

ТРЕХКЛАСТЕРНОЕ ОПИСАНИЕ СВОЙСТВ ЛЕГКИХ
НЕЙТРОННО- И ПРОТОННО-ИЗБЫТОЧНЫХ ЯДЕР
В РАМКАХ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ВЕРСИИ МЕТОДА
РЕЗОНИРУЮЩИХ ГРУПП

А. В. Нестеров^а, Ф. Арикс^б, Я. Брукхов^б, В. С. Василевский^а

^а Институт теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова, Киев

^б Группа компьютерного моделирования и программирования,
Университет Антверпена, Антверпен, Бельгия

ВВЕДЕНИЕ	1337
КЛАСТЕРНОЕ ОПИСАНИЕ СВОЙСТВ ЛЕГКИХ ЯДЕР В АВ МРГ	1342
Асимптотические решения в координатном представлении.	1348
Асимптотические решения в осцилляторном представлении.	1351
Уравнения многоканальной АВ МРГ.	1352
Вычисление параметров резонансов.	1354
Матричные элементы и метод производящих функций.	1357
Сходимость результатов и модификация схемы вычислений АВ МРГ.	1359
СВЯЗАННЫЕ СОСТОЯНИЯ ЯДЕР ⁶ He, ⁶ Li И ⁸ He	1360
Связанные состояния ядер ⁶ He и ⁶ Li и оптимальные подпространства базисных функций.	1362
Связанное состояние ⁸ He и оптимальные подпространства базисных функций.	1366
Роль принципа Паули.	1369
Размеры и форма ядер ⁶ He и ⁸ He.	1371
РЕЗОНАНСНЫЕ СОСТОЯНИЯ ЯДЕР ⁶ He, ⁶ Be И ⁵ H В ТРЕХКЛАСТЕРНОМ КОНТИНУУМЕ	1374
Резонансные состояния ядер ⁶ He и ⁶ Be.	1377
Резонансные состояния ядра ⁵ H.	1388
Параметры резонансных состояний ядра ⁵ H.	1393

РЕАКЦИИ ${}^3\text{H}({}^3\text{H}, 2n){}^4\text{He}$ И ${}^3\text{He}({}^3\text{He}, 2p){}^4\text{He}$	1401
Комбинированная кластерная модель.	1403
Результаты численных расчетов.	1407
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	1415
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	1416

ТРЕХКЛАСТЕРНОЕ ОПИСАНИЕ СВОЙСТВ ЛЕГКИХ НЕЙТРОННО- И ПРОТОННО-ИЗБЫТОЧНЫХ ЯДЕР В РАМКАХ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ВЕРСИИ МЕТОДА РЕЗОНИРУЮЩИХ ГРУПП

А. В. Нестеров^а, Ф. Арикс^б, Я. Брукхов^б, В. С. Василевский^а

^а Институт теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова, Киев

^б Группа компьютерного моделирования и программирования,

Университет Антверпена, Антверпен, Бельгия

Представлен трехкластерный микроскопический подход к описанию свойств легких атомных ядер (алгебраическая версия метода резонирующих групп), основанный на использовании осцилляторных функций как для задания волновых функций каждого из кластеров, так и для разложения функции их относительного движения. Главным образом рассматриваются те приложения метода, которые относятся к исследованию свойств состояний дискретного и непрерывного спектров ядер ${}^6\text{He}$, ${}^8\text{He}$, ${}^6\text{Be}$, ${}^5\text{H}$, являющихся нейтронно- или протонно-избыточными, а также к реакциям синтеза ${}^3\text{H}({}^3\text{H}, 2n){}^4\text{He}$ и ${}^3\text{He}({}^3\text{He}, 2p){}^4\text{He}$. Технические вопросы вычислений обсуждаются лишь в том объеме, который необходим для понимания представленного материала. Основное внимание сосредоточено на изложении физических результатов, их сравнении с экспериментальными данными и результатами, полученными в других теоретических подходах. Также достаточно подробно обсуждаются вопросы, связанные с действием принципа Паули, сходимость результатов вычислений, и приближения, сделанные в процессе их проведения.

We give a review of a three-cluster microscopic method (the algebraic version of the resonating group method) for description of properties of the light atomic nuclei. The method makes use of the oscillator functions for representing of the internal wave function of each cluster and for expansion of the wave function of intercluster relative motion as well. We consider mainly applications of the method for investigation of properties of bound and continuous spectrum states of nuclei ${}^6\text{He}$, ${}^8\text{He}$, ${}^6\text{Be}$, ${}^5\text{H}$ with large neutron and proton excess and for the reactions of the thermonuclear synthesis ${}^3\text{H}({}^3\text{H}, 2n){}^4\text{He}$ and ${}^3\text{He}({}^3\text{He}, 2p){}^4\text{He}$. We pay small attention to the technical details of the method, by explaining shortly information necessary for understanding the main ideas. We dwell mainly on results of the method, on comparison with available experimental data and results of other theoretical methods. The role of the Pauli principle, convergence of the obtained results and approximations used are discussed in detail.

PACS: 21.60.Gx; 21.10.Gv; 27.10.+h; 25.55.Ci; 24.10.-i

ВВЕДЕНИЕ

Интерес к исследованию свойств легких ядер с большим избытком нейтронов или протонов в течение последних десятилетий в значительной степени повлиял на развитие теоретических и экспериментальных методов изу-

чения ядерных систем. Особенность таких ядер заключается в том, что большая часть состояний (а у части из них и вся совокупность наблюдаемых состояний) принадлежит непрерывному спектру, проявляя себя как резонансные состояния многокластерного континуума, где число кластеров равно или больше трех. В теоретических и экспериментальных методах должна учитываться такая особенность экзотических ядер. Фактически в данном случае речь идет о физике многочастичного и многоканального континуума.

В данном обзоре ограничимся динамикой трехчастичных конфигураций. Среди легких ядер есть немалое число таких, которые обладают ярко выраженной трехкластерной структурой. Это в первую очередь ядра, у которых трехкластерный канал имеет минимальную среди других пороговую энергию, что в значительной степени определяет их свойства. Кроме тех ядер, свойства которых рассматриваются непосредственно в настоящей работе, т. е. ядер ${}^6\text{He} = \alpha + n + n$, ${}^6\text{Be} = \alpha + p + p$ и ${}^5\text{He} = t + n + n$, в этот же ряд можно поставить, например, ядра ${}^9\text{Be} = \alpha + \alpha + n$ и ${}^9\text{B} = \alpha + \alpha + p$. Кроме такого рода ядер существует значительное количество ядер, у которых нижайшим является порог бинарного канала, но роль трехкластерных конфигураций представляется для них весьма существенной. Как правило, у них энергия трехкластерного порога лежит на несколько МэВ выше порога нижайшего бинарного канала. Здесь приводится некоторое число ядер из этой совокупности с указанием наиболее важных трехкластерных конфигураций и нижайших бинарных каналов:

$$\begin{aligned} {}^4\text{H} &= d + n + n = {}^3\text{H} + n, \\ {}^4\text{Li} &= d + p + p = {}^3\text{He} + p, \\ {}^6\text{Li} &= {}^4\text{He} + p + n = {}^4\text{He} + d, \\ {}^8\text{Li} &= {}^4\text{He} + {}^3\text{H} + n = {}^7\text{Li} + n, \\ {}^8\text{B} &= {}^4\text{He} + {}^3\text{He} + p = {}^7\text{Be} + p. \end{aligned}$$

Большой интерес представляют и исследования свойств легкого «сверхнейтронно-избыточного» ядра ${}^8\text{He}$, которое при нижайшем трехчастичном пороге развала ${}^6\text{He} + n + n$ тем не менее должно иметь четырехнейтронное гало. В настоящей работе это ядро рассматривается в трехкластерном представлении $\alpha + {}^2n + {}^2n$.

Эти примеры показывают, что изучение свойств большого числа легких атомных ядер требует вовлечения трехкластерных конфигураций в рассмотрение их свойств.

Микроскопическая теория трехкластерных конфигураций имеет довольно большую историю (см., например, [1–8]). Вначале она использовалась главным образом для более адекватного описания связанных состояний легких ядер, а также реакций с участием бинарных входных и выходных каналов.

С ее помощью удается воспроизводить внутреннюю структуру взаимодействующих кластеров, учитывать изменение их формы и размеров при взаимном сближении. В последнее время теория трехкластерных конфигураций нашла свое широкое применение при исследовании свойств нейтронно- и протонно-избыточных ядер (см., например, [9–16]).

Метод резонирующих групп (МРГ) [17] представляется одним из наиболее последовательных и эффективных инструментов изучения динамики многокластерных конфигураций в легких атомных ядрах. Несомненные достоинства метода резонирующих групп заключаются в том, что это (i) микроскопический подход, в котором динамика кластеров определяется нуклон-нуклонным взаимодействием, (ii) принцип Паули учитывается точно и (iii) движение центра масс выделяется в явном виде. Вторым пунктом особенно важен при рассмотрении как связанных состояний, так и состояний непрерывного спектра легких ядер при сравнительно небольших значениях энергии. МРГ, являясь одной из самых последовательных реализаций кластерной модели, позволяет корректно учитывать граничные условия и проводить теоретический анализ результатов, если принимать во внимание те физические свойства исследуемых систем, которые представляются наиболее важными.

Существует несколько версий МРГ, отличающихся формой записи и способом решения динамических уравнений. Прежде всего это «классическая» версия МРГ, реализация которой основана на решении интегродифференциального уравнения (или системы таких уравнений для многоканальных систем) для определения или энергий и волновых функций связанных состояний, или элементов матрицы рассеяния и волновых функций непрерывного спектра. Кроме классического варианта МРГ существуют ее версии, в которых используются квадратично-интегрируемые базисы функций для разложения искомой межкластерной функции и сведения уравнений к простой и удобной для численной реализации алгебраической форме. Среди них следует особо выделить так называемую алгебраическую версию МРГ (АВ МРГ), где для этих целей привлекается базис осцилляторных функций. Важная особенность АВ МРГ состоит в том, что в ней граничные условия для двух- и многокластерных систем, хорошо известные в координатном пространстве, преобразованы в дискретное, осцилляторное пространство и корректно учтены в динамических уравнениях. Можно утверждать, что АВ МРГ — это конкретная реализация матричной квантовой механики с корректными граничными условиями для состояний как дискретного, так и непрерывного спектров.

Алгебраическая версия метода резонирующих групп была предложена Г. Ф. Филипповым [18, 19] (детали алгебраической версии, связанные с вычислением матричных элементов гамильтониана и проведением вычислений, можно найти в обзорах [20, 21]). АВ МРГ эффективно использовалась для исследования структуры ядер и ядерных процессов, порождаемых бинарными каналами. На ее основе удалось объединить динамику кластерных и коллек-

тивных степеней свободы, что позволило описать распад гигантского монополюльного, дипольного и квадрупольного резонансов [21–23] в легких атомных ядрах. Следует отметить, что АВ МРГ идеологически очень близка методу J -матрицы, который был предложен в [24–26] и активно используется для изучения атомных, молекулярных и ядерных систем. Основные идеи метода J -матрицы и главные результаты, полученные в рамках этого метода, представлены в сборнике статей [27].

Базис гармонического осциллятора традиционно играет важную роль при решении задач теоретической ядерной физики. Для легких ядер состояния сферического осциллятора часто используются как первое приближение для одночастичных орбиталей волновой функции знаменитой модели оболочек. Соответственно, и ядерный многочастичный базис при учете принципа Паули может быть построен как суперпозиция детерминантов Слэтера из одночастичных осцилляторных орбиталей.

Многие двухчастичные нуклон-нуклонные потенциалы представляют собой суперпозиции гауссовых компонент. При этом матричные элементы двухчастичных операторов на слэтеровских детерминантах — это простые суммы двухчастичных матричных элементов, рассчитанных на одночастичных осцилляторных функциях. Следовательно, гауссова форма оператора позволяет получить матричные элементы в аналитической форме, что делает использование осцилляторных состояний (или суперпозиций осцилляторных состояний) в качестве одночастичных волновых функций в микроскопических многочастичных ядерных моделях крайне привлекательным с точки зрения простоты вычислений.

Одной из особенностей осцилляторного базиса является якобиевская (трехдиагональная) форма матрицы оператора кинетической энергии. Это создает дополнительные удобства при рассмотрении уравнения Шредингера в матричной форме.

Ядерные многочастичные системы очень сложны для рассмотрения, поскольку для этого требуется учет большого числа оболочечных состояний при воспроизведении спектральных свойств в заданной области энергий. Также в ядрах могут возбуждаться различные моды движения, такие как квадрупольные, монополюльные и т. д., с возможностью последующего распада. В случае последнего ярко проявляют себя кластерные моды движения, т. е. возникает взаимодействие между коллективными модами и кластерными эффектами, которые необходимо учитывать при рассмотрении распада ядер.

В соответствии с вышесказанным вводятся антисимметризованные функции специального вида со специфической конфигурацией одночастичных орбиталей таким образом, чтобы передать особенности поведения коллективных движений, которые подлежат исследованию. На этом пути гильбертово пространство сужается до одного или нескольких связанных ядерно-модельных состояний, в которых коллективные переменные, выделенные из общего чи-

сла, являются теми динамическими переменными, которые подлежат рассмотрению в задаче. Размерность уравнения Шредингера при этом существенно понижается.

Несмотря на то, что двухчастичное нуклон-нуклонное взаимодействие является короткодействующим, эффективное взаимодействие как функция коллективных координат обычно оказывается весьма протяженным. Если коллективное поведение описывается суперпозицией осцилляторных состояний, это естественным образом отражается на матричных элементах ядерного потенциала, которые демонстрируют медленное убывание по мере увеличения числа осцилляторных возбуждений. Это ограничивает применимость стандартной АВ МРГ, поскольку слишком большие энергетические матрицы необходимо рассматривать для внутренней области. Действительно, основные численные проблемы в ядерных расчетах в АВ МРГ состоят в построении матричных элементов высоковозбужденных состояний. В целях преодоления этих трудностей в рамках рассматриваемого метода был развит подход [28–30], основная идея которого состоит в использовании квазиклассического приближения для вычисления матричных элементов, отвечающих высоким возбуждениям во внутренней области системы. Это приводит к модификации стандартных трехчленных рекуррентных соотношений для матричных элементов в случае больших расстояний и асимптотических областей за счет включения потенциального (квазиклассического) вклада, что соответствует существенному смещению точки сшивания в граничных условиях, делая размерности матричного уравнения вполне приемлемыми.

Кулоновское взаимодействие, которое, как известно, является дальнедействующим, учитывается аналогичным образом.

В последующих разделах будет рассмотрено кластерное описание как важнейший элемент описания легчайших ядер, когда межкластерные расстояния становятся динамическими переменными. Ниже оно будет связано с приближением АВ МРГ для решения уравнения Шредингера, в том числе и в применении к непосредственному рассмотрению свойств 5-, 6- и 8-нуклонных систем, в основном таких, как ${}^6\text{He}$, ${}^6\text{Be}$, ${}^8\text{He}$, ${}^5\text{H}$, а также реакций ${}^3\text{H}({}^3\text{H}, 2n){}^4\text{He}$ и ${}^3\text{He}({}^3\text{He}, 2p){}^4\text{He}$, где первостепенное значение имеют трехкластерные эффекты. Выбор указанных систем не случаен. Рассматриваемые ядра обладают большим избытком нейтронов или протонов, лежат в окрестности границы нуклонной стабильности, что определяет их специфические свойства, в частности, наличие у ряда из них нейтронного гало. А вторая из упомянутых реакций является важнейшим элементом солнечного pp -цикла, изучение которой может пролить свет на проблему солнечных нейтрино.

Технические вопросы вычислений обсуждаются лишь в том объеме, который необходим для понимания изложенного материала. При этом проводится максимально полное сравнение полученных результатов с эксперименталь-

ными данными и результатами других авторов как тест на разумность сделанных в настоящей работе приближений.

Для удобства читателей приводим список используемых сокращений:

МРГ — метод резонирующих групп,

АВ МРГ — алгебраическая версия метода резонирующих групп,

МГК — метод генераторной координаты,

СВМ — стохастический вариационный метод,

БО — биосцилляторный базис,

ГС — гиперсферический базис,

АПКС — метод аналитического продолжения по константе связи,

МКМ — метод комплексного масштабирования,

МОМ — многоконфигурационная оболочечная модель,

ПВ — потенциал Волкова,

ПМ — потенциал Миннесота,

МПХН — модифицированный потенциал Хасегавы–Нагаты,

метод АПСМ — метод аналитического продолжения S -матрицы.

1. КЛАСТЕРНОЕ ОПИСАНИЕ СВОЙСТВ ЛЕГКИХ ЯДЕР В АВ МРГ

Двух- и трехкластерные конфигурации играют важную роль в низкоэнергетической физике легких ядер и имеют непосредственное отношение к экспериментам по исследованию свойств составных систем, образующихся при протекании ядерных реакций. В этом разделе обсуждается в основном трехкластерное описание легких атомных ядер. В случае необходимости будем кратко обращаться и к описанию двухкластерному, поскольку первое нельзя рассматривать иначе, чем естественное обобщение второго.

Многочастичная волновая функция трехкластерной системы, состоящая из A нуклонов ($A = A_1 + A_2 + A_3$), с полным учетом антисимметризации может быть представлена следующим образом:

$$\Psi(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_{A-1}) = \mathcal{A}[\Psi_1(A_1)\Psi_2(A_2)\Psi_3(A_3)\Psi_Q(Q)], \quad (1)$$

где \mathcal{A} — оператор антисимметризации. При этом предполагается, что координата центра масс A -нуклонной системы исключена посредством перехода к координатам Якоби \mathbf{q}_i , и тем самым задача сведена к рассмотрению внутренней динамики системы.

Волновые функции кластеров $\Psi_i(A_i)$

$$\Psi_i(A_i) = \Psi_i(\mathbf{q}_1^{(i)}, \dots, \mathbf{q}_{A_i-1}^{(i)}) \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2)$$

задают внутреннюю структуру i -го кластера с центром масс в точке \mathbf{Q}_i . Функции кластеров изначально фиксированы и в настоящей работе представляют

собой детерминанты Слэтера, построенные с использованием $(0s)$ -состояний гармонического осциллятора. Это соответствует основным состояниям оболочечных конфигураций кластеров с $(A_i \leq 4$ для всех i), что в конечном итоге существенно минимизирует численные проблемы.

Функция $\Psi_Q(Q)$

$$\Psi_Q(Q) = \Psi_Q(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) \quad (3)$$

представляет собой функцию относительного движения кластеров, зависящую от координат Якоби \mathbf{q}_1 и \mathbf{q}_2 . Рис. 1 иллюстрирует возможные варианты выбора координат Якоби для трехкластерной системы (предполагается, что два кластера из трех одинаковы, что справедливо для всех конкретных ядер, рассмотренных ниже), где также указана нумерация векторов Якоби, которой мы придерживаемся в дальнейшем, и их расположение относительно кластеров.

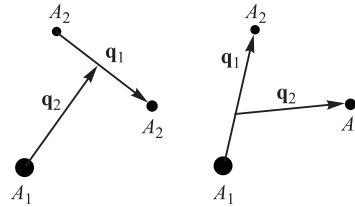


Рис. 1. Две возможные конфигурации координат Якоби для трехкластерных систем вида $A = A_1 + A_2 + A_2$ (два кластера одинаковы)

В двухкластерном случае все формулы значительно упрощаются:

$$\Psi(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_{A-1}) = \mathcal{A}[\Psi_1(A_1)\Psi_2(A_2)\Psi_R(R)] \quad (4)$$

с

$$\Psi_R(R) = \Psi_R(\mathbf{q}_0^{(R)}) = \Psi_R(\mathbf{q}_0). \quad (5)$$

Представление функций (3) и (5) не ограничено одной осцилляторной функцией, но задается в виде разложения по полному набору функций гармонического осциллятора для степеней свободы относительного движения кластеров, т. е. полная A -частичная волновая функция не выражается в виде одного детерминанта Слэтера, построенного на одночастичных осцилляторных орбиталях.

Для наших дальнейших рассуждений важным является представление о фолдинг-приближении, которое состоит в пренебрежении действием принципа Паули для нуклонов, принадлежащих различным кластерам, с сохранением квантово-механического описания самих кластеров. Трехкластерная многочастичная волновая функция фолдинг-модели имеет вид

$$\Psi_F(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_{A-1}) = \Psi_1(A_1)\Psi_2(A_2)\Psi_3(A_3)\Psi_Q(Q), \quad (6)$$

где волновая функция каждого из кластеров антисимметрична (детерминант Слэтера), в то время как межкластерная антисимметризация отсутствует.

Фолдинг-модель имеет то преимущество, что сохраняет идентичность кластеров и, если внутренняя структура кластеров остается «замороженной», существенно упрощает решение задачи об их относительном движении, фактически сводя ее к задаче об относительном движении бесструктурных частиц.

Фолдинг-модель является естественным приближением для рассмотрения асимптотического поведения кластерных систем в процессе их распада на два или большее число невзаимодействующих подсистем. Она соответствует ситуации, в которой все кластеры находятся настолько далеко друг от друга, что межкластерным действием принципа Паули можно пренебречь.

Поскольку в настоящем случае волновые функции кластеров фиксированы и построены исключительно на $(0s)$ -орбиталях, вопрос о классификации состояний системы после разложения функции относительного движения по некоторому базису полностью переносится на базисные состояния, используемые для описания межкластерного движения. Это справедливо как для случая полностью антисимметризованной функции системы, так и для фолдинг-приближения. Для двухкластерной системы набор квантовых чисел, задающих межкластерное движение, фактически однозначно определен и связан с редукцией группы $U(3) \supset O(3)$ трехмерного гармонического осциллятора. Такая редукция приводит нас к радиальному квантовому числу n , угловому моменту L и его проекции M .

В трехкластерном случае могут быть использованы различные способы классификации функции относительного движения кластеров, заданной в осцилляторном представлении. В [15,31] рассмотрены три способа такой классификации. Они связаны с редукцией унитарной группы $U(6)$, являющейся группой симметрии шестимерного гармонического осциллятора, на ее подгруппы. Схемы редукции и соответствующие наборы квантовых чисел задаются следующим образом:

$$U(6) \supset \begin{array}{c} SU(3) \\ \cup \\ SO(3) \end{array} \otimes \begin{array}{c} U(2) \\ \cup \\ O(3) \end{array} \implies |(\lambda\mu)\xi, \omega LM\rangle, \quad (7)$$

$$U(6) \supset \begin{array}{c} U(3) \\ \cup \\ SO(3) \end{array} \otimes \begin{array}{c} U(3) \\ \cup \\ SO(3) \end{array} \supset SO(3) \implies |n_1 l_1, n_2, l_2, LM\rangle, \quad (8)$$

$$U(6) \supset O(6) \supset SO(3) \otimes SO(3) \supset SO(3) \implies |n_\rho, K, l_1, l_2, LM\rangle. \quad (9)$$

В последующем базис функций, соответствующий цепочке (7), будем называть « $SU(3)$ -базисом», поскольку квантовые числа этого базиса — хорошо известные индексы Эллиота $(\lambda\mu)$ группы $SU(3)$, а ω — индекс повторения, появляющийся при редукции $SU(3) \supset SO(3)$.

Заметим, что индексы группы $SU(3)$ связаны с перестановкой осцилляторных квантов вдоль осей q_{x_i} , q_{y_i} и q_{z_i} с $i = 1, 2$, в то время как группа $U(2)$

ответственна за обмен осцилляторных квантов между векторами Якоби \mathbf{q}_1 и \mathbf{q}_2 . Можно сказать (используя терминологию микроскопической $Sp(6, R)$ -модели [32, 33]), что $SU(3)$ связана с «коллективным» движением трехкластерной системы, тогда как $U(2)$ — с «внутренним». Редукция $U(2) \supset O(3)$ приводит к появлению вихревого момента j , равного $\lambda/2$, имеющего целые и полуцелые значения, и его проекции ξ , связанной с числом осцилляторных квантов n_1 и n_2 вдоль векторов Якоби \mathbf{q}_1 и \mathbf{q}_2 , значение которой задается соотношением

$$\xi = \frac{1}{2}(n_1 - n_2).$$

Укажем также на то, что каждое неприводимое представление $(\lambda\mu)$ имеет вырождение, определяемое соотношением $2j + 1 = \lambda + 1$.

Базис $SU(3)$ неоднократно использовался для классификации состояний многокластерных систем при расчете их связанных состояний и для анализа собственных значений оператора антисимметризации (см., например, [34–39]).

Второй по порядку базис (8) далее будем именовать «биосцилляторным» базисом (БО-базисом), где $U(3)$ -группы в цепочке подгрупп связаны с векторами Якоби \mathbf{q}_1 и \mathbf{q}_2 , что порождает квантовые числа (n_1, l_1) и (n_2, l_2) и соответствует ситуации двух несвязанных осцилляторов.

И наконец, третий базис (9) — это «гиперсферический базис» (ГС-базис), поскольку его функции являются функциями неприводимых представлений группы $O(6)$, т. е. представляют собой гиперсферические гармоники на шестимерной гиперсфере (см., например, [40–49] и ссылки в них).

Отметим, что для ГС-базиса могут быть использованы и другие возможности классификации базисных состояний. Выбор именно цепочки подгрупп (9) говорит о том, что мы остановились на схеме Цернике–Брикмана (Zernike–Brinkman) (см., например, работы [47, 48] и ссылки в них). Это приводит нас к следующим квантовым числам: гипермоменту K , числу квантов гиперрадиальных возбуждений n_ρ , l_1 — парциальному угловому моменту, связанному с первым вектором Якоби, l_2 — парциальному угловому моменту, связанному со вторым вектором Якоби, а также к L и M — полному угловому моменту, получаемому посредством связи парциальных моментов l_1, l_2 , и его проекции M .

Гиперсферический базис нашел широкое применение при исследовании как связанных состояний, так и состояний непрерывного спектра трехкластерных систем в полумикроскопических [50–56] и микроскопических подходах [15, 57–61].

Поскольку именно ГС-базис используется в последующем для описания состояний трехкластерного континуума, что ставит его в совершенно особое положение с точки зрения всего последующего изложения, укажем основные

соотношения между его квантовыми числами и ограничения, накладываемые на них:

- полный угловой момент является векторной суммой парциальных угловых моментов \mathbf{l}_1 и \mathbf{l}_2 , т. е. $\mathbf{L} = \mathbf{l}_1 + \mathbf{l}_2$ и $|l_1 - l_2| \leq L \leq l_1 + l_2$;
- при фиксированных значениях l_1 и l_2 гипермомент может принимать значения $K = l_1 + l_2, l_1 + l_2 - 2, l_1 + l_2 - 4, \dots$. Это условие означает, что сумма парциальных моментов $l_1 + l_2$ не может превышать K ;
- парциальные угловые моменты l_1 и l_2 определяют четность трехкластерного состояния посредством соотношения $\pi = (-1)^{l_1+l_2}$;
- для состояний «нормальной» четности $\pi = (-1)^L$, а минимальное значение гипермомента $K_{\min} = L$, в то время как в случае «аномальной» четности $K_{\min} = L + 1$ при $\pi = (-1)^{L+1}$;
- для осцилляторной оболочки с главным квантовым числом N имеет место соотношение $N = 2n_\rho + K$.

При этом для главного квантового числа справедливы и следующие соотношения: $N = \lambda + 2\mu = n_1 + n_2$ с участием квантовых чисел $SU(3)$ -базиса и БО-базиса соответственно. А функции всех трех рассматриваемых базисов представляют собой собственные функции одного и того же гамильтониана шестимерного гармонического осциллятора и, соответственно, могут быть выражены на одной и той же оболочке друг через друга посредством простых унитарных преобразований.

Причина, по которой мы рассматриваем три указанных выше базиса, состоит в том, что они широко используются в микроскопических расчетах для легких ядер и позволяют отобразить различные черты трехкластерных систем. Выбор того или иного базиса для проведения конкретных расчетов основывается на физических соображениях и простоте численной реализации задачи. При расчете связанных состояний обычно в основу положена простота анализа результирующей волновой функции или, другими словами, то, насколько данный базис удобен для описания «нормальных мод» движения трехкластерной системы. Для состояний, лежащих в трехкластерном континууме, при выборе базиса чаще всего руководствуются возможностью задания «естественной» асимптотики волновой функции (граничных условий), которые наиболее адекватно соответствуют постановке задачи и представляются достаточно удобными с точки зрения проведения численных расчетов.

Но какой бы базис из перечисленных выше не был выбран при решении конкретной задачи для определения коэффициентов C_ν (здесь и ниже для сокращения записи ν представляет собой некий совокупный индекс, полностью характеризующий базисные состояния, т. е. это либо $\{(\lambda\mu)\xi, \omega LM\}$, либо $\{n_1 l_1, n_2, l_2, LM\}$, либо $\{n_\rho, K, l_1, l_2, LM\}$), возникающих при разложении функции относительного движения и представляющих собой не что иное, как волновую функцию в осцилляторном представлении, приходим к

бесконечной системе линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{\nu'} [\langle \nu | \hat{H} | \nu' \rangle - E \langle \nu | \nu' \rangle] C_{\nu'} = 0, \quad (10)$$

которая является следствием выбора пробной функции при решении многочастичного уравнения Шредингера. Величины $\langle \nu | \hat{H} | \nu' \rangle$ и $\langle \nu | \nu' \rangle$ — это матричные элементы гамильтониана и единичного оператора на антисимметризованных многочастичных базисных функциях.

Если в координатном представлении при решении задач непрерывного или дискретного спектра обычно используется асимптотическое выражение для волновой функции на больших расстояниях для задания граничных условий, то в осцилляторном представлении осуществляется эквивалентная процедура. При больших значениях числа радиальных осцилляторных квантов относительного движения кластеров мы обращаемся к асимптотическим выражениям, но уже для коэффициентов разложения C_{ν} . Подробнее на этом остановимся в следующем разделе, сосредоточив свое внимание в основном на трехкластерной асимптотике состояний непрерывного спектра в рамках метода гиперсферических функций.

В АВ МРГ принцип Паули учитывается точно. Но при этом возникает вопрос об исключении состояний, запрещенных принципом Паули. Если в двухкластерном случае, где на каждой осцилляторной оболочке имеется по одной функции, этот вопрос решается элементарно, то в трехкластерном методика их исключения требует некоторых пояснений.

Состояния, запрещенные принципом Паули, исключаются путем диагонализации матрицы оператора антисимметризации

$$||\langle \nu | \nu' \rangle||, \quad (11)$$

вычисленной на многочастичных базисных функциях. Они соответствуют тем собственным векторам матрицы $||\langle \nu | \nu' \rangle|| = ||\langle \nu | \mathcal{A} | \nu' \rangle||$, которым отвечают нулевые собственные значения. Разрешенные состояния, являющиеся собственными функциями антисимметризатора, строятся в виде комбинации первоначальных базисных функций данной осцилляторной оболочки. Последнее связано с тем, что матрица $||\langle \nu | \nu' \rangle||$ имеет блочную структуру, а ее ненулевые матричные элементы представляют собой перекрытие функций, принадлежащих одной осцилляторной оболочке, т. е. тех из них, для которых выполняется условие $N = N'$. После исключения запрещенных состояний наша система уравнений (10) переписывается в несколько ином виде. Если $\{U_{\nu}^{\alpha}\}$ — матрица собственных векторов оператора антисимметризации, то получаем

$$\sum_{\alpha'} [\langle \alpha | \hat{H} | \alpha' \rangle - E \delta_{\alpha, \alpha'}] C_{\alpha'} = 0, \quad (12)$$

где $\|\langle \alpha | \hat{H} | \alpha' \rangle\|$ — матрица гамильтониана, вычисленная на состояниях, разрешенных принципом Паули, связанная с матрицей $\langle \nu | \hat{H} | \nu' \rangle$ соотношением

$$\langle \alpha | \hat{H} | \alpha' \rangle = \sum_{\nu, \nu'} U_{\nu}^{\alpha} \langle \nu | \hat{H} | \nu' \rangle U_{\nu'}^{\alpha'}.$$

В связи с этим заметим, что для БО-базиса и ГС-базиса первоначальная классификация базисных функций нарушается при исключении запрещенных состояний, в то время как классификация по квантовым числам $(\lambda\mu)$ для $SU(3)$ -базиса сохраняется ввиду того, что матрица $\|\langle \nu | \nu' \rangle\|$ является недиагональной лишь по отношению к квантовому числу ξ . Однако в асимптотической области, где расстояние между кластерами велико и действием принципа Паули, т. е. межкластерной антисимметризацией, можно пренебречь, мы вновь имеем возможность вернуться к первоначальной классификации базисных состояний.

