ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА
2010. Т. 41. ВЫП. 4

О НЕСАМОСОПРЯЖЕННЫХ ОПЕРАТОРАХ В ОПИСАНИИ НАБЛЮДАЕМЫХ В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ И ЯДЕРНОЙ ФИЗИКЕ

В. С. Ольховский[а,*], *С. П. Майданюк*[б,**], *Э. Рекамы*[б,в,***]

[а] Институт ядерных исследований, Национальная академия наук Украины, Киев

[б] Инженерный факультет, Государственный университет Бергамо, Бергамо, Италия

[в] Отделение ИНФН в Милане, Милан, Италия

*E-mail: olkhovsk@kinr.kiev.ua
**E-mail: maidan@kinr.kiev.ua
***E-mail: recami@mi.infn.it

ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА
2010. Т. 41. ВЫП. 4

О НЕСАМОСОПРЯЖЕННЫХ ОПЕРАТОРАХ В ОПИСАНИИ НАБЛЮДАЕМЫХ В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ И ЯДЕРНОЙ ФИЗИКЕ

В. С. Ольховский [а, *], *С. П. Майданюк* [б, **], *Э. Реками* [б, в, ***]

[а] Институт ядерных исследований, Национальная академия наук Украины, Киев

[б] Инженерный факультет, Государственный университет Бергамо, Бергамо, Италия

[в] Отделение ИНФН в Милане, Милан, Италия

Цель этой работы — показать важность и применимость несамосопряженных операторов для описания наблюдаемых как в нерелятивистской, так и в релятивистской квантовой механике, а также в квантовой электродинамике. В работе рассматривается: (i) максимально эрмитов (но не самосопряженный) оператор *времени* в нерелятивистской квантовой механике и в квантовой электродинамике, (ii) проблема определения операторов 4-мерной координаты и 4-мерного импульса для релятивистских частиц со спином нуль, причем каждый из них имеет как эрмитову, так и антиэрмитову части. Анализируются другие физические приложения несамосопряженных и неэрмитовых операторов. В заключение проанализирован случай T-неинвариантных взаимодействий, включая квантовую диссипацию и ядерные оптические потенциалы.

Aim of this paper is to show the possible significance, and usefulness, of various nonselfadjoint operators for suitable observables in nonrelativistic and relativistic quantum mechanics, and in quantum electrodynamics. More specifically, this work starts dealing with: (i) the maximal hermitian (but not selfadjoint) *time* operator in nonrelativistic quantum mechanics and in quantum electrodynamics; and with: (ii) the problem of the four-position and four-momentum operators, each one with its hermitian and antihermitian parts, for relativistic spin-zero particles. Afterwards, other physically important applications of nonselfadjoint and nonhermitian operators are discussed. Finally, we analyze the case of T-noninvariant interactions, including quantum dissipation and the nuclear optical potential.

PACS: 03.65.-w; 03.65.Xp; 03.65.Fd

ВВЕДЕНИЕ

Как известно из учебников и монографий по квантовой механике, 3-мерная пространственная координата может быть иногда параметром, а иногда наблюдаемой. Поэтому было бы естественным ожидать, что в квантовой теории время может не только быть параметром, но его также можно

*E-mail: olkhovsk@kinr.kiev.ua
**E-mail: maidan@kinr.kiev.ua
***E-mail: recami@mi.infn.it

представить оператором. Однако еще со времен создания квантовой механики (например, см. [1]) было известно, что время нельзя представить самосопряженным оператором за исключением отдельных систем (таких как электрически заряженная частица во внешнем однородном электрическом поле)*. Перечень работ, посвященных проблеме времени в квантовой механике, чрезвычайно большой (см., например, [2–29] и список литературы в этих работах). Оказывается, что подобная ситуация сложилась также в квантовой электродинамике и в более общей релятивистской квантовой теории поля (см., например, [2, 19, 20]).

Однако на сегодняшний день круг задач, где используются несамосопряженные операторы, чрезвычайно широк, и здесь эти операторы применяются весьма успешно. Так, например, значительный прогресс достигнут в разработке методов, направленных на изучение свойств квантовых систем и реализуемых в подходе обратной задачи (хотелось бы отметить серию обзоров [30–33]) или в подходе суперсимметричной квантовой механики (SUSY QM) (см., например, [34–42]). В частности, мощный аппарат предлагают методы SUSY QM (например, см. [43, 44]). В таком направлении наиболее богатые алгоритмы предоставляют *преобразования Дарбу* высших порядков [45, 46] (см. о преобразованиях Дарбу первого порядка [38, 39, 47–52], второго порядка [45, 53–57], обзоры об этих преобразованиях [58, 59], о *методе факторизации* [60, 61] и историческую работу [62]). В частности, уже простейшее определение суперпотенциала комплексной функцией позволяет строить новые системы, где потенциалы неизбежно оказываются (несамосопряженными) комплексными (см. [63–66], а также классы потенциалов с PT-симметрией [67–73], вести исследования ее свойств [74–82]). К методам с более сложными формами суперпотенциала (с сохранением порядка дифференциальных преобразований) можно отнести *метод расширенной суперсимметрии* [83–86], *матричные преобразования полилинейной (нелинейной) суперсимметрии* [87], методы решения *системы связанных дискретных уравнений Шредингера* [88, 89], обобщения SUSY-преобразований на *3-мерные и многомерное пространства* [39, 40, 90, 91]. К методам, основанным на более сложных дифференциальных операторах, где стандартные операторы Дарбу оказываются лишь частным случаем, можно отнести методы *нелинейной суперсимметрии* [92, 93], методы *скрытой суперсимметрии (hidden SUSY)* [94–99] и методы *N-fold суперсимметрии* [100–105]. Интенсивное

*Это является следствием полуограниченности непрерывного спектра по энергии от нуля. Только для электрически заряженной частицы в бесконечном однородном электрическом поле и некоторых других очень редких специальных систем непрерывный спектр энергии не является ограниченным и распространяется на всю ось от $-\infty$ до $+\infty$. Интересно отметить, что для систем с непрерывным спектром энергии, ограниченным сверху и снизу, оператор времени оказывается самосопряженным.

развитие этой области доказывает пользу несамосопряженных операторов, которые здесь нашли свое естественное применение.

Из многих вопросов, исследуемых с помощью несамосопряженных операторов, можно отметить, например, резонансные состояния (см. некоторые исторические работы [106, 107]), а также обширную область исследований, направленных на описание открытых как классических, так и квантовых систем [108–111]. Несамосопряженные операторы также можно найти в подходах к описанию квазинормальных мод в теории черных дыр [112–116] (корни этих задач прослеживаются в работах Томсона, Лэмба и др. [117–119]).

К первым работам по времени в квантовой механике, вероятно, можно отнести [2–9] (с литературой в этих работах). Следующие работы [10–29] появляются лишь в девяностые годы прошлого столетия, будучи частично вызванными необходимостью дать самосогласованное определение времени туннелирования. Однако следует подчеркнуть, что в этой серии работ была проигнорирована *теорема Наймарка* (Naimark) [120], которая сформировала ранее разработанный (прямо или косвенно) существенный базис результатов работ [2–9] и, более того, во всех работах [10–17], приведшая к попытке разрешить проблему времени как квантовой наблюдаемой посредством формальных математических операций, выполняемых *за пределами* обычного гильбертова пространства традиционной квантовой механики. Необходимо отметить, что теорема Наймарка [120] устанавливает, что неортогональное спектральное разложение единицы произвольного эрмитова оператора *может быть аппроксимировано* ортогональной спектральной функцией (которая соответствует самосопряженному оператору) со слабой сходимостью *при любой желаемой степени точности*.

Основной целью разд. 1 этой работы является доказательство возможности рассмотрения времени как квантовой наблюдаемой, основанное на свойствах эрмитовых (или, скорее, максимально эрмитовых) операторов в непрерывном спектре энергии (см. [18–20]). Вопрос о представлении времени как квантовой наблюдаемой идейно связан с намного более общей проблемой 4-мерного оператора и другого 4-мерного оператора, канонически сопряженного к первому, которые оба содержат как эрмитову, так и антиэрмитову части, с их дальнейшим описанием релятивистской частицы со спином нуль: эта проблема анализируется в разд. 2 работы. В приложении кратко упоминается задача квантовой диссипации с применением ядерных оптических потенциалов.

1. ОПЕРАТОР ВРЕМЕНИ В НЕРЕЛЯТИВИСТСКОЙ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ И КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

1.1. О времени как наблюдаемой в нерелятивистской квантовой механике для систем с непрерывным спектром энергии. Последняя часть указанных выше работ [11–29], а прежде всего [12–17,22–29], появившаяся в девяностые годы и посвященная проблеме времени в нерелятивистской квантовой механике, была вызвана необходимостью определить время туннелирования. Однако в этих работах авторы не ссылаются на теорему Наймарка [120], которая дает математическое обоснование результатов работ [2–9], а также более поздних работ [18–21]. Действительно, уже в семидесятые годы (см. [2–6], более подробное изложение можно найти в [7, 8] и независимо в [9]) было доказано, что для систем с непрерывными спектрами энергии время *является* квантово-механической наблюдаемой, канонически сопряженной энергии. А именно, было показано, что оператор времени

$$\hat{t} = \begin{cases} t & \text{в } t\text{-представлении по времени,} \quad \text{(а)} \\ -i\hbar \dfrac{\partial}{\partial E} & \text{в } E\text{-представлении по энергии} \quad \text{(б)} \end{cases} \tag{1}$$

является не самосопряженным, а эрмитовым и действует как на квадратично-интегрируемые пространственно-временные волновые пакеты в представлении (1а), так и на их фурье-преобразования (1б), после того как исключена точка $E = 0$ (т. е. мы имеем дело лишь с движущимися волновыми пакетами, которые не имеют *неподвижных* хвостов и их потоки не нулевые)*.

Напомним некоторые определения теории линейных операторов (например, см. [122]). Вначале рассмотрим оператор A, который определен всюду в гильбертовом пространстве H и здесь является линейным ограниченным. Тогда выражение

$$(f,\ A\,g) \tag{2}$$

есть билинейный функционал от f, g с нормой $\|A\|$. И однозначно найдется ограниченный линейный оператор A^*, определенный всюду в H (см. теорему о его существовании [122, с. 76]), для которого

$$(f,\ A\,g) = (A^* f,\ g), \tag{3}$$

каковы бы ни были f, $g \in H$ и $\|A^*\| = \|A\|$. Итак, каждому ограниченному линейному оператору A, определенному всюду в H, отвечает аналогичный оператор A^* с той же нормой и такой, что для любых f, $g \in H$ имеет место (3). Этот оператор A^* носит название оператора, *сопряженного* с A. Легко видеть, что $(A^*)^* = A^{**}$ есть исходный оператор A.

---

*Это условие оказывается достаточным для того, чтобы оператор (1а,б) был *эрмитовым* или, более точно, *максимально эрмитовым оператором* (см. [2–8], также [18–21]); но он может быть разложен на билинейные формы (см., например, [6, 121] с соответствующими ссылками в этих работах), как мы увидим далее.

Если $A^* = A$, то оператор A называется *самосопряженным* оператором и скалярное произведение $(A\,f,\ f)$ при любом $f \in H$ вещественно. Ограниченный линейный оператор A, определенный всюду в H, называется *нормальным*, если он перестановочен со своим сопряженным, т. е. если

$$A^*\,A = A\,A^*. \tag{4}$$

Если при любом $f \in H$ имеет место неравенство $(A\,f,\ f) \geqslant 0$, то ограниченный самосопряженный оператор A называется *положительным*; обычно это записывается в виде неравенства

$$A \geqslant 0. \tag{5}$$

Это понятие позволяет вводить неравенства между ограниченными самосопряженными операторами и, в частности, рассматривать *монотонные последовательности* таких операторов. Отметим, что если A — положительный оператор, то для любых $f,\, g \in H$

$$|(A\,f,\ f)|^2 \leqslant (A\,f,\ f) \cdot (A\,g,\ g). \tag{6}$$

Действительно, форма $(A\,f,\ g)$ порождает в этом случае квазискалярное произведение в H и написанное неравенство есть просто неравенство Коши–Буняковского.

Линейный оператор A называется *симметрическим*, если: а) область определения D_A плотна в H и б) для любых двух элементов $f,\ g$ из D_A имеет место равенство

$$(A\,f,\ g) = (f,\ A\,g). \tag{7}$$

Наряду с термином *симметрический* применяется термин *эрмитов*. Из этого определения следует, что скалярное произведение $(A\,f,\ f)$ при любом $f \in D_A$ вещественно. Может случиться, что при некотором вещественном γ

$$(A\,f,\ f) \geqslant \gamma \cdot (f,\ f) \tag{8}$$

для любого $f \in D_A$. В этом случае симметрический оператор A называется *полуограниченным снизу*, а наибольшее из всех значений γ, при которых выполняется это неравенство, называют *нижней гранью* оператора A (аналогично определяется оператор, *полуограниченный сверху*, и его *верхняя грань*). Если, в частности,

$$(A\,f,\ f) \geqslant 0 \tag{9}$$

при $f \in D_A$, то оператор A становится положительным.

Если симметрический оператор ограничен, то его расширение по непрерывности определено всюду в H и является ограниченным самосопряженным оператором. Если же симметрический оператор не ограничен, то его область определения не может совпадать со всем пространством. Так, самосопряженный оператор совпадает со своим сопряженным оператором ($A = A^*$), и он не имеет симметрических расширений. С другой стороны, симметрический оператор, не имеющий симметрических расширений, но не совпадающий со своим сопряженным ($A \subset A^*$), называется *максимальным симметрическим* (или *максимальным эрмитовым*) оператором.

Очевидно, оператор $\hat{t} = -i\hbar\,\dfrac{\partial}{\partial E}$ (при $0 < E < \infty$) является эрмитовым, т. е. имеет место соотношение

$$(g_1,\ \hat{t}\,g_2) = (\hat{t}\,g_1,\ g_2) \tag{10}$$

только при условии, что не все квадратично-интегрируемые функции g_1, $g_2 \in G$, в пространстве которых он определен, обращаются в нуль вместе со своими производными при $E = 0$. Иначе говоря, такой эрмитов оператор $\hat{t}$ определен в подпространстве $G \subset L^2$, где L^2 — гильбертово пространство всех квадратично-интегрируемых функций. Очевидно, поскольку оператор $\hat{t}$ определен *не на всем гильбертовом пространстве* L^2, он не является самосопряженным, а поскольку его нельзя определить на всем пространстве L^2, так как при таком его расширении на квадратично-интегрируемые функции g_1, g_2, не равные нулю при $E = 0$, его свойства эрмитовости (10) *нарушаются*, то он является *максимальным эрмитовым* [7].

Теперь вспомним теорему Наймарка [120], взяв ее формулировку, например, из [122] (см. с. 393). *Пусть F_t — единственное обобщенное разложение максимального эрмитова оператора в пространстве H. В таком случае существует гильбертово пространство H^+, содержащее H в качестве подпространства, и существует такое ортогональное разложение единицы E_t^+ пространства H^+, что при любом $f \in H$*

$$F_t\,f = P^+ E_t^+ f, \tag{11}$$

где P^+ — оператор проектирования на H. Здесь *обобщенным разложением единицы* мы будем называть всякое однопараметрическое семейство операторов F_t, удовлетворяющее следующим условиям: а) при $t_2 > t_1$ разность $F_{t_2} - F_{t_1}$ является ограниченным положительным оператором, б) $F_{t-0} = F_t$, в) $F_{-\infty} = 0$, $F_\infty = I$. Другим прямым следствием теоремы Наймарка является следующее: неортогональное спектральное разложение максимально эрмитова оператора может быть аппроксимировано ортогональной спектральной функцией (которая соответствует самосопряженному оператору) со слабой сходимостью с любой желаемой степенью точности.

