к радиальным возмущениям, выбрав в качестве функционала Ляпунова энергию E возмущенного вихря. Считая величины α, β, γ, μ, ψ функциями от времени t и обобщенной радиальной переменной x, из выражения для действия (8) выводим интеграл движения

$$E = \frac{\pi}{\lambda^2} \int dx \, \mathrm{e}^{\gamma} \left[-\frac{2\lambda^2}{\varkappa} \mathrm{e}^{\beta} \left[\left(\dot{\alpha} \left(\dot{\beta} + \dot{\gamma} \right) + \dot{\beta}\dot{\gamma} \right) \mathrm{e}^{\alpha-\mu} + \right.\right.$$
$$\left. + \left(\mu' \left(\beta' + \gamma' \right) + \beta'\gamma' \right) \mathrm{e}^{\mu-\alpha} \right] + n^2 \sin^2 \psi \, \mathrm{e}^{\alpha+\mu-\beta} +$$
$$\left. + \mathrm{e}^{\beta} \left(\dot{\psi}^2 \, \mathrm{e}^{\alpha-\mu} + {\psi'}^2 \mathrm{e}^{\mu-\alpha} \right) \right], \quad (24)$$

где точкой обозначено дифференцирование по времени t.

Чтобы убедиться в том, что невозмущенное решение реализует минимум функционала (24), введем возмущения метрики и кирального угла ψ:

$$\delta\alpha = a, \quad \delta\beta = b, \quad \delta\gamma = c, \quad \delta\mu = d, \quad \delta\psi = \eta. \quad (25)$$

Заметим, что на невозмущенном решении первая вариация функционала (24) исчезает, т. е. $\delta E = 0$. Поэтому вычислим вторую вариацию $\delta^2 E$, наложив на возмущения координатное условие [14]

$$d + c = 0. \quad (26)$$

В результате функционал $\delta^2 E$ принимает вид

$$\delta^2 E = \frac{\pi}{\lambda^2} \int dx \left[\frac{4\lambda^2}{\varkappa} \left[c'^2 - \mathrm{e}^{2\alpha} \left(\dot{a}\dot{b} + \dot{a}\dot{c} + \dot{b}\dot{c} \right) \right] + \right.$$
$$+ 2\mathrm{e}^{2\alpha}\dot{\eta}^2 + {\psi'}^2 (b-a)^2 + 4\psi'\eta'(b-a) + 2{\eta'}^2 +$$
$$\left. + n^2 \left[\sin^2 \psi (b-a)^2 + 2\eta^2 \cos 2\psi - 2\eta(b-a) \sin 2\psi \right] \right]. \quad (27)$$

Располагая структурой функционала (27), нетрудно получить линеаризованные уравнения для возмущений. Для нас оказывается важным, что они допускают простой интеграл движения

$$a + b + 2c = 0, \quad (28)$$

который за вычетом тривиальных нулевых мод приводит к уравнению гиперболического типа для возмущения c:

$$e^{2\alpha}\,\ddot{c} - c'' = 0. \tag{29}$$

Уравнение (29) свидетельствует об устойчивости c-возмущений в соответствующей функциональной метрике. Исключая их с помощью (28) и учитывая уравнение $\psi' = n\sin\psi$ для невозмущенного кирального угла ψ, приводим (27) к виду

$$\delta^2 E = \frac{\pi}{\lambda^2}\int dx\left[\frac{\lambda^2}{\varkappa}e^{2\alpha}\left(\dot{a}^2+\dot{b}^2\right)+\frac{\lambda^2}{2\varkappa}\left(a'+b'\right)^2+e^{2\alpha}\dot{\eta}^2+\right.$$
$$\left.+\left[\eta'+k\eta\cos^2\psi-k(b-a)\sin\psi\right]^2\right]. \tag{30}$$

Таким образом, вторая вариация энергии вихря приводится к сумме положительных функционалов (30), что говорит о линеаризованной устойчивости космических струн. Это обстоятельство подтверждает обоснованность допущения об их важной роли в процессе эволюции Вселенной.