1.1. Асимптотические решения в координатном представлении. АВ МРГ в применении к задачам дискретного и непрерывного спектров основана на использовании матричной формы уравнения Шредингера, которая является следствием притяжения квадратично-интегрируемого базиса состояний для разложения функции относительного движения кластеров. Как указывалось выше, в контексте ядерных задач весьма удобным представляется базис гармонического осциллятора. Естественно, что и граничные условия в этом случае должны формулироваться в терминах асимптотического поведения коэффициентов разложения волновой функции по этому базису. Но если при решении задач дискретного спектра особых вопросов здесь не возникает, задачу можно решать простой диагонализацией гамильтониана, то асимптотика состояний непрерывного спектра требует более подробного обсуждения.

Для трехкластерного случая определим асимптотическое поведение волновой функции. Для этого рассмотрим разложение волновой функции относительного движения

$$\Psi_Q(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) = \sum_{\nu} C_{\nu} \Psi_{\nu}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2), \quad (13)$$

где $\{\Psi_{\nu}\}$ — полный базис шестимерного гармонического осциллятора, представленный в гиперсферических переменных, т. е. с $\nu = \{n_{\rho}, K, (l_1 l_2) LM\}$, что покрывает все возможные типы относительного движения трех кластеров.

Для того чтобы получить асимптотическое поведение волновой функции трехкластерной системы, используется фолдинг-приближение, т. е. мы опираемся на естественное предположение, состоящее в пренебрежении эффектами антисимметризации между кластерами в асимптотической области. Это существенно упрощает поставленную задачу, практически сводя ее до уровня трехчастичной, поскольку рассматриваются «замороженные» кластеры. А задача

относительного движения трех частиц в случае отсутствия потенциала в рамках метода гиперсферических гармоник может быть решена точно (см., например, [40, 49, 53]). Она включает в себя переход от координат Якоби \mathbf{q}_1 и \mathbf{q}_2 к гиперрадиусу ρ и набору из пяти гиперуглов Ω , которые описывают геометрию трехчастичной системы аналогично тому, как это делают сферические координаты в случае двухчастичной системы, с последующим разложением межкластерной волновой функции в координатном представлении по гиперсферическим гармоникам $H_K^{\nu_0}(\Omega)$, являющимся обобщением обычных сферических гармоник $Y_{LM}(\theta, \varphi)$, где ν_0 — сокращенное обозначение совокупности индексов $\{(l_1 l_2)LM\}$.

В отсутствие кулоновского взаимодействия это приводит нас к набору уравнений для гиперрадиальных асимптотических решений, определяемых оператором кинетической энергии:

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{5}{\rho} \frac{d}{d\rho} - \frac{K(K+4)}{\rho^2} \right] - E \right\} R_{K,\nu_0}(\rho) = 0. \quad (14)$$

Решения этих уравнений могут быть получены аналитически и записаны в виде сходящейся и расходящейся волн с использованием функций Ханкеля:

$$R_{K,\nu_0}^{(\pm)}(\rho) = \begin{Bmatrix} H_{K+2}^{(1)}(k\rho)/\rho^2 \\ H_{K+2}^{(2)}(k\rho)/\rho^2 \end{Bmatrix}, \quad (15)$$

где

$$k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}.$$

Заметим, что асимптотические решения не зависят от квантовых чисел ν_0 и определяются исключительно значением гипермомента K . При этом различные K -каналы являются несвязанными.

В случае заряженных кластеров асимптотический гамильтониан содержит как кинетическую энергию, так и кулоновское взаимодействие:

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{5}{\rho} \frac{d}{d\rho} - \frac{\|\mathcal{K}\|}{\rho^2} \right] + \frac{\|Z_{\text{eff}}\|}{\rho} - E \right\} \|\mathcal{R}(\rho)\| = 0. \quad (16)$$

Матрица $\|\mathcal{K}\|$, которую мы в явном виде использовали и в (14), диагональна с матричными элементами $K(K+4)$, в то время как матрица «эффективных зарядов» $\|Z_{\text{eff}}\|$, представляющая собой результат усреднения потенциала кулоновского взаимодействия по гиперуглам, недиагональна по K и $(l_1 l_2)$. Детали определения и аналитические формулы для эффективных зарядов можно найти в работе [58], а их численные значения для интересующих нас систем будут рассмотрены в последующих разделах.

Стандартный подход к решению этого уравнения состоит в расщеплении каналов в предположении о том, что недиагональные матричные элементы $\|Z_{\text{eff}}\|$ пренебрежимо малы в сравнении с диагональными:

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{5}{\rho} \frac{d}{d\rho} - \frac{K(K+4)}{\rho^2} \right] + \frac{Z_{\text{eff}}}{\rho} - E \right\} R_{K,\nu_0}(\rho) = 0. \quad (17)$$

Константы Z_{eff} зависят от K , ν_0 и в целом от свойств рассматриваемой многочастичной системы. Мы будем ограничиваться указанным приближением, позволяющим расщепить уравнения, понимая при этом, что его применимость необходимо проверять для каждой конкретной трехкластерной системы.

Тем самым асимптотические решения принимают вид

$$R_{K,\nu_0}^{(\pm)}(\rho) = \frac{1}{\sqrt{k}} W_{\pm i\eta, K+2} \frac{\pm 2ik\rho}{\rho^{5/2}}, \quad (18)$$

где W — функция Уиттекера, а

$$\eta = \frac{m}{2\hbar^2} \frac{Z_{\text{eff}}}{k} \quad (19)$$

— параметр Зоммерфельда.

Поскольку η зависит от K , l_1 и l_2 через Z_{eff} , то, соответственно, и асимптотические решения являются зависимыми от этих величин.

В двухкластерном случае приходим к известному одномерному радиальному уравнению, которое имеет асимптотическое решение

$$R_L^{(\pm)}(\rho) = \frac{1}{\sqrt{k}} W_{\pm i\eta, L+\frac{1}{2}} \frac{\pm 2ik\rho}{\rho},$$

где для единообразия записи обозначение ρ используется для межкластерного расстояния, а параметр Зоммерфельда η с

$$Z_{\text{eff}} = Z_1 Z_2 \epsilon^2 \sqrt{\frac{A_1 A_2}{A_1 + A_2}}.$$

Тогда двухкластерную и трехкластерную асимптотики можно записать единым образом:

$$R_{\mathcal{L}}^{(\pm)}(\rho) = \frac{1}{\sqrt{k}} W_{\pm i\eta, \lambda} \frac{\pm 2ik\rho}{\rho^{\frac{\sigma-1}{2}}}, \quad (20)$$

где \mathcal{L} , λ , σ и η — параметры, которые приведены в табл. 1.

Таблица 1. Параметры двух- и трехкластерного асимптотического решения

Канал	\mathcal{L}	σ	λ	η
Двухкластерный	L	3	$L + \frac{1}{2}$	$\frac{Z_1 Z_2 e^2}{k} \frac{m}{2\hbar^2} \sqrt{\frac{A_1 A_2}{A_1 + A_2}}$
Трехкластерный	K	6	$K + 2$	$\frac{Z_{\text{eff}}}{k} \frac{m}{2\hbar^2}$

1.2. Асимптотические решения в осцилляторном представлении. Как указывалось выше, конкретная реализация АВ МРГ основана на разложении функции относительного движения по осцилляторным функциям, и, соответственно, нам необходимо знание асимптотического поведения коэффициентов разложения, совокупность которых представляет собой волновую функцию в осцилляторном представлении, при больших значениях n_ρ . Здесь мы сосредоточиваем свое внимание на трехкластерном случае; результаты для двухкластерного случая могут быть найдены в работах [18–21] или легко получены с использованием результатов п. 1.1.

В соответствии с известными результатами (см., например, [18, 19, 21, 28]) для коэффициентов разложения при больших значениях n_ρ будет иметь место следующее выражение:

$$C_{n_\rho} = \langle n_\rho | \psi \rangle \simeq \sqrt{2} \rho_{n_\rho}^2 \psi(\rho_{n_\rho}), \tag{21}$$

где b — осцилляторный радиус; $\rho_{n_\rho} = b \sqrt{4n_\rho + 2K + 6}$ — величина, определяющая классическую точку поворота, а ψ — гиперрадиальная функция.

В случае незаряженных кластеров при использовании выражения (15) для гиперрадиального асимптотического решения это приводит нас к следующему выражению для коэффициентов разложения $C_{n_\rho}^{(\pm)}$:

$$C_{n_\rho}^{(\pm)K} \simeq \sqrt{2} \begin{pmatrix} H_{K+2}^{(1)}(k\rho_{n_\rho}) \\ H_{K+2}^{(2)}(k\rho_{n_\rho}) \end{pmatrix}. \tag{22}$$

Этот результат может быть получен и другим способом [11, 62], т. е. из уравнения Шредингера в матричной форме, где гамильтониан состоит только из оператора кинетической энергии \hat{T} в осцилляторном (гиперрадиальном) представлении:

$$\sum_{m_\rho=0}^{\infty} \langle n_\rho, (K, \nu_0) | \hat{T} - E | m_\rho, (K, \nu_0) \rangle C_{m_\rho}^{K, \nu_0} = 0. \tag{23}$$

Вследствие свойств оператора \hat{T} в осцилляторном представлении возникает матричное уравнение, имеющее трехдиагональную форму. Решение этого уравнения относительно коэффициентов $C_{n_\rho}^{K, \nu_0}$ приводит к следующим трехчленным рекуррентным соотношениям:

$$T_{n_\rho, n_\rho-1}^{K, \nu_0} C_{n_\rho-1}^{K, \nu_0} + (T_{n_\rho, n_\rho}^{K, \nu_0} - E) C_{n_\rho}^{K, \nu_0} + T_{n_\rho, n_\rho+1}^{K, \nu_0} C_{n_\rho+1}^{K, \nu_0} = 0, \quad (24)$$

где

$$T_{n_\rho, m_\rho}^{K, \nu_0} = \langle n_\rho, (K, \nu_0) | \hat{T} | m_\rho, (K, \nu_0) \rangle. \quad (25)$$

Асимптотические решения (при больших значениях n_ρ) этих рекуррентных соотношений полностью совпадают с соответствующими решениями (22).

При наличии кулоновского взаимодействия мы вновь обращаемся к (21) и (18) для того, чтобы записать

$$C_{n_\rho}^{(\pm)K} \simeq \sqrt{2} \begin{Bmatrix} W_{i\eta, K+2}(2ikb\rho_{n_\rho}) / \sqrt{\rho_{n_\rho}} \\ W_{-i\eta, K+2}(-2ikb\rho_{n_\rho}) / \sqrt{\rho_{n_\rho}} \end{Bmatrix}. \quad (26)$$

В этом случае асимптотическое уравнение Шредингера в осцилляторном представлении уже не имеет трехдиагональной формы и не может быть решено аналитически.

Следует заметить, что все вышесказанное справедливо для сравнительно небольших значений импульса k и при достаточных значениях дискретного гиперрадиуса ρ_{n_ρ} , определяющего асимптотическую область. Но в принципе для произвольного k можно без особого риска предсказать значение n_ρ , позволяющее выйти на асимптотику решения.

Поскольку рассматривается асимптотическое расщепление в пространстве квантовых чисел (K, ν_0) , то мы должны иметь дело с асимптотическими каналами, которые характеризуются этими же числами. Но если полагать, что состояния с различными K и ν_0 связаны посредством короткодействующих ядерных и кулоновских сил только во внутренней области (области взаимодействия), то мы приходим к приближению связанных каналов.

1.3. Уравнения многоканальной АВ МРГ. В рассматриваемом трехкластерном АВ МРГ-формализме каналы характеризуются набором квантовых чисел (K, ν_0) , в то время как относительное движение кластеров в каждом из этих каналов связано с числом квантов гиперрадиальных возбуждений n_ρ . В соответствии со сказанным выше для краткости записи будем характеризовать каналы индексом K (K -канал), понимая его как совокупность квантовых чисел (K, ν_0) .

В этих терминах система уравнений (10) переписывается следующим образом:

$$\sum_{K', m_\rho} \langle n_\rho, K | \hat{H} - E | m_\rho, K' \rangle C_{m_\rho}^{K'} = 0. \quad (27)$$

А поскольку при решении задачи рассеяния используется S -матричный формализм, то коэффициенты разложения $C_{n_\rho}^K$ при больших значениях n_ρ можно представить так:

$$C_{n_\rho}^K = C_{n_\rho}^{(0)K} + \delta_{K_i K} C_{n_\rho}^{(-)K} - S_{K_i K} C_{n_\rho}^{(+)K}, \quad (28)$$

где для каждого из K -каналов $C_{n_\rho}^{(0)K}$ — так называемый остаточный коэффициент, а $C_{n_\rho}^{(\pm)K}$ — асимптотические коэффициенты, порождаемые сходящейся и расходящейся волнами. Матричные элементы $S_{K_i K}$ описывают связь между выходным каналом K и входным каналом K_i .

Как показано в работах [24, 26, 63], $C_{n_\rho}^{(\pm)K}$ удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\sum_{m_\rho=0}^{\infty} \langle n_\rho, K | \hat{H}_0 - E | m_\rho, K \rangle C_{m_\rho}^{(\pm)K} = \beta_0^{(\pm)K} \delta_{n_\rho, 0}, \quad (29)$$

где \hat{H}_0 — асимптотический гамильтониан, состоящий только из оператора кинетической энергии для незаряженных или из оператора кинетической энергии и кулоновского потенциала для заряженных кластеров. В правой части уравнения для $C_{m_\rho}^{(-)K}$ присутствует регуляризирующий фактор $\beta_0^{(-)K}$, связанный с иррегулярным поведением $C_0^{(-)K}$. Этот фактор позволяет рассматривать уравнение (29) при всех значениях n_ρ . Величина $\beta_0^{(-)K}$ может быть получена для обоих гамильтонианов (т. е. с кулоновским взаимодействием и без него). Мы полагаем $\beta_0^{(+)K} = 0$ для того, чтобы уравнения стали однородными.

Система уравнений (29) для асимптотических коэффициентов может быть решена численно с требуемой степенью точности. Коэффициенты $C_{n_\rho}^{(\pm)K}$ имеют асимптотическое поведение, аналогичное поведению (22) и (26) соответственно.

Подстановка (28) в уравнения (27) приводит нас к следующей системе динамических уравнений для многоканальной задачи:

$$\begin{aligned} \sum_{K', m_\rho} \langle n_\rho, K | \hat{H} - E | m_\rho, K' \rangle C_{m_\rho}^{(0)K'} - \sum_{K'} S_{K_i K'} V_{n_\rho}^{(+)KK'} = \\ = -\beta_0^{(-)K} \delta_{n_\rho, 0} \delta_{K_i K} - V_{n_\rho}^{(-)KK_i}, \end{aligned} \quad (30)$$

где слагаемые $V_{n_\rho}^{(\pm)KK'}$, определенные в работе [28], имеют вид

$$V_{n_\rho}^{(\pm)KK'} = \sum_{m_\rho=0}^{\infty} \langle n_\rho, K | \hat{V} | m_\rho, K' \rangle C_{m_\rho}^{(\pm)K'}. \quad (31)$$

Эта система уравнений и подлежит решению, целью которого является определение остаточных коэффициентов $C_{n_\rho}^{(0)K}$ и элементов S -матрицы $S_{K'K}$.

Для того чтобы оптимальным образом получить наиболее точное приближение для решения (30), рассмотрим некоторую внутреннюю область с $n_\rho \leq N_\rho$ и асимптотическую область, где $n_\rho > N_\rho$. Выбор N_ρ должен быть таким, чтобы можно было предполагать существенную малость коэффициентов разложения $\{C_{n_\rho}^{(0)K}\}$ в асимптотической области. В рамках таких предположений система уравнений (30) преобразуется в систему уравнений

$$\begin{aligned} \sum_{K', m_\rho < N_\rho} \langle n_\rho, K | \hat{H} - E | m_\rho, K' \rangle C_{m_\rho}^{(0)K'} - \sum_{K'} S_{K_i K'} V_{n_\rho}^{(+) K K'} = \\ = -\beta_0^{(-)K} \delta_{n_\rho, 0} \delta_{K_i K} - V_{n_\rho}^{(-)K K_i}. \end{aligned} \quad (32)$$

Полное число уравнений системы для каждого входного канала равно $N_{\text{ch}}(N_\rho + 1)$. Решение такой системы уравнений при помощи традиционных методов линейной алгебры дает возможность определить $N_{\text{ch}}N_\rho$ коэффициентов

$$\left\{ C_{n_\rho}^{(0)K}; K = K_{\min}, K_{\min} + 2, \dots, K_{\max}; n_\rho = 0, \dots, N_\rho - 1 \right\}$$

и N_{ch} элементов S -матрицы $\{S_{K_i K}; K = K_{\min}, K_{\min} + 2, \dots, K_{\max}\}$. Система уравнений должна быть решена для всех N_{ch} входных каналов.

1.4. Вычисление параметров резонансов. В этом разделе мы рассмотрим алгоритм определения энергии, а также полной и парциальных ширин резонансов трехкластерного континуума.

Решая систему динамических уравнений (32), мы получаем S -матрицу $\|S_{K, K'}\|$, которая содержит детальную информацию о упругих и неупругих процессах в трехкластерной системе. Анализ S -матрицы удобно проводить, преобразуя ее к диагональной форме. Такое представление S -матрицы обычно называется представлением собственных каналов и приводит к так называемым собственным фазам рассеяния δ_α :

$$S_\alpha = \exp \{2i\delta_\alpha\}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, N_{\text{ch}}, \quad (33)$$

где α нумерует несвязанные собственные каналы. Преобразование S -матрицы из ее первоначального представления $(S_{K, K'})$ (составной индекс $K = (K; l_1, l_2, LM)$) или, что то же самое, $K = (K; l_1, l_2)$ при фиксированных значениях L и M перечисляет все каналы $1, 2, \dots, N_{\text{ch}}$ к диагональному представлению (S_α) выполняется с помощью ортогональной матрицы (U_α^K) :

$$S_{K, K'} = \sum_{\alpha} U_{\alpha}^K S_{\alpha} U_{\alpha}^{K'}. \quad (34)$$

Для получения параметров резонансов, т. е. их положений и ширин, используются собственные фазы рассеяния. С помощью хорошо известной формулы для r -го резонанса в собственном α -канале легко найти энергию и ширину резонанса:

$$\left. \frac{d^2 \delta_\alpha}{dE^2} \right|_{E=E_{\alpha,r}} = 0, \quad \Gamma = 2 \left(\left. \frac{d\delta_\alpha}{dE} \right|_{E=E_{\alpha,r}} \right)^{-1}. \quad (35)$$

Собственные фазы можно анализировать с помощью формулы Брейта–Вигнера, применимой в случае изолированного резонанса. В каждом собственном α -канале для резонанса, номеруемого посредством индекса r , имеем

$$\delta_\alpha = \phi_\alpha - \arctg \frac{\Gamma_{r,\alpha}/2}{E - E_{r,\alpha}}, \quad (36)$$

где $E_{r,\alpha}$ — энергия резонанса; $\Gamma_{r,\alpha}$ — его полная ширина, а ϕ_α — фоновый фазовый сдвиг. Диагональный элемент S -матрицы для собственного α -канала при энергиях вблизи $E_{r,\alpha}$ принимает вид

$$S_\alpha = \exp \{2i\delta_\alpha\} \approx \exp \{2i\phi_\alpha\} \left[\frac{E - E_{r,\alpha} - (i/2)\Gamma_{r,\alpha}}{E - E_{r,\alpha} + (i/2)\Gamma_{r,\alpha}} \right]. \quad (37)$$

А S -матрица в своем изначальном виде может быть восстановлена таким образом:

$$S_{K,K'} = \sum_\alpha U_\alpha^K S_\alpha U_\alpha^{K'} \approx \sum_\alpha U_\alpha^K \exp \{2i\phi_\alpha\} \left[\frac{E - E_{\alpha,r} - (i/2)\Gamma_{\alpha,r}}{E - E_{\alpha,r} + (i/2)\Gamma_{\alpha,r}} \right] U_\alpha^{K'}. \quad (38)$$

Для многоканальной S -матрицы обычно используется следующее выражение [64, 65], которое мы даем в наших специфических обозначениях:

$$S_{K,K'} = S_{K,K'}^{(\text{bg})} - i \frac{\sqrt{\Gamma_K \Gamma_{K'}}}{E - E_{\alpha,r} + (i/2)\Gamma_{\alpha,r}}, \quad (39)$$

где $\Gamma_{\alpha,r}$ — полная ширина резонансного состояния, а $\Gamma_{K\alpha}$ — парциальные ширины, характеризующие скорость распада резонанса по каналу K . В сумме частичные ширины дают полную ширину. Величина $S_{K,K'}^{(\text{bg})}$ представляет собой фоновую S -матрицу, в отношении которой предполагается, что она является монотонной функцией от энергии. Иногда исходят из того, что фоновое рассеяние имеет место только в диагонали S -матрицы, т. е. $S_{K,K'}^{(\text{bg})} = \delta_{K,K'} S_K^{(\text{bg})}$.

Таким образом, представление собственных каналов приводит к выражению для многоканальной резонансной формы S -матрицы, а также к достаточно простому способу вычисления парциальных ширин резонансов. При

этом предполагается, что два резонанса не могут иметь место в различных собственных каналах при одной и той же энергии, т.е. то, что в других собственных каналах нет так называемых теневого резонансов. В этом предположении можно переписать (38) в виде

$$S_{K,K'} = \left[S_{K,K'}^{(\text{bg})} - i \sum_{\alpha} \exp\{i\phi_{\alpha}\} \frac{U_{\alpha}^K \Gamma_{\alpha,r} U_{\alpha}^{K'}}{E - E_{\alpha,r} + \frac{i}{2} \Gamma_{\alpha,r}} \exp\{i\phi_{\alpha}\} \right] =$$

$$= \left[S_{K,K'}^{(\text{bg})} - i \sum_{\alpha} \exp\{i\phi_{\alpha}\} \frac{\sqrt{\Gamma_{K\alpha} \Gamma_{K'\alpha}}}{E - E_{\alpha,r} + \frac{i}{2} \Gamma_{\alpha,r}} \exp\{i\phi_{\alpha}\} \right], \quad (40)$$

где фоновая S -матрица

$$S_{K,K'}^{(\text{bg})} = \sum_{\alpha} U_{\alpha}^K \exp\{2i\phi_{\alpha}\} U_{\alpha}^{K'}, \quad (41)$$

а парциальные ширины $\Gamma_{K\alpha}$ соотносятся с полной шириной $\Gamma_{\alpha,r}$ следующим образом:

$$\Gamma_{K\alpha} = |U_{\alpha}^K|^2 \Gamma_{\alpha,r}. \quad (42)$$

Поскольку (U_{α}^K) является ортогональной матрицей, можно легко убедиться, что сумма парциальных ширин равна полной ширине. Отметим, что из (40) следует, что фоновый фазовый сдвиг порождает фоновую S -матрицу, влияя тем самым и на резонансную часть.

Волновые функции собственных каналов, ассоциированные с резонансами, и их асимптотическое поведение определяются следующим образом:

$$\Psi^{(\alpha)} = \sum_K U_{\alpha}^K \Psi^{(K)} \rightarrow$$

$$\rightarrow \Phi_1(A_1) \Phi_2(A_2) \Phi_2(A_2) \sum_K U_{\alpha}^K \sum_{K'} f_{K'}^{(K)}(\rho) \chi_{K'}(\Omega_5) \rightarrow$$

$$\rightarrow \Phi_1(A_1) \Phi_2(A_2) \Phi_2(A_2) f_{\alpha}(\rho) \chi_{\alpha}(\Omega_5), \quad (43)$$

с радиальной компонентой f_{α} :

$$f_{\alpha}(\rho) \sim \psi_{\alpha}^{(-)}(k\rho) - S_{\alpha} \psi_{\alpha}^{(+)}(k\rho). \quad (44)$$

Их рассмотрение открывает дополнительные возможности для получения более полных сведений о свойствах резонансов.

В заключение раздела заметим, что предложенный алгоритм вычисления полной и парциальных ширин может быть использован для любой многоканальной, в том числе двух- или трехкластерной, квантово-механической системы.

1.5. Матричные элементы и метод производящих функций. Прежде чем приступить к решению алгебраической системы АВ МРГ, мы должны построить ее, вычислив все необходимые матричные элементы. Поэтому кратко остановимся на основных принципах их расчета на функциях трехкластерного базиса при помощи метода производящих функций. Две ключевые матрицы, из которых конструируются уравнения АВ МРГ, это матрица единичного оператора (или матрица оператора антисимметризации) и матрица гамильтониана. Первая из них важна тем, что обеспечивает нормировку базисных состояний. Вторая (если не рассматривать оператор кинетической энергии, матричные элементы которого могут быть получены из простых теоретико-групповых соображений) состоит из матричных элементов оператора потенциальной энергии. Последний в нашем случае представляет собой полуреалистический двухчастичный нуклон-нуклонный потенциал, являющийся суперпозицией гауссовых функций в совокупности с кулоновским взаимодействием.

Основные свойства производящих функций хорошо известны из учебников по математической физике. Производящая функция, или генераторное состояние, зависит от параметра, который мы понимаем как генераторную координату в том смысле, что разложение по этому параметру дает базисные состояния как коэффициенты разложения. Простейшим примером в данном случае может служить одночастичная смещенная гауссова функция (или, другими словами, модифицированная орбиталь Бринка–Блоха), которая используется в двухкластерном описании

$$\phi(\mathbf{r}|\mathbf{R}) = \exp \left\{ -\frac{1}{2}\mathbf{r}^2 + \sqrt{2}\mathbf{R} \cdot \mathbf{r} - \frac{1}{2}\mathbf{R}^2 \right\} \quad (45)$$

с параметром сдвига \mathbf{R} , выступающим в качестве генераторной координаты. Выбор параметризации генераторной координаты определяет квантовые числа базисных состояний, которые генерируются. При декартовой параметризации $\mathbf{R} = (R_x, R_y, R_z)$ порождаются осцилляторные функции в декартовых координатах $\phi_{n_x}(x)\phi_{n_y}(y)\phi_{n_z}(z)$. В случае сферической параметризации $\mathbf{R} = R\hat{\mathbf{R}}$ (здесь и ниже большая шляпка над вектором означает, что он единичный) разложение дает

$$\phi(\mathbf{r}|\mathbf{R}) = \sum_{n,l,m} N_{nl} R^{2n+l} Y_{lm}(\hat{\mathbf{R}}) \phi_{nlm}(\mathbf{r}). \quad (46)$$

В основе математических соотношений между рассматриваемыми разложениями лежит теория представлений групп и когерентных состояний [66,67]. Мы используем свойства производящих функций для упрощения вычислений матричных элементов. Матричный элемент, вычисленный на производящих

функциях (производящий матричный элемент), представляет собой функцию левых и правых генераторных координат

$$X(\mathbf{R}, \mathbf{R}') = \langle \phi(\mathbf{r}|\mathbf{R}) | \hat{\mathbf{X}} | \phi(\mathbf{r}|\mathbf{R}') \rangle. \quad (47)$$

Разложение этой функции дает матричные элементы на базисных состояниях. В разложении они могут быть идентифицированы посредством коэффициентов, составленных из генераторных координат:

$$X(\mathbf{R}, \mathbf{R}') = \sum_{nlm} \sum_{n'l'm'} \mathcal{N}_{nl} \mathcal{N}_{n'l'm'} R^{2n+l} R'^{(2n'+l')} Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{R}}) Y_{l'm'}(\hat{\mathbf{R}}') \times \langle \phi_{nlm}(\mathbf{r}) | \hat{\mathbf{X}} | \phi_{n'l'm'}(\mathbf{r}) \rangle. \quad (48)$$

В случае трехкластерного базиса рассматривается более сложная конструкция для производящей функции, порождающая межкластерные базисные функции, где \mathbf{q} используется для обозначения векторов Якоби, составленных из динамических переменных, и \mathbf{Q} — для соответствующих генераторных координат, т. е.

$$\Psi(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2 | \mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2) = \exp \left\{ -\frac{1}{2}(\mathbf{q}_1^2 + \mathbf{q}_2^2) + \sqrt{2}(\mathbf{Q}_1 \cdot \mathbf{q}_1 + \mathbf{Q}_2 \cdot \mathbf{q}_2) - \frac{1}{2}(\mathbf{Q}_1^2 + \mathbf{Q}_2^2) \right\}. \quad (49)$$

Выбор параметризации связан с порождаемым базисом состояний. Если мы работаем с ГС-базисом и используем классификацию Цернике–Брикмана, то вводим и соответствующие гиперсферические координаты. Гиперрадиус и гиперсферические углы как для пространственных координат, так и для генераторных параметров определяем следующим образом:

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt{\mathbf{q}_1^2 + \mathbf{q}_2^2}, & q_1 &= \rho \cos \theta, & q_2 &= \rho \sin \theta, \\ R &= \sqrt{\mathbf{Q}_1^2 + \mathbf{Q}_2^2}, & Q_1 &= R \cos \Theta, & Q_2 &= R \sin \Theta. \end{aligned} \quad (50)$$

И в соответствии со сказанным выше разлагаем производящую функцию (49) по функциям шестимерного гармонического осциллятора:

$$\Psi(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2 | \mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2) = \sum_{\nu} \Psi_{\nu}(\rho, \theta, \hat{\mathbf{q}}_1, \hat{\mathbf{q}}_2) \Xi_{\nu}^*(R, \Theta, \hat{\mathbf{Q}}_1, \hat{\mathbf{Q}}_2), \quad (51)$$

где используется ранее введенный обобщенный индекс ν , означающий полный набор квантовых чисел функций осцилляторного ГС-базиса. В динамических переменных

$$\begin{aligned} \Psi_{\nu}(\rho, \theta, \hat{\mathbf{q}}_1, \hat{\mathbf{q}}_2) &= \\ &= \mathcal{N}_{n_{\rho}, K} \rho^K \exp \{-\rho^2/2\} L_{n_{\rho}}^{K+2}(\rho^2) H_K^{(l_1 l_2) LM}(\theta, \hat{\mathbf{q}}_1, \hat{\mathbf{q}}_2), \end{aligned} \quad (52)$$

а их аналоги в генераторных координатах имеют вид

$$\Xi_\nu(R, \Theta, \hat{\mathbf{Q}}_1, \hat{\mathbf{Q}}_2) = \mathcal{N}_{n_\rho, K} R^{K+2n_\rho} H_K^{(l_1 l_2)LM}(\Theta, \hat{\mathbf{Q}}_1, \hat{\mathbf{Q}}_2). \quad (53)$$

Здесь H — гиперсферическая функция, т. е.

$$H_K^{(l_1 l_2)LM}(\Theta, \hat{\mathbf{Q}}_1, \hat{\mathbf{Q}}_2) = \mathcal{N}_K^{(l_1 l_2)LM} \Phi_K^{(l_1 l_2)}(\Theta) \{Y_{l_1}(\hat{\mathbf{Q}}_1) \times Y_{l_2}(\hat{\mathbf{Q}}_2)\}_{LM}, \quad (54)$$

$$\Phi_K^{(l_1 l_2)}(\Theta) = (\cos \Theta)^{l_1} (\sin \Theta)^{l_2} P_{\frac{K-l_1-l_2}{2}}^{l_2+\frac{1}{2}, l_1+\frac{1}{2}}(\cos 2\Theta).$$

Из самого вида (53) сразу следует процедура отбора базисных функций с фиксированными квантовыми числами $\nu = \{n_\rho, K, (l_1 l_2)LM\}$, т. е. нужно продифференцировать производящую функцию $(K + 2n_\rho)$ раз по R и положить $R = 0$. После чего проинтегрировать оставшееся выражение по Θ с весом $\Phi_K^{(l_1 l_2)}$ для того, чтобы спроектировать его на гипермомент K и по единичным векторам $\hat{\mathbf{Q}}_1$ и $\hat{\mathbf{Q}}_2$ с весами $Y_{l_1 m_1}(\hat{\mathbf{Q}}_1)$ и $Y_{l_2 m_2}(\hat{\mathbf{Q}}_2)$ соответственно для проектирования на парциальные угловые моменты.