Теперь мы вернемся к оператору $\hat{t}$ в t-представлении, введенному в [7, 8] и [18–21]. Он имел такое свойство, что при одномерном (1D) скалярном рассмотрении любые усреднения по времени получались при помощи следующей *весовой амплитуды* (или веса):

$$W(t, x)\,dt = \frac{j(x,t)\,dt}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} j(x,t)\,dt}, \tag{12}$$

где плотность потока $j(x,t)$ соответствует временной вероятности того, чтобы частица прошла через точку x за единичный интервал времени с центром в точке t, двигаясь в положительном направлении по оси x. Эта величина не постулируется, но является прямым следствием хорошо известной вероятностной *пространственной* интерпретации $\rho(x,t)$ и условия непрерывности $\partial\rho(x,t)/\partial t + \operatorname{div} j(x,t) = 0$. Как обычно, величина $\rho(x,t)$ представляет собой вероятность нахождения движущейся частицы внутри единичного пространственного интервала с центром в точке x и в момент времени t.

Величины $\rho(x,t)$ и $j(x,t)$ связаны с волновой функцией $\Psi(x,t)$ с помощью обычных определений $\rho(x,t) = |\Psi(x,t)|^2$ и $j(x,t) = \Re[\Psi^*(x,t)\,(\hbar/i\mu)\,\Psi(x,t)]$. Когда плотность потока $j(x,t)$ меняет свой знак, величина $W(x,t)\,dt$ уже не является положительно определенной и, как в [7, 18–21], она имеет физический смысл плотности вероятности *только* во время тех частичных временных интервалов, в которых плотность потока $j(x,t)$ сохраняет свой знак. Поэтому давайте введем следующие *две* величины [18–20], отделив положительное направление потока от отрицательного:

$$W_\pm(t, x)\,dt = \frac{j_\pm(x,t)\,dt}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} j_\pm(x,t)\,dt} \tag{13}$$

при $j_\pm(x,t) = j(x,t)\,\theta(\pm j)$.

Тогда среднее значение $\langle t_\pm(x)\rangle$ времени t, при котором частица проходит через координату x, *двигаясь в положительном или отрицательном направлении*, равно

$$\langle t_\pm(x)\rangle = \frac{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} t j_\pm(x,t)\,dt}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} j_\pm(x,t)\,dt} = \frac{\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{1}{2}\left[G^*(x,E)\,\hat{t}v\,G(x,E) + vG^*(x,E)\,\hat{t}G(x,E)\right] dE}{\int\limits_{0}^{+\infty} v\left|G(x,E)\right|^2 dE}, \tag{14}$$

где $G\,(x,E)$ — фурье-преобразование распространяющегося 1D-пакета

$$\Psi\,(x,t) = \int\limits_0^{+\infty} G\,(x,E)\,\exp\left(-\frac{iEt}{\hbar}\right)dE = \int\limits_0^{+\infty} g(E)\,\varphi(x,E)\,\exp\left(-\frac{iEt}{\hbar}\right)dE,$$

переводящее от представления по времени к представлению по энергии. Для свободного движения можно выбрать $G(x,E) = g(E)\,\exp\,(ikx)$ и $\varphi(x,E) = \exp\,(ikx)$, где $E = \mu\hbar^2k^2/\,2 = \mu v^2/\,2$. В [18–20] были определены *средние длительности* (mean time durations) для 1D-перехода частицы из x_i в $x_f > x_i$ и отражения от области $(x_i,\,+\infty)$ обратно в интервал $x_f \leqslant x_i$. А именно:

$$\langle\tau_T(x_i,x_f)\rangle = \langle t_+(x_f)\rangle - \langle t_+(x_i)\rangle \tag{15}$$

и

$$\langle\tau_R(x_i,x_f)\rangle = \langle t_-(x_f)\rangle - \langle t_+(x_i)\rangle \tag{16}$$

соответственно. Трехмерное обобщение средней продолжительности в квантовых столкновениях и ядерных реакциях появилось в [7, 8]. Окончательные определения для средних $\langle t^n\rangle$ по времени t^n при $n = 1, 2\ldots$ и $\langle f(t)\rangle$ от величины $f(t)$, которая является произвольной аналитической функцией времени, можно найти в [20, 123], где приведены однозначно определенные явные выражения.

Два канонически сопряженных оператора — оператор времени (1) и оператор энергии

$$\hat{E} = \begin{cases} E & \text{в } E\text{-представлении по энергии,} \quad \text{(а)} \\ i\hbar\,\dfrac{\partial}{\partial t} & \text{в } t\text{-представлении по времени} \quad \text{(б)} \end{cases} \tag{17}$$

удовлетворяют коммутационному соотношению [6, 20, 123]

$$[\hat{E},\hat{t}] = i\hbar. \tag{18}$$

Теорема Стоуна (Stone) и фон Неймана (von Neumann) [124] всегда интерпретировалась как устанавливающая коммутационные соотношения подобно (18) для пары канонически сопряженных операторов (1) и (17) в обоих представлениях, но только если эти операторы являются самосопряженными. Однако ее можно обобщить на (максимально) эрмитовы операторы, если ввести $\hat{t}$ с помощью *однозначного* преобразования Фурье от оси t $(-\infty < t < \infty)$ к полуоси E $(0 < E < \infty)$ и использовать свойства [122] «(максимально) эрмитовых» операторов (это показано, например, в последней из работ [2], а также в [20, 123]).

В самом деле, из (18) можно получить соотношение неопределенностей

$$\Delta E\ \Delta t \geqslant \frac{\hbar}{2} \tag{19}$$

(где $\Delta a = \sqrt{Da}$ — стандартная величина отклонения, величина Da является вариацией $Da = \langle a^2 \rangle - \langle a \rangle^2$ и $a = E, t$, тогда как $\langle \ldots \rangle$ обозначает среднее по t с величинами $W\,(x,t)\,dt$ или $W_\pm\,(x,t)\,dt$ в t-представлении) также для операторов, которые являются простыми эрмитовыми, с помощью прямого обобщения процедур, общих в случае *самосопряженных* (канонически сопряженных) величин подобно координате $\hat{x}$ и моменту $\hat{p}_x$. Более того, соотношение (18) удовлетворяет принципу «соответствия» Дирака [20, 123], так как классические скобки Пуассона $\{q_0, p_0\}$ при $q_0 = t$ и $p_0 = -E$ равны 1. В работах [4–7] и [20, 123] также было показано, что *отличия* между средними временами, при которых волновой пакет проходит через *пару* точек, удовлетворяют принципу соответствия Эренфеста (Ehrenfest).

Далее, это позволяет установить, что для систем с непрерывными спектрами энергии математические свойства (максимально) эрмитовых операторов подобно $\hat{t}$ в (1) являются достаточными для рассмотрения их как квантовых наблюдаемых. А именно, *уникальность* [122] спектрального разложения (хотя и не ортогонального) для операторов $\hat{t}$ и $\hat{t}^n$ $(n > 1)$ гарантирует «эквивалентность» средних значений любой аналитической функции по времени, которая определяется при t и в E-представлении. Другими словами, такое разложение эквивалентно отношению полноты для (приближенных) собственных функций от $\hat{t}^n$ $(n > 1)$, которые *при произвольной точности* могут быть отнесены к ортогональным, и соответствует действительным собственным значениям в непрерывном спектре. Эти приближенные собственные функции принадлежат к пространству квадратично-интегрируемых функций от энергии E (см., например, [6–8, 20] и список литературы в этих работах).

Согласно этой точке зрения не существует *практического* отличия между самосопряженными и максимально эрмитовыми операторами для систем с непрерывными спектрами энергии. Еще раз повторим, что математических свойств $\hat{t}^n$ $(n > 1)$ вполне достаточно, чтобы рассматривать время как квантово-механическую наблюдаемую (подобно энергии, импульсу, пространственным координатам и т. д.) *без введения любого нового физического постулата*.

Удивительно, что фон Нейманн [125], придерживаясь простоты самосопряженных операторов, подчеркнул, что операторы, подобно нашему оператору времени $\hat{t}$, могут представлять физические наблюдаемые, даже если они не являются самосопряженными. А именно, он рассмотрел явно оператор $-i\hbar\dfrac{\partial}{\partial x}$, связав его с частицей, «живущей» в правой полуплоскости, ограниченной жестко закрепленной стенкой, которая установлена в $x = 0$. Этот оператор (действующий на волновой пакет и определенный на положительной оси x) несамосопряженный, несмотря на то, что он очевидно соответствует x-компоненте наблюдаемой от *импульса* для этой частицы (рис. 1).

Теперь мы подчеркнем, что можно обойтись и без нашего ранее предполагаемого граничного условия $E \neq 0$, придерживаясь *билинейного* эрмитова оператора [2, 6]

$$\hat{t} = \frac{-i\hbar}{2}\frac{\overleftrightarrow{\partial}}{\partial E}, \tag{20}$$

где смысл символа $\leftrightarrow$ становится ясным из определения

$$(f, \hat{t}\, g) = \Big(f, -\frac{i\hbar}{2}\frac{\partial}{\partial E}\, g\Big) + \Big(-\frac{i\hbar}{2}\frac{\partial}{\partial E}\, f,\, g\Big).$$

В случае заимствования этого выражения для оператора времени результат от алгебраической суммы от двух слагаемых в правой части автоматически становится равным нулю при $E = 0$. Этот вопрос будет изучен далее в разд. 2, где будет рассмотрен более общий случай оператора 4-мерной координаты. Такое «исключение» точки $E = 0$ [2, 6] оказывается не только проще, но также и более физическим по сравнению с другими вариантами исключения в работах подобно [26], полученными намного позже.

В связи с последним замечанием мы кратко прокомментируем подход с так называемым *положительно определенным оператором* (positive-operator-value-measure, POVM), часто используемым или обсуждаемым во второй части работ по времени в квантовой механике, упоминаемых во введении. Действительно, начиная с шестидесятых годов [126], здесь была предложена аналогичная процедура в некоторых подходах к квантовой теории измерений. Впоследствии и намного позже подход POVM был применен в более простой и сокращенной форме к задаче оператора времени для одномерного свободного движения (см., например, работы [10, 12, 15, 22–29] и особенно [26]).

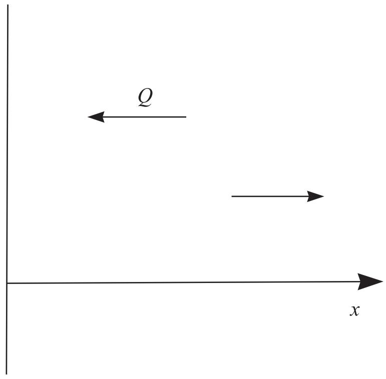

Рис. 1. Для частицы Q, свободно двигающейся в полуплоскости, ограниченной стенкой, жестко установленной в точке $x = 0$, оператор $-i\dfrac{\partial}{\partial x}$ имеет ясный физический смысл x-компоненты импульса, даже если он является *не* самосопряженным (см. [125] и [6])

Эти работы устанавливают, что обобщенное разложение единицы (или «величины POV») может быть получено из самосопряженных расширений оператора времени в пределах нефизического расширенного гильбертова пространства (например, добавлением отрицательных значений к энергии) с использованием расширенной части теоремы Наймарка [127]: но такая программа полностью реализована только сейчас в простейшем случае одномерного движения частицы.

В противоположность, наш подход основан на другой теореме Наймарка [120], которая, как уже упоминалось, не теряя всей строгости, позволяет выполнить намного более прямое, простое и общее введение квантового оператора времени. А именно, наш подход основан на так называемой теореме *Карлемана* (Carleman) [128], используемой в [120], об аппроксимации эрмитова оператора подходящими последовательностями «ограниченных» самосопряженных операторов, т. е. самосопряженных операторов, чьи спектральные функции слабо сходятся к неортогональной спектральной функции рассматриваемого эрмитова оператора. Наш подход применим к большому семейству трехмерных (3D) столкновений частиц со всеми возможными гамильтонианами. Действительно, наш подход был предложен в более ранних работах [2–7] и в первой работе из [18], где он был применен для временного анализа квантовых столкновений, ядерных реакций и процессов туннелирования.

1.2. Об импульсном представлении оператора времени. Для непрерывного спектра энергии при $0 < E < +\infty$ вместо E-представления в (1)–(14) можно использовать k-представление с преимуществом $-\infty < k < +\infty$ [9]:

$$\Psi\,(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(k)\,\varphi(x,k)\,\exp\left(-\frac{iEt}{\hbar}\right) dk \tag{21}$$

при $E = \hbar^2 k^2/\,2\mu$ и $k \neq 0$. Для расширения импульсного представления на случай $\langle t^n \rangle$ при $n > 1$ мы ограничимся ссылкой на работы [20, 123].

1.3. Альтернативный вес усреднений по времени для частицы, находящейся внутри конечной пространственной области. Давайте вспомним, что весовая амплитуда (12) рассматриваемой частицы (так же, как и ее модификации (13)) имеет смысл вероятности того, что эта частица проходит через точку x за временной интервал $(t,\ t + dt)$. Будем следовать процедуре, представленной в [18–21], и проанализируем следствие

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} j\,(x,t)\,dt = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \big|\,\Psi(x,t)\big|^2\,dx, \tag{22}$$

которое получается из одномерного уравнения непрерывности. Отсюда вторую альтернативную весовую амплитуду можно записать в виде

$$d\,P(x,t) \equiv Z\,(x,t)\;dx = \frac{\left|\Psi(x,t)\right|^2 dx}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left|\,\Psi(x,t)\right|^2 dx}. \tag{23}$$

Она приобретает смысл вероятности того, что в момент времени t частица находится (или пребывает, локализована) внутри бесконечно малого пространственного интервала $(x,\ x+dx)$ независимо от свойств ее движения. Тогда равенство

$$P(x_1,x_2,t) = \frac{\int\limits_{x_1}^{x_2} \left|\Psi(x,t)\right|^2 dx}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left|\,\Psi(x,t)\right|^2 dx} \tag{24}$$

приобретает смысл вероятности того, что в момент времени t частица находится внутри пространственного интервала $(x_1,\ x_2)$.

Как известно (см., например, [18–20] с соответствующими ссылками в этих работах), *среднее время пребывания* (mean dwell time) может быть записано в следующих *двух* эквивалентных формах:

$$\langle\tau(x_i,x_f)\rangle = \frac{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dt \int\limits_{x_i}^{x_f} |\Psi(x,t)|^2\,dx}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} j_{\rm in}(x_i,t)\;dt} \tag{25}$$

и

$$\langle\tau(x_i,x_f)\rangle = \frac{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} tj(x_f,t)\;dt - \int\limits_{-\infty}^{+\infty} tj(x_i,t)\;dt}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} j_{\rm in}(x_i,t)\;dt}, \tag{26}$$

где учтена зависимость (22), которая следует из уравнения непрерывности.

Таким образом, в соответствии с двумя разными определениями (12) и (23) для весовых амплитуд после интегрирования по времени получаются *два* разных вида распределений по времени (средних значений, вариаций...), которые связаны со временем прохождения (traversal time) частицы при использовании первой весовой амплитуды (12) и со временем пребывания (dwelling) частицы при использовании второй весовой амплитуды (23). Некоторые примеры описания одномерного туннелирования на такой основе можно найти в работах [18–20].