3. ОТКЛОНЕНИЕ ЛУЧА СВЕТА В ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ ВИХРЯ

Упомянутое явление, известное как гравитационное линзирование [15], представляет собой один из важнейших наблюдаемых эффектов, которые могли бы служить подтверждением существования космических струн. Для описания этого эффекта запишем уравнения световой геодезической, считая, что луч расположен в плоскости $z = 0$, перпендикулярной вихрю, и выбирая в качестве параметра время t:

$$\ddot{x} + \alpha'\left(\dot{x}^2 - \dot{\varphi}^2\right) = 0, \tag{31}$$
$$\ddot{\varphi} + 2\alpha'\dot{\varphi}\dot{x} = 0, \tag{32}$$

где $\alpha(x)$ задается выражением (19). Замечая, что $dz = ds^2 = 0$ и $\alpha' = \dot{\alpha}/\dot{x}$, из (2), (31) и (32) выводим интегралы движения

$$e^{2\alpha}\left(\dot{x}^2+\dot{\varphi}^2\right) = 1, \quad \dot{\varphi}\,e^{2\alpha} = e^{\alpha_0} = \text{const}. \tag{33}$$

Из (33) следует, что $\alpha_0 = \alpha(x_0)$, где x_0 соответствует точке луча, наименее удаленной от оси вихря. Тогда траектория луча определяется уравнением

$$\varphi' = \dot{\varphi}/\dot{x} = \left(e^{2(\alpha-\alpha_0)}-1\right)^{-1/2}. \tag{34}$$

Замечая, что согласно (19)

$$\alpha' = 1 - \frac{2n\varkappa}{\lambda^2}\left(1 + \mathrm{e}^{-2nx}\right)^{-1}, \tag{35}$$

из (34) и (35) выводим следующее выражение для угла $\delta\varphi$ отклонения луча света:

$$\delta\varphi = -\pi + 2\int\limits_{\alpha_0}^{\infty}\frac{d\alpha}{\alpha'}\left(\mathrm{e}^{2(\alpha-\alpha_0)} - 1\right)^{-1/2}. \tag{36}$$

В частности, в предположении, что $\alpha' \approx 1$, из (36) находим

$$\delta\varphi \approx \frac{2n\pi\varkappa}{\lambda^2}\left(1 + \mathrm{e}^{-2nx_0}\right)^{-1}. \tag{37}$$

Выражение (37) для угла отклонения луча света в гравитационном поле вихря согласуется с результатом А. Виленкина, приведенным в [2], если принять, что $\exp(-2nx_0) \ll 1$, т. е. для достаточно большого топологического числа n при $x_0 > 0$.

Как подчеркивается в [2], гипотезу о космических струнах (вихрях) можно считать правдоподобной, если принять значение безразмерного параметра струны

$$GE \sim 10^{-6}.$$

Если при этом выбрать стандартное для низкоэнергетической пионной физики значение параметра длины $\lambda = 2/F_\pi$, где $F_\pi \approx 186$ МэВ — постоянная распада пиона [11], то из (22) можно получить оценку величины топологического числа вихря

$$n \sim 10^{33}.$$

Укажем также на интересные данные наблюдений [16], которые могут свидетельствовать в пользу гипотезы о существовании космических струн.

4. КАЛИБРОВОЧНОЕ ОБОБЩЕНИЕ МОДЕЛИ

Чтобы учесть влияние собственного калибровочного (магнитного) поля на структуру вихря, удобно рассмотреть калибровочное обобщение модели (1), задаваемое лагранжевой плотностью вида

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4\lambda^2}\mathrm{tr}\,(L_\mu L^\mu) + \frac{1}{8\tilde{e}^2}\mathrm{tr}\,(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) + \frac{1}{2\varkappa}R, \tag{38}$$