Таким образом, расчет матричных элементов с использованием метода производящих функций проводится в два этапа. На первом этапе вычисляются матричные элементы операторов физических величин на производящих функциях (производящие матричные элементы). Обычно это делается аналитически. На втором этапе проводится разложение производящих матричных элементов по генераторным координатам, т. е. вычисление матричных элементов на базисных функциях. Это делается либо прямым дифференцированием по R и интегрированием по гиперуглам, либо путем использования рекуррентных соотношений [68], что обычно является более продуктивным. Заметим, что в любом случае все аналитические вычисления здесь хотя и достаточно просты, но весьма громоздки. Поэтому их приходится выполнять с использованием пакетов аналитических вычислений «Mathematica» или «Maple».

Дальнейшее более полное изложение техники вычисления матричных элементов матрицы перекрытия и гамильтониана выходит за рамки данной статьи и может составить отдельную тему для обсуждения, поскольку содержит большое число технических деталей. С ними можно ознакомиться в работах [58, 69], где подробно рассматривается техника вычислений указанных величин для трехкластерных систем.

1.6. Сходимость результатов и модификация схемы вычислений АВ МРГ. Сходимость результатов при численном решении уравнений АВ МРГ существенным образом зависит от выбора величины N_ρ , т. е. того значения n_ρ , при котором происходит переход от внутренней к внешней области. Определяющим фактором здесь служит поведение матричных элементов потенциальной энергии, которые могут достаточно медленно убывать по мере увеличения n_ρ . Как известно из литературы (см., например, [42, 43, 70]), в трехкластерных системах асимптотическая зависимость потенциала от гиперрадиуса

задается законом $1/\rho^3$, что естественным образом должно сказываться на поведении матричных элементов в АВ МРГ. И действительно, асимптотическая форма эффективного потенциала в наших расчетах соответствует этому закону. Потенциал с асимптотическим хвостом $1/\rho^3$ очень сильно влияет на фазовые сдвиги в области малых энергий [71,72], на что следует обратить особое внимание, если необходимо получить хорошую сходимость результатов. Последнее обычно и требует выбора больших значений N_ρ .

Следующим фактором, влияющим на сходимость результатов, является выбор значения осцилляторной длины b , которая в наших расчетах одинакова по величине как для волновых функций кластеров, так и для функции их относительного движения. Значение b естественно фиксируется в первую очередь таким образом, чтобы «замороженные» в их основных состояниях кластеры обладали разумными физическими свойствами (энергии основных состояний). Такой выбор b зачастую не является оптимальным с точки зрения сходимости.

Вопросы, связанные со сходимостью результатов в АВ МРГ, более подробно обсуждались в работах [28, 29]. Там же рассмотрено квазиклассическое приближение для матричных элементов потенциала при большом числе квантов осцилляторных возбуждений, которое приводит к использованию простых трехчленных рекуррентных соотношений. При этом вводится некая промежуточная («квазиклассическая») область, лежащая между областью взаимодействия и чисто асимптотической областью. В этой области работает модифицированное асимптотическое решение, еще подверженное влиянию потенциала, для которого можно написать свои рекуррентные соотношения. Это позволяет достаточно успешно учесть длинный хвост потенциала. При этом точка сшивания с граничными условиями, которая обычно лежит на границе внутренней и асимптотической областей, перемещается на границу асимптотической области и области промежуточной. Предложенная процедура существенно снижает затраты машинного времени, позволяя при этом разумным образом учесть медленное убывание потенциальной энергии.

2. СВЯЗАННЫЕ СОСТОЯНИЯ ЯДЕР ${}^6\text{He}$, ${}^6\text{Li}$ И ${}^8\text{He}$

В этом разделе представлены результаты, полученные при рассмотрении свойств основных состояний ядер ${}^6\text{He}$, ${}^6\text{Li}$ и ${}^8\text{He}$ в трехкластерном варианте АВ МРГ. Концентрируя основное внимание на ядрах ${}^6\text{He}$ и ${}^8\text{He}$, заметим, что они представляют собой ядра с большим избытком нейтронов, т. е. ядра, для которых отношение $(N - Z)/A$ существенно больше, чем обычно. Такие ядра расположены вблизи границы нейтронной стабильности, являясь при этом β -нестабильными. Они живут непродолжительное время и посредством испускания электронов преобразуются в ядра с примерно равным числом про-

тонов и нейтронов. Очень интересным свойством ядер с большим избытком нейтронов является наличие у них нейтронного гало. Естественно, что было предпринято большое число попыток истолковать этот факт в рамках различных микроскопических и полумикроскопических подходов [53, 73–79].

Если выбор трехкластерных конфигураций при рассмотрении ${}^6\text{He}$, ${}^6\text{Li}$ вполне очевиден, это $\alpha + n + n$ и $\alpha + n + p$ соответственно, то выбор кластеризации для ядра ${}^8\text{He}$ требует некоторого обсуждения.

Известно, что нижайший порог развала ${}^8\text{He}$ лежит при энергии 2,1 МэВ относительно основного состояния и соответствует распаду ${}^6\text{He} + 2n$. А выше, только при энергии возбуждения 3,1 МэВ, открывается канал $\alpha + 4n$ (см., например, [80]). Тем не менее в качестве кора будем рассматривать α -частицу, что согласуется с соображениями, высказанными в работе [81], о важности учета кластеризации $\alpha + 4n$. В частности, в [81] было указано на то, что энергия связи двух нейтронов в ${}^8\text{He}$ в два раза больше, чем в ${}^6\text{He}$. Этот факт говорит о том, что ${}^6\text{He}$ не может выступать в качестве кора и нейтронное гало должно состоять из четырех нейтронов. В соответствии с этим в трехкластерной модели для ${}^8\text{He}$ мы выбираем кластеризацию $\alpha + {}^2n + {}^2n$, делая при этом дополнительное предположение об объединении валентных нейтронов в динейтронные кластеры. Оправдать это упрощение можно, например, тем, что взаимодействие между нуклонами может существенно усиливаться в присутствии третьей частицы [82].

Также заметим, что использование динейтронных кластеров является на практике достаточно хорошо апробированным приближением. Например, в работе [83] динейтронный и дипротонный кластеры были с успехом использованы для описания выходных каналов реакций ${}^3\text{H} + {}^3\text{H} \rightarrow {}^4\text{He} + n + n$ и ${}^3\text{He} + {}^3\text{He} \rightarrow {}^4\text{He} + p + p$ соответственно. Кроме того, в работе [84] основные свойства ядра ${}^{11}\text{Li}$ были достаточно успешно воспроизведены и при использовании кластерной конфигурации ${}^9\text{Li} + {}^2n$ с точечным динейтроном.

Напомним, что при решении трехкластерной задачи при наличии двух одинаковых кластеров можно использовать два дерева Якоби, которые схематически изображены на рис. 1. Первое из них обычно называют T -деревом, а для шестинуклонных задач еще и «4 + 2»-деревом. Один из векторов Якоби (для определенности \mathbf{q}_1) задает относительное движение двух нуклонов в ${}^6\text{He}$ и ${}^6\text{Li}$ или двух динейтронов в ${}^8\text{He}$, а второй — \mathbf{q}_2 — характеризует движение α -частицы относительно центра масс пары нуклонов (динейтронов). Если $n_1 = n_{\min,1}$, где $n_{\min,1}$ — минимальное значение n_1 , определяемое принципом Паули, то мы приходим к традиционной двухкластерной задаче. Например, при $n_1 = 0$ для ${}^6\text{Li}$ получаем кластеризацию $\alpha + d$. Второе дерево Якоби — Y -дерево («5 + 1»-дерево для шести частиц) — определяется векторами \mathbf{q}_1 и \mathbf{q}_2 , описывающими относительное движение α -частицы и одного из нуклонов (динейтронов) и движение второго нуклона (динейтрона) относительно центра масс первых двух кластеров. В расчетах мы использовали

оба дерева, но выбранные кластерные представления для рассматриваемых ядер ввиду их определенной симметрии делают T -дерево более удобным для проведения простого изначального анализа базиса используемых функций, результаты которого приводят к упрощению решения задачи.

Так, для T -дерева четность двухнуклонных (двухнейтронных) подсистем, а следовательно, и всей системы в целом, определяется их спиновыми и изоспиновыми квантовыми числами, которые являются и спин-изоспиновыми квантовыми числами ядра в целом. Следовательно, для ${}^6\text{He}$ ($T = 1, S = 0$), для ${}^8\text{He}$ ($T = 2, S = 0$) и для ${}^6\text{Li}$ ($T = 0, S = 1$) требуются только четные n_1 (l_1) и, соответственно, четные n_2 (l_2). А поскольку мы рассматриваем состояния $L = 0^+$, то для полной классификации базисных функций необходимо всего три квантовых числа. Для $SU(3)$ -базиса это (λ, μ) и ξ , где λ и μ четны. Для БО-базиса — n_1, n_2 и $l = l_1 = l_2$. Для ГС — K, n_ρ и $l = l_1 = l_2$.

Для описания свойств основных состояний каждого из рассматриваемых ядер использовались функции нижайших осцилляторных оболочек с четными значениями главного квантового числа вплоть до $N = 30$ включительно или, если использовать терминологию многоконфигурационной модели оболочек, привлекался кластерный базис функций до $30\hbar\omega$ включительно. В общем случае таких функций 816. Однако, если принять во внимание приведенные выше рассуждения, то для T -дерева остается 443 базисных функции, при этом разрешенных состояний для ${}^6\text{He}$ и ${}^6\text{Li}$ получается 428, а для ${}^8\text{He}$ — 399, чего вполне достаточно для обеспечения хорошей сходимости результатов.

2.1. Связанные состояния ядер ${}^6\text{He}$ и ${}^6\text{Li}$ и оптимальные подпространства базисных функций. Результаты, представленные в этом пункте, получены с использованием потенциалов Волкова [85] и Миннесота [86]. При этом единственным «свободным» параметром остается осцилляторный радиус b . Он выбирается из условия оптимизации энергии связи α -частицы, т. е. $b = 1,37$ и $1,28$ Фм для потенциалов Волкова и Миннесота соответственно. Кулоновское взаимодействие учитывается только при рассмотрении свойств ядра ${}^6\text{Li}$ (для ${}^6\text{He}$ оно приводит только к общему сдвигу уровней). В расчетах также не принимаются во внимание спин-орбитальные и тензорные компоненты ядерных сил.

Для иллюстрации сходимости энергии связи основных состояний ${}^6\text{He}$ и ${}^6\text{Li}$ на рис. 2 энергии представлены как функции главного квантового числа N вовлекаемых в расчет осцилляторных оболочек при использовании T -дерева Якоби.

На рис. 3 классификация коэффициентов разложения C_α , представляющих собой волновую функцию в терминах разрешенных принципом Паули состояний, осуществляется посредством двух индексов N и N_{fun} ($\alpha = \{N, N_{\text{fun}}\}$). Первый из них указывает на оболочку, а второй — на разрешенную принципом Паули функцию на этой оболочке. Заметим, что хотя в волновую функцию наибольший вклад вносит нижайшая оболочка, тем не

Рис. 2. Энергии связанных состояний ядер ${}^6\text{He}$ и ${}^6\text{Li}$ как функции главного квантового числа N осцилляторных оболочек, вовлеченных в расчет при использовании T -дерева Якоби. Энергия отсчитывается от порога $\alpha + n + n$ или $\alpha + n + p$ соответственно. Потенциал Волкова

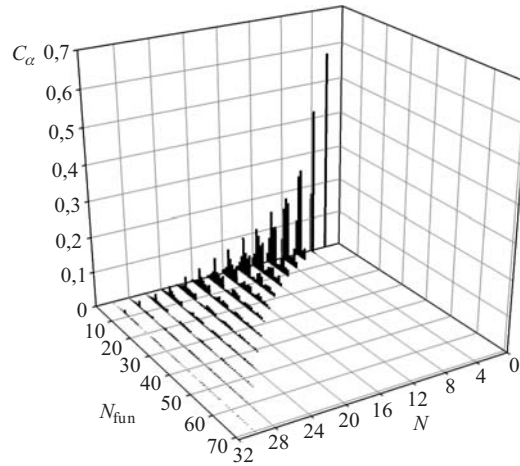
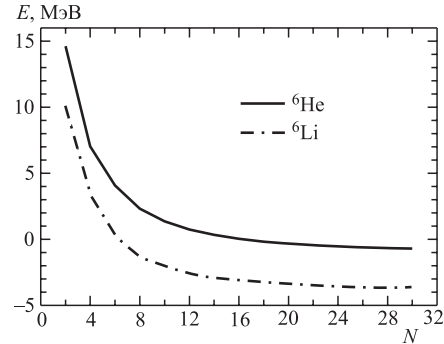


Рис. 3. Волновая функция основного состояния ядра ${}^6\text{He}$ в осцилляторном представлении, полученная с использованием потенциала Волкова. N — главное квантовое число вовлекаемой в расчет оболочки; N_{fun} — разрешенные принципом Паули состояния на каждой из оболочек

менее вклад от последующих оболочек является весьма существенным, хотя в этом участвует сравнительно небольшое число функций на каждой из них. Представленная ситуация определяется динамикой задачи и говорит о значительной степени кластеризации рассматриваемого ядра.

Для того чтобы показать, какие подпространства базисных функций являются наиболее важными, вводятся ограничения на квантовые числа используемых базисов. Результаты для ряда таких подпространств представлены в табл. 2 и 3. Так, для $SU(3)$ -базиса вводились ограничения вида $\mu \leq 4$. Для БО-базиса рассматривались состояния с нижайшими значениями частичных угловых моментов. Для ГС-базиса использовались малые значения K . В результате получается, например, что ограничение $l = l_1 = l_2 = 0$

Таблица 2. Энергия связи основного состояния ядра ${}^6\text{He}$ (${}^6\text{Li}$), полученная с использованием потенциала Волкова. Энергия порога $E_{\text{thresh}}(\alpha+n+n(p)) = -27,924$ МэВ

Параметр	$SU(3)$	БО	ГС
Базис	Полный	Полный	Полный
E , МэВ	-28,629	-28,629	-28,629
N_{fun}	428	428	428
Базис	$\mu = 0$	$l = 0$	$K = 0$
E , МэВ	-27,702	-28,455	-20,733
N_{fun}	120	134	15
Базис	$\mu \leq 2$	$l \leq 2$	$K \leq 2$
E , МэВ	-28,316	-28,618	-27,364
N_{fun}	225	237	29
Базис	$\mu \leq 4$	$l \leq 4$	$K \leq 4$
E , МэВ	-28,533	-28,628	-27,800
N_{fun}	303	313	56

Таблица 3. Энергия связи основного состояния ядра ${}^6\text{Li}$, полученная с использованием потенциала Миннесота. Энергия порога $E_{\text{thresh}}(\alpha+p+n) = -24,687$ МэВ; $E_{\text{thresh}}(\alpha+d) = -26,871$ МэВ

Параметр	$SU(3)$	БО	ГС
Базис	Полный	Полный	Полный
E , МэВ	-28,309	-28,309	-28,309
N_{fun}	428	428	428
Базис	$\mu = 0$	$l = 0$	$K = 0$
E , МэВ	-27,507	-28,146	-17,119
N_{fun}	120	134	15
Базис	$\mu \leq 2$	$l \leq 2$	$K \leq 2$
E , МэВ	-28,045	-28,300	-25,379
N_{fun}	225	237	29
Базис	$\mu \leq 4$	$l \leq 4$	$K \leq 4$
E , МэВ	-28,276	-28,308	-26,588
N_{fun}	303	313	56

в БО-базисе не приводит к существенному ухудшению результата по энергии связи при уменьшении числа базисных функций практически в четыре раза. Очевидно, это связано с тем, что взаимодействие между кластерами так же, как и между нуклонами, наиболее сильно проявляется в четных состояниях, и особенно при нулевом значении углового момента.

Волновая функция, которая представлена на рис. 3, получена в терминах $SU(3)$ -базиса. В БО- и ГС-базисе имеет место та же картина. Но исполь-

зование последних из указанных базисов часто оказывается более удобным для получения дополнительной физической информации. Так, коэффициенты C_ν , описывающие некоторое состояние системы, как указывалось выше, задают, собственно говоря, и функцию относительного движения кластеров, представляемую формулой (13). А имея ее в руках, полученную, например, с помощью БО-базиса, можно рассчитать корреляционную функцию, которая определяет вероятность того, что валентные нуклоны находятся на расстоянии r_1 друг от друга, а центр масс двухнуклонной системы удален от α -частицы на расстояние r_2 :

$$P(r_1, r_2) = r_1^2 r_2^2 \int d\hat{\mathbf{r}}_1 d\hat{\mathbf{r}}_2 |\Psi_Q(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)|^2. \quad (55)$$

Здесь уместно напомнить, что

$$\mathbf{r}_1 = \sqrt{2}\mathbf{q}_1, \quad \mathbf{r}_2 = \sqrt{\frac{3}{4}}\mathbf{q}_2.$$

Корреляционная функция $P(r_1, r_2)$ основного состояния ядра ${}^6\text{He}$ представлена на рис. 4. Она имеет два четко выраженных максимума. Один из них соответствует сплюснутой конфигурации (тупоугольный треугольник с α -частицей при вершине тупого угла), когда два нуклона удалены друг от друга на расстояние $\sim 5,4$ Фм, а их центр масс отстоит от α -частицы только

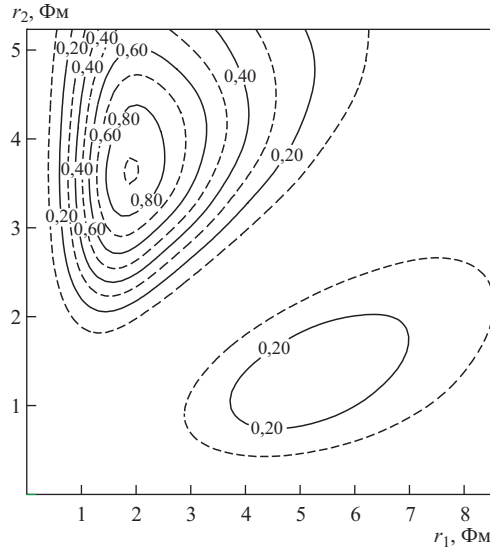


Рис. 4. Корреляционная функция $P(r_1, r_2)$ основного состояния ядра ${}^6\text{He}$

на $\sim 1,4$ Фм. Второй максимум выделяет вытянутую конфигурацию, в ней два валентных нуклона значительно удалены от α -частицы ($\sim 3,6$ Фм) и вынуждены (чтобы не разорвать связанное состояние) сблизиться на короткое расстояние 1,7 Фм. При этом доминирует вытянутая конфигурация — ее вес примерно в три раза больше, чем вес сплюснутой конфигурации. Эти результаты качественно вполне согласуются с результатами работы [55], полученными в рамках полумикроскопической теории, где кластер ${}^4\text{He}$ рассматривался как бесструктурная частица, хотя там вес вытянутой конфигурации превосходит вес сплюснутой только в полтора раза.

Следует отметить, что в обсуждаемых расчетах рассматривалось только состояние со спином, равным нулю, в то время как вклад в волновую функцию от состояния с $S = 1$ не является пренебрежимо малым. Как следует, например, из результатов работ [78, 87], нормировка волновой функции может на 10 % или несколько больше состоять из вклада состояния со спином единица.

Интересно провести некое сопоставление геометрических характеристик трехкластерных конфигураций ядер ${}^6\text{He}$ и ${}^6\text{Li}$. Для этого можно воспользоваться величинами

$$\frac{\langle 0; {}^6\text{He} | \mathbf{q}_1^2 | 0; {}^6\text{He} \rangle}{\langle 0; {}^6\text{Li} | \mathbf{q}_1^2 | 0; {}^6\text{Li} \rangle}, \quad \frac{\langle 0; {}^6\text{He} | \mathbf{q}_2^2 | 0; {}^6\text{He} \rangle}{\langle 0; {}^6\text{Li} | \mathbf{q}_2^2 | 0; {}^6\text{Li} \rangle}, \quad (56)$$

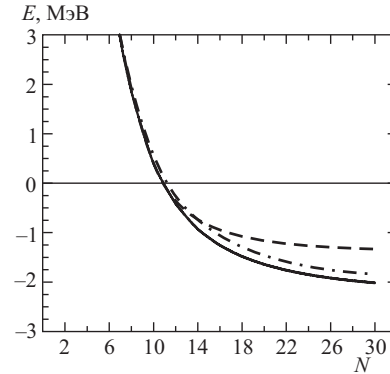
где $|0\rangle$ указывает на то, что усреднение проводится по волновым функциям основного состояния.

Оказывается, что расстояние между «валентными» нуклонами в ${}^6\text{He}$ в 1,26 раза больше, чем в ${}^6\text{Li}$, а расстояние между α -частицей и динеитроном в ${}^6\text{He}$ в 1,17 раза больше, чем между α -частицей и дейтроном в ${}^6\text{Li}$. Это означает, что ${}^6\text{He}$ -ядро более рыхлое, чем ${}^6\text{Li}$. Такие различия в геометрии рассматриваемых ядер могут служить указанием на существование нейтронного гало у ядра ${}^6\text{He}$.

2.2. Связанное состояние ${}^8\text{He}$ и оптимальные подпространства базисных функций. Результаты, представленные в этом пункте, получены с использованием потенциала Волкова [85]. Осцилляционный радиус b выбирался из условия минимума энергии порога развала ядра ${}^8\text{He}$ на ${}^4\text{He}$ и два динеитрона, что привело к его значению 1,51 Фм. Соответственно, энергия порога ${}^4\text{He} + {}^2n + {}^2n$ составила $-22,15$ МэВ, а энергия связи α -частицы оказалась равной $-26,84$ МэВ. Кулоновское взаимодействие не учитывалось, поскольку оно может привести лишь к сдвигу энергии основного состояния и пороговой энергии на одну и ту же величину.

На рис. 5 представлена энергия связи основного состояния ядра ${}^8\text{He}$ как функция главного квантового числа N при использовании всех базисных функций на каждой из оболочек. Энергия отсчитывается от порога $\alpha + {}^2n + {}^2n$.

Рис. 5. Энергия основного состояния ядра ${}^8\text{He}$ как функция главного квантового числа N осцилляторных оболочек, включенных в расчет. Сплошная, штриховая и штрихпунктирная линии представляют энергии, полученные с использованием «полного» базиса, $SU(3)$ -базиса ($\mu_{\max} = 4$) и БО-базиса ($l_{\max} = 0$) соответственно. Энергия отсчитывается от порога ${}^4\text{He} + {}^2n + {}^2n$



Там же показаны энергии основного состояния, полученные для ряда подпространств полного пространства осцилляторных базисных функций. Для БО-базиса указанное подпространство включает в себя только состояния с парциальными угловыми моментами $l = l_1 = l_2 = 0$, а для $SU(3)$ -базиса это функции с $\mu \leq 4$. Последнее подпространство, включающее в себя 274 функции, дает энергию, заметно отличающуюся от «точной», полученной для «полного базиса», в то время как первое, содержащее всего 118 функций, позволяет получить результат, отличающийся от «точного» весьма незначительно. Это, по-видимому, следствие того факта, что взаимодействие между нуклонами наиболее сильно в S -состоянии.

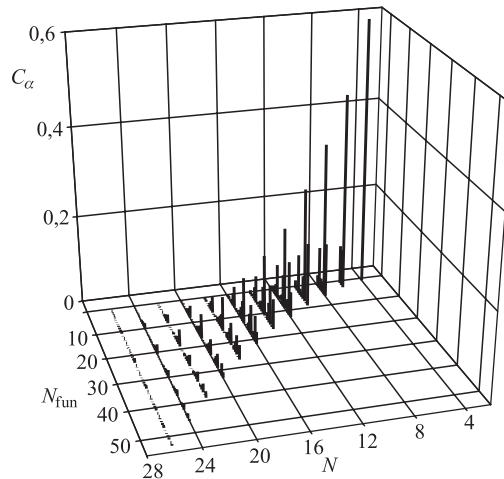


Рис. 6. Волновая функция основного состояния ядра ${}^8\text{He}$ в осцилляторном представлении, полученная в терминах $SU(3)$ -базиса с использованием потенциала Волкова. N — главное квантовое число, определяющее оболочку, N_{fun} перечисляет состояния, разрешенные принципом Паули, на каждой из оболочек

На рис. 6 представлена волновая функция основного состояния ${}^8\text{He}$ в терминах коэффициентов разложения C_α по состояниям, разрешенным принципом Паули. Для их классификации используются два индекса N и N_{fun} ($\alpha = \{N, N_{\text{fun}}\}$). Первый из них — N — главное квантовое число, определяющее осцилляторную оболочку, а второй — N_{fun} — нумерует разрешенные принципом Паули состояния на каждой из оболочек. Коэффициенты разложения C_α определены с использованием $SU(3)$ -базиса, где классификация по $(\lambda\mu)$ сохраняется и после исключения запрещенных состояний. При этом оказывается, что главный вклад в волновую функцию ядра ${}^8\text{He}$ (около 80 %) вносят состояния с $\mu = 2$, а состояния с $\mu = 0$ дают лишь 9 %. Заметим, что в случае ${}^6\text{He}$ состояния с $\mu = 2$ доминируют в еще большей степени, с весом, который составляет более 93 %.

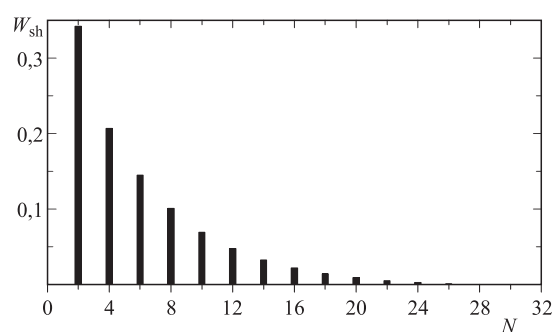


Рис. 7. Веса W_{sh} осцилляторных оболочек, определяемых главными квантовыми числами N , в волновой функции основного состояния ядра ${}^8\text{He}$

Как видно из рис. 6 и, может быть, более отчетливо из рис. 7, где представлены веса осцилляторных оболочек, основной вклад в волновую функцию вносят нижайшие из них. Однако вес оболочек с большими значениями N также весьма существен, что говорит о значительной кластеризации ядра, т. е. о том, что валентные нейтроны значительную часть времени находятся вдали от α -частицы, создавая нейтронное гало.

С целью получения дополнительной информации о роли различных подпространств полного пространства осцилляторных функций вводятся ограничения на квантовые числа базисных состояний. Первым делом для БО-базиса ограничивались максимальные значения парциальных моментов величинами $l = 0$, $l = 2$ и $l = 4$ ($l = l_1 = l_2$). Это делалось как для Y -, так и для T -дерева. Для $SU(3)$ -базиса (T -дерево) ограничения налагались на квантовое число μ , т. е. в качестве максимальных значений использовались $\mu = 0, 2$ и 4 . Результаты представлены в табл. 4. Видно, что наиболее важной частью биосцилляторного базиса является подпространство с $l_1 = l_2 \leq 2$ для Y -дерева,

Таблица 4. Энергия связи основного состояния ядра ${}^8\text{He}$, отсчитываемая от порога ${}^4\text{He} + {}^2n + {}^2n$

Базис	Дерево Якоби	Подпространство	E , МэВ	Число функций
БО	T	Полный	-2,065	399
		$l = 0$	-1,832	118
		$l \leq 2$	-2,047	219
		$l \leq 4$	-2,064	293
БО	Y	Полный	-2,065	399
		$l = 0$	-1,839	118
		$l \leq 2$	-2,065	219
$SU(3)$	T	Полный	-2,065	399
		$\mu = 0$	6,341	91
		$\mu \leq 2$	0,172	196
		$\mu \leq 4$	-1,335	274

поскольку 54 % полного числа базисных функций (219 функций) при максимальном значении $N = 30$ дает энергию основного состояния, практически совпадающую с «точной».

2.3. Роль принципа Паули. Для того чтобы проиллюстрировать действие принципа Паули в трехкластерной системе, рассматриваются вклады различных разрешенных принципом Паули состояний в волновую функцию основного состояния ядра ${}^8\text{He}$. Каждому из таких состояний, являющемуся собственной функцией оператора антисимметризации, может быть сопоставлено собственное значение этого оператора. Как отмечалось выше, через антисимметризатор перекрываются только те функции, для которых выполняется условие $n_1 + n_2 = n'_1 + n'_2$ для БО-базиса, или $\lambda + 2\mu = \lambda' + 2\mu'$ для $SU(3)$ -базиса, или $K + 2n_\rho = K' + 2n'_\rho$ для ГС-базиса, т. е. принадлежащие одной и той же осцилляторной оболочке. Анализ собственных значений показывает, что диагонализация матрицы $|\langle \nu | \mathcal{A} | \nu' \rangle|$ выделяет состояния с собственными значениями оператора антисимметризации для двухкластерных подсистем. Это означает, в частности, то, что запрещенные принципом Паули состояния в трехкластерной системе есть не что иное, как запрещенное состояние по крайней мере для одной из пар кластеров. Например, для двухкластерной подсистемы $\alpha + {}^2n$ функции с числом осцилляторных квантов относительного движения $n = 0$ и $n = 1$ вдоль межкластерной координаты являются запрещенными. В подсистеме ${}^2n + {}^2n$, где симметрия подсистемы позволяет только четные функции, имеем только одно запрещенное состояние при $n = 0$. Следовательно, разрешенные принципом Паули состояния для трехкластерной системы есть состояния, которые не являются запрещенными для каждой из двухкластерных подсистем.