1.4. Время как квантовая наблюдаемая для фотонов. Как известно (см., например, [19,129]), волновая функция после квантования описывает фотоны с помощью волнового пакета*

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \int\limits_{k_0} \frac{d^3k}{k_0}\, \boldsymbol{\chi}(\mathbf{k})\, \varphi(\mathbf{k},\mathbf{r})\, \exp(-ik_0t), \tag{27}$$

где $\mathbf{A}(\mathbf{r},t)$ — векторный потенциал электромагнитного поля, $\mathbf{r} = \{x, y, z\}$, $\mathbf{k} = \{k_x, k_y, k_z\}$, $k_0 \equiv w/c = \varepsilon/\hbar c$ и $k \equiv |\mathbf{k}| = k_0$. Ось x можно направить вдоль направления распространения фотона. Отметим, что $\boldsymbol{\chi}(\mathbf{k}) = \sum\limits_{i=y,z} \chi_i(\mathbf{k})\, \mathbf{e}_i(\mathbf{k})$ при $\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j = \delta_{ij}$ и $x_i, x_j = y, z$, $\chi_i(\mathbf{k})$ — амплитуда вероятности фотона с импульсом $\mathbf{k}$ и поляризацией $\mathbf{e}_j$ в точке x_j. Кроме того, для плоских волн она является постоянной и может быть нормирована: $\varphi(\mathbf{k},\mathbf{r}) = \exp(ik_x x)$, где $\varphi(\mathbf{k},\mathbf{r})$ — линейная комбинация небегущих затухающей и возрастающей волн для «фотонных барьеров» (которыми могут быть фильтры с запрещенными зонами, суженные участки волноводов для микроволн или областей со слегка нарушенными внутренними отражениями для света и т. д., включая аналоги для небегущих акустических волн). Несмотря на то, что локализовать фотон в направлении поляризации довольно непросто [129], тем не менее для одномерного его распространения можно использовать пространственно-временную вероятностную интерпретацию (27) и определить следующую величину:

$$\rho_{\mathrm{em}}(x,t)\, dx = \frac{S_0\, dx}{\int S_0\, dx}, \quad S_0 = \iint s_0\, dy\, dz \tag{28}$$

($s_0 = [\mathbf{E}^* \cdot \mathbf{E} + \mathbf{H}^* \cdot \mathbf{H}]/\, 4\pi$ — плотность энергии электромагнитного поля, $\mathbf{H} = \operatorname{rot}\mathbf{A}$ и $\mathbf{E} = -1/c\; \partial\mathbf{A}/\partial t$), которая представляет собой плотность вероятности *фотона, который может быть локализован в пространственном интервале $(x,\ x+dx)$ оси x в момент времени t.* Тогда величина

$$j_{\mathrm{em}}(x,t)\, dt = \frac{S_x\, dt}{\int S_x(x,t)\, dt}, \quad S_x(x,t) = \iint s_x\, dy\, dz \tag{29}$$

($s_x = c\; \Re[\mathbf{E}^* \wedge \mathbf{H}]_x \,/\, 8\pi$ — плотность потока энергии) представляет собой *плотность потока вероятности, когда фотон проходит через точку x за временной интервал $(t,\ t+dt)$*, т. е. в полной аналогии с вероятностными величинами для нерелятивистских частиц. Справедливость и удобство таких определений очевидны, когда групповая скорость волнового пакета совпадает

*Используется калибровочное условие $\mathrm{div}\mathbf{A} = 0$.

со скоростью переноса энергии: (i) волновой пакет (27) подобен волновому пакету для нерелятивистских частиц, (ii) в аналогии с традиционной нерелятивистской квантовой механикой для фотона (т. е. электромагнитного волнового пакета), проходящего через координату x, можно определить «средний момент времени» так:

$$\langle t(x) \rangle = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} t\, J_{\mathrm{em},\,x}\; dt = \frac{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} t S_x(x,t)\; dt}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} S_x(x,t)\; dt}.$$

Как следствие (так же, как и в случае уравнений (1)–(12)), определение (1) оператора времени в представлении по энергии становится справедливым также для фотонов с такими же граничными условиями, как и для частиц, т. е. при $\chi_i\,(0) = \chi_i\,(\infty)$ и $E = \hbar c k_0$.

Плотность энергии s_0 и плотность потока энергии s_x удовлетворяют уравнению сохранения

$$\frac{\partial s_0}{\partial t} + \frac{\partial s_x}{\partial x} = 0, \tag{30}$$

которое является лоренц-инвариантным для одномерных процессов движения [19, 20].

1.5. «Гамильтонов» подход для оператора времени, канонически сопряженного гамильтониану. В нерелятивистской квантовой теории оператор энергии формально имеет *два* вида (см., например, [8, 20]): (i) $i\hbar\,\dfrac{\partial}{\partial t}$ в t-представлении и (ii) $\hat{H}\,(\hat{p}_x, \hat{x}, \ldots)$ в гамильтоновом формализме. «Дуальность» этих двух выражений можно легко получить непосредственно из уравнения Шредингера $\hat{H}\Psi = i\hbar\dfrac{\partial \Psi}{\partial t}$. Подобную дуальность в квантовой механике можно ввести и для *времени*: кроме общего вида (1) для оператора времени в представлении по энергии, выполняющегося для любых физических систем в области непрерывного спектра энергии, можно *записать оператор времени также и в «гамильтоновом виде»*, т. е. в виде операторов координаты и импульса, исходя из коммутационных соотношений, т. е. с помощью замены

$$\begin{aligned} \hat{E} &\to \hat{H}\,(\hat{p}_x, \hat{x}, \ldots), \\ \hat{t} &\to \hat{T}\,(\hat{p}_x, \hat{x}, \ldots), \end{aligned} \tag{31}$$

и, используя коммутатор (подобный (18))

$$[\hat{H}, \hat{T}] = i\hbar, \tag{32}$$

можно получить соответствующее явное выражение для $\hat{T}\,(\hat{p}_x, \hat{x}, \ldots)$ [130].

В самом деле, эту процедуру можно использовать для любой физической системы с гамильтонианом $\hat{H}\,(\hat{p}_x, \hat{x}, \ldots)$. Рассмотрим несколько примеров. Переходя от координатного представления к импульсному, можно убедиться в том, что *формальные* выражения *обоих* операторов гамильтонова типа $\hat{H}\,(\hat{p}_x, \hat{x}, \ldots)$ и $\hat{T}\,(\hat{p}_x, \hat{x}, \ldots)$ *не меняются* за исключением знака при операторе $\hat{T}\,(\hat{p}_x, \hat{x}, \ldots)$. В качестве наглядного примера рассмотрим простейший случай свободного движения частицы с гамильтонианом

$$\hat{H} = \begin{cases} \dfrac{\hat{p}_x^2}{2\mu}, \quad \hat{p}_x = -i\hbar\dfrac{\partial}{\partial x} & \text{в координатном представлении,} \quad \text{(а)} \\ \dfrac{p_x^2}{2\mu} & \text{в импульсном представлении.} \quad \text{(б)} \end{cases} \tag{33}$$

Оператор времени гамильтонова типа в симметричном виде можно записать так:

$$\hat{T} = \begin{cases} \dfrac{\mu}{2}\left(\hat{p}_x^{-1}x + x\hat{p}_x^{-1} + i\hbar\,;\ \hat{p}_x^{-2}\right), & \text{(а)} \\ -\dfrac{\mu}{2}\left(p_x^{-1}\hat{x} + \hat{x}p_x^{-1} + i\hbar/p_x^2\right), & \text{(б)} \end{cases} \tag{34}$$

где

$$\hat{p}_x^{-1} = \frac{i}{\hbar}\int dx \ldots, \quad \hat{x} = i\hbar\frac{\partial}{\partial p_x}.$$

В этой связи оператор (34б) эквивалентен $-i\hbar\,\dfrac{\partial}{\partial E}$ при $E = p_x^2/\,2\mu$, и, следовательно, он является также (максимально) *эрмитовым* оператором. В самом деле, действуя оператором $\hat{T}\,(\hat{p}_x, \hat{x}, \ldots)$, например, на плоскую волну $\exp{(ikx)}$, мы получаем одинаковый результат как в координатном, так и в импульсном представлениях:

$$\hat{T}\ \exp{(ikx)} = \frac{x}{v}\ \exp{(ikx)}, \tag{35}$$

где x/v — время свободного движения (для частицы со скоростью v) при прохождении расстояния x.

На этом основании оказывается возможным показать, что волновая функция $\Psi(x,t)$ квантовой системы удовлетворяет двум дуальным уравнениям:

$$\hat{H}\Psi = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} \quad \text{и} \quad \hat{T}\Psi = t\Psi. \tag{36}$$

В представлении по энергии и в стационарном случае мы вновь получаем *два* дуальных уравнения

$$\hat{H}\varphi_t = \varepsilon\varphi_t \quad \text{и} \quad \hat{T}\varphi_t = -i\hbar\frac{\partial\varphi_t}{\partial\varepsilon}, \tag{37}$$

где φ_t — преобразование Фурье от Ψ:

$$\varphi_t = \frac{1}{2\pi\hbar} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Psi(x,t)\, \mathrm{e}^{i\varepsilon t/\hbar}\, dt. \tag{38}$$

1.6. Время как наблюдаемая для систем с дискретным спектром энергии. Для описания временной эволюции нерелятивистских квантовых систем с полностью *дискретным* спектром энергии (или со смешанным спектром, содержащим как непрерывную, так и дискретную части) введем волновой пакет следующего вида [8, 20, 123]:

$$\psi\,(x,t) = \sum_{n=0} g_n \varphi_n(x)\, \exp\left[\frac{-i(\varepsilon_n - \varepsilon_0)t}{\hbar}\right], \tag{39}$$

где $\varphi_n(x)$ — ортогональные и нормированные связанные состояния, которые удовлетворяют уравнению $\hat{H}\varphi_n(x) = \varepsilon_n\varphi_n(x)$, $\hat{H}$ — гамильтониан системы, коэффициенты g_n нормированы условием $\sum\limits_{n=0} |g_n|^2 = 1$. Мы опустили несущественный фазовый множитель $\exp\,(-i\varepsilon_0 t/\hbar)$.

Вначале рассмотрим такую систему, которая имеет спектр энергии с уровнями, разделенными на интервалы, допускающие максимальный общий делитель D (например, такими системами являются гармонический осциллятор, частица в жестком ящике, сферический ротатор) и такие, что волновой пакет (39) является периодической функцией времени, обладающей периодом Пуанкаре $T = 2\pi\hbar/D$. Оказывается, что для таких систем можно построить *самосопряженный* оператор времени в виде пилообразной функции от t (в представлении по времени) при выборе $t = 0$ как начального момента времени [8, 20, 123]:

$$\hat{t} = t - T \sum_{n=0}^{\infty} \Theta(t - [2n+1]T/2) + T \sum_{n=0}^{\infty} \Theta(-t - [2n+1]T/2). \tag{40}$$

В пределах каждого цикла Пуанкаре такая периодическая функция для оператора времени является линейной возрастающей функцией времени t (рис. 2).

Коммутационные соотношения между операторами энергии и времени, которые теперь оба являются самосопряженными, в дискретном спектре энергии при периодическом операторе времени приобретают вид

$$[\hat{E}, \hat{t}] = i\hbar \left\{ 1 - T \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - [2n+1]T) \right\}, \tag{41}$$

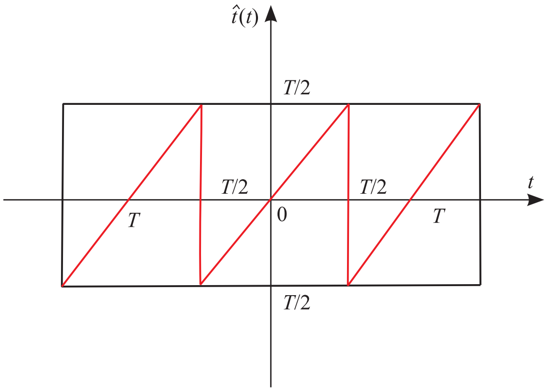

Рис. 2. Периодическая пилообразная функция для оператора времени для квантовых систем с дискретными спектрами энергии: случай (30)

где из соотношений неопределенности следует новый вид

$$(\Delta E)^2\,(\Delta t)^2 = \hbar^2\left[1 - \frac{T|\psi(T/2+\gamma)|^2}{\int\limits_{-T/2}^{T/2}|\psi(t)|^2\,dt}\right], \tag{42}$$

а параметр γ определен при $-T/2 < \gamma < T/2$ для однозначного интеграла [20, 123].

При $\Delta E \to 0$ (т. е. при $|g_n| \to \delta_{nn'}$) правая часть уравнения (42) стремится к нулю, а $|\psi(t)|^2$ к постоянной величине. В таком случае распределение моментов времени, в которые волновой пакет проходит через точку x, становится равномерным в пределах каждого цикла Пуанкаре. При постоянной $\Delta E \gg D$ и $|\psi(T+\gamma)|^2 \ll \left(\int\limits_{-T/2}^{T/2}|\psi(t)|^2\,dt\right)/T$ условие периодичности может оказаться несущественным всякий раз, когда $\Delta t \ll t$. Другими словами, наше соотношение неопределенности (42) превращается в обычное соотношение неопределенности для систем с непрерывными спектрами.

В более общем случае, для возбужденных состояний ядер, атомов и молекул, *интервалы между уровнями энергии для дискретных и квазидискретных (резонансных) спектров не являются мультиплетами от максимального общего делителя* и, следовательно, цикл Пуанкаре не является хорошо определенным. Тем не менее даже для таких систем можно ввести приближенное описание в терминах квазициклов Пуанкаре и квазипериодической эволюции (иногда с любой желаемой степенью точности). Так, в пределах достаточно длинных временных интервалов поведение волнового пакета может быть связано с *периодическим движением (осцилляциями)* иногда, например, для очень узких резонансов. При выборе приближенного периода цикла Пуанкаре для каждого одного такого цикла можно ввести настолько много квазициклов, сколько это необходимо для требуемой точности. Затем для выбранной точности можно ввести *квазисамосопряженный оператор времени*.

2. О 3-МЕРНЫХ И 4-МЕРНЫХ ОПЕРАТОРАХ КООРДИНАТЫ И ВРЕМЕНИ В УРАВНЕНИИ КЛЕЙНА–ГОРДОНА В ТЕРМИНАХ БИЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Теперь рассмотрим *релятивистский* случай, приняв в рассмотрение оператор пространственно-временной четырехмерной «координаты». Начнем с оператора трехмерной пространственной координаты, который используется в уравнении Клейна–Гордона. Мы увидим, что такой анализ приведет нас к неэрмитовым операторам. Далее мы встретимся с билинейными операторами, которые оказываются удобными при определении оператора 4-мерной координаты. Как мы упоминали в п. 1.1, применение граничного условия $E \neq 0$ гарантирует максимальную эрмитовость оператора времени, которая может быть перенесена на билинейные формы, а именно, на билинейный эрмитов оператор $\hat{t} = \left(-i\hbar \dfrac{\overleftrightarrow{\partial}}{\partial E}\right)/2$ [6, 121], где знак $\leftrightarrow$ определен через соответствующее равенство $(f, \hat{t}g) = \left(f, -\dfrac{i\hbar}{2}\dfrac{\partial}{\partial E}\, g\right) + \left(-\dfrac{i\hbar}{2}\dfrac{\partial}{\partial E}\, f, g\right)$.

2.1. Оператор трехмерной координаты в уравнении Клейна–Гордона. Как известно, стандартные операторы координаты, являясь эрмитовыми и, более того, самосопряженными, имеют действительные собственные значения: они дают локализацию *в точке*. Однако, как показал Дж. М. Джаух (J. M. Jauch), локализация в точке может оказаться противоположной к «унимодулярности». Кроме того, в релятивистском случае такие явления, как рождение пар, накладывают запрет на локализацию с точностью не менее чем длина комптоновской волны. Следует ожидать, что собственные значения оператора реальной координаты $\hat{\mathbf{z}}$ представляют собой скорее область пространства, чем точку. Но это можно получить только с помощью неэрмитовых (и следовательно, не самосопряженных) операторов координаты $\hat{\mathbf{z}}$ (прежде всего, это можно сделать с помощью или ненормальных операторов с коммутирующими компонентами, или нормальных операторов с некоммутирующими компонентами). Например, следуя идеям работы [131, 132], мы покажем, что средние значения *эрмитовой (самосопряженной) составляющей* от $\hat{\mathbf{z}}$ дают усредненную координату (точечного типа) [133], тогда как средние значения от *антиэрмитовой (антисамосопряженной) части* от $\hat{\mathbf{z}}$ определяют размеры области локализации [2].

Рассмотрим релятивистский случай частицы со спином нуль в рациональной системе единиц с метрикой $(+\ -\ --)$. Как известно, оператор координаты $i\,\nabla_{\mathbf{p}}$ действительно является неэрмитовым и, возможно, хорошим кандидатом для расширенного оператора координаты. Но чтобы это показать, мы разложим его на эрмитову и антиэрмитову (или пилообразно эрмитову) составляющие [131].