где введен обобщенный (полный) левый киральный ток L_μ, $\mu = 0, 1, 2, 3$, который следующим образом строится с помощью унитарной матрицы $U \in SU(2)$ и векторного поля $A_\mu = A_\mu^a \tau^a / 2\imath$ со значениями в $SU(2)$-алгебре Ли:

$$L_\mu = U^+ D_\mu U = U^+(\partial_\mu U + [A_\mu, U]). \tag{39}$$

Здесь τ^a, $a = 1, 2, 3$, суть матрицы Паули, а $F_{\mu\nu}$ есть стандартное выражение для напряженности поля Янга–Миллса:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu], \tag{40}$$

взаимодействие которого с киральным полем определяется константой связи $\tilde{e}$. Для поиска цилиндрически-симметричных конфигураций, которые в дальнейшем будут замыкаться, удобно задать квадрат интервала в виде

$$ds^2 = \mathrm{e}^{2\mu} dt^2 - {r_0}^2 [\mathrm{e}^{2\alpha} dx^2 - \mathrm{e}^{2\beta} d\theta^2] - \mathrm{e}^{2\gamma} dz^2, \tag{41}$$

где функции μ, α, β, γ, как и раньше, будут считаться зависящими только от обобщенной радиальной переменной $x \in (-\infty, +\infty)$. В (41) используется новая полярная угловая координата $\theta \in [-\pi, \pi]$ и явно введен характерный поперечный радиус вихря r_0. В дальнейшем будет удобно рассмотреть конечный отрезок вихря, положив $z = a\varphi$, $-\pi \leqslant \varphi \leqslant \pi$, где a есть радиус замыкания.

Сразу же заметим, что метрика (41) допускает три вектора Киллинга:

$$\partial_t, \quad \partial_\theta, \quad \partial_\varphi, \tag{42}$$

отвечающих, соответственно, сдвигам $T(t)$ по времени, вращениям $\mathcal{O}_1 = T(\theta)$ вокруг струны и сдвигам $T(z)$ вдоль струны. При этом в случае замыкания струны последние две симметрии имеют место только в пределе $a \to \infty$.

Киральное поле, согласованное с симметриями (42), удобно задавать в следующем виде [17]:

$$U = \cos\psi \exp(\imath\tau_3\phi) + \imath\tau_1 \sin\psi \exp(\imath\tau_3\chi), \tag{43}$$

где ψ, ϕ, χ — новые киральные углы. Соответствующая группа симметрии имеет вид

$$G = T(t) \otimes \mathrm{diag}\,[T(\theta) \otimes U_1(\chi)] \otimes \mathrm{diag}\,[T(\varphi) \otimes U_1(\phi)]. \tag{44}$$

Если отождествить генератор группы $U_1(\chi)$ с $\tau_3/2$, то условие эквивариантности относительно преобразований из группы (44) можно записать следующим образом:

$$-\imath\partial_\theta f + \frac{n}{2}[\tau_3, f] = 0, \quad n = n(x). \tag{45}$$

В уравнении (45) вместо f следует подставлять либо матрицу U, либо $\xi^\mu A_\mu$, где ξ^μ — любой из векторов Киллинга (42). Аналогично, отождествляя генератор группы $U_1(\phi)$ с $\imath\partial_\phi$, получаем уравнение эквивариантности

$$-\imath\partial_\varphi U + \imath k \partial_\phi U = 0, \quad k = k(x). \tag{46}$$

Разрешая уравнения (45) и (46), найдем следующую структуру киральных углов:

$$\psi = \psi(x), \quad \phi = k(x)\varphi, \quad \chi = n(x)\theta, \tag{47}$$

а также калибровочное поле

$$\xi^\mu A_\mu = \imath\tau_3 A(x) + \imath\tau_1 W(x) \exp\left[\imath n(x)\tau_3\theta\right]. \tag{48}$$

Из условия периодичности по угловой переменной θ вытекает, что $n \in \mathbb{Z}$. Дальнейшее упрощение может быть получено, если потребовать, чтобы энергия искомой конфигурации была минимальной. Однако чтобы в этом убедиться, нам потребуется сначала оценить топологический заряд Q замкнутого вихря.