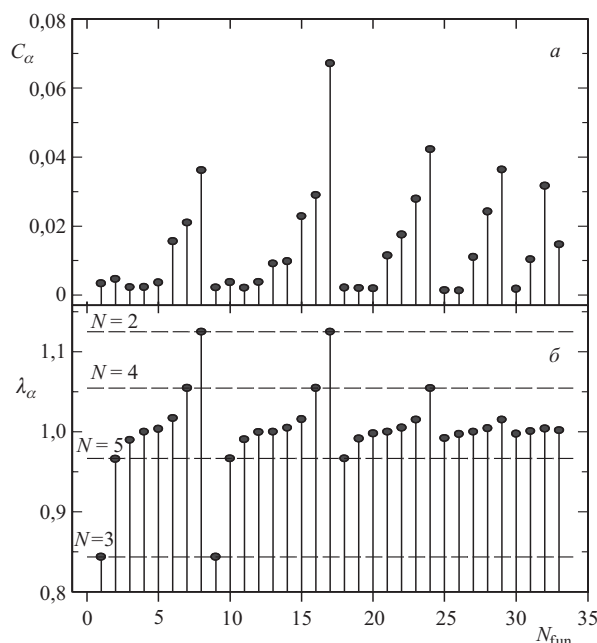


Рис. 8. Коэффициенты разложения C_α (а) и собственные значения оператора антисимметризации λ_α (б) для осцилляторной оболочки с $N = 20$

Для того чтобы сделать наглядным это утверждение, рассмотрим собственные значения оператора антисимметризации λ_α для состояний, разрешенных принципом Паули, и коэффициенты разложения C_α для этих состояний на осцилляторной оболочке с $N = 20$. Эти величины, полученные для $SU(3)$ -базиса, представлены на рис. 8. Первые семь функций соответствуют неприводимому представлению $(\lambda\mu) = (20,0)$, следующие восемь функций являются собственными функциями неприводимого представления $(\lambda\mu) = (16,2)$ и т. д. Последняя функция имеет $SU(3)$ -симметрию $(\lambda\mu) = (0,10)$. Здесь же посредством горизонтальных штриховых линий указаны собственные значения оператора антисимметризации двухкластерной подсистемы $\alpha + {}^2n$. Заметим, что соответствующие величины для подсистемы ${}^2n + {}^2n$ равны единице. Видно, что некоторые собственные значения оператора \mathcal{A} для трехкластерной системы совпадают с собственными значениями того же оператора для подсистемы $\alpha + {}^2n$. Причем такие состояния, соответствующие четным значениям числа осцилляторных квантов $n = 2$ и $n = 4$ в подсистеме $\alpha + {}^2n$, играют доминирующую роль в волновой функции основного состояния ядра ${}^8\text{He}$.

В заключение этого пункта отметим, что другие аспекты воздействия принципа Паули на трехкластерные системы, в частности, свойства разрешенных состояний, детально изучены в работах [16, 36, 37, 88].

2.4. Размеры и форма ядер ${}^6\text{He}$ и ${}^8\text{He}$. Используя данные, приведенные в табл. 5 и 6, можно сравнить теоретические и экспериментальные значения массовых, протонных и нейтронных среднеквадратичных радиусов ядер ${}^6\text{He}$ и ${}^8\text{He}$. Теоретические значения массовых среднеквадратичных радиусов завышены в сравнении с экспериментальными, представленными в работах [89–91] и [91–95]. По-видимому, это связано с тем, что полученные в настоящей работе энергии связи меньше экспериментальных. Однако результаты настоящей работы в целом достаточно корректно передают сложившуюся к настоящему времени экспериментальную ситуацию. В частности то, что нейтронные среднеквадратичные радиусы существенно больше протонных. При этом их разности составляют 0,90 Фм для ${}^6\text{He}$ и 0,83 Фм для ${}^8\text{He}$, что указывает на наличие нейтронного гало у этих ядер.

В табл. 7 наряду с нейтронными и протонными среднеквадратичными радиусами, полученными в АВ МРГ, представлены радиусы, рассчитанные с использованием других теоретических подходов, т. е. в стандартном методе

Таблица 5. Среднеквадратичные радиусы ядра ${}^6\text{He}$ в основном состоянии

RMSR, Фм	Теория (АВ МРГ)	Эксперимент			
		[89]	[90]	[91]	[94, 95]
R_m	2,69	$2,48 \pm 0,03$	$2,33 \pm 0,04$	$2,30 \pm 0,07$	$2,068 \pm 0,011$
R_p	2,06	$2,21 \pm 0,03$	$1,72 \pm 0,04$		
R_n	2,96	$2,61 \pm 0,03$	$2,59 \pm 0,04$		
$R_n - R_p$	0,90	0,40	$0,87 \pm 0,06$		

Таблица 6. Среднеквадратичные радиусы ядра ${}^8\text{He}$ в основном состоянии

RMSR, Фм	Теория (АВ МРГ)	Эксперимент			
		[92, 93]	[89]	[91]	[95]
R_m	2,73	$2,37 \pm 0,18$	$2,52 \pm 0,03$	$2,45 \pm 0,07$	$1,929 \pm 0,026$
R_p	2,08	$1,89 \pm 0,17$	$2,15 \pm 0,02$		
R_n	2,91	$2,50 \pm 0,19$	$2,64 \pm 0,03$		
$R_n - R_p$	0,83	0,61	0,49		

Таблица 7. Среднеквадратичные радиусы ядра ${}^8\text{He}$, полученные с помощью различных теоретических подходов

RMSR, Фм	АВ МРГ	МРГ [73]	МОМ [76]	МОМ [96]
R_m	2,73	2,41		
R_p	2,08	1,71	1,684	1,88
R_n	2,91	—	—	2,80

резонирующих групп (МРГ) [73] и многоконфигурационной оболочечной модели (МОМ) [76, 96].

Как отмечалось выше, вычислив коэффициенты разложения, мы тем самым получаем в свое распоряжение волновую функцию относительного движения трехкластерной системы. Это дает нам возможность сопоставить усредненную картину взаимного расположения кластеров в ядрах ${}^6\text{He}$ и ${}^8\text{He}$. Для этого вновь обратимся к выражениям, используемым при вычислении величин (56), которые при условии нормировки волновой функции и соответствующего переопределения координат Якоби дают параметры треугольников, образуемых кластерами. Например, для T -дерева среднее значение q_1 может быть сопоставлено с основанием рассматриваемого равнобедренного треугольника, тогда как среднее значение q_2 — с его высотой.

Оказалось, что среднее расстояние между динейтронами в ядре ${}^8\text{He}$ составляет 2,33 Фм, в то время как среднее расстояние между α -частицей и центром масс двух динейтронов равно 1,42 Фм. Таким образом, в случае ядра ${}^8\text{He}$ три кластера образуют равнобедренный треугольник, который является практически прямоугольным с α -частицей при вершине прямого угла.

Для ${}^6\text{He}$ картина несколько иная. Кластеры составляют остроугольный треугольник. При этом в присутствии α -частицы валентные нуклоны объединяются в подсистему со среднеквадратичным радиусом, равным 2,52 Фм,

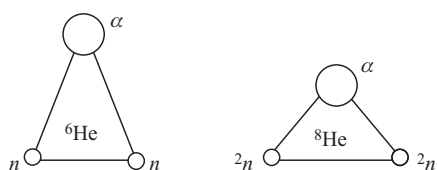


Рис. 9. Усредненная форма треугольников, образованных кластерами, составляющими ядра ${}^6\text{He}$ и ${}^8\text{He}$

что меньше среднеквадратичного радиуса свободного динейтрона (2,69 Фм), рассчитанного с тем же потенциалом и тем же числом базисных функций. Треугольники, представляющие усредненное взаимное расположение кластеров для обоих ядер, представлены на рис. 9.

Различие во взаимном расположении кластеров в ядрах ${}^6\text{He}$ и ${}^8\text{He}$ во многом, по-видимому, связано с действием принципа Паули, который приводит к некоторому эффективному отталкиванию между динейтронами, стремящемуся разместить их по разные стороны α -частицы. В противоположность этому в ${}^6\text{He}$ валентные нейтроны с антипараллельными спинами образуют достаточно компактную подсистему в присутствии третьего кластера.

Протонные, нейтронные и массовые распределения плотности определим следующим образом:

$$R(\mathbf{r}) = \sum_i \langle \Psi | \delta(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}) | \Psi \rangle,$$

и нормируем посредством соотношения

$$\int d\mathbf{r} R(\mathbf{r}) = Z, N \text{ или } A. \quad (57)$$

Здесь Ψ — волновая функция основного состояния ядра, а суммирование ведется либо по протонам, либо по нейтронам, либо по всем нуклонам ядра.

На рис. 10 представлены распределения массовых плотностей, а также распределения плотностей для протонов и нейтронов обоих ядер. Нейтронные плотности являются заметно более протяженными, чем протонные. Более того, наблюдается некоторый спад нейтронной плотности ядра ${}^8\text{He}$ вблизи начала координат. Это говорит о том, что валентные нейтроны (объединенные в два динейтрона) в среднем находятся на достаточно больших расстояниях от α -частицы.

В работе [91] экспериментальными методами определено массовое распределение плотности ядер ${}^6\text{He}$ и ${}^8\text{He}$. Для этого использовалось рассеяние протонов промежуточной энергии на этих ядрах. Обработка экспериментальных данных проводилась в рамках модели Глаубера. Авторы представили

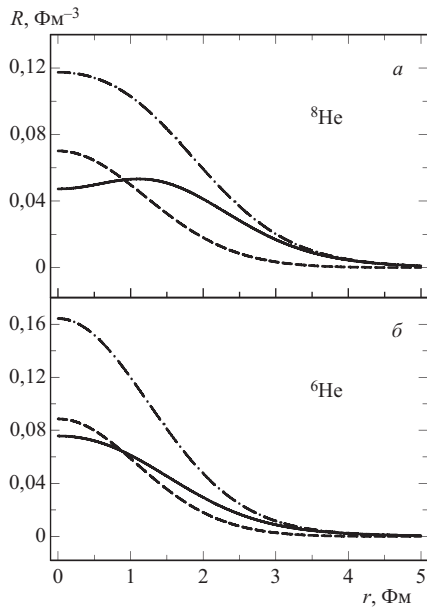


Рис. 10. Нейтронная (сплошная линия), протонная (штриховая) и массовая (штрихпунктирная) плотности распределения нуклонов в ядрах ${}^8\text{He}$ (а) и ${}^6\text{He}$ (б)

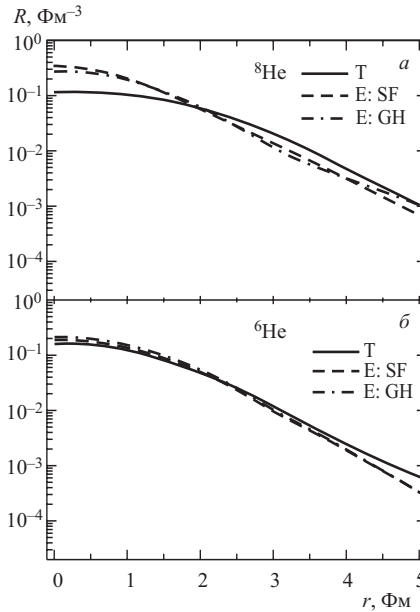


Рис. 11. Сравнение расчетной (Т) и экспериментальной (Е) массовой плотности распределения нуклонов в ядрах ${}^8\text{He}$ (а) и ${}^6\text{He}$ (б). Подробнее относительно экспериментальных плотностей см. в тексте и в работе [91]

простые и очень наглядные аналитические формы плотности распределения массы в ядрах ${}^6\text{He}$ и ${}^8\text{He}$. На рис. 11 сравниваются наши расчетные плотности, обозначенные буквой «Т», с экспериментальными данными, которые помечены буквой «Е». Из четырех аналитических форм, используемых в работе [91] для аппроксимации экспериментальных плотностей, взято две — симметризованного Ферми (SF) и гауссова гало (GH). При этом мы слегка изменили SF- и GH-плотности, согласовав их с используемыми нами условиями нормировки (см. уравнение (57)).

Для ядра ${}^6\text{He}$ теория и эксперимент дают очень близкую форму распределения нуклонов. В то же время для ${}^8\text{He}$ теоретическая плотность нуклонов в центре ядра заметно меньше, чем экспериментальная. Как мы уже отмечали выше, такое распределение нуклонов в ${}^8\text{He}$ в значительной степени обусловлено действием принципа Паули, вынуждающего валентные нейтроны держаться на почтительном расстоянии от кора — α -частицы.

3. РЕЗОНАНСНЫЕ СОСТОЯНИЯ ЯДЕР ${}^6\text{He}$, ${}^6\text{Be}$ И ${}^5\text{H}$ В ТРЕХКЛАСТЕРНОМ КОНТИНУУМЕ

В этом разделе представлены результаты, полученные в АВ МРГ при исследовании состояний непрерывного спектра, лежащих в трехкластерном континууме. Рассматриваются ядра ${}^6\text{He}$, ${}^6\text{Be}$ и ${}^5\text{H}$ с использованием конфигураций $\alpha + n + n$, $\alpha + p + p$ и $t + n + n$ соответственно. Внимание здесь сфокусировано на исследовании свойств низколежащих 0^+ - и 2^+ -состояний ядра ${}^6\text{Be}$, 2^+ -состояния ядра ${}^6\text{He}$ и на состояниях $1/2^+$, $5/2^+$ и $3/2^+$ ядра ${}^5\text{H}$. При этом проводится детальное сравнение результатов, полученных в АВ МРГ, с результатами других теоретических подходов, с экспериментальными данными, а также демонстрируется, что формализм АВ МРГ приводит к хорошей сходимости результатов, в том числе и при учете кулоновского взаимодействия.

Для исследования свойств резонансных состояний ядер ${}^6\text{Be}$ и ${}^6\text{He}$ использовались различные подходы. В серии работ [53, 77, 97] указанные ядра рассматривались как трехкластерные системы, но в условиях неполного учета антисимметризации, где α -частица представлялась бесструктурной. Взаимодействие между α -частицей и нуклонами задавалось посредством введения эффективного потенциала. Для описания взаимодействия между валентными нуклонами использовались реалистические нуклон-нуклонные силы. Расчеты проводились в рамках метода гиперсферических функций для состояний как непрерывного, так и дискретного спектра. В работе [98] состояния непрерывного спектра ${}^6\text{He}$ и ${}^6\text{Be}$ исследовались в трехкластерной микроскопической модели (метод генераторных координат (МГК)) с использованием ме-

тогда комплексного масштабирования (МКМ) для определения положений и ширин резонансов. Это было сделано с полным учетом антисимметризации. Взаимодействие между нуклонами задавалось потенциалом Миннесота. В работе [99] расчеты для ${}^6\text{He}$ и ${}^6\text{Li}$ также проводились на основе МКМ в кластерном представлении $\alpha + n + n$, а параметры резонансов определялись путем аналитического продолжения константы связи (АПКС). При этом были получены результаты, близкие к результатам МКМ. В последующем проводится сравнение результатов указанных работ с результатами, полученными в АВ МРГ, которое указывает на хорошую сходимость результатов во всех рассматриваемых случаях.

Но если для ядер ${}^6\text{He}$ и ${}^6\text{Be}$ экспериментальная и теоретическая ситуации достаточно хорошо определены, что позволяет сделать рассмотрение их свойств своеобразным тестом для приближений, используемых в рассматриваемом подходе, и, соответственно, находит свое отражение в изложении материала следующего пункта, то для резонансных состояний ядра ${}^5\text{H}$ пока нет полной определенности даже в экспериментальных данных. Поэтому положение, сложившееся с исследованием свойств ядра ${}^5\text{H}$, обсудим более подробно.

Ядро ${}^5\text{H}$ имеет большой избыток нейтронов и лежит за пределами линии нейтронной стабильности (см., например, [100], где приведены данные изучения вопроса о линии стабильности). В последние годы это ядро было объектом пристального внимания как экспериментаторов [101–112], так и теоретиков [113–116]. Целью экспериментального изучения здесь является получение ясных указаний на существование резонансов у ядра ${}^5\text{H}$, в то время как теоретические исследования посвящены интерпретации резонансной структуры и расчету энергий и ширин полученных состояний.

Для изучения свойств ядра ${}^5\text{H}$ использовались различные экспериментальные подходы. Например, в работе [111] рассматривалась реакция передачи ${}^1\text{H}({}^6\text{He}, {}^2\text{He}){}^5\text{H}$. При этом резонансный пик наблюдался при энергии на $(1,7 \pm 0,3)$ МэВ выше порога $t + n + n$ с шириной $(1,9 \pm 0,4)$ МэВ. В работе [107] в экспериментах на тройное совпадение в реакции двойной передачи нейтронов $t(t, p){}^5\text{H}$ выявлен резонанс при энергии $(1,8 \pm 0,1)$ МэВ со сравнительно небольшой шириной $\Gamma \leq 0,5$ МэВ. Две реакции ${}^3\text{H}(t, p){}^5\text{H}$ и ${}^2\text{H}({}^6\text{He}, {}^3\text{He}){}^5\text{H}$ использовались в работе [109], что указало на наличие резонансных состояний ${}^5\text{H}$ при энергиях $(1,8 \pm 0,1)$ МэВ и $(2,7 \pm 0,1)$ МэВ выше порога $t + n + n$. Ширина этих состояний составила примерно 0,4 МэВ. В работе [108] в реакции выбивания протона на углеродной мишени (${}^6\text{He}, nnt$) обнаружен широкий пик в спектре при энергии 3 МэВ с шириной 6 МэВ. Недавний отчет [105] той же группы подтвердил этот результат. В работе [104] получение данных было основано на наблюдениях ${}^5\text{H}$ в реакции, вызванной столкновением ${}^6\text{He} + {}^2\text{He}$. Резонанс наблюдался при энергии $(1,8 \pm 0,2)$ МэВ с шириной $(1,3 \pm 0,5)$ МэВ.

Следует выделить два набора экспериментальных данных, содержащих существенные различия: так, в работах [104, 109] содержится утверждение о наблюдении узкого резонанса $1/2^+$ ядра ${}^5\text{H}$ с $E \approx 1,8$ МэВ и $\Gamma < 2$ МэВ, в то время как в работах [106, 108] указывается на наличие широких резонансов с большим значением энергии $E \approx 2,5$ МэВ и $\Gamma > 3$ МэВ. Эксперименты по захвату пионов ядром ${}^9\text{Be}$ также показали наличие четырех широких резонансов у ядра ${}^5\text{H}$ [103]. Первый из этих резонансов находится при энергии $E \approx 5,5$ МэВ, второй при $E \approx 10,6$ МэВ. Ширина обоих резонансов больше 5 МэВ. Все указанные выше экспериментальные данные обобщены в табл. 8.

Таблица 8. Экспериментальные данные для первого (E_1, Γ_1) и второго (E_2, Γ_2) резонансов ядра ${}^5\text{H}$; энергии (E_i) и ширины (Γ_i) выражены в МэВ

Эксперимент	Ссылки	E_1	Γ_1	E_2	Γ_2
${}^3\text{H}(t, p){}^5\text{H}$	[101]	$\approx 1,8$	$\approx 1,3$	—	—
${}^9\text{Be}(\pi^-, pt)X$, ${}^9\text{Be}(\pi^-, dt)X$	[103]	$5,5 \pm 0,2$	$5,4 \pm 0,6$	$10,6 \pm 0,3$	$6,8 \pm 0,56$
${}^1\text{H}({}^6\text{He}, {}^2\text{He}){}^5\text{H}$	[110]	≈ 2	—	—	—
${}^3\text{H}(t, p){}^5\text{H}$, ${}^2\text{H}({}^6\text{He}, {}^3\text{He}){}^5\text{H}$	[107, 109]	$1,8 \pm 0,1$	$< 0,5$	$2,7 \pm 0,1$	$< 0,5$
$C({}^6\text{He}, nnt)$	[105, 106, 108]	≈ 3	≈ 6	—	—
${}^2\text{H}({}^6\text{He}, {}^3\text{He}){}^5\text{H}$	[104]	$1,8 \pm 0,2$	$1,3 \pm 0,5$	—	—
${}^1\text{H}({}^6\text{He}, {}^2\text{He}){}^5\text{H}$	[111]	$1,7 \pm 0,3$	$1,9 \pm 0,4$	—	—
${}^1\text{H}({}^6\text{He}, {}^2\text{He}){}^5\text{H}$	[117]	≈ 2	—	2,5	—

В настоящее время считается, что первым резонансом является состояние $J^\pi = 1/2^+$, в то время как во второй резонансный пик вносят вклад как $J^\pi = 5/2^+$, так и $J^\pi = 3/2^+$ -состояния ядра ${}^5\text{H}$.

Энергии и ширины резонансов ядра ${}^5\text{H}$ вычислялись в рамках целого ряда теоретических моделей и методов. В работе [113] ядро описывалось в рамках полумикроскопического подхода как трехкластерная система $t+n+n$, где тритон рассматривался как бесструктурная частица. Потенциалы ${}^3\text{H}+n$ и $n+n$ определяли полное взаимодействие, что привело к резонансу при энергии от $E = 2,5$ до 3,0 МэВ с шириной в пределах от $\Gamma = 3$ до 4 МэВ. В работах [114, 116] ядро ${}^5\text{H}$ также описывалось в рамках трехкластерной модели, но с использованием микроскопического метода (МГК). При этом параметры резонансов определялись с помощью метода АПКС [118, 119]. Резонансное состояние было получено при энергии $E \approx 3$ МэВ с шириной от $\Gamma = 1$ до 5 МэВ. В работе [115] использовался метод комплексного масштабирования и та же трехкластерная микроскопическая модель. Было

получено три резонансных состояния с моментами $J^\pi = 1/2^+$, $J^\pi = 5/2^+$ и $J^\pi = 3/2^+$ соответственно. Нижайшим является резонанс $1/2^+$ с энергией $E = 1,59$ МэВ и шириной $\Gamma = 2,48$ МэВ.

Алгебраическая версия метода резонирующих групп (с привлечением метода ортогональных условий) использовалась в работе [60] для исследования ядра ${}^5\text{H}$ как трехкластерной системы $t + n + n$. Это привело к резонансу $1/2^+$ с энергией более 4 МэВ и шириной более 5 МэВ.

Проблеме адекватной интерпретации теоретических предсказаний и связи их с экспериментальными данными в трехкластерном континууме посвящена работа [120]. Детальный обзор и анализ существующих экспериментальных данных и вопросов, связанных с их интерпретацией, содержится в работе [121].

Ясно, что для прояснения ситуации со структурой резонансов системы ${}^5\text{H}$ требуются дополнительные исследования. В настоящей работе в рамках обсуждаемого подхода представляется микроскопическая трехкластерная модель ядра ${}^5\text{H}$, которая, в частности, предоставляет возможность получения и анализа резонансных волновых функций. При этом можно рассматривать плотности и корреляционные функции для резонансных состояний, а также вычислять парциальные ширины. Ядро ${}^5\text{H}$ рассматривается как трехкластерная система $t + n + n$. Это только один из вариантов трехкластерных конфигураций, но именно он представляется наиболее перспективным.

3.1. Резонансные состояния ядер ${}^6\text{He}$ и ${}^6\text{Be}$. В этом пункте в качестве NN -потенциала используется потенциал Волкова [85], который в соответствии с результатами работ [15, 31] (см. также разд. 2) позволяет получить достаточно разумное описание основных состояний ядер ${}^6\text{He}$, ${}^6\text{Li}$ и ${}^8\text{He}$ в трехкластерной модели. Этот потенциал содержит только центральную часть, что делает полный угловой момент L , полный спин S и полный изоспин T хорошими квантовыми числами. Соответственно, при рассмотрении трехкластерной конфигурации $\alpha + n(p) + n(p)$ мы получаем состояния с $S = 0$ и $T = 1$. Известно, что именно это спин-изоспиновое состояние наиболее существенно для описания резонансов, рассматриваемых в настоящей работе. При рассмотрении свойств резонансов ядра ${}^6\text{Be}$ учитывалось кулоновское взаимодействие. Оно играет важную роль в формировании как 0^{+-} , так и 2^+ -состояния этого ядра.

Осцилляторный радиус b является единственным свободным параметром в АВ МРГ. Величина его определялась путем оптимизации энергии связи основного состояния α -частицы и составила 1,37 Фм.

Как было указано ранее, выбор координат Якоби определяется из соображений удобства проведения расчетов. Для кластерной конфигурации $\alpha + n(p) + n(p)$ использовались оба дерева Якоби, представленные на рис. 1. Первое из них («4 + 2»-конфигурация) более удобно. Здесь очевидны правила отбора, которые позволяют существенно уменьшить количество базис-

ных функций, о которых мы еще раз напомним. Действительно, квантовые числа $S = 0$, $T = 1$ полной шестинуклонной системы те же, что и для двухнуклонной подсистемы $n(p) + n(p)$. Следовательно, функция относительного движения должна быть четной функцией переменной q_1 для данного набора координат Якоби. Это означает, что можно рассматривать только четные значения парциального момента l_1 . Более того, для состояний положительной четности мы имеем и четные значения l_2 , а для состояний отрицательной четности — только нечетные значения l_2 . Для второго дерева Якоби, из представленных на рис. 1 (для шести частиц это дерево «5 + 1»), нельзя привести такие простые соображения, и приходится изначально рассматривать все функции осцилляторного базиса при заданном N .

3.1.1. Матричные элементы интеграла перекрытия. Во внутренней области (область взаимодействия) действие принципа Паули учитывается точно, т. е. проводится как антисимметризация внутренних волновых функций кластеров, так и межкластерная антисимметризация. На больших расстояниях между кластерами (асимптотическая область) последнюю можно не проводить. Рассмотрим разделение области взаимодействия кластеров на внутреннюю и асимптотическую с этой точки зрения на примере матричных элементов единичного оператора. При этом используем обозначения, принятые в работе [58], в частности, сокращение ν_0 для набора квантовых чисел $\{(l_1 l_2)LM\}$ в матричных элементах:

$$\langle n_\rho, (K, \nu_0) | \hat{A} | n'_\rho, (K', \nu_0) \rangle. \quad (58)$$

При этом отличными от нуля матричными элементами остаются те, которые являются результатом перекрытия функций одной и той же осцилляторной оболочки, характеризующейся главным квантовым числом $N = 2n_\rho + K$, т. е. для гиперсферического базиса действует правило отбора $2n_\rho + K = 2n'_\rho + K'$.

На рис. 12 представлены матричные элементы интеграла перекрытия, диагональные по n_ρ , при $L = 0$ со значениями гипермомента $K = 0$ и $K = 2$ для шестинуклонной трехкластерной системы. Из рисунка видно, что принцип Паули затрагивает осцилляторные состояния как минимум 25 нижайших оболочек как диагональных, так и недиагональных по K матричных элементов. Эффект антисимметризации проявляется в отклонении от единицы диагональных матричных элементов и в отличии от нуля недиагональных (по K) элементов. Это влияние монотонно уменьшается с ростом n_ρ .

На рис. 13 проводится сравнение матричных элементов с $L = 0$, диагональных по n_ρ и K , для некоторых значений K с индексом $\sigma = (l = l_1 = l_2)$ для состояний с одним и тем же значением гипермомента. Показаны только те матричные элементы, где действие принципа Паули проявляется наиболее ярко. Некоторые состояния с $K = 4$ и $K = 8$ подвержены действию антисимметризации сильнее, чем другие. Для того чтобы прояснить причину этого,

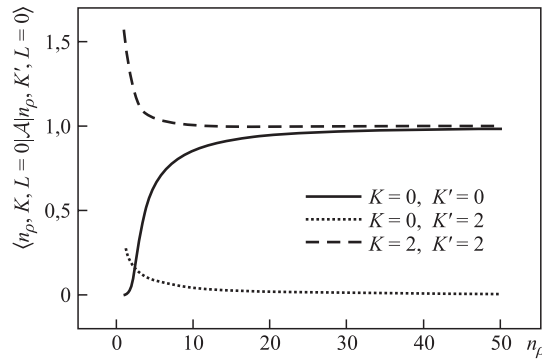


Рис. 12. Матричные элементы оператора антисимметризации для 0^+ -состояний ядра ${}^6\text{He}$ (${}^6\text{Be}$), диагональные по n_p , в зависимости от величины n_p

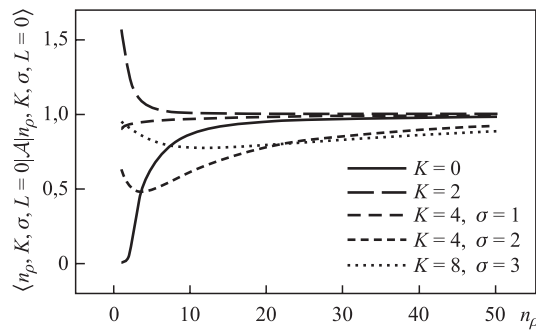


Рис. 13. Матричные элементы оператора антисимметризации для 0^+ -состояний ядра ${}^6\text{He}$ (${}^6\text{Be}$), диагональные по n_p , в зависимости от величины n_p для ряда значений σ (см. текст)

заметим, что гиперсферические углы (и соответствующие им квантовые числа K, l_1, l_2, LM) определяют наиболее вероятную форму треугольника, задающего взаимное расположение кластеров, и его ориентацию в пространстве. Гипергармоники с $K = 4, \sigma = 2$ ($l_1 = l_2 = 2$) и $K = 8, \sigma = 3$ ($l_1 = l_2 = 4$), по-видимому, задают такую форму треугольника, при которой один из нуклонов находится очень близко к α -частице.

По мере увеличения значений K вероятность найти кластеры на малых расстояниях друг относительно друга в рамках гиперсферы фиксированного гиперрадиуса ρ уменьшается. Это позволяет предположить, что гипергармоники с большими значениями K не будут вносить существенного вклада в конечные результаты.

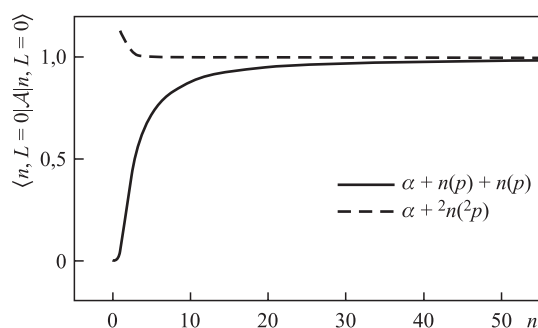


Рис. 14. Матричные элементы оператора антисимметризации для 0^+ -состояний ядер ${}^6\text{He}$ (${}^6\text{Be}$) в трехкластерной $\alpha + n(p) + n(p)$ и двухкластерной конфигурации $\alpha + {}^2n({}^2p)$. Здесь n под осью абсцисс следует рассматривать как число квантов осцилляторных возбуждений

Интересно сравнить матричные элементы интеграла перекрытия для трехкластерной конфигурации с матричными элементами двухкластерной. Такое сравнение можно провести посредством рис. 14, из которого следует, что область действия принципа Паули для трехкластерных систем значительно шире, чем для двухкластерных.

3.1.2. Матричные элементы потенциальной энергии. Для того чтобы проиллюстрировать влияние принципа Паули на потенциальную энергию трехкластерной конфигурации, рассмотрим матричные элементы с гипермоментом $K = 0$ как с полным учетом антисимметризации, так и в рамках фолдинг-модели, т. е. в случае пренебрежения межкластерной антисимметризацией.

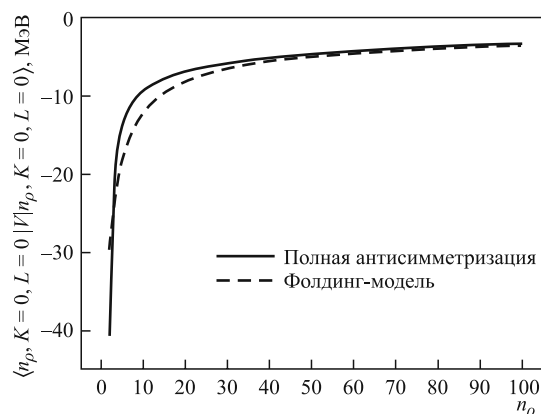


Рис. 15. Диагональные по n_p матричные элементы потенциальной энергии для 0^+ -состояния с $K = 0$ ядра ${}^6\text{He}$ (${}^6\text{Be}$) с полным учетом антисимметризации и в фолдинг-модели

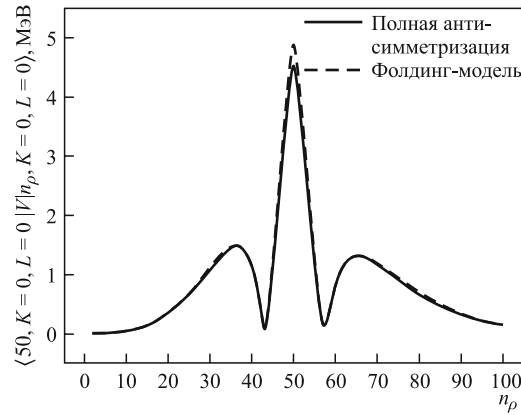


Рис. 16. Недиagonальные матричные элементы потенциальной энергии для 0^+ -состояния ядра ${}^6\text{He}$ (${}^6\text{Be}$) при $K = 0$ с точным учетом антисимметризации и в фолдинг-модели

На рис. 15 представлены диагональные по n_p при $K = 0$ матричные элементы потенциальной энергии, а на рис. 16 — матричные элементы в строке при фиксированном значении $n_p = 50$ при $K = 0$. Видно, что результаты фолдинг-модели достаточно близки к результатам, полученным с полной антисимметризацией в области больших значений n_p .