Для этого рассмотрим векторное пространство V комплексных дифференциальных функций на 3-мерном фазовом пространстве [121], снабженное внутренним произведением, которое определим так:

$$(\Psi,\,\Phi) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{p_0}\;\Psi^*(\mathbf{p})\,\Phi(p), \tag{43}$$

где $p_0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m_0^2}$. Пусть функция в V удовлетворяет условию

$$\lim_{R\to\infty} \int\limits_{S_R} \frac{dS}{p_0}\;\Psi^*(p)\,\Phi(p) = 0, \tag{44}$$

где интеграл взят по поверхности сферы с радиусом R. Если $U: V \to V$ — дифференциальный оператор с одной переменной, то условие (44) позволяет ввести определение U^T как:

$$(U^T\Psi,\,\Phi) = (\Psi,\,U\,\Phi) \quad \text{для всех } \Psi,\,\Phi \in V, \tag{45}$$

где U меняется на U^T или, наоборот, с помощью интегрирования по частям.

Далее, это позволяет ввести *дуальное представление* $(U_1,\,U_2)$ (т. е. действующее по-разному на функцию слева и на функцию справа, см. [121]) от *единственного* оператора $U_1^T + U_2$ (т. е. действующего только на одну из функций и который может быть переброшен на другую операцией сопряжения) так:

$$(U_1\Psi,\,\Phi) + (\Psi,\,U_2\Phi) = (\Psi,\,(U_1^T + U_2)\,\Phi). \tag{46}$$

Теперь на основе такого дуального представления легко разделить произвольный оператор на его эрмитову и антиэрмитову составляющие

$$(\Psi,\,U\Phi) = \frac{1}{2}\Big((\Psi,\,U\Phi) + (U^*\Psi,\,\Phi)\Big) + \frac{1}{2}\Big((\Psi,\,U\Phi) - (U^*\Psi,\,\Phi)\Big). \tag{47}$$

Здесь пара

$$\frac{1}{2}\,(U^*,\,U) \equiv \overset{\leftrightarrow}{U}_h \tag{48}$$

соответствует $(1/2)(U+U^{*T})$ и представляет эрмитову компоненту, тогда как

$$\frac{1}{2}(-U^*,\, U) \equiv \overset{\leftrightarrow}{U}_a \tag{49}$$

представляет антиэрмитову компоненту.

Теперь рассмотрим оператор координаты применительно к уравнению Клейна–Гордона $\hat{z} = i\,\nabla_p$. При

$$U = i\,\frac{\partial}{\partial p_j} \tag{50}$$

мы имеем [2]

$$\frac{1}{2}\,(U^*,\, U) = \frac{1}{2}\left(-i\,\frac{\partial}{\partial p_j},\, i\,\frac{\partial}{\partial p_j}\right) \equiv \frac{i}{2}\,\frac{\overset{\leftrightarrow}{\partial}}{\partial p_j}, \tag{51а}$$

$$\frac{1}{2}\,(-U^*,\, U) = \frac{1}{2}\left(i\,\frac{\partial}{\partial p_j},\, i\,\frac{\partial}{\partial p_j}\right) \equiv \frac{i}{2}\,\frac{\overset{\leftrightarrow}{\partial}_+}{\partial p_j}. \tag{51б}$$

И соответствующие *единственные* операторы превращаются в

$$\frac{1}{2}\,(U + U^{*T}) = i\,\frac{\partial}{\partial p_j} - \frac{i}{2}\,\frac{p_j}{p^2 + m_0^2}, \tag{52а}$$

$$\frac{1}{2}\,(U - U^{*T}) = \frac{i}{2}\,\frac{p_j}{p^2 + m_0^2}. \tag{52б}$$

Следует отметить [2], что оператор (52а) — это не более чем обычный оператор Ньютона–Вигнера, тогда как (52б) может быть интерпретирован [2, 24, 131] как определяющий границы области локализации эллиптического типа через его средние значения по рассматриваемому волновому пакету.

Следует подчеркнуть, что с математической точки зрения предыдущий формализм обосновывает результаты, представленные в работах, подобных [131, 133]. Разложим оператор $\hat{z}$ на две *билинейные* пары [2]:

$$\hat{z} = i\,\nabla_p = \frac{i}{2}\,\overset{\leftrightarrow}{\nabla}_p + \frac{i}{2}\,\overset{\leftrightarrow}{\nabla}_p^{(+)}, \tag{53}$$

где $\Psi^*\,\overset{\leftrightarrow}{\nabla}_p\,\Phi \equiv \Psi^*\nabla_p\Phi - \Phi\nabla_p\Psi^*$ и $\Psi^*\,\overset{\leftrightarrow}{\nabla}_p^{(+)}\,\Phi \equiv \Psi^*\nabla_p\Phi + \Phi\nabla_p\Psi^*$ и должно быть использовано подходящее пространство волновых пакетов [6, 121, 131, 133]. Его эрмитову составляющую [131, 133]

$$\hat{x} = \frac{i}{2}\,\overset{\leftrightarrow}{\nabla}_p, \tag{54}$$

которая, как ожидалось, дает обычную локализацию в точке, можно вычислить при явной записи

$$(\Psi,\, \hat{x}\,\Phi) = i \int \frac{d^3p}{p_0}\, \Psi^*(p)\, \nabla_p\, \Phi(p) \tag{55}$$

с наложением эрмитовости, т. е. при требовании действительности диагональных элементов. Расчеты дают

$$\Re\big(\Phi,\, \hat{x}\,\Phi\big) = i \int \frac{d^3p}{p_0}\, \Phi^*(p)\, \overset{\leftrightarrow}{\nabla}_p\, \Phi(p), \tag{56}$$

предлагая заимствовать только лоренц-инвариантную величину (54) как билинейный эрмитов оператор координаты. Теперь, после интегрирования по частям, отбросив интеграл по поверхности, можно убедиться в том, что (54) является *эквивалентом обычного оператора Ньютона–Вигнера*:

$$\hat{x}_h \equiv \frac{i}{2}\, \overset{\leftrightarrow}{\nabla}_p \equiv i\,\nabla_p - \frac{i}{2}\,\frac{\mathbf{p}}{p^2+m^2} \equiv \mathrm{N}-\mathrm{W}. \tag{57}$$

Мы оставили (билинейную) антиэрмитову компоненту

$$\hat{y} = \frac{i}{2}\, \overset{\leftrightarrow}{\nabla}{}_p^{(+)}, \tag{58}$$

чьи *средние значения* по рассматриваемым состояниям (волнового пакета) могут считаться как дающие [6,121,131,133] границы эллиптической области локализации.

После отхода, связанного с (53)–(58), теперь давайте вернемся назад к формализму, выраженному с помощью (43)–(52). В общем оператор координаты расширенного типа $\hat{z}$ дает

$$\langle\Psi|\,\hat{z}\,|\Psi\rangle = (\alpha+\Delta\alpha) + i\,(\beta+\Delta\beta), \tag{59}$$

где $\Delta\alpha$ и $\Delta\beta$ — средние ошибки, встречаемые при измерении координаты и размеров области локализации соответственно. Представляет интерес оценить коммутаторы так $(i,j=1,2,3)$:

$$\left(\frac{i}{2}\,\frac{\overset{\leftrightarrow}{\partial}}{\partial p_i},\, \frac{i}{2}\,\frac{\overset{\leftrightarrow}{\partial}{}_{(+)}}{\partial p_j}\right) = \frac{i}{2\,p_0^2}\left(\delta_{ij} - \frac{2\,p_i p_j}{p_0^2}\right), \tag{60}$$

где из «неопределенности корреляций» следует

$$\Delta\alpha_i\;\Delta\beta_j \geqslant \frac{1}{4}\left|\left\langle \frac{1}{p_0^2}\left(\delta_{ij} - \frac{2\,p_i p_j}{p_0^2}\right)\right\rangle\right|. \tag{61}$$

2.2. Оператор 4-мерной координаты в уравнении Клейна–Гордона. В качестве *оператора 4-мерной координаты* можно предложить величину $\hat{z}^\mu = \hat{x}^\mu + i\hat{y}^\mu$, чья эрмитова (лоренц-ковариантная) часть может быть записана как:

$$\hat{x}^\mu = -\frac{i}{2}\frac{\overleftrightarrow{\partial}}{\partial p_\mu} \tag{62}$$

и связана с ее соответствующим «оператором» в 4-импульсном пространстве следующим образом:

$$\hat{p}^\mu_h = +\frac{i}{2}\frac{\overleftrightarrow{\partial}}{\partial x_\mu}. \tag{63}$$

Давайте вспомним пропорциональность между оператором 4-мерного импульса и оператором 4-мерной плотности тока в хронотопном пространстве, а также каноническое соответствие (в пространствах 4-мерной координаты и 4-мерного импульса) между «операторами» (см. предыдущий пункт)

$$m_0\,\hat{\rho} \equiv \hat{p}_0 = \frac{i}{2}\frac{\overleftrightarrow{\partial}}{\partial t}, \tag{64а}$$

$$m_0\,\hat{\mathbf{j}} \equiv \hat{\mathbf{p}} = -\frac{i}{2}\frac{\overleftrightarrow{\partial}}{\partial \mathbf{r}} \tag{64б}$$

и операторами

$$\hat{t} \equiv -\frac{i}{2}\frac{\overleftrightarrow{\partial}}{\partial p_0}, \tag{65а}$$

$$\hat{\mathbf{x}} \equiv \frac{i}{2}\frac{\overleftrightarrow{\partial}}{\partial \mathbf{p}}, \tag{65б}$$

где «оператор» 4-мерной координаты (65) можно рассмотреть как оператор 4-мерной плотности тока в пространстве энергии-импульса. Аналогичное рассмотрение может быть проведено на антиэрмитовы части (см. последнюю работу из [2]).

В заключение, опираясь на свойства оператора времени как максимально эрмитова оператора в нерелятивистском случае (см. п. 1.1), можно убедиться в том, что релятивистский оператор времени (65а) (в уравнении Клейна–Гордона) является также самосопряженным билинейным оператором в непрерывном спектре энергии и (максимальным) эрмитовым линейным оператором для свободно движущихся частиц (в связи с наличием нижнего нулевого предела для кинетической энергии или m_0 для полной энергии).

3. ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ НЕЭРМИТОВЫХ ГАМИЛЬТОНИАНОВ В МОДЕЛЬНЫХ ПОДХОДАХ: ЯДЕРНЫЕ ОПТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И МИКРОСКОПИЧЕСКАЯ КВАНТОВАЯ ДИССИПАЦИЯ

3.1. Ядерная оптическая модель. Начиная с пятидесятых годов для описания экспериментальных данных упругого рассеяния нуклонов на ядрах и более общих видов ядерных столкновений широко используется оптическая модель (см., например, [134–137], тогда как обобщенной оптической модели — методу связанных каналов с применением оптической модели в каждом канале нуклон-ядерного упругого или неупругого рассеяния — отвечает [138] со списком литературы). В такой модели гамильтониан содержит комплексный потенциал, а его мнимая часть описывает процессы поглощения, которые происходят при формировании составного ядра и последующего его распада. Относительно математических свойств гамильтониана с комплексным потенциалом мы ограничимся лишь ссылкой на работы [139, 140] (см. также ссылки, приведенные там), где изучались неунитарность и аналитическая структура S-матрицы, полнота волновых функций и некоторые другие свойства (также см. [141]).

3.2. Необратимость по времени. T-симметрия (или симметрия по отношению к обращению времени) — симметрия уравнений, описывающих законы физики, по отношению к операции замены времени t на $-t$ (т. е. к обращению времени), в квантовой механике математически записывается как равенство нулю коммутатора оператора гамильтониана и антиунитарного оператора обращения времени

$$T:\ t \to -t. \tag{66}$$

Физические величины, меняющие знак при обращении времени, называются T-нечетными, не меняющие знак — T-четными. Все массы и заряды, и остальные константы, не связанные со слабым взаимодействием, обладают симметрией при обращении времени.

Формулы классической механики, классической электродинамики, квантовой механики, теории относительности не меняются при обращении времени. Термодинамика, где действует второе начало термодинамики (закон неубывания энтропии), несимметрична относительно обращения времени, хотя на уровне механических законов, описывающих движение частиц термодинамической системы, время обратимо. Это связано с большей вероятностью пребывания термодинамической системы в макросостоянии, которое реализуется большим числом (равновероятных) микросостояний.

В микромире T-симметрия нарушается в слабых взаимодействиях. Любая разумная теория поля должна быть CPT-инвариантна (теорема Людерса–Паули). Однако CP-симметрия в стандартной модели нарушается: CP-нарушение наблюдается в слабых взаимодействиях в кварковом секторе модели

(СКМ-матрица). CP-нарушение теоретически может наблюдаться и в сильных взаимодействиях, но CP-нарушающий член здесь сильно ограничен ненаблюдением в эксперименте электрического дипольного момента нейтрона (см.: проблема слабого CP-нарушения, аксион). Из того, что CP-симметрия нарушена при сохранении CPT-симметрии, следует неинвариантность относительно T-симметрии.

Из симметрии относительно обращения времени выводится равенство нулю электрического дипольного момента элементарных частиц. Напротив, если какая-либо система обнаруживает ненулевой электрический дипольный момент, это означает, что она неинвариантна относительно обращения времени (а также относительно отражения координат) — T- и P-нечетна.

Двумерные представления по четности даются парой квантовых состояний, которые переходят одно в другое при определенной четности. Однако такое представление может всегда быть сведено к линейной комбинации состояний, каждое из которых является или четным, или нечетным. Следует отметить, что все неприводимые представления по четности являются одномерными. Теорема Крамерса (Kramers) устанавливает, что обращение по времени не требует этого свойства, потому что оно представляется антиэрмитовым оператором.

Отметим три наиболее важных свойства обращения по времени в квантовой механике:

1) оно должно быть представлено через антиунитарный оператор,

2) оно защищает невырожденность квантовых состояний через имеющийся электрический дипольный момент,

3) оно имеет двумерные представления со свойством $T^2 = -1$.

Оригинальность такого результата становится ясной, если сравнить его с четностью. Если четность превращает пару квантовых состояний одно в другое, то сумма и разница этих двух основных состояний хорошо определяют четность. Обратимость по времени не ведет себя таким образом. По-видимому, она может нарушаться теоремой, что все абелевы группы представляются с помощью одномерных неприводимых представлений. Причина этого состоит в том, что они могут быть представлены с помощью антиунитарного оператора (см., например, некоторые работы по нарушению инвариантности по времени в квантовой и ядерной физике [142–144]). Частным случаем описания T-неинвариантных взаимодействий представляют гамильтонианы, содержащие квантовую диссипацию.

3.3. Микроскопическая квантовая диссипация. На данное время хорошо известны различные подходы, разработанные с целью ввести диссипацию и описать декогерентные состояния в квантовой механике. Прежде всего следует отметить, что простое введение кванта времени, называемого *«хрононом»* («chronon», см., например, [145–147]), позволяет перейти от дифференциальных уравнений к конечно-разностным и, в частности, записать квантовые уравнения (такие как уравнения Шредингера, Лиувилля–фон Неймана и др.) следующими тремя способами: симметричным, с запаздыванием и с опережением. Уравнение Шредингера с запаздыванием описывает диссипативную систему достаточно простым и естественным образом как обменивающуюся энергией со средой (или теряющую энергию при взаимодействии со средой). Соответствующий неунитарный оператор эволюции во времени подчиняется закону полугрупп и связан с необратимыми процессами. Кроме того, подход с запаздыванием предоставляет интересный путь для решения «проблемы измерений» в квантовой механике, без неизбежного коллапса в формализме волновых функций: см. [147–151]. Теория хрононов может быть рассмотрена как некоторое специфическое описание эволюции во времени.