5. ТОПОЛОГИЧЕСКИЙ ЗАРЯД И РЕДУЦИРОВАННОЕ ДЕЙСТВИЕ

В рассматриваемой модели возможны конфигурации типа замкнутых струн, наделенные нетривиальным топологическим (барионным) зарядом $Q = \deg(S^3 \to S^3)$. Чтобы в этом убедиться, запишем ковариантное тождество [18, 19]

$$\bigtriangledown_\mu J^\mu \equiv \bigtriangledown_\mu \left[E^{\mu\nu\sigma\tau} \mathrm{tr}\,(\ell_\nu \ell_\sigma \ell_\tau)\right]/24\pi^2 \equiv 0, \tag{49}$$

где использованы свободный киральный ток $\ell_\mu = U^+\partial_\mu U$, а также дискриминантный тензор

$$E^{\mu\nu\sigma\tau} = \epsilon^{\mu\nu\sigma\tau}|g|^{-1/2}.$$

Интегрируя соотношение (49) по 4-объему и применяя теорему Гаусса–Остроградского, приходим к следующему выражению для топологического заряда:

$$Q = \int d^3x\, |g|^{1/2} J^0 = \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx \int\limits_{-\pi}^{\pi} d\theta \int\limits_{-\pi a}^{\pi a} dz\, \mathrm{tr}\,(\ell_1 \ell_2 \ell_3). \tag{50}$$

Подставляя (47) в (43), вычисляем левые киральные токи:

$$\begin{aligned}
\ell_1 &= \imath\tau_1 \psi' \exp\left[\imath\tau_3(\phi + \chi)\right],\\
\ell_2 &= \imath\frac{n}{2}\tau_2 \sin 2\psi \exp\left[\imath\tau_3(\phi + \chi)\right] + \imath n\tau_3 \sin^2\psi,\\
\ell_3 &= -\imath\frac{k}{2}\tau_2 \sin 2\psi \exp\left[\imath\tau_3(\phi + \chi)\right] + \imath k\tau_3 \cos^2\psi,
\end{aligned}$$

и из (50) находим

$$Q = n \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx\, k(x)\psi' \sin 2\psi = N \in \mathbb{Z}. \tag{51}$$

Если наложить естественные граничные условия

$$\psi(-\infty) = 0, \quad \psi(+\infty) = \pi, \tag{52}$$

аналогичные условиям (44), с дополнительным ограничением $\psi(0) = \pi/2$, $k = k_0\Theta(\pi/2 - \psi)$, где Θ есть ступенчатая функция Хевисайда, то из (50) и (51) выводим, что

$$Q = N = nk_0. \tag{53}$$

Наконец, для упрощения рассмотрим конфигурацию с минимальной энергией, для которой

$$A_\mu = A(x)\delta_\mu^2, \quad W = 0. \tag{54}$$

Конфигурация (54) отвечает продольному магнитному полю, направленному вдоль вихря. Для нее согласно (39) полные киральные токи оказываются следующими:

$$L_1 = \ell_1, \quad L_2 = \ell_2 + U^+ A_2 U - A_2, \quad L_3 = \ell_3.$$

Результат их вычисления сводится к подстановке $n \to n - 2A$ в свободном токе ℓ_2.

Теперь, используя принцип инвариантности Коулмена–Пале [12], запишем действие модели для выбранной инвариантной конфигурации:

$$\mathcal{A} = 4\pi^2 a \int dt \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx\, \mathrm{e}^{\mu-\alpha+\beta+\gamma} \left[-\frac{1}{2{r_0}^2 \tilde{e}^2} {A'}^2 \mathrm{e}^{-2\beta} + \right.$$
$$+ \frac{1}{\varkappa}(\mu'\beta' + \mu'\gamma' + \beta'\gamma') -$$
$$\left. - \frac{1}{2\lambda^2}\left[{\psi'}^2 + (n-2A)^2 \sin^2\psi\, \mathrm{e}^{2(\alpha-\beta)} + \frac{k^2 r_0^2}{a^2}\cos^2\psi\, \mathrm{e}^{2(\alpha-\gamma)} \right]\right]. \tag{55}$$

6. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ И СТРУКТУРА РЕШЕНИЙ

Для получения интересующих нас решений уравнений движения воспользуемся теорией возмущений, принимая выполненными следующие сильные неравенства:

$$n \gg 2A, \quad k_0 r_0 \ll na. \tag{56}$$

В таком случае в первом приближении полагаем $A = 0$ и приходим к уже встречавшимся ранее выражениям (16) и (19) для $\psi(x)$, $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ при выборе в (19) $C = 0$, так как поперечный размер r_0 считается зафиксированным при $x = 0$.