На рис. 17 также представлены матричные элементы потенциальной энергии между состояниями с двумя нижайшими значениями гипермомента, т. е. с $K = 0$ и $K = 2$. Отметим, что вклад от $K = 2$ в потенциальную энер-

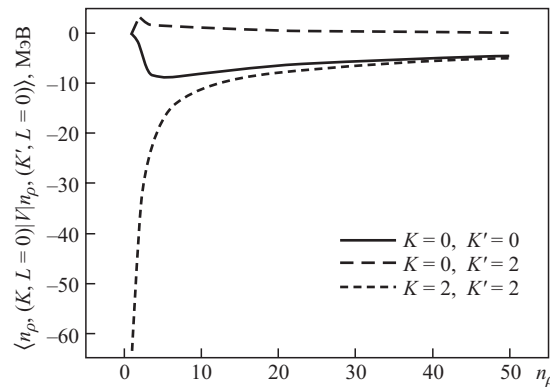


Рис. 17. Диагональные по n_p матричные элементы потенциальной энергии в 0^+ -состоянии ядра ${}^6\text{He}$ (${}^6\text{Be}$) с полным учетом антисимметризации для нижайших значений K

гию является существенно более значительным, чем от $K = 0$, а связь между состояниями $K = 0$ и $K = 2$ достаточно мала.

Главный вывод здесь состоит в том, что в асимптотической области «точная» потенциальная энергия может быть заменена потенциальной энергией в фолдинг-приближении. Это предоставляет большие возможности для преодоления численных трудностей и приводит нас к следующей схеме трехкластерных расчетов. Во внутренней области, которая описывается состояниями нижайших осцилляторных оболочек и где велика вероятность найти кластеры на небольших относительных расстояниях друг от друга, антисимметризация при вычислении матричных элементов потенциальной энергии проводится точно. В асимптотической области, где средние расстояния между кластерами велики, используется фолдинг-модель.

Фолдинг-модель создает дополнительные возможности для более подробного исследования структуры матрицы взаимодействия. Известно, что ни взаимодействие нейтрона с α -частицей, ни взаимодействие двух нейтронов не создает связанных состояний в соответствующих подсистемах ядра ${}^6\text{He}$. Только в полной трехкластерной конфигурации $\alpha + n + n$ возникают необходимые условия для образования связанного состояния. В фолдинг-модели полная потенциальная энергия представляет собой сумму энергий трех пар взаимодействующих кластеров: α -частицы и первого нейтрона, α -частицы и второго нейтрона и пары валентных нейтронов. Для $K = 0$ вклады двух первых слагаемых идентичны, и нам достаточно сравнить только взаимодействия $\alpha + n$ и $n + n$. На рис. 18 представлены вклады от обеих компонент в диагональные матричные элементы. Видно, что вклад пары $\alpha + n$ является намного более весомым.

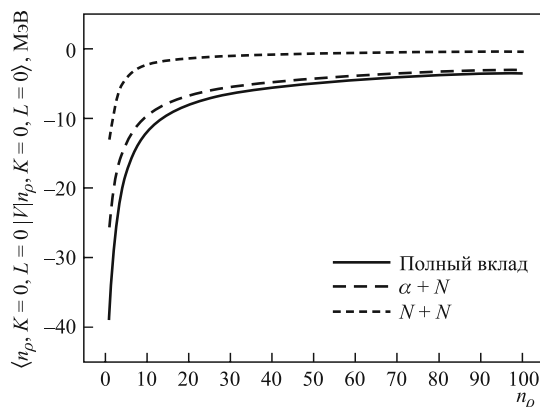


Рис. 18. Вклады в полный диагональный по n_p матричный элемент потенциальной энергии от взаимодействия пар кластеров для 0^+ -состояния ядра ${}^6\text{He}$ (${}^6\text{Be}$) при $K = 0$ в фолдинг-модели

3.1.3. *Эффективный заряд.* Когда при решении уравнений АВ МРГ учитывается кулоновское взаимодействие, необходимо ввести эффективный заряд, который определяет кулоновское взаимодействие как в каждом из K -каналов, так и связь между ними. С использованием соображений, изложенных в п. 1.1, были рассчитаны эффективные заряды для 0^+ - и 2^+ -состояний ядра ${}^6\text{Be}$. Несколько соответствующих матриц $\|Z_K^{K'}\|$ размещены в табл. 9 и 10. Следует подчеркнуть то, что диагональные матричные элементы здесь значительно больше недиагональных. Такое положение вещей оправдывает используемое нами приближение, состоящее в пренебрежении недиагональными матричными элементами матрицы эффективного заряда [58], позволяющее расцепить каналы в асимптотической области.

Таблица 9. Матрица эффективных зарядов для 0^+ -состояния ядра ${}^6\text{Be}$

$K; l_1, l_2$	0; 0, 0	2; 0, 0	4; 0, 0	4; 2, 2
0; 0, 0	7,274	0,006	-0,129	1,414
2; 0, 0	0,006	7,146	-0,436	0,314
4; 0, 0	-0,129	-0,436	7,428	-0,877
4; 2, 2	1,414	0,314	-0,877	9,098

Таблица 10. Матрица эффективных зарядов для 2^+ -состояния ядра ${}^6\text{Be}$

$K; l_1, l_2$	2; 2, 0	2; 0, 2	4; 2, 0	4; 0, 2	4; 2, 2
2; 2, 0	7,253	0,400	-0,224	0,546	-0,751
2; 0, 2	0,400	7,244	-0,309	-0,004	-0,601
4; 2, 0	-0,224	-0,309	6,942	-0,186	0,431
4; 0, 2	0,546	-0,004	-0,186	7,694	-0,671
4; 2, 2	-0,751	-0,601	0,431	-0,671	7,345

Интересно сравнить трехкластерный эффективный заряд с двухкластерным. Последний для конфигурации $\alpha + {}^2p$ ядра ${}^6\text{Be}$ имеет значение

$$Z_{\text{eff}} = \frac{8}{\sqrt{3}}e^2 \simeq 6,65,$$

которое не зависит от углового момента системы. Заметим, что двухкластерный эффективный заряд довольно близок по своей величине к диагональным матричным элементам $\|Z_K^{K'}\|$. Но если в трехкластерном канале эффективный заряд мало отличается от двухкластерного, то можно предположить, что это служит указанием на то, что в трехкластерном случае два протона в асимптотической области находятся в непосредственной близости друг к другу. Для 2^+ -состояния есть возможность наблюдать как минимум один такой канал. Это канал с $K = 4, l_1 = 2, l_2 = 0$.

3.1.4. Определение пространства модели и сходимость результатов. Модельное пространство при проведении расчетов изначально определяется полным числом гипергармоник, используемых для описания как внутренней, так и внешней областей, а также количеством учтенных гиперрадиальных возбуждений для каждой из них. При этом совсем необязательно использовать один и тот же набор гипергармоник для внутренней и асимптотической области. Для внутренней области, где сильны эффекты антисимметризации и действия нуклон-нуклонных сил, необходимо брать большое их число, что обусловлено связью между состояниями с разными значениями гипермомента. В то время как во внешней области следует взять такое число гипергармоник, которое требуется для описания всего разнообразия распадов компаунд-системы.

Для обсуждаемых в данном подпункте расчетов как для внутренней, так и для асимптотической области мы ограничивались максимальными значениями гипермомента $K_i = K_a = 10$ для внутренней и внешней области соответственно. Проверка путем расширения базиса за указанные его пределы показала, что такого подпространства функций вполне достаточно для вполне разумной сходимости результатов. Промежуточные этапы вычислений иллюстрируются примерами расчетов для 0^+ -состояния ядра ${}^6\text{Be}$.

В табл. 11 показано число гипергармоник (N_h) при фиксированном значении гипермомента K для $L^\pi = 0^+$ и $L^\pi = 2^+$ в «4 + 2»-дереве Якоби. Там же приводится суммарное количество гипергармоник (N_{ch}) для значений гипермомента $K = K_{min}, K_{min} + 2, \dots, K_{max}$, т. е. число каналов для заданного K_{max} .

Таблица 11. Число гипергармоник (N_h) при заданном значении гипермомента K и суммарное число гипергармоник (N_{ch}) при K , изменяющемся в пределах от $K = 0$ до $K = 10$

Число и суммарное число гипергармоник	K					
	0	2	4	6	8	10
$L^\pi = 0^+$						
N_h	1	1	2	2	3	3
N_{ch}	1	2	4	6	9	12
$L^\pi = 2^+$						
N_h	—	2	3	5	6	8
N_{ch}	—	2	5	10	16	24

Точка сшивания, разделяющая внутреннюю и асимптотическую области, фиксировалась при $N_\rho = 50$. Выбор такого значения N_ρ базируется на соображениях, приведенных в предыдущих разделах, и является более чем достаточным как с точки зрения учета принципа Паули во внутренней области, так и использования квазиклассического приближения вне ее.

Параметры резонансов определялись на основе рассмотрения собственных фаз рассеяния, т.е. с использованием S -матрицы в представлении собственных каналов посредством соотношений (35).

В первую очередь рассматривалась зависимость результатов от числа асимптотических каналов. Для этого проводились тестовые расчеты положений и ширин резонансного состояния 0^+ ядра ${}^6\text{Be}$ при расширении пространства асимптотических функций при $K_i = 10$. Для асимптотической области последовательно включались в расчет все гипергармоники, соответствующие значениям K_a от $K_a = 0$ до $K_a = 10$.

Результаты, представленные в табл. 12, иллюстрируют достигнутую сходимость численных результатов. Видно, что она является вполне удовлетворительной, поскольку подключение асимптотики для состояний со все возрастающими значениями гипермомента приводит к достаточно быстрой и монотонной сходимости параметров резонанса. На рис. 19 приведены собственные фазовые сдвиги в 0^+ -состоянии ядра ${}^6\text{Be}$ как функции от энергии при $K_i = 10$ и для тех значений K_a , которые указаны в таблице, что более наглядно иллюстрирует сходимость по мере увеличения K_a .

Таблица 12. Параметры 0^+ -резонанса ядра ${}^6\text{Be}$, полученные путем варьирования K_a при фиксированном значении $K_i = 10$

Параметры	K_a					
	0	2	4	6	8	10
E , МэВ	1,324	1,204	1,192	1,184	1,176	1,172
Γ , МэВ	0,068	0,069	0,071	0,071	0,073	0,072

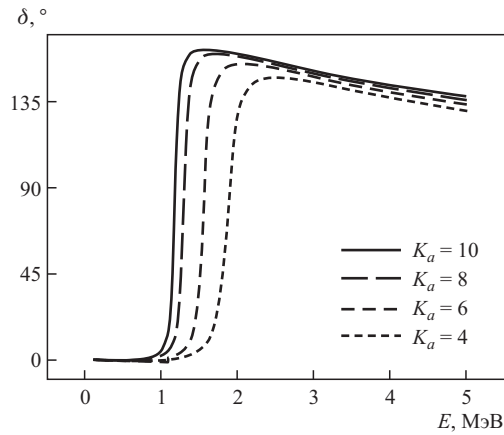


Рис. 19. Собственные фазовые сдвиги для 0^+ -состояния ядра ${}^6\text{Be}$ при различных значениях K_a и фиксированном значении $K_i = 10$

Таблица 13. Параметры 0^+ -резонанса ядра ${}^6\text{Be}$, полученные путем варьирования K_i при фиксированном значении $K_a = 0$

Параметры	K_i					
	0	2	4	6	8	10
E , МэВ	—	2,408	2,020	1,688	1,434	1,324
Γ , МэВ	—	0,147	0,129	0,097	0,075	0,068

Как указывалось выше, для получения разумных результатов необходимо использовать достаточно большое количество гипергармоник для описания внутренней области рассматриваемой системы. Для подтверждения этого опять обратимся к конкретному примеру расчетов 0^+ -состояния ${}^6\text{Be}$, когда асимптотика пришивается только при $K_a = 0$, а для внутренней области используются гипергармоники с K_i , изменяющимся в пределах от $K_i = 0$ до $K_i = 10$. Соответствующие результаты расчетов приводятся в табл. 13. Они, в частности, указывают на то, что эффективный потенциал, возникающий при учете лишь одной гипергармоники с $K_i = 0$, не способен обеспечить наличие резонансного состояния. Только при подключении для описания внутренней области гипергармоник с $K = 2$ можно говорить о его появлении. Дальнейшее последовательное увеличение K_i приводит к сходимости результатов с уменьшением как энергии, так и ширины и резонанса.

3.1.5. *Параметры резонансов ядер ${}^6\text{He}$ и ${}^6\text{Be}$.* На рис. 20 представлены собственные фазы $L^\pi = 0^+$ -рассеяния для ядра ${}^6\text{Be}$, полученные с привлечением максимального числа гипергармоник как во внутренней, так и в асимптотической области. В первом собственном канале четко виден узкий 0^+ -резонанс. Но при этом и вторая собственная фаза демонстрирует некое резонансное поведение, указывающее на то, что в наших расчетах получается и второй (широкий) 0^+ -резонанс. Фазовые сдвиги в остальных собствен-

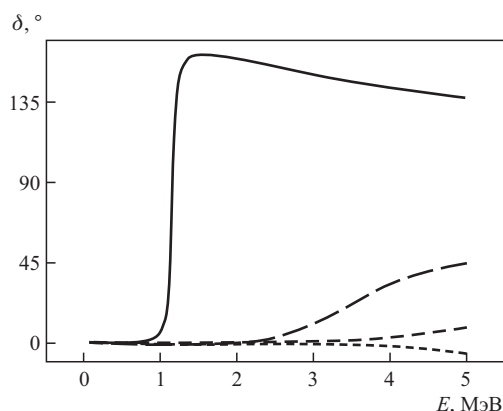


Рис. 20. Собственные фазы для 0^+ -состояния ядра ${}^6\text{Be}$

ных каналах являются медленно меняющимися функциями, без каких-либо указаний на резонансы в рассматриваемой области энергий.

В табл. 14 наряду с результатами АВ МРГ приводятся экспериментальные данные, взятые из работ [80, 122]. Согласие по энергиям и ширинам резонансов можно считать здесь вполне удовлетворительным. При этом следует учесть и тот факт, что различия между расчетными и экспериментальными значениями параметров 2^+ -резонансов в ядрах ${}^6\text{He}$ и ${}^6\text{Be}$ могут быть обусловлены и тем, что вычисления в настоящей работе проводились без учета LS -сил.

Таблица 14. Сравнение параметров резонансных состояний ядер ${}^6\text{He}$ и ${}^6\text{Be}$, полученных в АВ МРГ с экспериментальными данными

Резонансные состояния ядер	АВ МРГ		Эксперимент [80, 122]	
	E , МэВ	Γ , МэВ	E , МэВ	Γ , МэВ
${}^6\text{He}; L^\pi = 2^+$	1,490	0,168	$0,822 \pm 0,025$	$0,133 \pm 0,020$
${}^6\text{Be}; L^\pi = 0^+$	1,172	0,072	1,371	$0,092 \pm 0,006$
${}^6\text{Be}; L^\pi = 2^+$	3,100	0,798	$3,04 \pm 0,05$	$1,16 \pm 0,06$

Таблица 15. Параметры первых резонансных состояний ядер ${}^6\text{He}$ и ${}^6\text{Be}$, полученные в АВ МРГ, ГС (полумикроскопические расчеты) и с помощью МКМ и АПКС в МГК

Метод	${}^6\text{He}; L^\pi = 2^+$		${}^6\text{Be}; L^\pi = 0^+$		${}^6\text{Be}; L^\pi = 2^+$	
	E , МэВ	Γ , МэВ	E , МэВ	Γ , МэВ	E , МэВ	Γ , МэВ
АВ МРГ	1,490	0,168	1,172	0,072	3,100	0,798
ГС [77]	0,75	0,04				
МКМ [98]	0,74	0,06	1,52	0,16	2,81	0,87
АПКС [99]	0,73	0,07				

В табл. 15 проводится сравнение результатов настоящей работы с результатами других авторов. В частности, с результатами, полученными с помощью МКМ в рамках МГК [98], в методе гипергармоник [77] (полумикроскопическая модель) и с использованием АПКМ в МГК [99].

Как было отмечено в работах [77, 98], барьер, порождаемый трехкластерной конфигурацией, является достаточно высоким и широким для того, чтобы обеспечить существование двух резонансных состояний, где второе обычно является очень широким. На первый взгляд может показаться, что это некий артефакт, присущий собственно гипергармоническому подходу при учете больших значений гипермомента K , приводящего к возникновению мощного центробежного барьера. Однако расчеты, проведенные методом комплексного масштабирования [123, 124], никоим образом не связанные с гиперсфе-

Таблица 16. Параметры вторых резонансных состояний ядер ${}^6\text{He}$ и ${}^6\text{Be}$, полученные в АВ МРГ, ГС (полумикроскопические расчеты) и МКМ (МГК)

Ядро	L^π	АВ МРГ		ГС [77]		МКМ [123, 124]	
		E , МэВ	Γ , МэВ	E , МэВ	Γ , МэВ	E , МэВ	Γ , МэВ
${}^6\text{He}$	0_2^+	2,1	4,3	5,0	6,0	3,9	9,4
${}^6\text{He}$	2_2^+	3,7	5,0	3,3	1,2	2,5	4,7
${}^6\text{Be}$	0_2^+	3,5	6,1				
${}^6\text{Be}$	2_2^+	5,2	5,6				

рическим базисом, также указывают на возможность существования подобного рода резонансов. Сравнение параметров вторых резонансов, полученных нами, с аналогичными результатами других авторов: [77] (метод K -гармоник, полумикроскопические расчеты), МКМ в МГК [98], может быть проведено на основании данных, представленных в табл. 16. Несовпадения здесь могут быть объяснены как использованием различных методов расчета, так и тем, что для их проведения привлекались разные нуклон-нуклонные силы.

В заключение пункта укажем на то, что недавно появилась работа [56], в которой детально теоретически и экспериментально исследована структура 0^+ -состояния ядра ${}^6\text{Be}$. Теоретический анализ ${}^6\text{Be}$ проведен в трехкластерной модели $\alpha+p+p$. Альфа-кластер рассматривался как частица бесструктурная, а для описания взаимодействия $\alpha+p$ привлекался эффективный, феноменологический потенциал, воспроизводящий фазы $\alpha+p$ -рассеяния. Огромный базис гиперсферических гармоник был привлечен для классификации каналов трехчастичной системы при расчете энергии и ширины 0^+ -резонанса. В работе [56] показано, что ширина этого резонанса сильно зависит от формы потенциалов $\alpha+p$ и $p+p$, а также от числа гиперсферических гармоник, вовлеченных в расчет. Для достижения полной сходимости ширины, по мнению авторов [56], необходимо использовать гармоники с $K_{\max} \geq 30$. Безусловно, такой базис намного шире, чем базис гиперсферических гармоник, который использовался в [59] и, соответственно, в настоящей работе для расчета резонансов ядер ${}^6\text{He}$ и ${}^6\text{Be}$, где были учтены все гармоники с $K_{\max} = 10$. Можно допустить, что такое различие результатов настоящей работы и работы [56] в отношении числа гипергармоник, необходимых для обеспечения сходимости, можно объяснить суммарным действием нуклон-нуклонного потенциала, определяющего взаимодействия кластеров, и оператора антисимметризации, корректно учтенного в [59]. Это может ослабить связь каналов и позволить разумно описать резонансные состояния трехкластерных систем с использованием сравнительно небольшого числа гиперсферических гармоник.

3.2. Резонансные состояния ядра ${}^5\text{He}$. В этом пункте рассматривается применение АВ МРГ к описанию характеристик нижайших состояний яд-

ра ${}^5\text{H}$. Для решения этой задачи используется трехкластерная конфигурация ${}^3\text{H} + n + n$ с полным спином $S = 1/2$. Соответствующая волновая функция содержит комбинацию схем Юнга [32] и [311], спин двухнейтронной подсистемы может принимать значения $S^{(nn)} = 0$ или 1. Относительные координаты кластеров задаются посредством одного из двух наборов координат Якоби, которые называются соответственно как « Y -дерево» и « T -дерево» и условно показаны на рис. 1. Для « T -дерева» значения углового момента, связанного с относительным движением двух нейтронов, четны для спина $S^{(nn)} = 0$ и нечетны для $S^{(nn)} = 1$. Интеграл перекрытия (матрица оператора антисимметризации) диагонален с точки зрения классификации по схемам Юнга (состояния [32] и [311] не перекрываются), чего нет для случая нуклон-нуклонных сил. С точки зрения простейшей модели оболочек волновая функция ядра ${}^5\text{H}$ содержит три нуклона в s -оболочке и два нейтрона в p -оболочке и имеет $SU(3)$ -симметрию $(\lambda\mu) = (20)$. Значения индексов Эллиота $\lambda = 2$ и $\mu = 0$ определяют то, что два значения полного орбитального углового момента, $L = 0$ и $L = 2$, являются для ядра ${}^5\text{H}$ доминантными, а спин двухнейтронной подсистемы $S^{(nn)} = 0$ превалирует для низколежащих состояний.

Как и в предыдущем пункте, для классификации трехкластерных состояний и нумерации каналов трехкластерного континуума используются квантовые числа ГС-базиса, т. е. в этом отношении рассматриваемая модель подобна модели, используемой в работе [113]. Настоящую работу также можно сопоставлять с работами [114, 115], но она дополнительно включает в себя явное представление для волновых функций рассеяния, что предоставляет дополнительные возможности для более глубокого изучения спектра, в частности, получения информации о доминирующих каналах распада резонансов.

В расчетах используются два нуклон-нуклонных взаимодействия: потенциал Миннесота (ПМ) с параметрами центральных сил, взятыми из работы [86] совместно с LS -компонентой в версии IV из работы [125], а также модифицированный потенциал Хасагавы–Нагаты (Hasegawa–Nagata (МПХН)) [126, 127]. Оба потенциала использовались в многоканальных вычислениях для ядер с большим избытком нейтронов и протонов. В частности, потенциал ПМ привлекался в работах [114, 115] при изучении свойств резонансов ядра ${}^5\text{H}$ в приближении, конкурирующем с подходом, представляемым в настоящей работе. Потенциал МПХН широко применялся при исследовании ядер с избытком нейтронов или протонов, например, в работах [128–130].

При проведении расчетов осцилляторный радиус b выбирался таким образом, чтобы минимизировать энергию основного состояния ядра ${}^3\text{H}$. Это привело к значению $b = 1,489$ Фм для ПМ и $b = 1,470$ Фм для МПХН. При этом, для того чтобы воспроизвести резонансную структуру ядра ${}^4\text{H}$, которое можно рассматривать как подсистему в ${}^5\text{H}$, мы слегка модифицировали параметры

потенциалов. Это было достигнуто уменьшением параметра u центральной части ПМ до значения 0,98 и интенсивности компонент LS потенциала МПХН до 0,5. Отметим, что параметры $u = 0,98$ и $b = 1,470$ Фм для ПМ совпадают с таковыми, выбранными для вычислений в работе [115], но отличаются от значений, задаваемых в работе [114], где $b = 1,58$ Фм и $u = 1,12$.

Вычисление потенциальной части матрицы энергии ${}^5\text{H}$ -ядра потребовало привлечения достаточно большого числа базисных функций, что создало существенные численные трудности. Оно требует вычисления большого количества матриц, характеризующихся квантовыми числами (K, l_1, l_2) . Для получения окончательных результатов эти матрицы преобразовывались с помощью коэффициентов Рейнала–Реваи (Raunal–Revai). Более подробное описание всей процедуры вычислений можно найти в работе [58]. Для обеспечения приемлемого времени численных расчетов работа проводилась с использованием инфраструктуры «Grid» путем распределения расчетов. Описание соответствующей методики можно найти в работе [131].

Как уже неоднократно отмечалось, важнейшим вопросом микроскопических вычислений с помощью дискретного базиса является вопрос о сходимости результатов. Как было показано выше (см. также [59]), расчетные характеристики резонансов ядер ${}^6\text{He}$ и ${}^6\text{Be}$ весьма чувствительны к количеству гиперсферических гармоник, используемых для описания внутренней части резонансной волновой функции, и менее чувствительны к количеству функций в асимптотической области. Это указывает на то, что компаунд-система требует весьма тщательного описания, в то время как конфигурацию распада достаточно хорошо описывает сравнительно небольшое число низших гипергармоник. Соответственно и здесь главными параметрами, имеющими значение для сходимости, будут количество гиперсферических гармоник во внутренней области (максимальное значение гипермомента во внутренней области K_i), асимптотической области (максимальное значение гипермомента в асимптотической области K_a), а также количество гиперрадиальных возбуждений для каждой ГС-функции во внутренней области N_ρ .

Соответственно, ниже исследуется сходимость результатов по гиперсферическим гармоникам с гипермоментами в пределах $L \leq K \leq 14$. Для каждого K при этом используются все $(K; l_1, l_2)$ -каналы. В результате весь набор трехкластерных каналов состоит из 46 для полного углового момента $L = 0$ и из 84 каналов для $L = 2$.

Система ${}^5\text{H}$ подобна ядру ${}^6\text{He}$ в том смысле, что свойства обоих ядер определяются взаимодействием двух валентных нейтронов с кором (${}^3\text{H}$ и ${}^4\text{He}$ соответственно). Обе системы не имеют связанных состояний в своих двухкластерных подсистемах, но ядро ${}^6\text{He}$ связано в своем основном состоянии в отличии от ${}^5\text{H}$, т. е. ${}^6\text{He}$ — это так называемое «Wortman» ядро, а ${}^5\text{H}$ не является таковым.

Двухкластерные подсистемы. Характеристики двухкластерных подсистем существенным образом влияют на свойства резонансной структуры трехкластерной системы. Поэтому изучение спектроскопических свойств ядра ${}^5\text{H}$ логично начать с двухкластерных составляющих рассматриваемой модели. Здесь интерес представляют две подсистемы.

Первая состоит из тритона и нейтрона — в свободном состоянии это ядро ${}^4\text{H}$. Оно имеет набор широких резонансных состояний [132]. Фазовые сдвиги, полученные нами для рассеяния $n + t$ с полным угловым моментом $L = 1$ и полным спином $S = 1$, представлены на рис. 21 для ПМ и на рис. 22 для МПХН. Оба рисунка содержат и экспериментальные данные

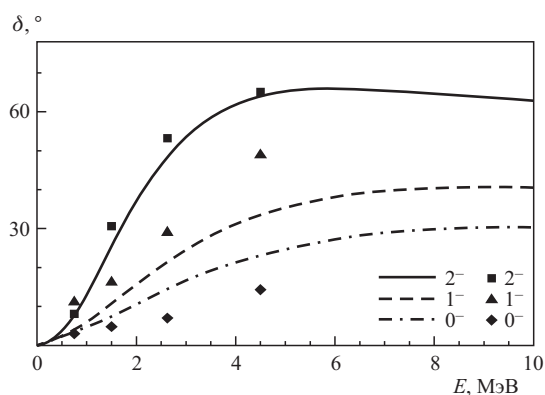


Рис. 21. Фазовые сдвиги рассеяния $n + t$, полученные с использованием ПМ. Экспериментальные данные взяты из работы [133]. Числа 0, 1, 2 соответствуют значениям полного углового момента J

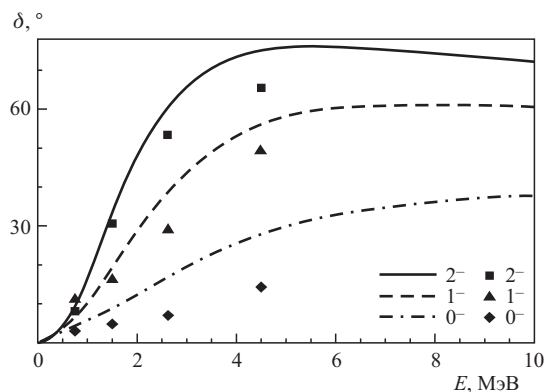


Рис. 22. Фазовые сдвиги рассеяния $n + t$, полученные с использованием МПХН. Экспериментальные данные взяты из работы [133]. Числа 0, 1, 2 соответствуют значениям полного углового момента J

из работы [133], с которыми наблюдается приемлемое согласие теоретических результатов. Если сравнивать результаты настоящей работы с результатами теоретических расчетов, проведенных в работе Араи (Arai) [115] и в работе [114] (Descouvemont и Kharbach — ДК), то при рассматриваемых значениях энергии обнаруживаются отличия в значениях фаз, которые не превышают нескольких градусов.

Параметры резонансов ядра ${}^4\text{H}$, полученные в различных работах с использованием ПМ, приведены в табл. 17. В работе [115] применялся метод аналитического продолжения S -матрицы (АПСМ), который дает приближенное положение полюсов S -матрицы. Так же, как и подход, используемый в настоящей работе, последний является прямым теоретическим подходом. Но эти подходы дают лишь относительно схожие результаты, особенно для широких резонансов.

Таблица 17. Сравнение характеристик резонансных состояний ядра ${}^4\text{H}$, полученных с ПМ в настоящей работе, с результатами других теоретических подходов и экспериментальными данными. Энергии (E) и ширины (Γ) даны в МэВ

L, S, J^π	Настоящая работа		Араи [115]		ДК [114]		Эксперимент [132]	
	E	Γ	E	Γ	E	Γ	E	Γ
1, 1, 2^-	1,65	5,60	1,52	4,11	3,05	5,1	3,19	5,42
1, 1, 1^-	1,74	9,54	1,23	5,80	3,89	7,6	3,50	6,73
1, 1, 0^-	1,82	11,26	1,19	6,17	—	—	5,27	8,92
1, 0, 1^-	1,51	8,01	1,32	4,72	—	—	6,02	12,98

Действительно, в работе [134] было показано, что результаты, получаемые для узких резонансов $J^\pi = 3/2^-$ ядер ${}^5\text{He}$ и ${}^5\text{Li}$, находятся в разумном согласии. В то время как для широких состояний $J^\pi = 1/2^-$ существенно разнятся. Сравнение результатов настоящей работы с результатами работы [135] также указывает на то, что для широких резонансов $J^\pi = 1/2^-$ оба метода дают схожие результаты для энергий резонансов (в пределах 8–9%), но различия для ширин могут достигать до 40%. В работе [114] для получения фонового фазового сдвига и свойств резонансов была использована теория R -матрицы. Это приближение ближе к экспериментальной методологии, что отражается на согласии с экспериментальными данными. Таким образом, несовпадения значений положений и ширин резонансов, приведенных в табл. 17, по-видимому, вызваны в основном различием в подходах, использованных для получения результатов.