Следует подчеркнуть (как показано, например, в [152]), что упоминаемый дискретный подход может быть заменен на непрерывный за счет введения *неэрмитова* гамильтониана. Такие дальнейшие исследования можно найти, например, в работах [153–157] (с приведением обширной литературы в этих работах). Необходимо добавить, что требуется еще много работы для описания необратимости во времени на микроскопическом уровне. В самом деле, на данное время предложены разнообразные подходы, в которых вводятся новые параметры (упорядочения или диссипации) для описания микроскопической динамики (которые, в известном смысле, прокладывают мост между микроскопической структурой и макроскопическими характеристиками). Кроме гамильтониана Кальдиролы–Канаи (Caldirola–Kanai) [158, 159] (который использован, например, в [160])

$$\hat{H}_{\mathrm{CK}}(t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,\mathrm{e}^{-\gamma t} + V(x)\,\mathrm{e}^{\gamma t}, \tag{67}$$

можно отметить более простые подходы, основанные на решении уравнения Шредингера

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\,\Psi(x,t) = \hat{H}\Psi(x,t), \tag{68}$$

с вводом компоненты, описывающей диссипацию на микроскопическом уровне и определяемой через коэффициент угасания γ:

А) *Нелинейные (неэрмитовы) гамильтонианы*

$$\hat{H}_{nl} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) + \hat{W} \tag{69}$$

с «потенциальными» операторами $\hat{W}$ следующего типа:

1) оператор Костина (Kostin) (см. [161]):

$$\hat{W}_K = -\frac{i\hbar}{2m}\left\{\frac{\ln\Psi}{\Psi^*} - \left\langle\frac{\ln\Psi}{\Psi^*}\right\rangle\right\}; \tag{70}$$

2) оператор Альбрехта (Albrecht) (см. [162]):

$$\hat{W}_A(x) = \langle p \rangle \, (x - \langle x \rangle), \tag{71}$$

где $\langle\,\rangle$ — усреднение, выполняемое по $|\Psi(x)|^2$;

3) оператор Хассэ (Hasse) (см. [163]):

$$\hat{W}_H(x) = \frac{1}{4} \Big[x - \langle x \rangle, \; p + \langle p \rangle \Big]_+, \tag{72}$$

где $[A, B]_+$ — антикоммутатор $[A, B]_+ = AB + BA$.

В) *Линейные (неэрмитовы) гамильтонианы:*

1) гамильтониан Гизина (Gisin) (см. [164]):

$$\hat{H}_G = (1 - i\gamma) \, \hat{H} + i\gamma \langle \hat{H} \rangle; \tag{73}$$

2) гамильтониан Экснера (Exner) (см. [165]):

$$\hat{H}_E = \hat{H} + i \, \hat{W}(x) - i \, \langle \hat{W}(x) \rangle. \tag{74}$$

Также следует вспомнить «микроскопические модели и подходы» в духе работ [166], даже если они и не основаны на решении уравнения Шредингера.

Этот список гамильтонианов можно дополнить. До настоящего времени все они, по-видимому, еще не изучены достаточно глубоко. Отметим только как пример, что при изучении туннелирования с диссипацией в более глубоком рассмотрении было бы желательным принять такие явления, как «эффект Хартмана (Hartman effect)» (а также «обобщенный эффект Хартмана») [18, 19, 167–170] и связанные с ними другие: этой теме посвящено несколько работ (см., например, [171, 172]). В приложении в качестве метода расчета волновых функций при наличии диссипации мы представляем схему итераций (последовательных приближений), рассмотрев в качестве примера достаточно простой потенциал Альбрехта (см. приложение А). Этот наш подход может быть использован как для детального исследования возможных отклонений в эффекте Хартмана, так и для анализа новых необратимых явлений. В заключение вспомним, что, как показано в [153], оба обобщенных уравнения Шредингера, введенные Кальдиролой [154, 173] с целью описать два различных диссипативных процесса (таких как поведение открытых систем и излучение заряженной частицы), обладают одинаковой алгебраической структурой типа допустимых групп Ли [174].

4. ВЫВОДЫ

1. В этой работе показано, что эрмитов оператор времени (1), являясь несамосопряженным, тем не менее успешно работает при описании любых квантовых столкновений или движения в непрерывном спектре энергии в нерелятивистской квантовой механике и в одномерной квантовой электродинамике. Однозначность (максимального) эрмитова оператора времени (1) прямо следует из однозначности преобразования Фурье от представления по времени к представлению по энергии. Оператор времени (1) успешно применен при определении времен туннелирования (см. [18–21]), а также при временном описании ядерных реакций и распадов (см. [7, 8] и также [175, 176]). Показаны преимущества такого подхода по сравнению с подходом POVM, который оказывается неприменимым для трехмерного описания столкновений частиц для широкого класса гамильтонианов.

На основании математических свойств указанного оператора времени и без введения дополнительных физических постулатов наглядно показано, что *время* может быть рассмотрено как квантово-механическая наблюдаемая с такой же степенью, как и другие физические величины (энергия, импульс, пространственные координаты...). Анализ коммутационных соотношений (8), (21), (32) и соотношений неопределенности (19) показывает, что они аналогичны другим известным парам канонически сопряженных наблюдаемых (таких, как, например, координата $\hat{x}$ и импульс $\hat{p}_x$ в случае (19)). Конечно, наши новые соотношения не заменяют, а только расширяют понимание неопределенности времени и энергии, данное, например, в [49]. В п. 1.6 проанализированы свойства времени как наблюдаемой для квантово-механических систем с *дискретным* спектром энергии.

2. Показано, что во временном анализе ядерных столкновений и распадов [7, 8] оператор времени (1) и соотношения (12), (13), (14), (25), (26) уже эффективно применяются как при переходе от задержки к опережению в ядерных реакциях в области искаженных резонансов [175], так и при описании временных резонансов (взрывов) высоковозбужденных компаунд-ядер и компаунд-фрагментов [176]. Отметим, что, подобно времени, в качестве квантовой наблюдаемой можно рассматривать и другие величины, которым отвечает (максимальный) эрмитов оператор: например, фон Нейман [6, 125] рассматривал оператор импульса $-i\partial/\partial x$ в полупространстве с жесткой стенкой, ортогональной к оси x в точке $x = 0$, и оператор радиального импульса $-i\partial/\partial r$, которые оба действуют на волновой пакет, определенный лишь на положительной полуоси x или радиальной полуоси r. В п. 1.5 рассмотрен новый «гамильтонов подход», а именно, введен аналог «гамильтониана» для оператора времени.

3. В разд. 2 нами предложено обобщение оператора времени (или, вернее, оператора пространства-времени), который может быть использован в реля-

тивистской квантовой механике. Например, для уравнения Клейна–Гордона мы показали, что эрмитова часть оператора трехмерной координаты $\hat{x}$ — это не более чем оператор Ньютона–Вигнера, соответствующий координате «точечного типа», тогда как его антиэрмитова часть может быть связана с оператором, определяющим размеры расширенной локализации эллиптического типа. Чтобы иметь дело с четырехмерным самосопряженным оператором, необходимо найти, что оператор времени является самосопряженным для неограниченной области спектра энергии. Но он является (максимальным) эрмитовым оператором, поскольку кинетическая энергия, а также полная энергия ограничены нулевой энергией, как и для свободных частиц. В последнем случае нами это выполнено в значительной степени при помощи билинейных форм, которые освобождаются от нижней точки, которая соответствует нулевой скорости, путем ее исключения. Было бы интересно выполнить дальнейшие обобщения операторов 3-мерной и 4-мерной координат в других релятивистских случаях и проанализировать проблему локализации, связанную с частицами Дирака или в 2-мерной и 3-мерной квантовой электродинамике. Такая работа сейчас нами проводится по временному анализу в 2-мерной квантовой электродинамике в применении, например, к слегка нарушенным (или почти полностью) внутренним отражениям. Далее должна быть проведена работа и в объединенном описании частиц и античастиц.

4. Неэрмитовы гамильтонианы и неунитарные операторы эволюции во времени играют важную роль в квантовой теории микроскопической диссипации [50–66]: а именно, при описании декогерентных состояний на основе учета взаимодействия со средой [146, 147]. Этой теме посвящен разд. 3, где также рассмотрен вопрос столкновений в абсорбирующей среде. В частности, здесь рассмотрена оптическая модель в ядерной физике с учетом того, что неэрмитовы операторы обнаружены даже при туннелировании, например, в делении с квантовой диссипацией и квантовым трением. Что касается квантовой теории микроскопической диссипации, то среди множества подходов к описанию необратимости во времени в квантовой механике, которые мы обсудили в п. 3.3, указано возможное решение проблемы квантовых измерений (через взаимодействия со средой) с помощью введения конечно-разностных уравнений (например, в терминах квантов времени, называемых «хрононами»).

Благодарности. Авторы глубоко признательны Ю. Ахаронову (Y. Aharonov), А. С. Холево (A. S. Holevo), В. Л. Любошицу (V. L. Lyuboshitz), В. Петрилло (V. Petrillo), Г. Салези (G. Salesi) и Б. Н. Захарьеву (B. N. Zakhariev) за несомненно интересные обсуждения и дискуссии, стимулирующие все эти исследования.

Приложение

НЕСТАЦИОНАРНОЕ УРАВНЕНИЕ ШРЕДИНГЕРА С ДИССИПАТИВНОЙ КОМПОНЕНТОЙ

Введение. Рассмотрим нестационарное уравнение Шредингера:

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Psi(x,t) = \left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x,t)\right)\Psi(x,t), \tag{75}$$

где используется нормировка $\hbar = 1$. Зависящую от времени волновую функцию (ВФ) $\Psi(x,t)$ (которую будем рассматривать также как волновой пакет (ВП)) представим в виде интеграла Фурье:

$$\Psi(x,t) = \int\limits_0^{E_0} g(E)\,\mathrm{e}^{-iEt}\,\varphi(E,x)\,dE, \tag{76}$$

где $\varphi(E,x)$ — компонента, уже не зависящая от времени t; $g(E)$ — весовой множитель. Функцию $g(E)$ выберем в виде *гауссиана* вида

$$g(E) = A\,\mathrm{e}^{-a^2(k-\bar{k})^2}, \tag{77}$$

где A и a — постоянные; $\bar{k}$ — выбранное значение импульса, относительно которого выполняется локализация ВП.

Подставим фурье-разложение (76) для ВФ в уравнение (75). Левую часть уравнения преобразуем так:

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Psi(x,t) = \int\limits_0^{E_0} g(E)\,\mathrm{e}^{-iEt}\,\varphi(E,x)\,E\,dE, \tag{78}$$

а правую часть уравнения (75) преобразуем так:

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x,t)\right)\Psi(x,t) = -\int\limits_0^{E_0} g(E)\,\mathrm{e}^{-iEt}\frac{\partial^2\varphi(E,x)}{\partial x^2}\,dE + \\ + \int\limits_0^{E_0} g(E)V(x,\bar{E},t)\,\mathrm{e}^{-iEt}\varphi(E,x)\,dE. \tag{79}$$

На основе (78) и (79) уравнение (75) преобразуется в такое:

$$\int\limits_0^{E_0} g(E)\,\mathrm{e}^{-iEt}\,\varphi(E,x)\;E\,dE = -\int\limits_0^{E_0} g(E)\,\mathrm{e}^{-iEt}\,\frac{\partial^2\varphi(E,x)}{\partial x^2}\,dE + \\ + \int\limits_0^{E_0} g(E)\,V(x,\bar{E},t)\,\mathrm{e}^{-iEt}\,\varphi(E,x)\,dE. \quad (80)$$

Применим к этому уравнению обратное преобразование Фурье. Теперь левая часть преобразуется так:

$$\frac{1}{2\pi}\int dt\,\mathrm{e}^{iE't}\int\limits_0^{E_0} g(E)\,\mathrm{e}^{-iEt}\,\varphi(E,x)\;E\,dE = \\ = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{E_0} dE\;E\,g(E)\,\varphi(E,x)\int \mathrm{e}^{i(E'-E)t}dt = \\ = \int\limits_0^{E_0} g(E)\,\varphi(E,x)\delta(E'-E)\;E\,dE = g(E')\,E'\,\varphi(E',x), \quad (81)$$

а правая часть так:

$$-\frac{1}{2\pi}\int dt\,\mathrm{e}^{iE't}\int\limits_0^{E_0} g(E)\,\mathrm{e}^{-iEt}\,\frac{\partial^2\varphi(E,x)}{\partial x^2}\,dE + \\ + \frac{1}{2\pi}\int dt\,\mathrm{e}^{iE't}\int\limits_0^{E_0} g(E)\,V(x,\bar{E},t)\,\mathrm{e}^{-iEt}\,\varphi(E,x)\,dE = \\ = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{E_0} dE\,g(E)\frac{\partial^2\varphi(E,x)}{\partial x^2}\int \mathrm{e}^{i(E'-E)t}\,dt + \\ + \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{E_0} dE\,g(E)\,\varphi(E,x)\int V(x,\bar{E},t)\,\mathrm{e}^{i(E'-E)t}\,dt = \\ = -g(E')\frac{\partial^2\varphi(E',x)}{\partial x^2} + \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{E_0} dE\,g(E)\,\varphi(E,x)\int V(x,\bar{E},t)\,\mathrm{e}^{i(E'-E)t}\,dt. \quad (82)$$

В результате уравнение (80) получает вид

$$g(E')\,E'\,\varphi(E',x) = -g(E')\frac{\partial^2\varphi(E',x)}{\partial x^2} + \\ + \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{E_0} dE\,g(E)\,\varphi(E,x)\int V(x,\bar{E},t)\,\mathrm{e}^{i(E'-E)t}\,dt. \quad (83)$$

Потенциал Альбрехта. В качестве потенциала $V(x)$ выберем потенциал Альбрехта:

$$V(x) = V_0(x) + \gamma W_A(x). \quad (84)$$

Здесь γ — постоянная, $V_0(x)$ — стационарная компонента от $V(x)$ и $W_A(x)$ — диссипативная компонента от $V(x)$, имеющая вид

$$W_A(x) = \langle p\rangle(x - \langle x\rangle), \quad (85)$$

где усреднение выполняется с помощью интегрирования по dx с функциями $\Psi^*(x,t)$ и $\Psi(x,t)$. Найдем усредненные составляющие в правой части выражения (85):

$$\langle p\rangle = -i\int dx\int\limits_0^{E_0} dE_1\int\limits_0^{E_0} dE_2\,g(E_1)\,g(E_2)\,\mathrm{e}^{i(E_1-E_2)t}\,\varphi^*(E_1,x)\,\frac{\partial\varphi(E_2,x)}{\partial x}, \\ \langle x\rangle = \int dx\int\limits_0^{E_0} dE_3\int\limits_0^{E_0} dE_4\,g(E_3)\,g(E_4)\,\mathrm{e}^{i(E_3-E_4)t}\,x\,\varphi^*(E_3,x)\,\varphi(E_4,x). \quad (86)$$

С учетом этого запишем диссипативную компоненту W_A:

$$W_A(x,t) = -i\int dx_1\int dx_2\int\limits_0^{E_0} dE_1\int\limits_0^{E_0} dE_2\int\limits_0^{E_0} dE_3\int\limits_0^{E_0} dE_4 g(E_1)\,g(E_2)\,g(E_3)\,g(E_4)\times \\ \times\exp\left[i(E_1-E_2+E_3-E_4)t\right](x-x_2)\,\varphi^*(E_1,x_1)\times \\ \times\frac{\partial\varphi(E_2,x_1)}{\partial x_1}\,\varphi^*(E_3,x_2)\,\varphi(E_4,x_2). \quad (87)$$

Теперь запишем полный потенциал $V(x)$:

$$V(x,t) = \\ = V_0(x) - i\gamma \int dx_1 \int dx_2 \int_0^{E_0} dE_1 \int_0^{E_0} dE_2 \int_0^{E_0} dE_3 \int_0^{E_0} dE_4 g(E_1) g(E_2) g(E_3) g(E_4) \times \\ \times \exp\,[i(E_1 - E_2 + E_3 - E_4)t](x - x_2)\varphi^*(E_1, x_1) \times \\ \times \frac{\partial \varphi(E_2, x_1)}{\partial x_1} \varphi^*(E_3, x_2) \varphi(E_4, x_2). \quad (88)$$

С учетом этого найдем интеграл по времени в правой части (83):

$$\frac{1}{2\pi} \int V(x, \bar{E}, t)\, \mathrm{e}^{i(E'-E)t}\, dt = V_0(x)\delta(E' - E) - \\ - i\gamma \int dx_1 \int dx_2 \int_0^{E_0} dE_1 \int_0^{E_0} dE_2 \int_0^{E_0} dE_3 \int_0^{E_0} dE_4 \times \\ \times g(E_1)\, g(E_2)\, g(E_3)\, g(E_4)\, (x - x_2) \times \\ \times \varphi^*(E_1, x_1)\, \frac{\partial \varphi(E_2, x_1)}{\partial x_1}\, \varphi^*(E_3, x_2)\, \varphi(E_4, x_2) \times \\ \times \delta(E' - E + E_1 - E_2 + E_3 - E_4). \quad (89)$$