Теперь запишем уравнение для векторного поля:

$$\frac{2r_0^2}{\lambda^2}(n-2A)\sin^2\psi\,\mathrm{e}^{u-v}+\frac{1}{\tilde{e}^2}\left(A'\mathrm{e}^{-v/2}\right)'=0. \qquad (57)$$

Подставляя в (57) найденные в первом приближении выражения для метрических функций и кирального угла $\psi(x)$, после интегрирования получаем инвариантную напряженность магнитного поля

$$B=\left(\frac{1}{2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right)^{1/2}$$

в следующем виде:

$$B=\frac{1}{r_0^2}A'\mathrm{e}^{-v/2}=\frac{2\tilde{e}^2}{\lambda^2}[1-\mathrm{th}(nx)]. \qquad (58)$$

Как видно из (57) и (58), магнитное поле является продольным, т. е. ориентированным вдоль струны, и исчезает на пространственной бесконечности.

7. ЭНЕРГИЯ И ТОРОИДНЫЙ МОМЕНТ ЗАМКНУТОГО ВИХРЯ

Для оценки энергии замкнутого вихря необходимо учесть масштабный критерий Хобарта–Деррика существования ограниченных конфигураций [20, 21]. Один из способов удовлетворить этому условию состоит в том, чтобы добавить к исходному лагранжиану скирмовский член [22]:

$$\mathcal{L}_{\mathrm{Skyrme}}=\frac{\epsilon^2}{16}\mathrm{tr}\,[L^\mu,\,L^\nu][L_\mu,\,L_\nu], \qquad (59)$$

где $\epsilon\approx 0{,}13$ — безразмерная константа связи Скирма. В результате получаем следующее выражение для энергии замкнутого вихря:

$$\mathcal{E}=2\pi^2a\int dx\left[\frac{1}{\lambda^2}\left[S+n(n-2A)\sin^2\psi\right]+\right.$$
$$\left.+\epsilon^2\left[\frac{k_0^2}{a^2}\psi'^2\cos^2\psi+\frac{n}{r_0^2}(n-2A)S\,\mathrm{e}^{-2\beta}\sin^2\psi\right]\right], \qquad (60)$$

где использовано обозначение

$$S=\psi'^2+\frac{r_0^2k_0^2}{a^2}\mathrm{e}^{2\beta}\cos^2\psi.$$

Подставляя $A = 0$, (18) и (19) в (60), находим в первом приближении

$$\mathcal{E} \approx 2\pi^2 a \left(\frac{4n}{\lambda^2} + \frac{4\epsilon^2}{3r_0^2} n^3 + \frac{r_0^2 k_0^2}{\lambda^2 a^2 n} I + \frac{2\epsilon^2 k_0^2}{3a^2} n \right), \tag{61}$$

где положено

$$I = B\left(3,\, \frac{1}{n}\right) F\left(3,\, 1 - \frac{\nu}{4} + \frac{1}{n};\, 3 + \frac{1}{n};\, -1\right),$$

а B и F обозначают, соответственно, бета-функцию Эйлера и гипергеометрическую функцию. Минимизируя энергию вихря (61) по параметрам r_0 и a, получим для них следующие выражения:

$$r_0 = 3^{-1/2} \left(\frac{2}{I}\right)^{1/4} \epsilon \lambda n, \quad a = 6^{-1/2} \epsilon \lambda k_0. \tag{62}$$