Второй важной подсистемой является подсистема $n+n$. На рис. 23 показаны фазовые сдвиги для рассеяния $n+n$ с $L=0, S=0$ и $L=1, S=1$. ПМ порождает виртуальное состояние с $L^\pi = 0^+, S^{(nn)} = 0$, что может оказаться

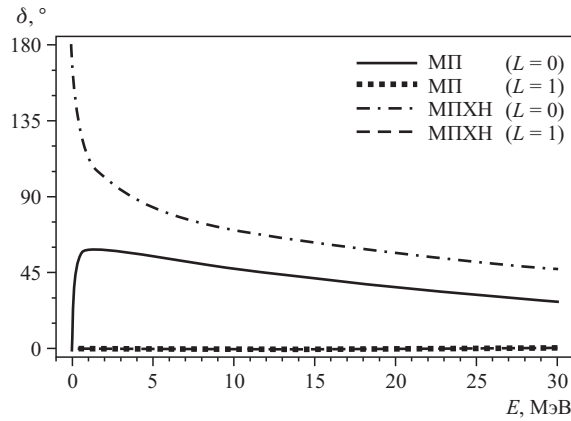


Рис. 23. Фазовые сдвиги рассеяния $n+n$, полученные с использованием ПМ и МПХН

существенным для формирования резонансов ${}^5\text{H}$. В отличие от этого потенциал МПХН приводит к слабосвязанному состоянию ($-0,44$ МэВ) в канале $L=0, S=0$. Несмотря на этот дефект МПХН, мы использовали его при описании структуры резонансов ${}^5\text{H}$ для проверки влияния выбора нуклон-нуклонного взаимодействия на параметры резонансных состояний. Отметим, что нечетные компоненты ПМ и МПХН довольно слабые и фазовый сдвиг в канале $L=1, S=1$ не превышает 1° в диапазоне энергий $0 \leq E \leq 10$ МэВ. Поэтому можно ожидать, что указанные компоненты не будут заметно влиять на резонансные свойства системы ${}^5\text{H}$.

3.3. Параметры резонансных состояний ядра ${}^5\text{H}$. Вернемся к рассмотрению свойств ядра ${}^5\text{H}$ как трехкластерной системы. Все ее резонансы имеют достаточно большую ширину. Для первоначальной их идентификации в спектре использовался анализ собственных состояний Харриса [21, 136–138]. Он указал на наличие широких резонансов в интервале энергий от 2 до 4 МэВ. При дальнейшем более полном изучении параметров рассеяния внимание концентрируется именно на этой области энергий.

Сначала рассмотрим сходимость результатов, вычисляя энергии и ширины резонансов $L=0, J^\pi = 1/2^+$ и $L^\pi = 2^+$ с использованием взаимодействия ПМ (только центральная компонента). При этом для каждого значения K_i и K_a всегда включаются все возможные каналы $(K; l_1, l_2)$, для которых l_1, l_2 совместимы с данным значением K . В табл. 18 и 19 отображены результаты, полученные по мере увеличения $K_i = K_a$ при $N_\rho = 25$.

В табл. 20 и 21 для фиксированного $K_i = 14$ показана сходимость по K_a при $N_\rho = 25$, параметров резонансов $L=0, J^\pi = 1/2^+$ и $L^\pi = 2^+$. Отметим ограниченное влияние высших K_a -каналов.

Таблица 18. Сходимость энергий и ширин первого (E_1, Γ_1) и второго (E_2, Γ_2) резонанса ядра ^5H , полученных с ПМ для $J^\pi = 1/2^+$ с изменением $K_i = K_a$. Энергии (E) и ширины (Γ) даны в МэВ

$K_a = K_i$	E_1	Γ_1	E_2	Γ_2
0	—	—	—	—
2	1,751	3,371	3,693	15,165
4	1,767	2,875	3,638	16,900
6	1,675	2,413	4,307	9,356
8	1,550	1,934	4,251	8,724
10	1,477	1,763	4,230	7,847
12	1,428	1,669	4,152	6,995
14	1,391	1,599	4,072	6,574

Таблица 19. Сходимость энергий и ширин первого (E_1, Γ_1) и второго (E_2, Γ_2) резонанса ядра ^5H , полученных с ПМ для $L^\pi = 2^+$ с изменением $K_i = K_a$. Энергии (E) и ширины (Γ) даны в МэВ

$K_a = K_i$	E_1	Γ_1	E_2	Γ_2
0	—	—	—	—
2	3,026	5,551	—	—
4	2,651	4,825	3,992	11,268
6	2,453	4,122	4,201	8,685
8	2,292	3,583	4,160	7,453
10	2,202	3,302	4,236	7,151
12	2,152	3,141	4,113	6,804
14	2,102	3,015	4,112	6,692

Таблица 20. Сходимость энергий и ширин для первого (E_1, Γ_1) и второго (E_2, Γ_2) резонансов ядра ^5H , полученных с ПМ для $J^\pi = 1/2^+$ при фиксированном $K_i = 14$ и переменном K_a . Энергии (E) и ширины (Γ) даны в МэВ

K_a	E_1	Γ_1	E_2	Γ_2
0	2,231	0,841	—	—
2	1,453	1,617	3,492	19,349
4	1,436	1,606	4,135	10,462
6	1,422	1,596	4,202	7,121
8	1,408	1,596	4,157	6,908
10	1,398	1,588	4,123	6,763
12	1,394	1,593	4,090	6,671
14	1,391	1,599	4,073	6,574

Таблица 21. Сходимость энергий и ширин первого (E_1, Γ_1) и второго (E_2, Γ_2) резонансов ядра ${}^5\text{H}$, полученных с ПМ для $L^\pi = 2^+$ при фиксированном $K_i = 14$ и переменном K_a . Энергии (E) и ширины (Γ) даны в МэВ

K_a	E_1	Γ_1	E_2	Γ_2
2	2,248	3,263	—	—
4	2,200	3,101	4,174	8,448
6	2,166	3,057	4,123	7,131
8	2,136	3,035	4,109	6,826
10	2,121	3,022	4,113	6,727
12	2,110	3,017	4,108	6,708
14	2,102	3,015	4,112	6,692

Исследования сходимости в терминах N_ρ показали, что значение $N_\rho = 25$ является вполне разумным. Все дальнейшие результаты получены с $K_i = K_a = 14$ и $N_\rho = 25$. Такой выбор этих величин можно считать достаточным условием для обеспечения сходимости при хорошей числовой устойчивости всех получаемых величин.

На рис. 24 показаны собственные фазы, полученные с ПМ для состояния $L = 0, J^\pi = 1/2^+$, а на рис. 25 — то же, но для состояний $L = 2, J^\pi = 3/2^+$ и $J^\pi = 5/2^+$. Их поведение указывает на наличие резонансных состояний, характеристики которых можно получить с помощью соотношений (35).

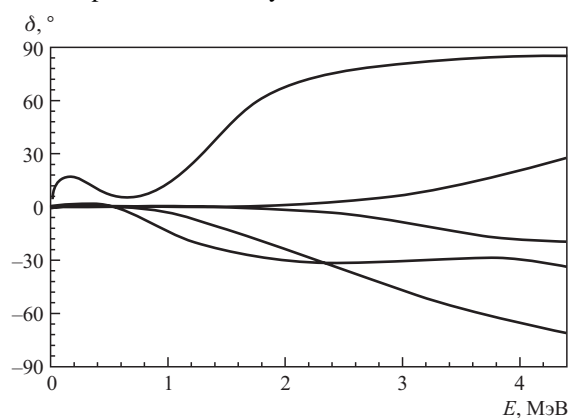


Рис. 24. Собственные фазы, полученные для состояния $L = 0, J^\pi = 1/2^+$ ядра ${}^5\text{H}$ с ПМ

В табл. 22 проводится сравнение энергий и ширин нижайших резонансных состояний ядра ${}^5\text{H}$ для каждого из значений J^π , полученных в настоящей работе, с результатами других микроскопических и полумикроскопических расчетов. Видно, что наши энергии и ширины достаточно хорошо согласуются с результатами Араи [115], но меньше таковых в работе Descouvemont

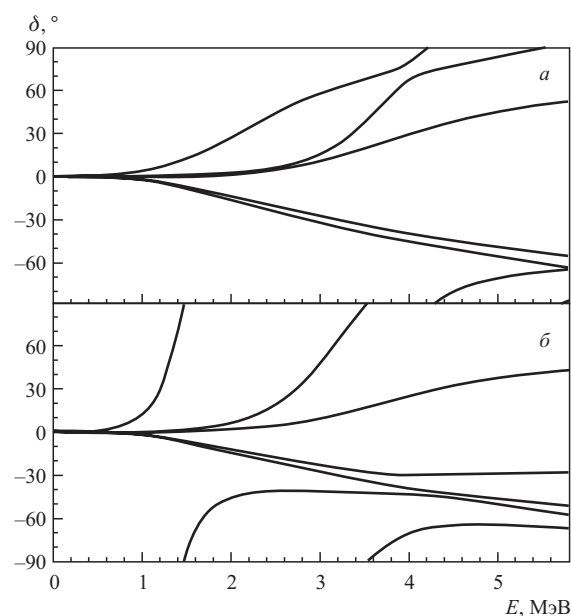


Рис. 25. Собственные фазы, полученные для состояний $L = 2$, $J^\pi = 3/2^+$ (а) и $L = 2$, $J^\pi = 5/2^+$ (б) ядра ${}^5\text{H}$ с ПМ

Таблица 22. Характеристики резонансов с квантовыми числами J^π ядра ${}^5\text{H}$, полученные с ПМ как в АВ МРГ, так и при использовании других теоретических подходов. Энергии (E) и ширины (Γ) резонансов даны в МэВ

J^π	Настоящая работа		Араи [115]		Шульгина [113]		ДК [114]	
	E	Γ	E	Γ	E	Γ	E	Γ
$1/2^+$	1,39	1,60	1,59	2,48	2,5–3,0	3–4	2,8–3,0	1–2
$5/2^+$	2,11	2,87	2,90	4,10	4,6–5,0	5,0	—	—
$3/2^+$	2,10	3,14	3,00	4,80	6,4–6,9	8	—	—

и Kharbach (ДК) [114]. Энергия нижайшего резонанса в ${}^5\text{H}$ близка к ее величине, взятой из работы [115], при несколько меньшей ширине. Параметры состояний $3/2^+$ и $5/2^+$ также в разумных пределах разнятся с результатами работы [115] при несколько более низкой энергии и меньшей ширине.

Имеющиеся количественные несовпадения для энергий и ширин резонансов с результатами работы [115] можно отнести на счет двух отличий в теоретических подходах. Во-первых, есть разница в выборе базиса: Араи в работе [115] использовал гауссов базис для двух конфигураций Якоби

(« Y »-дерево и « T »-дерево с парциальными угловыми моментами $l_1 \leq 2$ и $l_2 \leq 2$). В наших вычислениях рассматривается одна конфигурация векторов Якоби (« T »-дерево) при использовании ГС-базиса с максимальным гипермоментом $K = K_{\max} = 14$ и набором парциальных угловых моментов от $l_1 + l_2 = L$ до $l_1 + l_2 = K_{\max}$. Во-вторых, в [115] для получения параметров резонансов использовался МКМ, в то время как мы получаем данные напрямую на основе вычисленных фазовых сдвигов согласно (35).

Заметные различия в положении резонансов с работой [114] можно объяснить использованием различных параметров потенциала Миннесота, а также привлечением в расчет несопадающих модельных пространств. Вероятно, в меньшей степени сказывается то, что в работе [114] для получения параметров резонансов авторы использовали иной подход, а именно метод АПКС.

Результаты работы [113] были получены в рамках полумикроскопической модели, что само по себе делает различие результатов настоящей работы и результатов работы [113] вполне объяснимым.

В табл. 23 приведены энергии и ширины резонансов для двух нуклон-нуклонных потенциалов, а именно для ПМ и МПХН, особенности которых обсуждались выше. С оглядкой на вычислительные трудности эти результаты получены на ограниченном базисе $K_i = K_a = 8$, который тем не менее можно считать достаточно представительным. Как было сказано ранее, оба эти потенциала несколько модифицировались с целью воспроизведения свойств подсистемы $t + n$. Но все же они остались двумя существенно различными потенциалами, что видно из обсуждения свойств подсистемы $n + n$ в подп. 3.2.

Таблица 23. Сравнение результатов первого (E_1, Γ_1) и второго резонанса (E_2, Γ_2), полученных с ПМ и потенциалом МПХН для $K_i = K_a = 8$. Энергии (E_i) и ширины (Γ_i) в МэВ

L, J^π	ПМ		МПХН		ПМ		МПХН	
	E_1	Γ_1	E_1	Γ_1	E_2	Γ_2	E_2	Γ_2
0, $1/2^+$	1,55	1,93	1,46	1,27	4,18	7,75	4,36	8,17
2, $5/2^+$	2,32	3,43	2,68	2,98	4,14	6,89	4,01	8,18
2, $3/2^+$	2,28	3,72	2,67	3,42	4,17	8,37	4,05	8,88

При рассмотрении результатов, приведенных в табл. 23, для обоих потенциалов видно, что разница между ними не является существенной. Можно интерпретировать это таким образом, что подсистема $t+n$ в значительно большей степени определяет свойства полной системы ${}^5\text{H}$, чем подсистема $n+n$.

Если сравнить параметры резонансных состояний ${}^5\text{H}$, полученные с ПМ и МПХН, с экспериментальными данными с точки зрения как их энергий,

так и ширин (см. табл. 8), то можно отметить, что нижайшее экспериментальное резонансное состояние лежит близко к расчетным $1/2^+$, $3/2^+$ и $5/2^+$. Это позволяет полагать, что экспериментальный результат есть наложение резонансов $1/2^+$, $3/2^+$ и $5/2^+$, которые не могут быть разделены экспериментально на данном этапе.

3.3.1. *Парциальные ширины резонансных состояний ядра ^5H .* Для более детального анализа ситуации с резонансами ядра ^5H вычислялись их парциальные ширины посредством соотношения (42). В табл. 24 указана полная ширина и три наибольших парциальных ширины с указанием соответствующих каналов ($\{K; l_1, l_2\}$), полученные для резонансных состояний ядра ^5H с ПМ. Для МПХН имеет место аналогичная ситуация.

Таблица 24. Полные и парциальные ширины резонансов ядра ^5H с указанием соответствующих каналов ($\{K; l_1, l_2\}$). Энергии и ширины получены с ПМ и даны в МэВ

L, J^π	E	Γ	$\Gamma_1, \{K; l_1, l_2\}$	$\Gamma_2, \{K; l_1, l_2\}$	$\Gamma_3, \{K; l_1, l_2\}$
0, $1/2^+$	1,391	1,599	1,046, $\{2,0,0\}$	0,548, $\{0,0,0\}$	0,005, $\{4,0,0\}$
2, $5/2^+$	2,110	2,873	2,375, $\{2,0,2\}$	0,443, $\{2,2,0\}$	0,049, $\{4,0,2\}$
2, $3/2^+$	2,098	3,134	2,606, $\{2,0,2\}$	0,466, $\{2,2,0\}$	0,060, $\{4,0,2\}$

Отметим, что вклады от двух, максимум трех каналов практически полностью исчерпывают полную ширину. Более 65 % для состояния с $L = 0$ и 98 % для состояний с $L = 2$ полной ширины соответствует распаду составной системы по каналам с гипермоментом $K = 2$. Наибольший вклад вносится функциями с нулевым парциальным орбитальным угловым моментом l_1 подсистемы $n + n$. Это может служить серьезным аргументом в пользу того, что подсистема $n + n$ с $S^{(nn)} = 0$ в формировании этих резонансов играет весьма важную роль.

Все предыдущие вычисления выполнялись с помощью трехкластерной конфигурации Якоби, представленной на рис. 1 как « T »-дерево. Выбор того или иного дерева Якоби при использовании достаточно обширного пространства базисных функций практически не сказывается на численных результатах по энергии и полной ширине трехкластерного резонанса, но может пролить дополнительный свет на некоторые особенности протекания его распада. Парциальные ширины трех нижайших резонансов ядра ^5H , показанные в табл. 24, соответствуют случаю « T »-дерева. Иными словами, эти парциальные ширины указывают, по каким каналам трехкластерного континуума, классификация которых связана с « T »-деревом, происходит распад резонансного состояния.

В табл. 25, 26 и 27 сравниваются парциальные ширины резонансов $1/2^+$, $5/2^+$ и $3/2^+$, полученных с ПМ, для « T »- и для « Y »-дерева. Отметим, что в

Таблица 25. Парциальные ширины (в МэВ) распада резонанса $1/2^+$ для «Т»- и «Y»-деревьев Якоби

$\{K; l_1, l_2\}$	«Т»-дерево	«Y»-дерево
$\{0,0,0\}$	0,548	0,548
$\{2,0,0\}$	1,046	0,065
$\{2,1,1\}$	10^{-9}	0,980

Таблица 26. Парциальные ширины (в МэВ) распада резонанса $5/2^+$ для «Т»- и «Y»-деревьев Якоби

$\{K; l_1, l_2\}$	«Т»-дерево	«Y»-дерево
$\{2,0,2\}$	2,375	0,028
$\{2,1,1\}$	10^{-4}	2,289
$\{2,2,0\}$	0,443	0,501

Таблица 27. Парциальные ширины (в МэВ) распада резонанса $3/2^+$ для «Т»- и «Y»-деревьев Якоби

$\{K; l_1, l_2\}$	«Т»-дерево	«Y»-дерево
$\{2,0,2\}$	2,606	0,029
$\{2,1,1\}$	10^{-4}	2,464
$\{2,2,0\}$	0,466	0,579

то время как канал $\{K; l_1, l_2\} = \{2, 0, 0\}$ является доминирующим для резонанса $1/2^+$ в «Т»-конфигурации, канал $\{2, 1, 1\}$ оказывается преобладающим для «Y»-конфигурации векторов Якоби. Это говорит о том, что двухкластерная подсистема ${}^3\text{H} + n$ с орбитальным угловым моментом $l_2 = 1$ для этого резонанса является определяющей. Аналогичная ситуация наблюдается для резонансов $5/2^+$ и $3/2^+$: канал $\{2, 2, 0\}$ является основным для «Т»-дерева, а канал $\{2, 1, 1\}$ — для «Y»-дерева. Этот анализ показывает, что модельное пространство, используемое Араи в работе [115] для описания нижайших состояний ядра ${}^5\text{H}$, соответствует разумному выбору базисных состояний, который передает наиболее заметные вклады как от «Т»-, так и от «Y»-конфигурации.

3.3.2. Анализ волновых функций резонансных состояний ядра ${}^5\text{H}$. В заключение анализа ситуации с нижайшими состояниями ядра ${}^5\text{H}$ обратимся непосредственно к рассмотрению резонансных волновых функций, т. е. к плотностям вероятностей $|\Psi_r(E_r; r_1, r_2)|^2$ и корреляционным функциям $r_1^2 r_2^2 |\Psi_r(E_r; r_1, r_2)|^2$, зависящим от координат r_1 и r_2 , где $r_i = q_i / \sqrt{\mu_i}$, а μ_i — приведенная масса. На рис. 26 показана контурная визуализация плотности и корреляционной функции для резонансов $L = 0, J^\pi = 1/2^+$ и

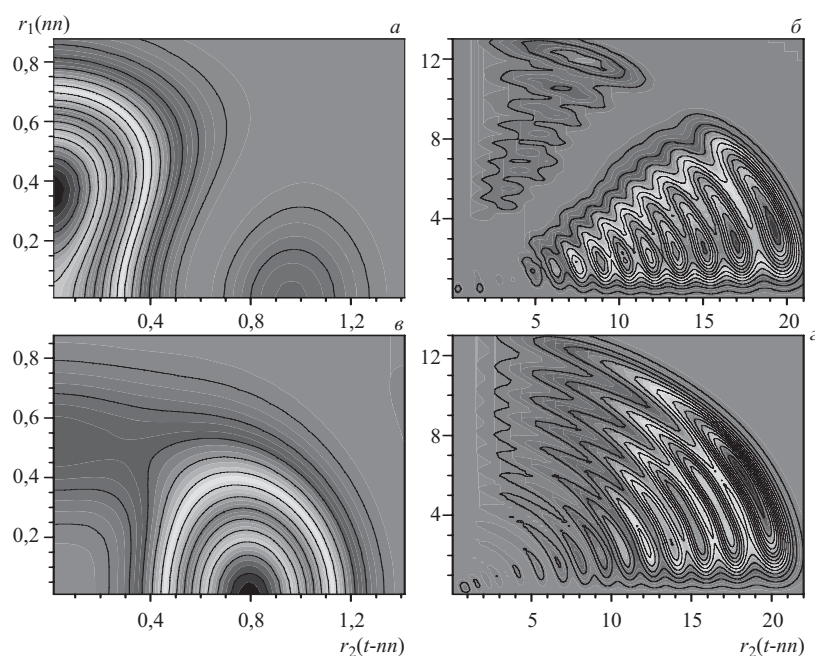


Рис. 26. Плотность волновой функции (a, ϑ) и корреляционная функция (b, z) нижайших резонансных состояний ядра ${}^5\text{He}$: $L = 0, J^\pi = 1/2^+$ (a, b) и $J^\pi = 5/2^+$ (c, z), полученные с ПМ. Все расстояния заданы в Фм

$L = 2, J^\pi = 5/2^+$, полученных с МР; для $L = 2, J^\pi = 3/2^+$ наблюдается картина, схожая с картиной для состояния $L = 2, J^\pi = 5/2^+$.

В плотностях наблюдается два центра кластеризации. В обоих случаях четко проявляется структура из двух близко расположенных нейтронов и достаточно удаленного тритона. Для $L = 0$ можно увидеть и два удаленных друг от друга нейтрона и тритон между ними. Корреляционная картина указывает на выраженный распад треугольной формы с близко расположенными нейтронами и отстоящим тритоном.

Поскольку для относительного движения мы используем конечный набор осцилляторных волновых функций, представление корреляционной функции в пространстве ограничено. Логично сопоставить наши результаты по ${}^5\text{He}$ с результатами аналогичного анализа, проведенного для ядра ${}^6\text{He}$ в работах [52, 53], полученными в трехчастичной модели, а также с результатами п. 2.1. Там было показано, что корреляционная функция связанного состояния ядра ${}^6\text{He}$ с $L = 0$ трехчастичной системы указывает на наличие доминантной «динейтронной» конфигурации, локализованной в пространстве

из-за связанности трехчастичной системы. Это аналогично нашим результатам, приведенным на рис. 26, в соответствии с которыми трехкластерная система имеет предпочтительный распад квазистационарного (резонансного) состояния с двумя коррелирующими в пространстве нейтронами. Среднее состояние между двумя нейтронами в ${}^6\text{He}$ составляет от 1 до 3 Фм, в то время как в ${}^5\text{H}$ от 1 до 5 Фм в области взаимодействия.

Результаты, приведенные выше, наталкивают на мысль о сравнении трехкластерных результатов с результатами более простой двухкластерной модели, описывающей ядро ${}^5\text{H}$ в виде двухкластерной конфигурации $t + {}^2n$, где двухнейтронная система рассматривается как единый кластер. Вычисления с МР в рамках этой модели выявили резонансы $J^\pi = 3/2^+$ и $J^\pi = 5/2^+$ в окрестности энергии в 3,5 МэВ с ширинами 8,1 и 6,9 МэВ соответственно. В ней не возникает резонансов с нулевым угловым моментом, что объясняется отсутствием кинематического барьера при $L = 0$. Таким образом, можно считать, что такая двухкластерная модель дает некоторые верхние пределы для энергий и ширин резонансов $3/2^+$ и $5/2^+$ в ${}^5\text{H}$.

4. РЕАКЦИИ ${}^3\text{H}({}^3\text{H}, 2n){}^4\text{He}$ И ${}^3\text{He}({}^3\text{He}, 2p){}^4\text{He}$

Для того чтобы еще раз продемонстрировать возможности АВ МРГ, рассмотрим его применение к описанию реакций термоядерного синтеза ${}^3\text{H}({}^3\text{H}, 2n){}^4\text{He}$ и ${}^3\text{He}({}^3\text{He}, 2p){}^4\text{He}$. Последняя из них представляет интерес с точки зрения астрофизики как одно из важнейших звеньев солнечного *pp*-цикла. Совместное рассмотрение реакций ${}^3\text{He}({}^3\text{He}, 2p){}^4\text{He}$ и ${}^3\text{H}({}^3\text{H}, 2n){}^4\text{He}$ является естественным в том смысле, что это позволяет лучше понять как то общее, что лежит в основе их динамики, так и эффекты, которые приносит кулоновское взаимодействие при наличии трехкластерных выходных каналов. На примере указанных реакций демонстрируется, как можно связать входные двухчастичные и выходные трехкластерные каналы.

Первые микроскопические расчеты для таких реакций были представлены в работе [83]. Тогда в их основу было положено двухкластерное описание как для входных, так и для выходных каналов. В выходном канале рассматривались динуклонные кластеры (2p или 2n), описываемые простой оболочечной функцией, соответствующей псевдосвязанным состояниям с положительной энергией. Экспериментальные сечения (S -факторы) при сравнительно больших энергиях (порядка 1 МэВ) воспроизводились путем подгонки за счет вариации обменного параметра Майораны нуклон-нуклонного потенциала. В такой модели удалось разумно воспроизвести имеющиеся на то время экспериментальные данные в области малых энергий, представляющие интерес с точки зрения астрофизики. В поведении S -фактора не было обнаружено никаких указаний на существование резонансного состояния, на-

личие которого могло бы внести ясность в решение проблемы солнечных нейтрино.

В последующем в работах [139–141] использовались более совершенные подходы, где выходной трехчастичный канал моделировался посредством использования двухкластерных конфигураций $({}^4\text{He} + n(p)) + n(p)$ и ${}^4\text{He} + (n(p) + n(p))$ при описании относительного движения кластеров посредством использования дискретной суперпозиции смещенных гауссовых функций. В каждом из указанных случаев были получены близкие по форме зависимости S -фактора от энергии.

В настоящей работе реакции ${}^3\text{H}({}^3\text{H}, 2n){}^4\text{He}$ и ${}^3\text{He}({}^3\text{He}, 2p){}^4\text{He}$ рассматривались с использованием метода гиперсферических функций для описания трехкластерного выходного канала, что позволило корректно задать граничные условия для распада компаунд-ядра на три кластера.

Для этого привлекались гипергармоники с гипермоментами $K = K_{\min}, K_{\min} + 2, \dots, 10$, где $K_{\min} = L$. Достаточно ли такого количества гипергармоник для описания сложной динамики трехчастичного распада? Более детальный ответ на этот вопрос будет дан ниже, в последующих пунктах, а здесь мы вновь обращаемся к связанному состоянию ${}^6\text{He}$ и рассматриваем, как такой базис гиперсферических гармоник описывает слабосвязанное состояние этого ядра.

Энергия связанного состояния ${}^6\text{He}$ в рамках трехкластерного описания в рамках АВ МРГ может быть без особого труда получена путем диагонализации матрицы гамильтониана (см. разд. 2). Результаты таких расчетов здесь сравниваются с трехкластерными расчетами, проведенными в стохастическом вариационном методе (СВМ) в работах [74, 142]. Для этого используется потенциал Миннесота без учета спин-орбитальных компонент при значении осцилляторного радиуса $b = 1,285$, которое минимизирует значение энергии связи α -частицы. Такое же значение b выбиралось и в работе [74]. На рис. 27 проводится сопоставление энергии связи ядра ${}^6\text{He}$ как функции главного квантового числа N с результатами, полученными в СВМ. При этом использованы все гипергармоники вплоть до $K_{\max} = 10$ включительно и все базисные функции, отвечающие условию $N \leq 50$. При этом было получено значение энергии связи $E = -0,8038$ МэВ относительно порога $\alpha + n + n$. Следуя логике наших рассуждений, эту величину нужно сравнивать с величиной $E = -1,016$ МэВ для СВМ. Для того чтобы в наших расчетах достичь значения энергии, полученного в СВМ, по-видимому, следует расширить пространство используемых функций за счет привлечения функций с последующими значениями гипермомента K , что выходит за рамки тех его значений, которые в дальнейшем привлекаются в расчетах для рассматриваемых в настоящем разделе реакций. Но и в рамках пространства привлеченных в расчет базисных состояний удастся удовлетворительное описание связанного состояния ядра ${}^6\text{He}$. Полученные результаты подтолкнули нас к

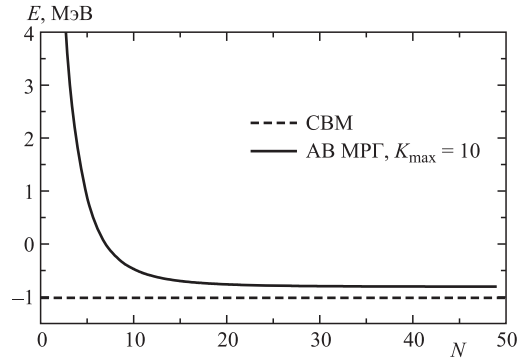


Рис. 27. Энергия основного состояния ядра ${}^6\text{He}$ как функция главного квантового числа N в трехкластерной АВ МРГ в сравнении с результатами СВМ [74]. Энергия отсчитывается от порога $\alpha + n + n$

попытке объединения двухкластерного и трехкластерного описания в рамках АВ МРГ и рассмотреть на этой основе реакции синтеза ${}^3\text{H}({}^3\text{H}, 2n){}^4\text{He}$ и ${}^3\text{He}({}^3\text{He}, 2p){}^4\text{He}$.

4.1. Комбинированная кластерная модель. Здесь вновь следует обратиться к разд. 1, где представлено описание используемой микроскопической модели, и к рассмотрению состояний непрерывного спектра шестинуклонных систем ${}^6\text{He}$ и ${}^6\text{Be}$, которое изложено в разд. 3.

Шестинуклонные волновые функции, строящиеся с одновременным учетом двух- и трехкластерных конфигураций с полной антисимметризацией, имеют вид

$$\Psi_L = \mathcal{A}\{\Psi_{3N}\Psi_{3N}f_L(\mathbf{q}_0)\} + \mathcal{A}\{\Psi_\alpha\Psi_N\Psi_N g_L(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2)\}. \quad (59)$$

Индекс N в Ψ_L соответствует кластеру, состоящему из одного нуклона, α — ${}^4\text{He}$, $3N$ — кластеру ${}^3\text{H}$ или ${}^3\text{He}$; f_L и g_L — функции относительного движения для двух- и трехкластерных конфигураций соответственно; \mathbf{q}_i — координаты Якоби, определяющие взаимное расположение кластеров.

Вся динамика задачи при рассматриваемой ее постановке связана только с функциями относительного движения кластеров f_L и g_L , поскольку волновые функции, задающие внутреннюю структуру кластеров, «заморожены». Классификация же состояний, по которым разлагаются функции относительного движения кластеров f_L и g_L , определяется тем, в каких переменных задаются векторы Якоби \mathbf{q} .

Для двухкластерной конфигурации (${}^3\text{H} + {}^3\text{H}$ или ${}^3\text{He} + {}^3\text{He}$) используются стандартные сферические координаты $\mathbf{q}_0 = \{q_0, \hat{\mathbf{q}}_0\}$ и, соответственно, квантовые числа $\{n\} = \{n, L, M\}$ для классификации базисных состояний,

где n — радиальное осцилляторное квантовое число. Величина L — угловой момент относительного движения кластеров, являющийся интегралом движения, поскольку используются только центральные компоненты нуклон-нуклонного взаимодействия, M — его проекция.

При описании трехкластерных конфигураций (${}^4\text{He} + p + p$ и ${}^4\text{He} + n + n$) используются гиперсферические переменные (50). Такой выбор переменных приводит к следующему набору квантовых чисел: $\nu = \{N, K, (l_1 l_2) LM\} = \{n_\rho, K, (l_1 l_2) LM\}$, где полное число осцилляторных квантов $N = 2n_\rho + K$, а n_ρ — число гиперрадиальных возбуждений. Парциальные угловые моменты l_1 и l_2 соотносятся с векторами Якоби \mathbf{q}_1 и \mathbf{q}_2 соответственно. Расчеты на связанные K -каналы проводятся с условием, что каждый канал характеризуется набором квантовых чисел $\nu_0 = \{K, (l_1 l_2) LM\}$.