Теперь в правой части выражения (83) найдем второе слагаемое полностью:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{E_0} dE g(E) \varphi(E, x) \int V(x, \bar{E}, t)\, \mathrm{e}^{i(E'-E)t} dt = \\ = \int_0^{E_0} dE g(E) \varphi(E, x) V_0(x) \delta(E' - E) - i\gamma \int_0^{E_0} dE\, g(E)\, \varphi(E, x) \times \\ \times \int dx_1 \int dx_2 \int_0^{E_0} dE_1 \int_0^{E_0} dE_2 \int_0^{E_0} dE_3 \int_0^{E_0} dE_4 g(E_1)\, g(E_2)\, g(E_3)\, g(E_4) \times \\ \times (x - x_2) \varphi^*(E_1, x_1)\, \frac{\partial \varphi(E_2, x_1)}{\partial x_1}\, \varphi^*(E_3, x_2)\, \varphi(E_4, x_2) \times \\ \times \delta(E' - E + E_1 - E_2 + E_3 - E_4) = g(E')\, \varphi(E', x)\, V_0(x) - i\gamma \times \\ \times \int dx_1 \int dx_2 \int_0^{E_0} dE_1 \int_0^{E_0} dE_2 \int_0^{E_0} dE_3 \int_0^{E_0} dE_4 g(E_1)\, g(E_2)\, g(E_3)\, g(E_4)\, g(E'') \times \\ \times (x - x_2) \varphi^*(E_1, x_1) \frac{\partial \varphi(E_2, x_1)}{\partial x_1} \varphi^*(E_3, x_2) \varphi(E_4, x_2) \varphi(E'', x), \quad (90)$$

где
$$E'' = E' + E_1 - E_2 + E_3 - E_4. \tag{91}$$

С учетом найденного уравнение (83) преобразуется к такому (с заменой обозначений $E' \to E$):

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V_0(x) - E\right)\varphi(E,x) =$$
$$= i\gamma \int dx_1 \int dx_2 \int_0^{E_0} dE_1 \int_0^{E_0} dE_2 \int_0^{E_0} dE_3 \int_0^{E_0} dE_4 \frac{g(E_1)\,g(E_2)\,g(E_3)\,g(E_4)\,g(E'')}{g(E)} \times$$
$$\times (x - x_2)\varphi^*(E_1, x_1)\,\frac{\partial\varphi(E_2, x_1)}{\partial x_1}\,\varphi^*(E_3, x_2)\,\varphi(E_4, x_2)\varphi(E'', x). \tag{92}$$

Таким образом, мы получили уравнение, не зависящее от времени t, но учитывающее диссипацию. Можно видеть, что параметр γ определяет степень диссипации в исследуемом процессе. Если он стремится к нулю, тогда уравнение (91) превращается точно в стационарное уравнение Шредингера с потенциалом $V_0(x)$ и без диссипации, и мы переходим к стационарному процессу.

Метод последовательных приближений. Считая коэффициент γ малым, будем искать решение неизвестной функции $\varphi(x)$ в виде
$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + \gamma\varphi_1(x), \tag{93}$$

где в качестве функции $\varphi_0(x)$ выберем ВФ стационарного уравнения Шредингера с потенциалом $V_0(x)$ при энергии E_0:

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V_0(x)\right)\varphi_0(x) = E_0\varphi_0(x). \tag{94}$$

Подставляя решение (93) в уравнение (91), мы получим новое уравнение со слагаемыми при множителях γ^n с разными степенями n. Выпишем это уравнение с точностью до γ^1:

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V_0(x) - E\right)\Big(\varphi_0(E,x) + \gamma\varphi_1(E,x)\Big) =$$
$$= i\gamma \int dx_1 \int dx_2 \int_0^{E_0} dE_1 \int_0^{E_0} dE_2 \int_0^{E_0} dE_3 \int_0^{E_0} dE_4 \frac{g(E_1)\,g(E_2)\,g(E_3)\,g(E_4)\,g(E'')}{g(E)} \times$$
$$\times (x - x_2)\varphi_0^*(E_1, x_1)\,\frac{\partial\varphi_0(E_2, x_1)}{\partial x_1}\,\varphi_0^*(E_3, x_2)\,\varphi_0(E_4, x_2)\varphi_0(E'', x). \tag{95}$$

Мы видим, что в правую часть этого уравнения не входит неизвестная $\varphi_1(x)$!

Теперь рассмотрим случай

$$E = E_0. \tag{96}$$

Тогда распишем в (95) слагаемые при разных степенях γ отдельно:

$$\gamma^0 : \left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V_0(x) - E_0\right)\varphi_0(E_0, x) = 0,$$

$$\gamma^1 : \left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V_0(x) - E_0\right)\varphi_1(E_0, x) =$$

$$= i\gamma \int dx_1 \int dx_2 \int\limits_0^{E_0} dE_1 \int\limits_0^{E_0} dE_2 \int\limits_0^{E_0} dE_3 \int\limits_0^{E_0} dE_4 \frac{g(E_1)\, g(E_2)\, g(E_3)\, g(E_4)\, g(E'')}{g(E_0)} \times$$

$$\times (x - x_2)\varphi_0^*(E_1, x_1)\, \frac{\partial \varphi_0(E_2, x_1)}{\partial x_1}\, \varphi_0^*(E_3, x_2)\, \varphi_0(E_4, x_2)\, \varphi_0(E'', x), \tag{97}$$

где

$$E'' = E_0 + E_1 - E_2 + E_3 - E_4. \tag{98}$$

Здесь первое уравнение — это тождество по условию задачи. Второе уравнение определяет неизвестную функцию φ_1 на основе заданной φ_0. Оно является (обыкновенным ?) дифференциальным уравнением второго порядка, и для его решения применимы методы численного решения таких уравнений.

Решение для поправки φ_1. Для дальнейшего решения уравнения (97) нам следует знать неизвестную поправку φ_1. Для удобства обозначим правую часть в уравнении как

$$f(x) = i\gamma \int dx_1 \int dx_2 \int\limits_0^{E_0} dE_1 \int\limits_0^{E_0} dE_2 \int\limits_0^{E_0} dE_3 \int\limits_0^{E_0} dE_4 \times$$

$$\times \frac{g(E_1)\, g(E_2)\, g(E_3)\, g(E_4)\, g(E'')}{g(E_0)} \times$$

$$\times (x - x_2)\varphi_0^*(E_1, x_1)\, \frac{\partial \varphi_0(E_2, x_1)}{\partial x_1}\, \varphi_0^*(E_3, x_2)\, \varphi_0(E_4, x_2)\varphi_0(E'', x). \tag{99}$$

Тогда уравнение (97) для определения функции можно переписать в виде

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V_0(x) - E_0\right)\varphi_1(E_0, x) = f(x). \tag{100}$$

Домножив это уравнение слева на волновую функцию $\varphi_0(x)$, получим

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left[\varphi_0^2(x)\, \frac{\partial}{\partial x}\, \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_0(x)}\right] = \varphi_0(x)\, f(x). \tag{101}$$

Учитывая, что функции $\varphi_0(x)$ и $f(x)$ известны, проинтегрируем это уравнение по dx:

$$-\varphi_0^2(x)\,\frac{\partial}{\partial x}\,\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_0(x)} = \int \varphi_0(x)\,f(x)\;dx + C_1. \tag{102}$$

Далее мы не будем учитывать особенностей. Тогда из (102) находим

$$\frac{\partial}{\partial x}\,\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_0(x)} = -\,\frac{1}{\varphi_0^2(x)}\left\{\int \varphi_0(x)\,f(x)\;dx + C_1\right\}. \tag{103}$$

Интегрируя это уравнение по dx вновь, получим

$$\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_0(x)} = -\int \frac{1}{\varphi_0^2(x)}\left[\int \varphi_0(x)\,f(x)\;dx + C_1\right]dx + C_2. \tag{104}$$

Отсюда получаем окончательное *точное* решение для неизвестной функции φ_1:

$$\varphi_1(x) = -\,\varphi_0(x)\left\{\int \frac{1}{\varphi_0^2(x)}\left[\int \varphi_0(x)\,f(x)\;dx + C_1\right]dx + C_2\right\}. \tag{105}$$

Отсюда можно предположить, что с помощью констант C_1 и C_2 можно деформировать поправку φ_1 при заданной волновой функции φ_0. Это может оказаться очень полезным инструментом при дальнейшем моделировании новых квантовых систем с диссипацией.

Анализ особенностей поправки φ_1 в узлах функции φ_0. Анализируя вид (105) найденного решения, можно обнаружить, что оно в знаменателе содержит волновую функцию φ_0. Для основного связанного состояния такая волновая функция узлов не содержит, поэтому решение (105) не вызывает вопросов и его можно использовать. Однако во всех возбужденных связанных состояниях в дискретном спектре энергии, а также в состояниях в непрерывном спектре энергии эта волновая функция φ_0 узлы имеет всегда. Можно было бы предположить, что в этих точках поправка φ_1 должна иметь расходимость. Отсюда появляется вопрос о сильной ограниченности найденного решения (105), что могло бы сделать его бессмысленным. Давайте проанализируем, расходится ли решение (105) для поправки φ_1 в точках $x_{\rm nod}$, где волновая функция φ_0 имеет узлы: $\varphi_0(x_{\rm nod}) = 0$.

Выберем постоянную C_1 так, чтобы выражение с интегралом

$$\int \varphi_0(x)\,f(x)\;dx + C_1$$

стремилось к нулю в точке $x_{\rm nod}$. Отсюда получим условие для определения C_1:

$$C_1 = -\int \varphi_0(x)\,f(x)\;dx\,\Bigg|_{x\to x_{\rm nod}}. \tag{106}$$

При таком условии мы получаем неопределенность для подынтегральной функции в решении (105). Для ее раскрытия воспользуемся правилом Лопиталя и получим

$$\frac{1}{\varphi_0^2(x)}\left[\int \varphi_0(x)\, f(x)\; dx + C_1\right]\Bigg|_{x\to x_{\rm nod}} = \frac{\varphi_0(x)\, f(x)}{2\,\varphi_0(x)\,\varphi_0'(x)}\Bigg|_{x\to x_{\rm nod}} = \\ = \frac{f(x)}{2\,\varphi_0'(x)}\Bigg|_{x\to x_{\rm nod}}. \quad (107)$$

Следует ожидать, что в узле производная φ_0' отлична от нуля. В таком случае как это решение, так и решение (105) для поправки φ_1 в узлах расходимостей не имеет. *Поэтому оно может быть применено к задачам с любыми состояниями, где волновая функция $\varphi_0(x)$ имеет узлы, и в частности, к задачам с непрерывным спектром энергии, где есть туннелирование через барьер!* Это чрезвычайно повышает интерес к найденному решению.

С учетом найденного предела найдем вид коррекции φ_1 в узлах:

$$\varphi_1(x) = -\,\varphi_0(x)\left\{\int \frac{1}{\varphi_0^2(x)}\left[\int \varphi_0(x)\, f(x)\; dx + C_1\right]\, dx + C_2\right\} = \\ = -\varphi_0(x)\left\{\int \frac{f(x)}{2\,\varphi_0'(x)}\; dx + C_2\right\}. \quad (108)$$

Мы видим, что в общем случае в узлах волновой функции $\varphi_0(x)$ ее коррекция $\varphi_1(x)$ также стремится к нулю. *Таким образом, найденное решение для коррекции расходимостей не имеет. Также видно, что с помощью одной постоянной C_2 можно деформировать решение как для поправки $\varphi_1(x)$, так и для волновой функции в целом.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Pauli W.* Handbuch der Physik. V. 5/1. Ed.: S. Fluegge. Berlin, 1926. P. 60; *Pauli W.* General Principles of Quantum Theory. Berlin: Springer, 1980.
2. *Olkhovsky V. S., Recami E.* Space-time Shifts and Cross-sections in Collisions between Relativistic Wave Packets // Nuovo Cim. A. 1968. V. 53, No. 3. P. 610–624; *Olkhovsky V. S., Recami E.* About Collision-process Lifetimes and Causality // Nuovo Cim. A. 1969. V. 63, No. 3. P. 814–826.
3. *Olkhovsky V. S., Recami E.* About a Space-time Operator in Collision Descriptions // Lett. Nuovo Cim. (First Series). 1970. V. 4, No. 24. P. 1165–1173.
4. *Ольховский В. С.* О проблеме оператора времени и продолжительностей столкновений // Укр. физ. журн. 1973. Т. 18. С. 1910.
5. *Olkhovsky V. S., Recami E., Gerasimchuk A.* Time Operator in Quantum Mechanics: Nonrelativistic Case // Nuovo Cim. A. 1974. V. 22, No. 2 P. 263–278.

6. *Recami E.* A Time Operator and the Time-energy Uncertainty Relation // The Uncertainty Principle and Foundation of Quantum Mechanics / Eds.: C. Price and S. Chissik. London, 1977. Ch. 4. P. 21–28;
   Recami E. An Operator for the Observable Time // Proc. of the XIII Karpatz Winter School on Theor. Phys. «Recent Developments in Relativistic Q.F.T. and Its Application», Wroclaw, 1976. V. II / Ed.: W. Karwowski. Wroclaw Univ. Press, 1976. P. 251–265.
7. *Ольховский В. С.* К исследованию ядерных реакций распадов с помощью анализа их длительностей // ЭЧАЯ. 1984. Т. 15, вып. 2. С. 293–327.
8. *Olkhovsky V. S.* Nonstationary Characteristics in Study of Nuclear Reaction Mechanism and Kinetics and Compound-nucleus Properties // Nukleonika. 1990. V. 35, No. 1–3. P. 99–144;
   Olkhovsky V. S. Time Analysis of Nuclear Collisions and Decays // Atti Accademia Peloritana dei Pericolanti. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. 1992. V. 70. P. 21;
   Olkhovsky V. S. On Time as a Quantum-physical Observable Quantity // AIP Conf. Proc. «Mysteries, Puzzles and Paradoxes in Quantum Mechanics». V. 461 / Ed.: R. Bonifaccio. Amer. Inst. of Phys. Woodbury, NY, 1999. P. 272–276.
9. *Holevo A. S.* Estimation of Shift Parameters of a Quantum State // Rep. Math. Phys. 1978. V. 13, No. 3. P. 379–399;
   Holevo A. S. Probabilistic and Statistical Aspects of Quantum Theory. V. 1. Ser. «Statistics and Probability». Amsterdam: North-Holland, 1982.
10. *Srinivas M. D., Vijayalakshmi R.* // Pramana J. Phys. 1981. V. 16. P. 173.
11. *Busch P., Grabowski M., Lahti P. J.* Time Observables in Quantum Theory // Phys. Lett. A. 1994. V. 191, No. 5–6. P. 357–361.
12. *Kobe D. H., Aguilera-Navarro V. C.* Derivation of the Energy-time Uncertainty Relation // Phys. Rev. A. 1994. V. 50, No. 2. P. 933–938.
13. *Blanchard P., Jadczyk A.* Time of Events in Quantum Theory // Helvetica Physica Acta. 1996. V. 69, No. 5–6. P. 613–635.
14. *Grot N., Rovelli C., Tate R. S.* Time of Arrival in Quantum Mechanics // Phys. Rev. A. 1996. V. 54, No. 6. P. 4676–4690.
15. *Leo'n J.* Time-of-arrival Formalism for the Relativistic Particle // J. Phys. A. 1997. V. 30, No. 13. P. 4791–4801.
16. *Aharonov Y. et al.* Measurement of Time of Arrival in Quantum Mechanics // Phys. Rev. A. 1998. V. 57, No. 6. P. 4130–4139.
17. *Atmanspacher H., Amann A.* Positive-operator-valued Measures and Projection-valued Measures of Noncommutative Time Operators // Intern. J. Theor. Phys. 1998. V. 37, No. 2. P. 629–650.
18. *Olkhovsky V. S., Recami E.* Recent Developments in the Time Analysis of Tunneling Processes // Phys. Rep. 1992. V. 214, No. 6. P. 339–356;
    Olkhovsky V. S. et al. More about Tunnelling Times, the Dwell Time and the «Hartman Effect» // J. Phys. I (France). 1995. V. 5, No. 10. P. 1351–1365.
19. *Olkhovsky V. S., Recami E., Jakiel J.* Unified Time Analysis of Photon and Particle Tunnelling // Phys. Rep. 2004. V. 398, No. 3. P. 133–178.
20. *Olkhovsky V. S., Recami E.* Time as a Quantum Observable // Intern. J. Mod. Phys. A. 2007. V. 22, No. 28. P. 5063–5067.