С учетом (62) энергия вихря принимает значение

$$\mathcal{E} = 8\pi^2 \frac{\epsilon k_0 n}{\lambda \sqrt{3}} \left(\sqrt{2} + \sqrt{I}\right). \tag{63}$$

Замечая, что при $n \gg 1$ будет $I \sim n$, из (62) видим, что принятое ранее ограничение $k_0 r_0 \ll na$ в самом деле выполняется, так как

$$\frac{k_0 r_0}{na} \sim n^{-1/4}.$$

Оценим теперь электромагнитный вклад в энергию вихря, подставив (58) в (60):

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{\mathrm{em}} = -32\pi^2 \tilde{e}^2 \frac{\epsilon^3}{3\lambda} k_0 n \Bigg[(2I)^{1/2} \Bigg[2^{\nu/4} B\left(\frac{1}{n},\, 2 + \frac{\nu}{4} - \frac{1}{n}\right) + \\ + B\left(4,\, \frac{1}{n}\right) F\left(4,\, \frac{1}{n} - \frac{\nu}{4};\, 4 + \frac{1}{n};\, -1\right)\Bigg] + \\ + 2^{\nu/4} \Bigg[2B\left(\frac{1}{n},\, 2 + \frac{\nu}{4} - \frac{1}{n}\right) - 2B\left(2 + \frac{1}{n},\, 2 + \frac{\nu}{4} - \frac{1}{n}\right) + \\ + B\left(\frac{1}{n},\, 3 + \frac{\nu}{4} - \frac{1}{n}\right)\Bigg]\Bigg]. \end{aligned} \tag{64}$$

Интересно отметить, что $\mathcal{E}_{\mathrm{em}} < 0$. Это обстоятельство согласуется с общим эффектом уменьшения энергии топологического солитона при включении калибровочного поля [23, 24]. В данном случае это можно было бы объяснить притяжением круговых электрических токов внутри вихря.

Оценим теперь тороидный момент $\mathbf{T}$ замкнутого вихря [25], используя соотношение

$$\mathbf{j} = \operatorname{rot} \mathbf{M} = \operatorname{rot}^2 \tau \tag{65}$$

между плотностью тороидности τ, намагниченностью $\mathbf{M}$ и плотностью электрического тока

$$\mathbf{j} = \partial \mathcal{L} / \partial \mathbf{A}. \tag{66}$$

Из (61) и (66) выводим выражение для проекции тороидности на ось вращения тороидной вихревой конфигурации:

$$T = 2\pi^2 a^2 en \int dx \, \sin^2 \psi \left(\mathrm{e}^{2\beta} \frac{r_0^2}{\lambda^2} + \epsilon^2 S \right), \tag{67}$$

где использована связь $\tilde{e}^2 = 4\pi e^2$ между зарядом электрона e и константой связи $\tilde{e}$. Подставляя (18) и (19) в (67), находим после интегрирования

$$T = \frac{2\pi^2}{9} e\epsilon^4 \lambda^2 n^2 k_0^2 \sqrt{\frac{2}{I}} \left[2^{\nu/4} B \left(1 + \frac{1}{n},\, 1 + \frac{\nu}{4} - \frac{1}{n} \right) + \right.$$
$$\left. + \sqrt{2I} + 3B \left(3,\, 1 + \frac{1}{n} \right) F \left(3,\, \frac{1}{n} - \frac{\nu}{4};\, 4 + \frac{1}{n};\, -1 \right) \right].$$

Таким образом, при больших значениях n тороидность замкнутого вихря оказывается пропорциональной квадрату его топологического заряда. Заметим, что в процессе эволюции вихря его тороидность может изменяться со временем, что приводит к еще одному наблюдаемому эффекту — электромагнитному излучению от космической струны. Мощность излучения можно оценить по формуле В. М. Дубовика [26]:

$$P = \frac{8}{27} (\dddot{\mathbf{T}})^2. \tag{68}$$

Учет излучения как от самих струн (согласно (68)), так и от заряженных частиц, попадающих в их окружение [27], может сказаться на анизотропии реликтового излучения. Некоторые более детальные характеристики киральных вихрей, как открытых, так и замкнутых, обсуждаются в работах [28, 29].