4.1.1. Граничные условия. Напомним, что в АВ МРГ граничные условия задаются в терминах коэффициентов разложения волновой функции относительного движения (см. п. 1.2), которые напрямую связаны с граничными условиями в координатном представлении. Для двухкластерной конфигурации асимптотическая форма коэффициентов разложения $f_L = \sum C_{n,L} \phi_{n,L}$ может быть представлена в виде

$$C_{n,L} \simeq \sqrt{r_n} f_L(r_n), \quad (60)$$

где $\{\phi_{n,L}\}$ — осцилляторные функции, а $r_n = b\sqrt{4n + 2L + 3}$ — величина, определяющая классическую точку поворота трехмерного гармонического осциллятора в состоянии с энергией $E_n = \hbar\omega(2n + L + 3/2)$. В случае трехкластерной конфигурации, где функция относительного движения $g_L = \sum C_{n_\rho,L} \phi_{n_\rho,L}$, а $\{\phi_{n_\rho,L}\}$ — собственные функции шестимерного гармонического осциллятора, представленные в гиперсферических переменных, асимптотические выражения для коэффициентов разложения по которым могут быть представлены следующим образом:

$$C_{n_\rho,L} \simeq \sqrt{2} \rho_{n_\rho}^2 g_L(\rho_{n_\rho}), \quad (61)$$

с $\rho_{n_\rho} = b\sqrt{4n_\rho + 2K + 6}$. Для большей ясности здесь указаны лишь те индексы, которые наиболее существенны для понимания материала, излагаемого в настоящем разделе.

Для входного двухкластерного канала рассматривается как падающая, так и расходящаяся волна:

$$f_L(\mathbf{q}_0) \simeq [\psi_L^{(-)}(k_0 q_0) - S_{\{\mu\},\{\mu\}} \psi_L^{(+)}(k_0 q_0)] Y_{LM}(\hat{\mathbf{q}}_0), \quad (62)$$

где $S_{\{\mu\},\{\mu\}}$ представляют в S -матрице матричные элементы упругого рассеяния для канала ${}^3\text{H} + {}^3\text{H}$ или ${}^3\text{He} + {}^3\text{He}$, а $Y_{LM}(\hat{\mathbf{q}}_0)$ — сферические гармоники.

Поскольку мы интересуемся трехкластерным выходным каналом реакции, то соответствующая асимптотическая волновая функция записывается следующим образом:

$$g_L(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) = g_L(\rho, \Omega) \simeq \sum_{\nu_0} [-S_{\{\mu\}, \{\nu_0\}} \psi_K^{(+)}(k\rho)] H_K^{\nu_0}(\Omega), \quad (63)$$

где $S_{\{\mu\}, \{\nu_0\}}$ отвечает за связь двухкластерного и трехкластерных K -каналов; $H_K^{\nu_0}(\Omega)$ — гиперсферическая гармоника.

Полное сечение задается выражением

$$\sigma(E) = \frac{\pi}{k_0^2} \sum_{L,S} \frac{(2L+1)(2S+1)}{4} \sum_{\nu_0} |S_{\{\mu\}, \{\nu_0\}}|^2, \quad (64)$$

где S без индексов — полный спин шестинуклонной системы.

Как указывалось в п. 1.1, асимптотическое решение в координатном представлении для падающей и расходящейся волны может быть представлено в виде

$$\psi_{\mathcal{L}}^{(\pm)}(k\rho) = \frac{1}{\sqrt{k}} W_{\pm i\eta, \lambda} \frac{\pm 2ik\rho}{\rho^{\frac{\sigma-1}{2}}}, \quad (65)$$

где W — функция Уиттекера; η — параметр Зоммерфельда (при различных значениях \mathcal{L} , λ , σ) для двух- и трехкластерных каналов (см. табл. 11).

Используя (60) и (61), можно записать граничные условия для коэффициентов разложения

$$\begin{aligned} C_{n,L} &\simeq \sqrt{r_n} [\psi_L^{(-)}(k_0 r_n) - S_{\{\mu\}, \{\mu\}} \psi_L^{(+)}(k_0 r_n)], \\ C_{n_\rho, \nu_0} &\simeq \rho_{n_\rho}^2 [-S_{\{\mu\}, \{\nu_0\}} \psi_K^{(+)}(k\rho_{n_\rho})] \end{aligned} \quad (66)$$

или, что эквивалентно,

$$\begin{aligned} C_{n,L} &\simeq C_{n,L}^{(-)} - S_{\{\mu\}, \{\mu\}} C_{n,L}^{(+)}, \\ C_{n_\rho, \nu_0} &\simeq -S_{\{\mu\}, \{\nu_0\}} C_{n_\rho, \nu_0}^{(+)}, \end{aligned} \quad (67)$$

где использованы обозначения

$$\begin{aligned} C_{n,L}^{(\pm)} &\simeq \sqrt{r_n} \psi_L^{(\pm)}(k_0 r_n), \\ C_{n_\rho, \nu_0}^{(\pm)} &\simeq \rho_{n_\rho}^2 \psi_K^{(\pm)}(k\rho_{n_\rho}). \end{aligned} \quad (68)$$

Точка сшивания, разделяющая внутреннюю и асимптотическую области, определяется точно так же, как и в традиционном МРГ. Соответствие между точкой сшивания в координатном пространстве МРГ и функциональном пространстве АВ МРГ легко устанавливается (см. [58]), если ориентироваться

на классическую осцилляторную точку поворота $r_n = b\sqrt{4n + 2L + 3}$ — для двухкластерного случая и $\rho_{n_\rho} = b\sqrt{4n_\rho + 2K + 6}$ — для трехкластерного. Требуемое положение точки сшивания может быть получено за счет достаточно большого значения полного числа осцилляторных квантов $N = 2n + L = 2n_\rho + K$, используемых для описания внутренней области.

4.1.2. Анализ формы трехкластерной системы. Использование гиперсферических гармоник позволяет получить информацию о пространственном распределении кластеров и динамике реакции. Они определяют распределение вероятности в пятимерном координатном (импульсном) пространстве при фиксированном значении гиперрадиуса:

$$dW_{\nu_0}^5(\Omega) = |H_{\nu_0}(\Omega)|^2 d\Omega, \quad dW_{\nu_0}^5(\Omega_k) = |H_{\nu_0}(\Omega_k)|^2 d\Omega_k. \quad (69)$$

Анализируя вероятности распределения, можно определить наиболее вероятную форму взаимного расположения кластеров или форму «треугольника», образованного кластерами. Поскольку анализ пятимерной функции является весьма нетривиальной задачей, обратимся к некоторым специфическим переменным. Проинтегрируем функцию распределения $dW_{\nu_0}^5(\Omega)$ по единичным векторам $\hat{\mathbf{q}}_1, \hat{\mathbf{q}}_2$ (или, соответственно, $\hat{\mathbf{k}}_1, \hat{\mathbf{k}}_2$):

$$\begin{aligned} dW_{\nu_0}(\theta) &= \int |H_{\nu_0}(\Omega)|^2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta d\theta d\hat{\mathbf{q}}_1 d\hat{\mathbf{q}}_2, \\ dW_{\nu_0}(\theta_k) &= \int |H_{\nu_0}(\Omega_k)|^2 \cos^2 \theta_k \sin^2 \theta_k d\theta_k d\hat{\mathbf{k}}_1 d\hat{\mathbf{k}}_2, \end{aligned} \quad (70)$$

и введем переменные

$$\mathcal{E} = \frac{q_1^2}{\rho^2} = \cos^2 \theta, \quad \mathcal{E} = \frac{k_1^2}{k^2} = \cos^2 \theta_k.$$

В координатном пространстве эти величины могут быть интерпретированы как среднеквадратичные расстояния между парами кластеров, ассоциирующиеся с координатой \mathbf{q}_1 , или как энергии относительного движения пар кластеров (импульсное пространство). Соответственно получаем

$$\begin{aligned} W_{\nu_0}(\mathcal{E}) &= \\ &= \frac{dW_{\nu_0}(\theta)}{d\theta} = |N_K^{(l_1, l_2)} \cos^{l_1} \theta \sin^{l_2} \theta P_{n_\rho}^{(l_2+1/2, l_1+1/2)}(\cos 2\theta)|^2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta = \\ &= |N_K^{(l_1, l_2)}(\mathcal{E})^{l_1/2} (1 - \mathcal{E})^{l_2/2} P_{n_\rho}^{(l_2+1/2, l_1+1/2)}(2\mathcal{E} - 1)|^2 \sqrt{\mathcal{E}(1 - \mathcal{E})}. \end{aligned} \quad (71)$$

Эта функция представляет собой вероятность распределения по относительным расстояниям между двумя кластерами или, соответственно, по энергиям относительного движения кластеров. Кинематический фактор

$\cos^2 \theta \sin^2 \theta$ включен с целью сделать $W_{\nu_0}(\mathcal{E})$ пропорциональным дифференциальному сечению в импульсном пространстве в случае, когда выходной канал задается единственной гипергармоникой $Y_{\nu_0}(\Omega)$.

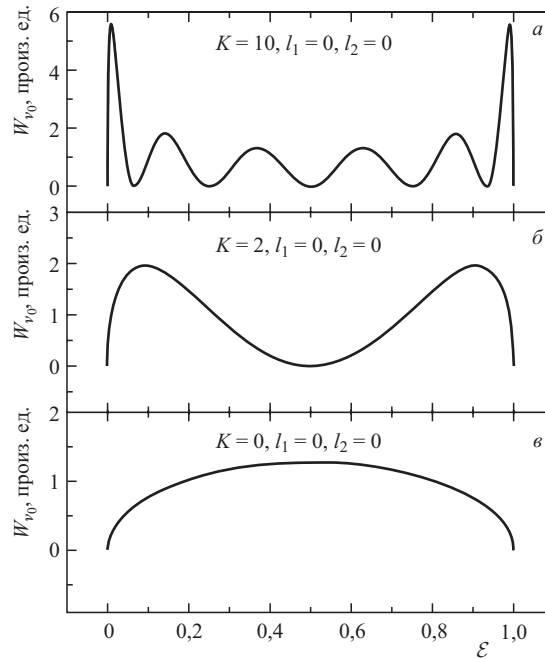


Рис. 28. Функция $W_{\nu_0}(\mathcal{E})$ для $K = 0, 2$ и 10 при $l_1 = l_2 = 0$

На рис. 28 представлена функция $W_{\nu_0}(\mathcal{E})$ для нескольких гипергармоник, включенных в расчет. Видно, что различным гипергармоникам отвечают разные формы трехкластерной системы. В частности, гипергармоника с $K = 10$ и $l_1 = l_2 = 0$ передает случаи, при которых два кластера движутся с очень большой или с очень малой относительной энергией, в то время как в координатном пространстве они находятся очень близко друг к другу или, наоборот, далеко.

4.2. Результаты численных расчетов. Здесь вновь использовался потенциал Волкова с обменным параметром m , равным 0,54, так же, как это было сделано и в работе [140]. Значение осцилляторного радиуса полагалось, как и в работах [15, 59], равным 1,37 Фм, что оптимизирует энергию связи основного состояния α -частицы. Потенциал Волкова не содержит спин-орбитальных и тензорных компонент. Соответственно, полный угловой момент L и полный спин S оказываются хорошими квантовыми числами. Более того, благодаря специфическим особенностям выбранного потенциала

бинарный канал не связан с трехкластерным в случае, когда спин S равен единице. Это означает, что состояния отрицательной четности $L^\pi = 1^-, 2^-, \dots$ не вносят вклада в реакцию.

Таблица 28. Перечисление гипергармоник с $L = 0$

Канал	N_{ch}											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
K	0	2	4	4	6	6	8	8	8	10	10	10
$l_1 = l_2$	0	0	0	2	0	2	0	2	4	0	2	4

Для описания континуума трехкластерных конфигураций привлекались все гипергармоники с $K \leq K_{\max} = 10$. В табл. 28 перечислены все использованные K -каналы для случая $L = 0$. Для всех двух- и трехкластерных каналов использовалось одно и то же максимальное значение числа квантов осцилляторных возбуждений N_ρ для определения границы внутренней области волновой функции Ψ_L , которое определяло точку сшивания внутренней и асимптотической частей волновой функции. Значение N_ρ рассматривалось как вариационный параметр и изменялось в пределах от 25 до 75, что в координатном представлении примерно соответствует расстояниям 14–25 Фм. Изменение N_ρ в указанных пределах приводило к незначительным изменениям величин элементов S -матрицы, не превышающим 1%, что не может повлиять на физические выводы. В окончательном варианте расчетов полагалось $N_\rho = 25$ как некий компромисс между сходимостью результатов и сложностью численных расчетов. При этом осуществлялся жесткий контроль за унитарностью S -матрицы, в частности, соотношения

$$|S_{\{\mu\},\{\mu\}}|^2 + \sum_{\nu_0} |S_{\{\mu\},\{\nu_0\}}|^2 = 1.$$

Мы убедились в том, что, начиная с $N_\rho = 15$, последнее условие выполняется не хуже, чем с точностью до 1%. А в окончательных расчетах, где $N_\rho = 25$, вообще никаких вопросов с унитарностью S -матрицы не возникает. Заметим, что наши результаты по сходимости ограниченного осцилляторного базиса для трехкластерных систем находятся в хорошем соответствии с результатами работы [143], где использовались различные наборы квадратично-интегрируемых функций при рассмотрении трехкластерных кулоновских систем.

4.2.1. *Астрофизические S -факторы реакций ${}^3\text{H}({}^3\text{H}, 2n){}^4\text{He}$ и ${}^3\text{He}({}^3\text{He}, 2p){}^4\text{He}$.* На рис. 29 представлен полный S -фактор реакции ${}^3\text{H}({}^3\text{H}, 2n){}^4\text{He}$ в области энергий $0 \leq E \leq 200$ кэВ. Видно, что теоретическая кривая достаточно хорошо ложится на экспериментальные точки.

Полный S -фактор реакции ${}^3\text{He}({}^3\text{He}, 2p){}^4\text{He}$ представлен на рис. 30. Там же приведены известные экспериментальные данные. S -факторы обеих ре-

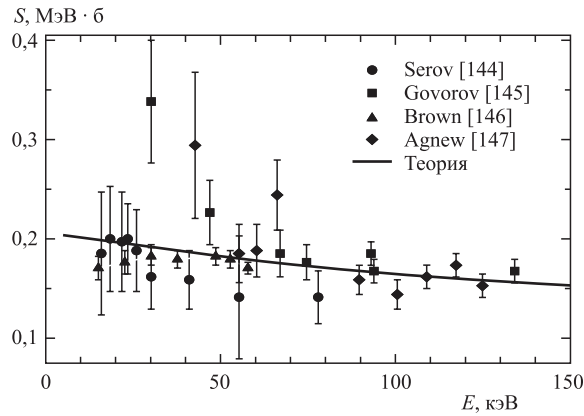


Рис. 29. S -фактор реакции ${}^3\text{H}({}^3\text{H}, 2n){}^4\text{He}$. Экспериментальные данные взяты из работ [144–147]

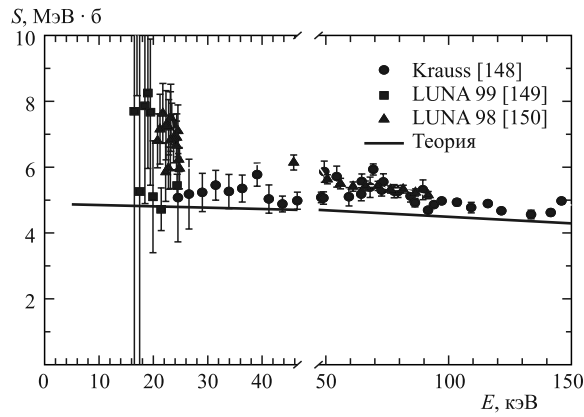


Рис. 30. S -фактор реакции ${}^3\text{He}({}^3\text{He}, 2p){}^4\text{He}$. Экспериментальные данные взяты из работ [148–150]

акций представляют собой монотонные функции от энергии и не проявляют какого-либо нерегулярного поведения, указывающего на наличие скрытого резонанса, что могло бы дать указания к объяснению проблемы солнечных нейтрино.

Астрофизический S -фактор при малых энергиях обычно представляется в следующем виде:

$$S(E) = S_0 + S'_0 E + S''_0 E^2. \quad (72)$$

Мы произвели подгонку коэффициентов в этой формуле по рассчитанным значениям S -фактора в области энергий $0 \leq E \leq 200$ кэВ и получили для

реакции ${}^3\text{H}({}^3\text{H}, 2n){}^4\text{He}$ следующее его приближенное выражение:

$$S(E) = 206,51 - 0,53E + 0,001E^2 \text{ кэВ} \cdot \text{б}, \quad (73)$$

а для реакции ${}^3\text{He}({}^3\text{He}, 2p){}^4\text{He}$

$$S(E) = 4,89 - 3,99E + 2,3 \cdot 10^{-4}E^2 \text{ МэВ} \cdot \text{б}. \quad (74)$$

Отметим различия в поведении S -факторов для систем ${}^6\text{He}$ и ${}^6\text{Be}$. Нуклон-нуклонное взаимодействие кластеров приводит к одинаковой связи входного и выходных каналов в обоих случаях. Но кулоновское взаимодействие вносит отчетливые различия в S -факторы.

Ниже для сравнения приводятся результаты подгонки S -фактора реакции ${}^3\text{He}({}^3\text{He}, 2p){}^4\text{He}$ по экспериментальным данным:

$$S(E) = 5,2 - 2,8E + 1,2E^2 \text{ МэВ} \cdot \text{б} \text{ [151]},$$

$$S(E) = (5,40 \pm 0,05) - (4,1 \pm 0,5)E + (2,3 \pm 0,5)E^2 \text{ МэВ} \cdot \text{б} \text{ [150]}, \quad (75)$$

$$S(E) = (5,32 \pm 0,08) - (3,7 \pm 0,6)E + (1,95 \pm 0,5)E^2 \text{ МэВ} \cdot \text{б} \text{ [149]}.$$

Константа и линейный член находятся в хорошем согласии. При этом различие в областях энергий расчетной ($0 \leq E \leq 200$ кэВ) и экспериментальной подгонок ($0 \leq E \leq 1000$ кэВ) усложняет однозначную интерпретацию расхождений для квадратичного члена.

Как отмечалось выше, использование метода гиперсферических функций позволяет изучить некоторые детали динамики рассматриваемых реакций.

На рис. 31 и 32 представлены вклады (W_{ν_0}) различных трехкластерных K -каналов в полные S -факторы реакций. На рис. 31 эти вклады (по отношению к полному S -фактору) представлены при фиксированном значении

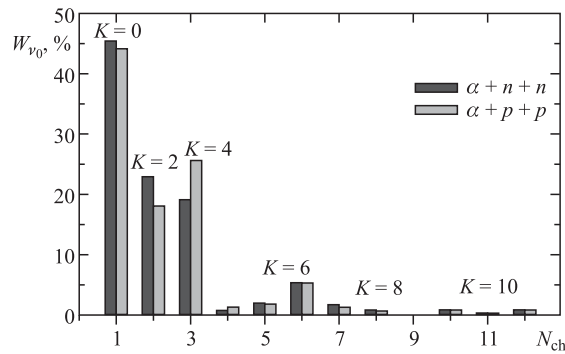


Рис. 31. Вклады трехкластерных каналов в полные S -факторы реакций ${}^3\text{H}({}^3\text{H}, 2n){}^4\text{He}$ и ${}^3\text{He}({}^3\text{He}, 2p){}^4\text{He}$ в расчете с $K_{\max} = 10$. N_{ch} — величина, которая устанавливает последовательное перечисление каналов, объединенных одним значением гипермомента

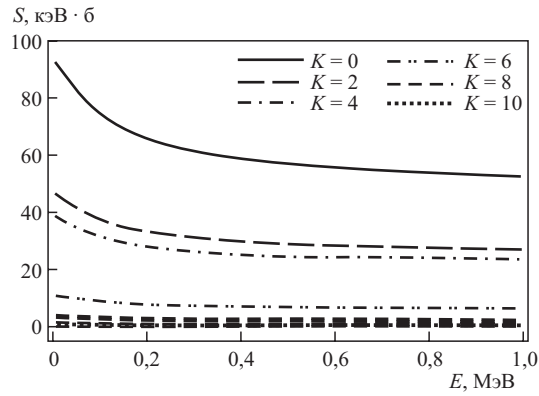


Рис. 32. Вклады гипергармоник с различными значениями K в полный S -фактор реакции ${}^3\text{H}({}^3\text{H}, 2n){}^4\text{He}$ в расчете с $K_{\text{max}} = 10$ для области энергий $0 \leq E \leq 1000$ кэВ

энергии (1 кэВ). А на рис. 32 показана зависимость W_{ν_0} (в абсолютных величинах) от энергии входного канала. Отметим, что основной вклад в результат (порядка 95%) вносят три гипергармоники, а именно: $\{K = 0; l_1 = l_2 = 0\}$, $\{K = 2; l_1 = l_2 = 0\}$ и $\{K = 4; l_1 = l_2 = 2\}$, что справедливо для обеих реакций с небольшими различиями, обусловленными кулоновским взаимодействием.

Рис. 31 и 32 дают определенную информацию и о сходимости результатов. Вклад гипергармоник с $K > 6$ мал по сравнению с вкладом низжайших гипергармоник, которые доминируют. Это подтверждается и рис. 33, где приведены расчеты, в которых K_{max} изменяется в пределах от 0 до 10. Видно,

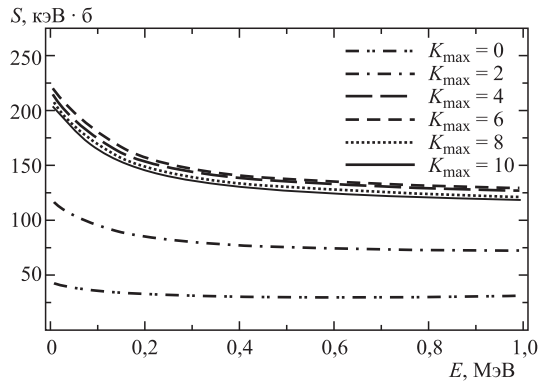


Рис. 33. Сходимость S -фактора реакции ${}^3\text{H}({}^3\text{H}, 2n){}^4\text{He}$ при изменении K_{max} от 0 до 10

что наиболее полный расчет с $K_{\max} = 10$ является в достаточной мере исчерпывающим с точки зрения надлежащего учета двухкластерных конфигураций в трехкластерной, поскольку различия в результатах становятся пренебрежимо малыми.

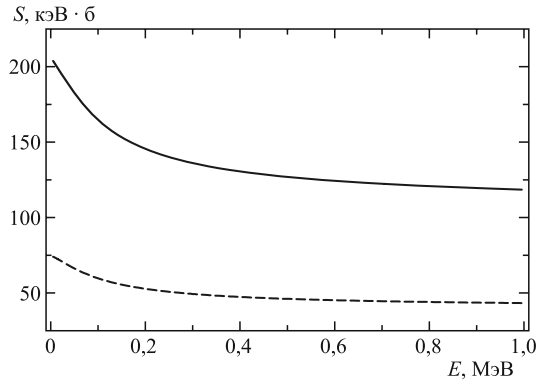


Рис. 34. Сравнение S -факторов реакции ${}^3\text{H}({}^3\text{H}, 2n){}^4\text{He}$, рассчитанных с учетом трехкластерных выходных каналов (сплошная кривая) и в двухкластерной модели ${}^3\text{H}({}^3\text{H}, 2n){}^4\text{He}$ (штриховая)

Для того чтобы подчеркнуть важность описания выходного канала как трехкластерного, проводилось сравнение трехкластерных расчетов с расчетами для бинарной конфигурации ${}^4\text{He} + {}^2n$ и, соответственно, ${}^4\text{He} + {}^2p$ в качестве выходных каналов. При этом выбирались одни и те же параметры взаимодействия и значения осцилляторного радиуса. Результаты расчетов для реакции ${}^3\text{H}({}^3\text{H}, 2n){}^4\text{He}$ представлены на рис. 34. Сходная картина имеет место и для реакции ${}^3\text{He}({}^3\text{He}, 2p){}^4\text{He}$.

4.2.2. *Сечения реакций ${}^3\text{H}({}^3\text{H}, 2n){}^4\text{He}$ и ${}^3\text{He}({}^3\text{He}, 2p){}^4\text{He}$.* Имея в своем распоряжении элементы S -матрицы, легко получить полные и дифференциальные сечения реакций. Этот подпункт посвящен расчету и анализу дифференциальных сечений, определяющих вероятность для выбранной пары кластеров быть детектированной с энергией их относительного движения E_{12} . Для этого в каждом случае осуществляется такой выбор дерева Якоби, в котором первый из векторов \mathbf{q}_1 связан с расстоянием между кластерами 1 и 2. При этом вектор \mathbf{k}_1 в импульсном пространстве имеет модуль, равный корню квадратному из E_{12} . С учетом такого определения указанных величин сечение принимает вид

$$d\sigma(E_{12}) \sim \frac{1}{E} \int d\hat{\mathbf{k}}_1 d\hat{\mathbf{k}}_2 \left| \sum_{\nu_0} S_{\{\mu\}\{\nu_0\}} Y_{\nu_0}(\Omega_k) \right|^2 \sin^2 \theta_k \cos^2 \theta_k d\theta_k. \quad (76)$$

После интегрирования по единичным векторам $d\hat{\mathbf{k}}_1$ и $d\hat{\mathbf{k}}_2$ и замены

$$\begin{aligned} \cos \theta_k &= \sqrt{\frac{E_{12}}{E}}, \quad \sin \theta_k = \sqrt{\frac{E - E_{12}}{E}}, \\ d\theta_k &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{(E - E_{12})E_{12}}} dE_{12} \end{aligned} \quad (77)$$

легко получить $d\sigma(E_{12})/dE_{12}$.

На рис. 35 представлены такие сечения для реакций ${}^3\text{H}({}^3\text{H}, 2n){}^4\text{He}$ и ${}^3\text{He}({}^3\text{He}, 2p){}^4\text{He}$ при значении энергии $E = 10$ кэВ во входном канале. Сплошная линия соответствует движению двух нейтронов (протонов) с относительной энергией E_{12} , а штриховая — случаю, при котором α -частица и один из нейтронов (протонов) имеют относительную энергию E_{12} .

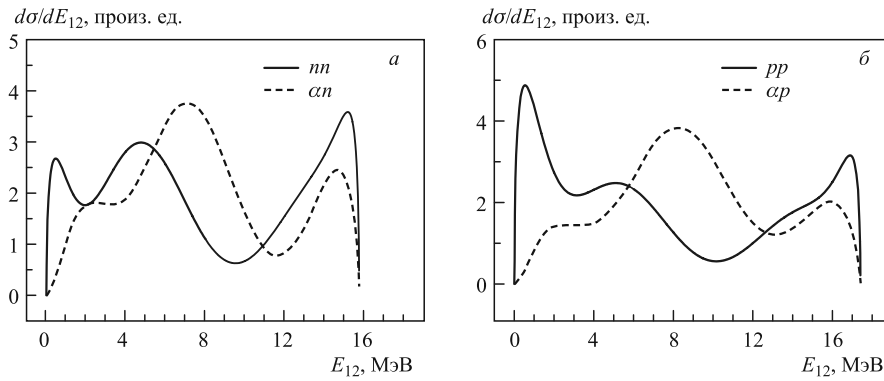


Рис. 35. Дифференциальные сечения $d\sigma(E_{12})/dE_{12}$ реакций ${}^3\text{H}({}^3\text{H}, 2n){}^4\text{He}$ (а) и ${}^3\text{He}({}^3\text{He}, 2p){}^4\text{He}$ (б)

Остановимся на случае совместного детектирования двух нейтронов или протонов. Здесь наблюдается пик при энергии $E_{12} \simeq 0,5$ МэВ. Отчетливее он проявляется для реакции ${}^3\text{He}({}^3\text{He}, 2p){}^4\text{He}$, т. е. при этом сравнительно небольшом значении энергии два нейтрона или два протона могут быть зафиксированы совместно с большой вероятностью. Можно полагать, что именно такое положение вещей обеспечивает относительный успех двухкластерного описания при указанном значении энергии.

Обратим особое внимание на область энергий от 1 до 3 МэВ относительного движения в подсистемах ${}^4\text{He} + n$ и ${}^4\text{He} + p$, где имеют место резонансные состояния $3/2^-$ и $1/2^-$ в указанных подсистемах при использовании в расчетах потенциала Волкова. Из рис. 35 (штриховая линия) видно, что в наших расчетах наличие этих состояний не оказывает существенного влияния на сечения реакций ${}^3\text{H}({}^3\text{H}, 2n){}^4\text{He}$ и ${}^3\text{He}({}^3\text{He}, 2p){}^4\text{He}$.

На рис. 36 проводится сравнение результатов настоящей работы для полного сечения вылета протонов (реакция ${}^3\text{He}({}^3\text{He}, 2p){}^4\text{He}$) с экспериментальными данными из работы [151], которые получены при энергии $E({}^3\text{He}) = 0,19$ МэВ. Отметим качественное согласие в поведении расчетных и экспериментальных данных.

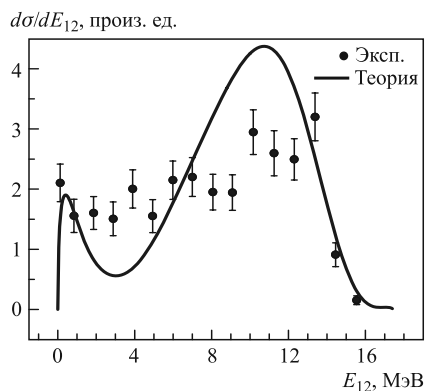


Рис. 36. Рассчитанные и экспериментальные дифференциальные сечения реакции ${}^3\text{He}({}^3\text{He}, 2p){}^4\text{He}$ при $E({}^3\text{He}) = 0,19$ МэВ. Последние взяты из работы [151]

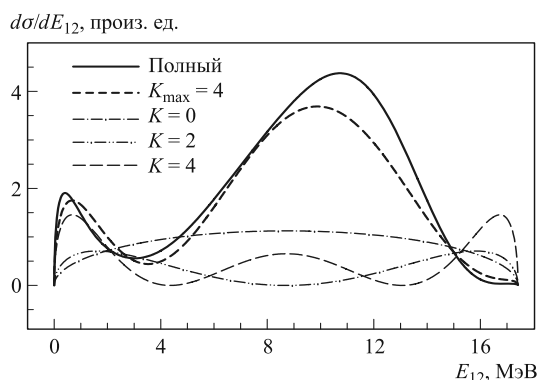


Рис. 37. Парциальные сечения реакции ${}^3\text{He}({}^3\text{He}, 2p){}^4\text{He}$ для компонент волновой функции с $K = 0, 2$ и 4 в сравнении с полным сечением для $K_{\text{max}} = 4$ и полным сечением для $K_{\text{max}} = 10$

Сечения, представленные на рис. 35 и 36, получены для максимального числа гипергармоник ($K \leq 10$). Эти рисунки следует рассмотреть совместно с рис. 37, где приведены и парциальные дифференциальные сечения в каналах с гипермоментами $K = 0, K = 2, K = 4$. Сечения, представленные на рис. 35 и 36, существенным образом отличаются от приведенных на рис. 37 сечений для отдельных каналов, которые доминируют в трехкластерном канале, т. е. интерференция вкладов от доминирующих гипергармоник кардинально влияет на поведение сечений. Для иллюстрации этого утверждения на рис. 37

наряду с парциальными сечениями для гипермоментов $K = 0$, $K = 2$, $K = 4$ представлены сечения, полученные для совокупности наиболее важных компонент при $K_{\max} \leq 4$ и для полного расчета с $K_{\max} \leq 10$, что демонстрирует и сходимость сечения. В окрестности значения энергии 10 МэВ наблюдается весьма заметный пик, который полностью обусловлен интерференцией различных гипергармоник.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе представлено обобщение АВ МРГ на случай трехкластерных задач с применением его в основном к исследованию свойств легких ядер с большим избытком нейтронов или протонов. Предложенный метод позволяет с единых позиций рассматривать состояния как дискретного, так и непрерывного спектра, т. е. в последнем случае состояния, лежащие в трехкластерном континууме. Для классификации состояний (каналов) трехкластерного непрерывного спектра привлекаются гиперсферические гармоники. Базис этих функций позволяет описывать всевозможные конфигурации трехкластерных систем, которые формируются при распаде составного ядра на три несвязанных кластера. При этом показано, как необходимые граничные условия для трехкластерного континуума могут быть реализованы в рамках АВ МРГ. Исследование состояний непрерывного спектра включает в себя вычисление энергий и полных ширин резонансов, анализ волновых функций, парциальных ширин, что дает возможность дополнительно пролить свет на природу исследуемых состояний, определить наиболее вероятные каналы их распада. Детально исследована проблема сходимости результатов расчетов. Для состояний непрерывного спектра рассмотрена зависимость энергий и полных ширин резонансов от количества гиперсферических гармоник, привлекаемых для описания как внутренней, так и асимптотической части волновой функции. Показано, что параметры резонансов более чувствительны к тому, насколько точно воспроизводится волновая функция во внутренней области (где сильно влияние принципа Паули и где существенную роль играет нуклон-нуклонное взаимодействие), и менее чувствительны к точности описания асимптотической части волновой функции (где кластеры сильно разделены и пренебрежимо малы эффекты межкластерной антисимметризации и короткодействующих компонент нуклон-нуклонных сил).