21. *Olkhovsky V. S., Agresti A.* Developments in Time Analysis of Particles and Photon Tunnelling // Proc. of the Adriatico Research Conf. on Tunnelling and Its Implications (ICTP 1996), Trieste, Italy, 1996. World Sci., 1996. P. 327–355.
22. *Giannitrapani R.* Positive-operator-valued Time Observable in Quantum Mechanics // Intern. J. Theor. Phys. 1997. V. 36, No. 7. P. 1575–1584.
23. *Kijowski J.* Comment on «Arrival Time in Quantum Mechanics» and «Time of Arrival in Quantum Mechanics» // Phys. Rev. A. 1999. V. 59, No. 1. P. 897–899.
24. *Toller M.* Localization of Events in Space-time // Ibid. No. 2. P. 960–970.
25. *Delgado V.* Quantum Probability Distribution of Arrival Times and Probability Current Density // Ibid. P. 1010–1020.
26. *Muga J., Palao J., Leavens C.* Arrival Time Distributions and Perfect Absorption in Classical and Quantum Mechanics // Phys. Lett. A. 1999. V. 253, No. 1–2. P. 21–27. *Egusquiza I. L., Muga J. G.* Free-motion Time-of-arrival Operator and Probability Distribution // Phys. Rev. A. 1999. V. 61, No. 1. P. 012104–012112.
27. *Kocha'nski P., Wo'dkievicz K.* Operational Time of Arrival in Quantum Phase Space // Ibid. V. 60, No. 4. P. 2689–2699.
28. *Góźdź A., Dębicki M.* Time Operator and Quantum Projection Evolution // Phys. At. Nucl. 2007. V. 70, No. 3. P. 529–536.
29. *Wang Z.-Y., Xiong C.-D.* How to Introduce Time Operator // Ann. Phys. 2007. V. 322, No. 10. P. 2304–2314.
30. *Захарьев Б. Н., Костов Н. А., Плеханов Е. Б.* Точно решаемые одно- и многоканальные модели (уроки квантовой интуиции) // ЭЧАЯ. 1990. Т. 21, вып. 4. С. 914–962.
31. *Захарьев Б. Н., Чабанов В. М.* Качественная теория управления спектрами, рассеянием, распадами (уроки квантовой интуиции) // ЭЧАЯ. 1994. Т. 25, вып. 6. С. 1561–1597.
32. *Захарьев Б. Н., Чабанов В. М.* К качественной теории элементарных преобразований одно- и многоканальных квантовых систем в подходе обратной задачи (их конструирование с заданными спектральными параметрами) // ЭЧАЯ. 1999. Т. 30, вып. 2. С. 277–320.
33. *Захарьев Б. Н., Чабанов В. М.* Спектроскопия, потенциальные барьеры, резонансы (новые успехи квантового дизайна) // ЭЧАЯ. 2002. Т. 33, вып. 2. С. 348–392.
34. *Cooper F., Khare A., Sukhatme U.* Supersymmetry and Quantum Mechanics // Phys. Rep. 1995. V. 251, No. 5–6. P. 267–385; hep-th/9405029.
35. *Lahiri A., Roy P. K., Bagchi B.* Supersymmetry in Quantum Mechanics // Intern. J. Mod. Phys. A. 1990. V. 5, No. 8. P. 1383–1456.
36. *Witten E.* Dynamical Breaking of Supersymmetry // Nucl. Phys. B. 1981. V. 188, No. 3. P. 513–554.
37. *Gendenshtein L.* Derivation of Exact Spectra of the Schrödinger Equation by Means of Supersymmetry // JETP Lett. 1983. V. 38. P. 356.
38. *Sukumar C. V.* Supersymmetry, Factorisation of the Schrödinger Equation and a Hamiltonian Hierarchy // J. Phys. A. 1985. V. 18, No. 2. P. L57–L61.
39. *Andrianov A. A., Borisov N. V., Ioffe M. V.* The Factorization Method and Quantum Systems with Equivalent Energy Spectra // Phys. Lett. A. 1984. V. 105, No. 1–2. P. 19–22.

40. *Andrianov A. A., Borisov N. V., Ioffe M. V.* Factorization Method and Darboux Transformation for Multidimensional Hamiltonians // Theor. Math. Phys. 1984. V. 61, No. 2. P. 1078–1088.
41. *Maydanyuk S. P.* SUSY-hierarhy of One-dimensional Reflectionless Potentials // Ann. Phys. 2005. V. 316, No. 2. P. 440–465; hep-th/0407237.
42. *Maydanyuk S. P.* New Exactly Solvable Reflectionless Potentials of Gamov's Type // Surv. HEP. 2004. V. 19, No. 3–4. P. 175–192; nucl-th/0504077.
43. *Andrianov A. A., Cannata F., Sokolov A. V.* Non-linear Supersymmetry for Non-Hermitian, Non-diagonalizable Hamiltonians. I. General Properties // Nucl. Phys. B. 2007. V. 773, No. 3. P. 107–136; math-ph/0610024.
44. *Sokolov A. V.* Non-linear Supersymmetry for Non-Hermitian, Non-diagonalizable Hamiltonians: II. Rigorous Results // Ibid. P. 137–171; math-ph/0610022.
45. *Багров В. Г., Самсонов Б. Ф.* Преобразования Дарбу уравнения Шредингера // ЭЧАЯ. 1997. Т. 28, вып. 4. С. 951–1012.
46. *Bagrov V. G., Samsonov B. F., Shekoyan L. A.* N-order Darboux Transformation and a Spectral Problem on Semiaxis. quant-ph/9804032.
47. *Sukumar C. V.* Supersymmetric Quantum Mechanics of One-dimensional Systems // J. Phys. A. 1985. V. 18, No. 15. P. 2917–2936.
48. *Sukumar C. V.* Supersymmetric Quantum Mechanics and the Inverse Scattering Method // Ibid. P. 2937–2955.
49. *Sukumar C. V.* Potentials Generated by $SU(1,1)$ // J. Phys. A. 1986. V. 19, No. 11. P. 2229–2232.
50. *Sukumar C. V.* Supersymmetry, Potentials with Bound States at Arbitrary Energies and Multi-soliton Configurations // Ibid. No. 12. P. 2297–2316.
51. *Sukumar C. V.* Supersymmetry and Potentials with Bound States at Arbitrary Energies. II // J. Phys. A. 1987. V. 20, No. 9. P. 2461–2481.
52. *Sukumar C. V.* Supersymmetric Transformations and Hamiltonians Generated by the Marchenko Equations // J. Phys. A. 1988. V. 21, No. 8. P. L455–L458.
53. *Andrianov A. A. et al.* Second Order Derivative Supersymmetry and Scattering Problem // Intern. J. Mod. Phys. A. 1995. V. 10, No. 18. P. 2683–2702; hep-th/9404061.
54. *Andrianov A. A., Ioffe M. V., Nishnianidze D. N.* Polynomial SUSY in Quantum Mechanics and Second Derivative Darboux Transformations // Phys. Lett. A. 1995. V. 201, No. 2–3. P. 103; hep-th/9404120.
55. *Samsonov B. F.* New Possibilities for Supersymmetry Breakdown in Quantum Mechanics and Second-Order Irreducible Darboux Transformations // Phys. Lett. A. 1999. V. 263, No. 4–6. P. 274–280; quant-ph/9904009.
56. *Samsonov B. F., Stancu F.* Phase Equivalent Chains of Darboux Transformations in Scattering Theory // Phys. Rev. C. 2002. V. 66, No. 3. P. 034001–034012; quant-ph/0204112.
57. *Fernandez D. J. et al.* The Phenomenon of Darboux Displacements // Phys. Lett. A. 2002. V. 294, No. 3–4. P. 168–174; quant-ph/0302204.
58. *Rosu H. C.* Short Survey of Darboux Transformations. Talk given at the 1st Burgos Intern. Workshop on Symmetries in Quantum Mechanics and Quantum Optics, Burgos, Spain, Sept. 21–24, 1998; quant-ph/9809056.
59. *Matveev V. B., Salle M. A.* Darboux Transformation and Solitons. Springer-Verlag, 1991. P. 128.

60. *Infeld L., Hull T. E.* The Factorization Method // Rev. Mod. Phys. 1951. V. 23, No. 1. P. 21–68.
61. *Mielnik B., Rosas-Ortiz O.* Factorization: Little or Great Algorithm? // J. Phys. A. 2004. V. 37, No. 43. P. 10007–10035.
62. *Darboux G.* // C. R. Acad. Sci. 1882. V. 94. P. 1456.
63. *Baye D., Levai G., Sparenberg J. M.* Phase-equivalent Complex Potentials // Nucl. Phys. A. 1996. V. 599, No. 3–4. P. 435–456.
64. *Andrianov A. A. et al.* SUSY Quantum Mechanics with Complex Superpotentials and Real Energy // Intern. J. Mod. Phys. A. 1999. V. 14, No. 17. P. 2675–2688.
65. *Chabanov V. M., Zakhariev B. N.* Unusual (Non-Gamov) Decay States // Inverse Problems. 2001. V. 17, No. 4. P. 683–693.
66. *Deb R. N., Khare A., Roy B. D.* Complex Optical Potentials and Pseudo-Hermitian Hamiltonians // Phys. Lett. A. 2003. V. 307, No. 4. P. 215–221.
67. *Bender C. M., Boettcher S.* Real Spectra in Non-Hermitian Hamiltonians Having PT-Symmetry // Phys. Rev. Lett. 1998. V. 80, No. 24. P. 5243–5246.
68. *Bender C. M., Boettcher S., Meisinger P.* PT-symmetric Quantum Mechanics // J. Math. Phys. 1999. V. 40, No. 5. P. 2201–2229; quant-ph/9809072.
69. *Znojil M.* PT-symmetric Harmonic Oscillator // Phys. Lett. A. 1999. V. 259, No. 3–4. P. 220–223; quant-ph/9905020.
70. *Znojil M.* PT-symmetrically Regularized Eckart, Poeschl–Teller and Hulthen Potentials // J. Phys. A. 2000. V. 33, No. 24. P. 4561–4572; quant-ph/0101131.
71. *Znojil M.* PT-Symmetric Square Well // Phys. Lett. A. 2001. V. 285, No. 1–2. P. 7–10; quant-ph/0101131.
72. *Znojil M., Levai G.* The Interplay of Supersymmetry and PT-Symmetry in Quantum Mechanics: A Case Study for the Scarf II Potential // J. Phys. A. 2002. V. 35, No. 41. P. 8793–8804.
73. *Znojil M.* Matching Method and Exact Solvability of Discrete PT-symmetric Square Wells // J. Phys. A. 2006. V. 39, No. 32. P. 10247–10261.
74. *Znojil M. et al.* Supersymmetry Without Hermiticity within PT-Symmetric Quantum Mechanics // Phys. Lett. B. 2000. V. 483, No. 1–3. P. 284–289; hep-th/0003277.
75. *Levai G., Cannata F., Ventura A.* Algebraic and Scattering Aspects of a PT-symmetric Solvable Potential // J. Phys. A. 2001. V. 34, No. 4. P. 839–844.
76. *Levai G., Cannata F., Ventura A.* PT-symmetric Potentials and the $so(2,2)$ Algebra // J. Phys. A. 2002. V. 35, No. 24. P. 5041–5057.
77. *Znojil M.* PT-symmetric Regularizations in Supersymmetric Quantum Mechanics // J. Phys. A. 2004. V. 37, No. 43. P. 10209–10222; hep-th/0404145.
78. *Levai G.* Exact Analytic Study of the PT-symmetry-breaking Mechanism // Czech. J. Phys. 2004. V. 54, No. 1. P. 77–84.
79. *Levai G.* Supersymmetry without Hermiticity // Czech. J. Phys. 2004. V. 54, No. 10. P. 1121–1124.
80. *Znojil M., Jakubsky V.* Solvability and PT-symmetry in a Double-well Model with Point Interactions // J. Phys. A. 2005. V. 38, No. 22. P. 5041–5056.
81. *Znojil M.* Exactly Solvable Models with PT-symmetry and with an Asymmetric Coupling of Channels // J. Phys. A. 2006. V. 39, No. 15. P. 4047-4061.
82. *Cannata F., Dedonder J.-P., Ventura A.* Scattering in PT-symmetric Quantum Mechanics // Ann. Phys. 2007. V. 322, No. 2. P. 397–433; quant-ph/0606129.

83. *Pashnev A. I.* One-dimensional Supersymmetric Quantum Mechanics with $N \geqslant 2$ // Theor. Math. Phys. 1986. V. 69, No. 2. P. 1172–1175 (пер.: Теор. мат. физ. 1986. Т. 69, вып. 2. С. 311–315).
84. *Berezovoi V. N., Pashnev A. I.* Supersymmetric Quantum Mechanics and Rearrangement of the Spectra of Hamiltonians // Theor. Math. Phys. 1987. V. 70, No. 1. P. 102–107 (пер.: Теор. мат. физ. 1987. Т. 70, вып. 1. С. 146–153).
85. *Berezovoi V. N., Pashnev A. I.* $N = 2$ Supersymmetric Quantum Mechanics and the Inverse Scattering Problem // Theor. Math. Phys. 1988. V. 74, No. 3. P. 264–268 (пер.: Теор. мат. физ. 1988. Т. 74, вып. 3. С. 392–398).
86. *Berezovoj V. P., Pashnev A. I.* Extended $N = 2$ Supersymmetric Quantum Mechanics and Isospectral Hamiltonians // Z. Phys. C. 1991. V. 51. P. 525–529.
87. *Samsonov B. F., Pecheritshin A. A.* Chains of Darboux Transformations for the Matrix Schrödinger Equation // J. Phys. A. 2004. V. 37, No. 1. P. 239–250.
88. *Cannata F., Ioffe M. V.* Coupled-channel Scattering and Separation of Coupled Differential Equations by Generalized Darboux Transformations // J. Phys. A. 1993. V. 26, No. 3. P. L89–L92.
89. *Suzko A. A.* Darboux Transformations for a System of Coupled Discrete Schrödinger Equations // Phys. At. Nucl. 2002. V. 65, No. 8. P. 1553–1559.
90. *Humi M.* Darboux Transformations for the Schrödinger Equation in 3 Dimensions // J. Phys. A. 1988. V. 21, No. 9. P. 2075–2084.
91. *Gonzalez-Lopez A., Kamran N.* The Multidimensional Darboux Transformations // J. Geom. Phys. 1998. V. 26, No. 3–4. P. 202–226; hep-th/9612100.
92. *Andrianov A. A., Sokolov A. V.* Nonlinear Supersymmetry in Quantum Mechanics: Algebraic Properties and Differential Representation // Nucl. Phys. B. 2003. V. 660, No. 1–2. P. 25–50; hep-th/0301062.
93. *Andrianov A. A., Cannata F.* Nonlinear Supersymmetry for Spectral Design in Quantum Mechanics // J. Phys. A. 2004. V. 37, No. 43. P. 10297–10323; hep-th/0407077.
94. *Correa F., Plyushchay M. S.* Hidden Supersymmetry in Quantum Bosonic Systems // Ann. Phys. 2007. V. 322, No. 10. P. 2493–2500; hep-th/0605104.
95. *Correa F., Plyushchay M. S.* Peculiarities of the Hidden Nonlinear Supersymmetry of Poschl–Teller System in the Light of Lame Equation // J. Phys. A: Math. Theor. 2007. V. 40, No. 48. P. 14403–14412; arXiv:0706.1114.
96. *Correa F. , Nieto L.-M., Plyushchay M. S.* Hidden Nonlinear Supersymmetry of Finite-gap Lame Equation // Phys. Lett. B. 2007. V. 644, No. 1. P. 94–98; hep-th/0608096.
97. *Klishevich S. M., Plyushchay M. S.* Nonlinear Supersymmetry, Quantum Anomaly and Quasiexactly Solvable Systems // Nucl. Phys. B. 2001. V. 606, No. 3. P. 583–612; hep-th/0012023.
98. *Plyushchay M. S.* Hidden Nonlinear Supersymmetries in Pure Parabosonic Systems // Intern. J. Mod. Phys. A. 2000. V. 15, No. 23. P. 3679–3698; hep-th/9903130.
99. *Plyushchay M. S.* Deformed Heisenberg Algebra, Fractional Spin Fields and Supersymmetry without Fermions // Ann. Phys. 1996. V. 245, No. 2. P. 339–360; hep-th/9601116.
100. *Aoyama H., Sato M., Tanaka T.* N-fold Supersymmetry in Quantum Mechanics: General Formalism // Nucl. Phys. B. 2001. V. 619. P. 105–127; quant-ph/0106037.
101. *Aoyama H., Sato M., Tanaka T.* General Forms of a N-fold Supersymmetric Family // Phys. Lett. B. 2001. V. 503. P. 423–429; quant-ph/0012065.