Автор благодарен за полезные обсуждения представленных здесь проблем Т. И. Беловой, С. И. Виницкому, В. М. Дубовику и А. Е. Кудрявцеву.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 09-01-00397-а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Черников Н. А.* // Докл. АН СССР. 1962. Т. 144, № 1. С. 89.
2. *Vilenkin A., Shellard E. P. S.* Cosmic Strings and Other Topological Defects. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1994. 517 p.

3. *Зельдович Я. Б., Кобзарев И. Ю., Окунь Л. Б.* // ЖЭТФ. 1974. Т. 67, вып. 1(7). С. 3.
4. *Zel'dovich Ya. B.* // Mon. Not. Roy. Astron. Soc. London. 1980. V. 192. P. 663.
5. *Vilenkin A.* // Phys. Rev. Lett. 1981. V. 46. P. 1169.
6. *Vilenkin A.* // Phys. Rep. 1985. V. 121, No. 5. P. 263.
7. *Hindmarsh M. B., Kibble T. W. B.* // Rep. Prog. Phys. 1995. V. 58. P. 477.
8. *Turner M. S., Tyson J. A.* // Rev. Mod. Phys. 1999. V. 71, No. 2. P. S145.
9. *Карчев Н. И., Славнов А. А.* // Теор. мат. физ. 1985. Т. 65. С. 192.
10. *Bronnikov K. A., Shikin G. N.* // Gravitation & Cosmology. 2001. V. 7, No. 3. P. 231.
11. *Zahed I., Brown G. E.* // Phys. Rep. 1986. V. 142. P. 1.
12. *Palais R.* // Commun. Math. Phys. 1979. V. 69. P. 19.
13. *Зубов В. И.* Методы А. М. Ляпунова и их применение. Л.: Изд-во Ленингр. гос. ун-та, 1957. 242 с.
14. *Рыбаков Ю. П.* // Итоги науки и техники. Классическая теория поля и теория гравитации. Т. 2: Гравитация и космология. М., 1991. С. 56.
15. *Захаров А. Ф.* Гравитационные линзы и микролинзы. М.: Янус-К, 1997. 328 с.
16. *Sazhin M. et al.* // Mon. Not. Roy. Astron. Soc. London. 2003. V. 343. P. 353.
17. *Rybakov Yu. P., Tarabay A. M., Chugunov I. G.* // Phys. At. Nucl. 2000. V. 63. P. 664.
18. *Isham C. J.* // J. Phys. A: Math. & Gen. 1977. V. 10, No. 8. P. 1397.
19. *Patani A., Schlindwein M., Shafi Q.* // J. Phys. A: Math. & Gen. 1976. V. 9. P. 1513.
20. *Hobart R. H.* // Proc. Phys. Soc. 1963. V. 82, Part 2, No. 526. P. 201.
21. *Derrick G. H.* // J. Math. Phys. 1964. V. 5, No. 9. P. 1252.
22. *Skyrme T. H. R.* // Nucl. Phys. 1962. V. 31, No. 4. P. 556.
23. *Faddeev L. D.* // Lett. Math. Phys. 1976. V. 103, No. 5. P. 289.
24. *Igarashi Y. et al.* // Nucl. Phys. B. 1985. V. 259, No. 4. P. 721.
25. *Dubovik V. M., Tugushev V. V.* // Phys. Rep. 1990. V. 187, No. 4. P. 145.
26. *Дубовик В. М., Чешков А. А.* // ЭЧАЯ. 1974. Т. 5, вып. 3. С. 791.
27. *Benett D. P., Stebbins A., Bouchet F. R.* // Astrophys. J. 1992. V. 399. P. 5.
28. *Рыбаков Ю. П.* // ЯФ. 2005. Т. 68, № 6. С. 1083.
29. *Рыбаков Ю. П., Иванова И. С.* // ЯФ. 2007. Т. 70, № 7. С. 1353.