102. *Aoyama H. et al.* Classification of Type A N-fold Supersymmetry // Phys. Lett. B. 2001. V. 521. P. 400–408; hep-th/0108124.
103. *Sato M., Tanaka T.* N-fold Supersymmetry in Quantum Mechanics — Analyses of Particular Models // J. Math. Phys. 2002. V. 43. P. 3484–3510; hep-th/0109179.
104. *Gonzalez-Lopez A., Tanaka T.* A New Family of N-fold Supersymmetry: Type B // Phys. Lett. B. 2004. V. 586. P. 117–124; hep-th/0307094.
105. *Ho C.-L., Tanaka T.* Simultaneous Ordinary and Type A N-fold Supersymmetries in Schroedinger, Pauli, and Dirac Equations // Ann. Phys. 2006. V. 321. P. 1375–1407; hep-th/0509020.
106. *Gamov G.* // Z. Phys. Bd. 1928. V. 51. P. 2004.
107. *Siegert A. J. F.* On the Derivation of the Dispersion Formula for Nuclear Reactions // Phys. Rev. 1939. V. 56, No. 8. P. 750–752.
108. *Ho Y. K.* The Method of Complex Coordinate Rotation and Its Applications to Atomic Collision Processes // Phys. Rep. 1983. V. 99, No. 1. P. 1–68.
109. *Li K.-H.* Physics of Open Systems // Phys. Rep. 1986. V. 134, No. 1. P. 1–85.
110. *Moiseyev N.* Quantum Theory of Resonances: Calculating Energies, Widths and Cross-sections by Complex Scaling // Phys. Rep. 1998. V. 302, No. 5–6. P. 212–293.
111. *Dittes F.-M.* The Decay of Quantum Systems with a Small Number of Open Channels // Phys. Rep. 2000. V. 339, No. 4. P. 215–316.
112. *Andersson N.* On the Asymptotic Distribution of Quasinormal-mode Frequencies for Schwarzschild Black Holes // Class. Quant. Grav. 1993. V. 10, No. 6. P. L61–L67.
113. *Liu H.* Asymptotic Behaviour of Quasi-normal Modes of Schwarzschild Black Holes // Class. Quant. Grav. 1995. V. 12, No. 2. P. 543–552.
114. *Nollert H.-P.* Quasinormal Modes: The Characteristic «Sound» of Black Holes and Neutron Stars // Class. Quant. Grav. 1999. V. 16, No. 12. P. R159–R216.
115. *Kokkotas K. D., Schmidt B. G.* Quasi-Normal Modes of Stars and Black Holes // Living Rev. Rel. 1999. V. 2. P. 2; gr-qc/9909058.
116. *Daghigh R. G., Green M. D.* A Detailed Analytic Study of the Asymptotic Quasinormal Modes of Schwarzschild — Anti de Sitter Black Holes // Class. Quant. Grav. 2009. V. 26, No. 12. P. 125.
117. *Tomson J. J.* // Proc. London. Math. Soc. 1884. V. 15, No. 1. P. 197.
118. *Lamb H.* // Proc. London. Math. Soc. 1900. V. 32, No. 1. P. 208.
119. *Lave A. E. H.* // Proc. London. Math. Soc. 1904. V. 2, No. 2. P. 88.
120. *Наймарк М. А.* Спектральные функции симметрического оператора // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1940. Т. 4, вып. 3. С. 277–318.
121. *Recami E., Rodrigues W. A., Smrz P.* // Hadronic J. 1983. V. 6. P. 1773–1789.
122. *Ахиезер Н. И., Глазман И. М.* Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. М., 1966. С. 543 (англ.: *Akhiezer N. I., Glazman I. M.* The Theory of Linear Operators in Hilbert Space. Boston: Pitman, Mass., 1981).
123. *Olkhovsky V. S., Recami E.* New Developments in the Study of Time as a Quantum Observable // Intern. J. Mod. Phys. B. 2008. V. 22, No. 12. P. 1877–1897.
124. *Stone M. H.* Linear Transformations in Hilbert Space. Operational Methods and Group Theory // Proc. of the National Academy of Sci. of the United States of America. 1930. V. 16, No. 2. P. 172–175.
125. *Neumann von J.* Mathematical Foundations of Quantum Mechanics. Princeton: Princeton Univ. Press, N. J., 1955.

126. *Aharonov Y., Bohm D.* Time in the Quantum Theory and the Uncertainty Relation for Time and Energy // Phys. Rev. A. 1961. V. 122, No. 5. P. 1649–1658.
127. *Наймарк М. А.* Функции положительного определенного оператора на коммутативных группах // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1943. Т. 7, вып. 5. С. 237–244.
128. *Carleman T.* Sur les équations intégrales singuliéres á noyau réel et symétrique. Uppsala, 1923.
129. *Schweber S.* An Introduction to Relativistic Quantum Field Theory. Ch. 5.3. Row, Peterson, Evanston, Ill, USA, 1961;
Ахиезер А. И., Берестецкий В. Б. Квантовая электродинамика. М.: Физматиз, 1959.
130. *Rosenbaum D. M.* Super Hilbert Space and the Quantum-mechanical Time Operators // J. Math. Phys. 1969. V. 10. P. 1127–1144.
131. *Ka'lnay A. J.* Lorentz-covariant Localized States and the Extended-type Position Operator // Boletin del IMAF (Co'rdoba). 1966. V. 2. P. 11;
Ka'lnay A. J., Toledo B. P. A Reinterpretation of the Notion of Localization // Nuovo Cim. A. 1967. V. 48, No. 4. P. 997–1007;
Gallardo J. A. et al. The Punctual Approximations to the Extended-type Position // Ibid. P. 1008–1013.
Gallardo J. A. et al. Philips Lorentz-covariant Localized States and the Extended-type Position Operator // Ibid. V. 49, No. 3. P. 393–398.
Gallardo J. A., Ka'lnay A. J., Risenberg S. H. Lorentz-invariant Localization for Elementary Systems // Phys. Rev. 1967. V. 158, No. 5. P. 1484–1490.
132. *ter Haar D.* Elements of Hamiltonian Mechanics. Oxford, 1971.
133. *Recami E.* // Atti Accad. Naz. Lincei (Roma). 1970. V. 49. P. 77;
Baldo M., Recami E. Comments about Recent Letters on Spacelike States // Lett. Nuovo Cim. 1969. V. 2. P. 613.
134. *Feshbach H., Porter C. E., Weisskopf V. F.* Model for Nuclear Reactions with Neutrons // Phys. Rev. 1954. V. 96, No. 2. P. 448–464.
135. *Hodgson P. I.* The Optical Model of Elasstic Scattering. Oxford: Clarendon Press, 1963.
136. *Moldauer P. A.* Optical Model of Low Energy Neutron Interactions with Spherical Nuclei // Nucl. Phys. 1963. V. 47. P. 65–92.
137. *Koning A. G., Delaroche J. P.* Local and Global Nucleon Optical Models from 1 keV to 200 MeV // Nucl. Phys. A. 2003. V. 713, No. 3–4. P. 231–310.
138. *Kunieda S. et al.* // J. Nucl. Sci. Tech. 2007. V. 44. P. 838.
139. *Olkhovsky V. S.* // Theor. Math. Phys. 1975. V. 20. P. 774.
140. *Olkhovsky V. S., Zaichenko A. K.* Analytical Properties and Resonant Structure of the S-matrix in Case of Noncentral and Parity-violating Interactions // Nuovo Cim. A. 1981. V. 63, No. 2. P. 155–170.
141. *Nikolaiev M. V., Olkhovsky V. S.* // Theor. Math. Phys. 1977. V. 31. P. 418.
142. *Gudkov V. P.* Sign Correlations and the Mechanism for Parity Violation // Phys. Rev. C. 1992. V. 46. P. 357.
143. *Bunakov V. E.* Enhancement Effects of the P-Conserving T-Invariance Violation in Neutron Transmission // Phys. Rev. Lett. 1998. V. 60. P. 2250–2253.
144. *Dobaczewski J., Engel J.* Nuclear Time-reversal Violation and the Schiff Moment of Ra-225 // Phys. Rev. Lett. 2005. V. 94. P. 232502–232505; nucl-th/0503057.

145. *Caldirola P.* A Relativistic Theory of the Classical Electron // Rivista Nuovo Cim. 1979. V. 2, No. 13. P. 1–49;
Caldirola P. Dissipation in Quantum Theory (40 Years of Research) // Hadr. J. 1983. V. 6. P. 1400–1433;
Caldirola P., Lugiato L. // Physica A. 1982. V. 116. P. 248;
Caldirola P., Casati G., Prosperetti A. On the Classical Theory of the Electron // Nuovo Cim. A. 1978. V. 43. P. 127–142.
146. *Caldirola P., Montaldi E.* // Nuovo Cim. B. 1979. V. 53. P. 291.
147. *Farias A. R. H., Recami E.* Introduction of a Quantum of Time («Chronon») and Its Consequences for Quantum Mechanics. quant-ph/97060509v3. 2007.
148. *Bonifacio R.* A Coarse Grained Description of Time Evolution: Irreversible State Reduction and Time-energy Relation // Lett. Nuovo Cim. 1983. V. 37, No. 14. P. 481–489.
149. *Bonifacio R., Caldirola P.* Finite-difference Equation and Quasi-diagonal form in Quantum-statistical Mechanics // Lett. Nuovo Cim. 1983. V. 38, No. 18. P. 615–619.
150. *Ghirardi G. C., Weber T.* Finite-difference Evolution Equations and Quantum-dynamical Semi-groups // Lett. Nuovo Cim. 1984. V. 39, No. 8. P. 157–164.
151. *Recami E., Farias A. R. H.* A Simple Quantum Equation for Decoherence and Dissipation. Report NSF-ITP-02-62. KIPT, UCSB: Santa Barbara, CA, 2002; quant-ph/97060509.
152. *Casagrande F., Montaldi E.* Some Remarks on Finite Difference Equations of Physical Interest // Nuovo Cim. A. 1977. V. 40, No. 4. P. 369–382.
153. *Mignani R.* On the Lie Admissible Structure of the Caldirola Equations for Dissipative Processes // Lett. Nuovo Cim. 1983. V. 38. P. 169.
154. *Caldirola P.* // Nuovo Cim. 1941. V. 18. P. 393.
155. *Janussis A. et al.* // Lett. Nuovo Cim. 1980. V. 29. P. 259; 1981. V. 30. P. 289; V. 31. P. 533; 1982. V. 34. P. 571; V. 35. P. 485; 1984. V. 39. P. 75; Nuovo Cim. B. 1982. V. 67. P. 161.
156. *Brodimas G., Janussis A., Mignani R.* Bose Realization of a Noncanonical Heisenberg Algebra // J. Phys. A. 1991. V. 25. P. L329–334.
157. *Janussis A., Leodaris A., Mignani R.* Non-Hermitian Realization of a Lie-deformed Heisenberg Algebra // Phys. Lett. A. 1995. V. 197, No. 3. P. 187–191.
158. *Caldirola P.* // Nuovo Cim. 1941. V. 18. P. 393.
159. *Kanai E.* // Progr. Theor. Phys. 1948. V. 3. P. 440.
160. *Angelopoulon P. et al.* // Intern. J. Mod. Phys. B. 1995. V. 9. P. 2083.
161. *Kostin M.* // J. Chem. Phys. 1972. V. 57. P. 358.
162. *Albrecht K.* A New Class of Schrodinger Operators for Quantized Friction // Phys. Lett. B. 1975. V. 56, No. 2. P. 127–129.
163. *Hasse R.* On the Quantum Mechanical Treatment of Dissipative Systems // J. Math. Phys. 1975. V. 16, No. 10. P. 2005–2011.
164. *Gisin N.* Microscopic Derivation of a Class of Non-linear Dissipative Schrodinger-like Equations // Physica A. 1982. V. 111, No. 1–2. P. 364–370.
165. *Exner P.* Complex-potential Description of the Damped Harmonic Oscillator // J. Math. Phys. 1983. V. 24, No. 5. P. 1129–1135.
166. *Caldeira A., Leggett A.* Dynamics of the Dissipative Two-level System // Ann. Phys. 1983. V. 149, No. 2. P. 374–456.

167. *Olkhovsky V. S., Recami E., Salesi G.* Tunneling Through Two Successive Barriers and the Hartman (Superluminal) Effect // Europhys. Lett. 2002. V. 57, No. 6. P. 879–884; quant-ph/0002022.
168. *Aharonov Y., Erez N., Resnik B.* Superoscillations and Tunneling times // Phys. Rev. A. 2002. V. 65, No. 5. P. 052124–052128.
169. *Olkhovsky V. S., Recami E., Zaichenko A. K.* Resonant and Non-resonant Tunneling through a Doublec Barrier // Europhys. Lett. 2005. V. 70, No. 6. P. 712–718; quant-th/0410128.
170. *Recami E.* Superluminal Tunneling Through Successive Barriers. Does QM Predict Infinite Group-velocities? // J. Mod. Opt. 2004. V. 51, No. 6. P. 913–923.
171. *Raciti F., Salesi G.* Complex-barrier Tunnelling Times // J. Phys. I (France). 1994. V. 4, No. 12. P. 1783–1789.
172. *Nimtz G., Spieker H., Brodowsky M.* Tunneling with Dissipation // Ibid. No. 10. P. 1379–1382.
173. *Caldirola P.* On the Introduction of a Fundamental Interval of Time in Quantum Mechanics // Lett. Nuovo Cim. 1976. V. 16, No. 5. P. 151–155;
Caldirola P. On the Finite Difference Schrodinger Equation // Ibid. V. 17, No. 14. P. 461–464;
Caldirola P. Chronon in Quantum Theory // Lett. Nuovo Cim. 1977. V. 18, No. 15. P. 465–468.
174. *Santilli R. M.* Foundations of Theoretical Mechanics. V. II: Birkhoffian Generalization of Hamiltonian Mechanics. Berlin: Springer, 1983.
175. *Olkhovsky V. S., Doroshko N. L.* Cross-sections and Durations of the Proton–Nucleus Scattering Near a Resonance Distorted by the Nonresonance Background and Their Phase-shift Analysis // Europhys. Lett. 1992. V. 18, No. 6. P. 483–486;
D'Arrigo A. et al. Bremsstrahlung Study of Nuclear-reaction Dynamics: the $^{16}\mathrm{O}+p$ Reaction // Nucl. Phys. A. 1992. V. 549, No. 3. P. 375–386;
D'Arrigo A. et al. Delay-advance Phenomenon Observed by Bremsstrahlung Spectrum of the $^{12}\mathrm{C}+p$ Collision // Nucl. Phys. A. 1993. V. 564, No. 2. P. 217–226.
176. *Olkhovsky V. S., Dolinska M. E., Omelchenko S. A.* The Possibility of Time Resonance (Explosion) Phenomena in High-energy Nuclear Reactions // Centr. Eur. J. Phys. 2006. V. 4, No. 2. P. 1–18.