Первоначально рассматриваемый метод был апробирован в качестве инструмента исследования связанных состояний ядер ${}^6\text{He}$, ${}^6\text{Li}$ и ${}^8\text{He}$. Для этого привлекались трехкластерные конфигурации $\alpha + n + n$, $\alpha + p + n$ и $\alpha + {}^2n + {}^2n$ соответственно. На примере связанных состояний ядер показано влияние принципа Паули на трехкластерные конфигурации и выявлены те состояния, которые дают максимальный вклад в волновые функции. Рассмотрение плотностей распределения протонов и нейтронов наглядно продемонстриро-

вало наличие у ядер ${}^6\text{He}$ и ${}^8\text{He}$ нейтронного гало. Теоретические расчеты среднеквадратичных массовых, протонных и нейтронных радиусов, а также плотности распределения массы в ${}^6\text{He}$ и ${}^8\text{He}$ разумным образом согласуются с имеющимися экспериментальными данными.

Далее показано, что в рамках представленной в обзоре модели удается удовлетворительно описать 2^+ -резонанс ядра ${}^6\text{He}$, а также 0^+ - и 2^+ -резонансы ядра ${}^6\text{Be}$. Представленные результаты разумно согласуются с результатами других авторов, использовавших иные микроскопические и полумикроскопические подходы к рассмотрению свойств этих ядер. Подробно исследованы резонансные состояния ядра ${}^5\text{H}$, порождаемые трехкластерным континуумом $t + n + n$. Вычисления были проведены с двумя наборами нуклон-нуклонных потенциалов и с обширным набором гиперсферических гармоник, с гипермоментами до $K = 14$ включительно, что приводит к хорошей сходимости результатов. Показано, что параметры резонансных состояний с $J^\pi = 1/2^+$, $J^\pi = 3/2^+$ и $J^\pi = 5/2^+$ слабо зависят от особенностей NN -потенциалов. При распаде этих резонансов доминирует конфигурация со скоррелированным вылетом двух нейтронов, предпочитающих долгое время находиться достаточно близко друг от друга. Представленные результаты соответствуют результатам тех экспериментальных работ, в которых выявлены сравнительно узкие резонансные состояния ядра ${}^5\text{H}$. При этом они хорошо согласуются с результатами теоретических работ, в которых гильбертово пространство состояний близко к нашему, но используются совершенно иные методы изучения трехкластерных резонансов.

В рамках представленной модели также удалось объединить описание двух- и трехкластерного канала и провести теоретический анализ реакций термоядерного синтеза ${}^3\text{He}({}^3\text{He}, 2p){}^4\text{He}$ и ${}^3\text{H}({}^3\text{H}, 2n){}^4\text{He}$ в области низких энергий, важных с точки зрения астрофизических приложений, в частности, для цепочки ядерных процессов, связанных с проблемой солнечных нейтрино. Модель хорошо описала имеющиеся экспериментальные данные для астрофизического S -фактора этих реакций и определила его значения в области энергий, труднодоступной экспериментальными методами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Fujiwara Y., Tang Y. C. Three-Cluster Resonating-Group Method in the Coupled-Channel Formalism // Phys. Lett. B. 1983. V. 131, No. 4–6. P. 261–264.
2. Fujiwara Y., Tang Y. C. Reaction Cross Sections in Light Nuclear Systems with the Multiconfiguration Resonating-Group Method // Prog. Theor. Phys. 1995. V. 93, No. 4. P. 711–726.
3. Fujiwara Y., Tang Y. C. Reaction Mechanisms in the Six-Nucleon System with the Multi-Configuration Resonating-Group Method // Few-Body Syst. 1992. V. 12, No. 1. P. 21–35.

4. Fujiwara Y., Tang Y.C. Multiconfiguration Resonating-Group Study of the Six-Nucleon System with Cluster-Rearrangement and Pseudo-Inelastic Configurations // Phys. Rev. C. 1991. V. 43, No. 1. P. 96–104.
5. Fujiwara Y., Tang Y.C. Multiconfiguration Resonating-Group Theory of ${}^8\text{Li}$ // Phys. Rev. C. 1990. V. 41, No. 1. P. 28–44.
6. Descouvemont P., Baye D. ${}^7\text{Li} + p$ and ${}^7\text{Be} + n$ Reactions in a Microscopic Three-Cluster Model // Nucl. Phys. A. 1994. V. 573, No. 1. P. 28–46.
7. Descouvemont P., Baye D. Microscopic Study of the ${}^7\text{Li}(n, \gamma){}^8\text{Li}$ and ${}^7\text{Be}(p, \gamma){}^8\text{B}$ Reactions in a Multiconfiguration Three-Cluster Model // Nucl. Phys. A. 1994. V. 567, No. 2. P. 341–353.
8. Descouvemont P., Baye D. The ${}^7\text{Be}(p, \gamma){}^8\text{B}$ Reaction in a Microscopic Three-Cluster Model // Nucl. Phys. A. 1988. V. 487, No. 2. P. 420–432.
9. Csóto A., Baye D. Microscopic Description of the Beta Delayed Deuteron Emission from ${}^6\text{He}$ // Phys. Rev. C. 1994. V. 49, No. 2. P. 818–823.
10. Csóto A. Three-Body Resonances in ${}^6\text{He}$, ${}^6\text{Li}$, and ${}^6\text{Be}$, and the Soft Dipole Mode Problem of Neutron Halo Nuclei // Ibid. No. 6. P. 3035–3041.
11. Гутич И. Ф., Нестеров А. В., Охрименко И. П. Исследование состояний непрерывного спектра тетранейтрона // ЯФ. 1989. Т. 50, вып. 1(7). С. 19–26.
12. Filippov G. F. et al. The Realization of the Resonating Group Method Algebraic Version for Three-Cluster Systems // ЭЧАЯ. 1994. Т. 25, вып. 6. С. 1347–1378.
13. Филиппов Г. Ф., Лашко Ю. А., Шведов Л. П. Приближение асимптотического потенциала и мягкая дипольная мода ${}^6\text{He}$ // ЯФ. 1999. Т. 62, №. 10. С. 1763–1771.
14. Filippov G. F., Kato K., Korennoy S. V. ${}^6\text{He}$ as a Three-Cluster System — Investigation of the Ground State and Continuum 0^+ States // Prog. Theor. Phys. 1996. V. 96, No. 3. P. 575–595.
15. Vasilevsky V. S. et al. Three-Cluster Model of Six-Nucleon System // ЯФ. 1997. Т. 60, вып. 3. С. 413–419.
16. Filippov G., Lashko Y. Structure of Light Neutron-Rich Nuclei and Nuclear Reactions Involving These Nuclei // ЭЧАЯ. 2005. Т. 36, вып. 6. С. 1373–1424.
17. Вильдермут Л., Тан Я. Единая теория ядра: Пер. с англ. М.: Мир, 1980. 502 с.
18. Филиппов Г. Ф., Охрименко И. П. О возможности использования осцилляторного базиса для решения задач непрерывного спектра // ЯФ. 1980. Т. 32, вып. 4(10). С. 932–939.
19. Филиппов Г. Ф. Об учете правильной асимптотики в разложениях по осцилляторному базису // ЯФ. 1981. Т. 33, вып. 4. С. 928–931.
20. Филиппов Г. Ф., Василевский В. С., Чоповский Л. Л. Обобщенные когерентные состояния в задачах ядерной физики // ЭЧАЯ. 1984. Т. 15, вып. 6. С. 1338–1385.
21. Филиппов Г. Ф., Василевский В. С., Чоповский Л. Л. Решение задач микроскопической теории ядра на основе техники обобщенных когерентных состояний // ЭЧАЯ. 1985. Т. 16, вып. 2. С. 349–406.

22. *Filippov G. F.* Dynamics of the Cluster and Collective Degrees of Freedom // *J. Phys. Soc. Japan Suppl.* 1989. V. 58. P. 118–128.
23. *Sytcheva A. et al.* Monopole and Quadrupole Polarization Effects on the α -Particle Description of ^8Be // *Phys. Rev. C.* 2005. V. 71, No. 4. P. 044322.
24. *Heller E. J., Yamani H. A.* New L^2 Approach to Quantum Scattering: Theory // *Phys. Rev. A.* 1974. V. 9, No. 3. P. 1201–1208.
25. *Heller E. J., Yamani H. A.* J -Matrix Method: Application to s -Wave Electron–Hydrogen Scattering // *Phys. Rev. A.* 1974. V. 9, No. 4. P. 1209–1214.
26. *Yamani H. A., Fishman L.* J -Matrix Method: Extensions to Arbitrary Angular Momentum and to Coulomb Scattering // *J. Math. Phys.* 1975. V. 16, No. 4. P. 410–420.
27. *The J -Matrix Method. Developments and Applications / Ed.: Alhaidari A. D. et al.* Springer, 2008. 356 p.
28. *Vasilevsky V. S., Arickx F.* Algebraic Model for Quantum Scattering: Reformulation, Analysis, and Numerical Strategies // *Phys. Rev. A.* 1997. V. 55, No. 4. P. 265–286.
29. *Vanroose W., Broeckhove J., Arickx F.* Modified J -Matrix Method for Scattering // *Phys. Rev. Lett.* 2002. V. 88, No. 1. P. 10404.
30. *Broeckhove J. et al.* The Modified J -Matrix Method for Short Range Potentials // *J. Phys. A: Math. Gen.* 2004. V. 37, No. 31. P. 7769–7781.
31. *Vasilevsky V. S. et al.* Dynamics of $\alpha + N + N$ Channel in ^6He and ^6Li . Preprint ITP-96-3E. Kiev, 1996. 19 p.
32. *Rosensteel G., Rowe D.* Nuclear $Sp(3, R)$ Model // *Phys. Rev. Lett.* 1977. V. 38, No. 1. P. 10–14.
33. *Ашерова П. М. и др.* Некоторые теоретико-групповые аспекты метода обобщенных гиперсферических функций // *ЯФ.* 1974. Т. 21, вып. 5. С. 1126–1134.
34. *Fujiwara Y., Tang Y. C., Horiuchi H.* Generator Coordinate Theory of Normalization Kernels of Cluster Systems. IV — Application of Double Gel'fand Polynomials to SU_4 Symmetry of Cluster Wave Functions // *Prog. Theor. Phys.* 1983. V. 70, No. 3. P. 809–826.
35. *Fujiwara Y., Tang Y. C., Horiuchi H.* Application of Double Gel'fand Polynomials to the Symmetric Group and Spin-Isospin Wave Functions of Cluster Systems // *J. Math. Phys.* 1984. V. 25, No. 10. P. 2826–2837.
36. *Filippov G., Lashko Y.* Peculiar Properties of the Cluster–Cluster Interaction Induced by the Pauli Exclusion Principle // *Phys. Rev. C.* 2004. V. 70, No. 6. P. 064001.
37. *Filippov G. F. et al.* Norm Kernels and the Closeness Relation for Pauli-Allowed Basis Functions // *Few-Body Syst.* 2003. V. 33, No. 2–3. P. 173–198.
38. *Horiuchi H.* Generator Coordinate Theory of Allowed States of Many-Cluster Systems // *Prog. Theor. Phys.* 1976. V. 55, No. 5. P. 1448–1461.
39. *Horiuchi H.* Multi-Cluster Allowed States and Spectroscopic Amplitude of Cluster Transfer // *Prog. Theor. Phys.* 1977. V. 58, No. 1. P. 204–222.

40. *Симонов Ю. А.* Ядерные волновые функции для произвольного числа нуклонов // ЯФ. 1968. Т. 7, вып. 6. С. 1210–1220.
41. *Бадалян А. М., Симонов Ю. А.* Задача трех тел. Уравнение для парциальных волн // ЯФ. 1966. Т. 3, вып. 6. С. 1032–1047.
42. *Базь А. И. и др.* Некоторые приложения метода K -гармоник к расчету свойств атомных ядер // ЭЧАЯ. 1972. Т. 3, вып. 2. С. 275–318.
43. *Смирнов Ю. Ф., Шитикова К. В.* Метод K -гармоник и модель оболочек // ЭЧАЯ. 1977. Т. 8, вып. 4. С. 847–910.
44. *Эфрос В. Д.* К методу K -гармоник в задаче нескольких нуклонов // ЯФ. 1972. Т. 15, вып. 1–2. С. 226–241.
45. *Эфрос В. Д.* О методе гиперсферических функций // ЯФ. 1978. Т. 27, №. 3. С. 845–855.
46. *Джибути Р. И., Крупеникова Н. Б.* Метод гиперсферических функций в квантовой механике нескольких тел. Тбилиси: Мецниереба, 1984. 144 с.
47. *Fabre de la Ripelle M., Navarro J.* First Order of the Hyperspherical Harmonic Expansion Method // Ann. Phys. (N. Y.). 1979. V. 123, No. 1. P. 185–232.
48. *Fabre de la Ripelle M., Fiedeldey H., Weichers G.* Beyond First Order of the Hyperspherical Harmonic Expansion Method // Ann. Phys. (N. Y.). 1982. V. 138, No. 2. P. 275–318.
49. *Fabre de la Ripelle M.* Green Function and Scattering Amplitudes in Many-Dimensional Space // Few-Body Syst. 1993. V. 14, No. 2. P. 1–24.
50. *Zhukov M. V. et al.* Structure of ${}^6\text{He}$ Nucleus as Three-Body System: α -Particle and Neutron Momentum Distributions // Nucl. Phys. A. 1992. V. 538, No. 1. P. 375–381.
51. *Данилин Б. В., Жуков М. В.* Резонансное $3 \rightarrow 3$ -рассеяние и структура возбужденных состояний ядер $A = 6$ // ЯФ. 1993. Т. 56, вып. 4. С. 67–83.
52. *Bang J. M. et al.* Few-Body Aspects of Borromean Halo Nuclei // Phys. Rep. 1996. V. 264, No. 1–5. P. 27–37.
53. *Zhukov M. V. et al.* Bound State Properties of Borromean Halo Nuclei: ${}^6\text{He}$ and ${}^{11}\text{Li}$ // Phys. Rep. 1993. V. 231, No. 4. P. 151–199.
54. *Cobis A., Fedorov D. V., Jensen A. S.* Three-Body Halos. V. Computations of Continuum Spectra for Borromean Nuclei // Phys. Rev. C. 1998. V. 58, No. 3. P. 1403–1421.
55. *Данилин Б. В. и др.* Исследование состояний ядер $A = 6$ ($J^\pi = 0^+, 1^+$) в микроскопической $\alpha + 2N$ -модели методом гиперсферических функций // ЯФ. 1991. Т. 53, вып. 1. С. 71–85.
56. *Grigorenko L. V. et al.* Three-Body Decay of ${}^6\text{Be}$ // Phys. Rev. C. 2009. V. 80, No. 3. P. 034602.
57. *Нестеров А. В., Василевский В. С., Чернов О. Ф.* Нейтронное гало ${}^8\text{He}$ // ЯФ. 2001. Т. 64, №. 8. С. 1486–1492.
58. *Vasilevsky V. S. et al.* Algebraic Model for Scattering in Three- s -Cluster Systems. I. Theoretical Background // Phys. Rev. C. 2001. V. 63, No. 3. P. 034606.

59. *Vasilevsky V. S. et al.* Algebraic Model for Scattering in Three-*s*-Cluster Systems. II. Resonances in Three-Cluster Continuum of ${}^6\text{He}$ and ${}^6\text{Be}$ // *Ibid.* P. 034607.
60. *Филиппов Г. Ф., Базавов А. Д., Като К.* О резонансных состояниях ${}^5\text{He}$ и ${}^6\text{Be}$ // *ЯФ.* 1999. Т. 62, вып. 10. С. 1642–1650.
61. *Korennov S., Descouvemont P.* A Microscopic Three-Cluster Model in the Hyper-spherical Formalism // *Nucl. Phys. A.* 2004. V. 740, No. 3–4. P. 249–267.
62. *Михелашвили Т. Я., Смирнов Ю. Ф., Широков А. М.* Влияние непрерывного спектра на монополюные возбуждения ядра ${}^{12}\text{C}$ как системы α -частиц // *ЯФ.* 1988. Т. 48, вып. 4(10). С. 969–978.
63. *Нечаев Ю. И., Смирнов Ю. Ф.* О решении задачи рассеяния в осцилляторном представлении // *ЯФ.* 1982. Т. 35, вып. 6. С. 1385–1391.
64. *Rakityansky S. A., Sofianos S. A.* Jost Function for Coupled Channels // *Proc. of Conf. «Few-Body Problems in Physics-98», Autrans, France, June 1–6, 1998 / Ed.: B. Desplanques et al. Springer-Wien Publ., 1999. P. 93–97.*
65. *Masui H. et al.* Partial Decay Widths in Coupled-Channel Systems with Complex-Scaled Jost Function Method // *Prog. Theor. Phys.* 1999. V. 102, No. 6. P. 1119–1131.
66. *Perelomov A.* Coherent States for Arbitrary Lie Group // *Comment Math. Phys.* 1972. V. 26, No. 3. P. 222–236.
67. *Переломов А. М.* Обобщенные когерентные состояния и их применения. М.: Наука, 1987. 268 с.
68. *Arickx F. et al.* The Algebraic Method for the Quantum Theory of Scattering // *Am. J. Phys.* 1994. V. 62, No. 3. P. 362–370.
69. *Нестеров А. В.* О технике использования многочастичного осцилляторного базиса при исследовании свойств трехкластерных систем // *ЯФ.* 1993. Т. 56, вып. 10. С. 35–46.
70. *Fedorov D. V., Jensen A. S., Riisager K.* Three-Body Halos: Gross Properties // *Phys. Rev. C.* 1994. V. 49, No. 1. P. 201–212.
71. *Бабиков В. В.* Метод фазовых функций в квантовой механике. М.: Наука, 1976. 287 с.
72. *Калоджеро Ф.* Метод фазовых функций в теории потенциального рассеяния: Пер. с англ. М.: Мир, 1972. 296 с.
73. *Wurzer J., Hofmann H. M.* Structure of the Helium Isotopes ${}^4\text{He}$ – ${}^8\text{He}$ // *Phys. Rev. C.* 1997. V. 55, No. 2. P. 688–698.
74. *Varga K., Suzuki Y., Lovas R. G.* Microscopic Multicluster Description of Neutron-Halo Nuclei with a Stochastic Variational Method // *Nucl. Phys. A.* 1994. V. 571, No. 3. P. 447–466.
75. *Karataglidis S. et al.* Alternative Evaluations of Halos in Nuclei // *Phys. Rev. C.* 2000. V. 61, No. 2. P. 024319.
76. *Navrátil P., Barrett B. R.* Large-Basis Shell-Model Calculations for *p*-Shell Nuclei // *Phys. Rev. C.* 1998. V. 57, No. 6. P. 3119–3128.

77. Danilin B. V. *et al.* Dynamical Multiclus-ter Model for Electroweak and Charge-Exchange Reactions // Phys. Rev. C. 1991. V. 43, No. 6. P. 2835–2843.
78. Csóto A. Neutron Halo of ${}^6\text{He}$ in a Microscopic Model // Phys. Rev. C. 1993. V. 48, No. 1. P. 165–171.
79. Varga K., Suzuki Y., Ohbayasi Y. Microscopic Multiclus-ter Description of the Neutron-Rich Helium Isotopes // Phys. Rev. C. 1994. V. 50, No. 1. P. 189–195.
80. Ajzenberg-Selove F. Energy Levels of Light Nuclei $A = 5–10$ // Nucl. Phys. A. 1988. V. 490, No. 1. P. 1–225.
81. Ogloblin A. A. Present Status of Exotic Lightest Nuclei // Proc. of Conf. «Exotic Nuclei», Foros, Crimea, Oct. 1–5, 1991 / Ed.: Yu. E. Penionzhkevich and R. Kalpakchieva. World Sci., 1991. P. 36–66.
82. Мигдал А. Б. Две взаимодействующие частицы в потенциальной яме // ЯФ. 1972. Т. 16, № 2. С. 427–434.
83. Василевский В. С., Рыбкин И. Ю. Об астрофизическом факторе реакций $t(t, 2n)\alpha$ и ${}^3\text{He}({}^3\text{He}, 2p)\alpha$ // ЯФ. 1989. Т. 50, вып. 3(9). С. 662–670.
84. Hansen P. G., Jonson B. The Neutron Halo of Extremely Neutron-Rich Nuclei // Europhys. Lett. 1987. V. 4. P. 409–414.
85. Volkov A. B. Equilibrium Deformation Calculation of the Ground State Energies of $1p$ Shell Nuclei // Nucl. Phys. 1965. V. 74, No. 1. P. 33–58.
86. Thompson D. R., LeMere M., Tang Y. C. Systematic Investigation of Scattering Problems with the Resonating-Group Method // Nucl. Phys. A. 1977. V. 286, No. 1. P. 53–66.
87. Arai K., Suzuki Y., Lovas R. G. Structure of ${}^6\text{He}$ with an Extended Three-Cluster Model // Phys. Rev. C. 1999. V. 59, No. 3. P. 1432–1439.
88. Lashko Y. A., Filippov G. F. How the Pauli Principle Governs the Decay of Three-Cluster Systems // Nucl. Phys. A. 2008. V. 806, No. 1–4. P. 124–145.
89. Tanihata I. *et al.* Measurement of Interaction Cross Sections using Isotope Beams of Be and B and Isospin Dependence of the Nuclear Radii // Phys. Lett. B. 1988. V. 206, No. 4. P. 592–596.
90. Tanihata I. *et al.* Revelation of Thick Neutron Skins in Nuclei // Phys. Lett. B. 1992. V. 289, No. 3–4. P. 261–266.
91. Alkhozov G. D. *et al.* Nuclear Matter Distributions in the ${}^6\text{He}$ and ${}^8\text{He}$ Nuclei from Differential Cross Sections for Small-Angle Proton Elastic Scattering at Intermediate Energy // Nucl. Phys. A. 2002. V. 712, No. 3–4. P. 269–299.
92. Alkhozov G. D. *et al.* Nuclear Matter Distributions in ${}^6\text{He}$ and ${}^8\text{He}$ from Small Angle p -He Scattering in Inverse Kinematics at Intermediate Energy // Phys. Rev. Lett. 1997. V. 78, No. 12. P. 2313–2316.
93. Neumaier S. *et al.* Study of the Nucleon Density Distribution of ${}^6\text{He}$ and ${}^8\text{He}$ by Proton Elastic Scattering in Inverse Kinematics // Nucl. Phys. A. 1995. V. 583. P. 799–802.

94. Wang L. B. *et al.* Laser Spectroscopic Determination of the ${}^6\text{He}$ Nuclear Charge Radius // *Phys. Rev. Lett.* 2004. V. 93, No. 14. P. 142501.
95. Mueller P. *et al.* Nuclear Charge Radius of ${}^8\text{He}$ // *Phys. Rev. Lett.* 2007. V. 99, No. 25. P. 252501.
96. Courier E., Navrátil P. Proton Radii of ${}^{4,6,8}\text{He}$ Isotopes from High-Precision Nucleon–Nucleon Interactions // *Phys. Rev. C.* 2006. V. 73, No. 2. P. 021302.
97. Danilin B. V. *et al.* New Modes of Halo Excitation in ${}^6\text{He}$ Nucleus // *Phys. Rev. C.* 1997. V. 55, No. 2. P. R577–R581.
98. Csóto A. Three-Body Resonances in ${}^6\text{He}$, ${}^6\text{Li}$, and ${}^6\text{Be}$, and the Soft Dipole Mode Problem of Neutron Halo Nuclei // *Phys. Rev. C.* 1994. V. 49, No. 6. P. 3035–3041.
99. Tanaka N., Suzuki Y., Varga K. Exploration of Resonances by Analytical Continuation in the Coupling Constant // *Phys. Rev. C.* 1997. V. 56, No. 1. P. 562–565.
100. Jonson B. Light Dripline Nuclei // *Phys. Rep.* 2004. V. 389, No. 1. P. 1–59.
101. Golovkov M. S. *et al.* Correlation Studies of the ${}^5\text{H}$ Spectrum // *Phys. Rev. C.* 2005. V. 72, No. 6. P. 064612.
102. Ter-Akopian G. M. *et al.* New Insights into the Resonance States of ${}^5\text{H}$ and ${}^5\text{He}$ // *Eur. Phys. J. A. Suppl.* 2005. V. 25. No. 1. P. 315–320.
103. Gurov Y. B. *et al.* Spectroscopy of Superheavy Hydrogen Isotopes ${}^4\text{H}$ and ${}^5\text{H}$ // *Eur. Phys. J. A.* 2005. V. 24, No. 2. P. 231–236.
104. Stepantsov S. V. *et al.* ${}^5\text{H}$ and ${}^5\text{He}$ Nuclear Systems Studied by Means of the ${}^6\text{He} + {}^2\text{H}$ Reaction // *Nucl. Phys. A.* 2004. V. 738. P. 436–439.
105. Chulkov L. V. Heavy Hydrogen Isotopes ${}^4\text{H}$ and ${}^5\text{H}$ // *Ibid.* V. 734. P. 357–360.
106. Meister M. *et al.* The $t + n + n$ System and ${}^5\text{H}$ // *Phys. Rev. Lett.* 2003. V. 91, No. 16. P. 162504.
107. Golovkov M. S. *et al.* Evidences for Resonance States in ${}^5\text{H}$ // *Phys. Lett. B.* 2003. V. 566, No. 1–2. P. 70–75.
108. Meister M. *et al.* Searching for the ${}^5\text{H}$ Resonance in the $t + n + n$ System // *Nucl. Phys. A.* 2003. V. 723, No. 1–2. P. 13–31.
109. Sidorchuk S. I. *et al.* Resonance States of Hydrogen Nuclei ${}^4\text{H}$ and ${}^5\text{H}$ Obtained in Transfer Reactions with Exotic Beams // *Ibid.* V. 719. P. 229c–232c.
110. Korshennikov A. A. *et al.* Superheavy Hydrogen ${}^5\text{H}$ and Spectroscopy of ${}^7\text{He}$ // *Yad. Fiz.* 2002. V. 65, No. 7. P. 690–696.
111. Korshennikov A. A. *et al.* Superheavy Hydrogen ${}^5\text{H}$ // *Phys. Rev. Lett.* 2001. V. 87, No. 9. P. 092501.
112. Golovkov M. S. *et al.* Spectroscopy of ${}^7\text{He}$ and Superheavy Hydrogen Isotope ${}^5\text{H}$ // *ЯФ.* 2001. Т. 64, вып. 7. С. 1315–1318.
113. Shul'gina N. B. Nuclear Structure of ${}^5\text{H}$ in a Three-Body ${}^3\text{H} + n + n$ Model // *Phys. Rev. C.* 2000. V. 62, No. 1. P. 014312.

114. *Descouvemont P., Kharbach A.* Microscopic Cluster Study of the ${}^5\text{H}$ Nucleus // *Phys. Rev. C.* 2001. V. 63, No. 2. P. 027001.
115. *Arai K.* Resonance States of ${}^5\text{H}$ and ${}^5\text{Be}$ in a Microscopic Three-Cluster Model // *Phys. Rev. C.* 2003. V. 68, No. 3. P. 034303.
116. *Adahchour A., Descouvemont P.* Microscopic Cluster Model of ${}^5\text{H}$ and ${}^5\text{He}$ ($T = 3/2$) // *Nucl. Phys. A.* 2008. V. 813, No. 3–4. P. 252–261.
117. *Golovkov M. S. et al.* Observation of Excited States in ${}^5\text{H}$ // *Phys. Rev. Lett.* 2004. V. 93, No. 26. P. 262501.
118. *Kukulin V. I., Krasnopolsky V. M.* A Stochastic Variational Method for Few Body Systems // *J. Phys. G.* 1977. V. 3, No. 6. P. 795–811.
119. *Kukulin V. I., Krasnopolsky V. M., Horacek J.* Theory of Resonances. Principles and Applications. Dordrecht; Boston; London: Kluwer Acad. Publ., 1989. 360 p.
120. *Grigorenko L. V., Timofeyuk N. K., Zhukov M. V.* Broad States Beyond the Neutron Drip Line. Examples of ${}^5\text{H}$ and 4n // *Eur. Phys. J. A.* 2004, No. 2. V. 19. P. 187–201.
121. *Grigorenko L. V.* Experimental Puzzle of ${}^5\text{H}$ // *Ibid.* V. 20, No. 2. P. 419–427.
122. *Tilley D. R. et al.* Energy Levels of Light Nuclei $A = 5, 6, 7$ // *Nucl. Phys. A.* 2002. V. 708, No. 1–2. P. 3–163.
123. *Aoyama S. et al.* Binding Mechanism of a Neutron-Rich Nucleus ${}^6\text{He}$ and Its Excited States // *Prog. Theor. Phys.* 1995. V. 93, No. 1. P. 99–114.
124. *Aoyama S. et al.* Theoretical Predictions of Low-Lying Three-Body Resonance States in ${}^6\text{He}$ // *Ibid.* V. 94, No. 3. P. 343–352.
125. *Reichstein I., Tang Y. C.* Study of $N + \alpha$ System with the Resonating-Group Method // *Nucl. Phys. A.* 1970. V. 158, No. 2. P. 529–545.
126. *Hasegawa A., Nagata S.* Ground State of ${}^6\text{Li}$ // *Prog. Theor. Phys.* 1971. V. 45, No. 6. P. 1786–1807.
127. *Tanabe F., Tohsaki A., Tamagaki R.* α - α Scattering at Intermediate Energies // *Prog. Theor. Phys.* 1975. V. 53, No. 3. P. 677–691.
128. *Cs6t6 A.* Low-Lying Continuum Structures in ${}^8\text{B}$ and ${}^8\text{Li}$ in a Microscopic Model // *Phys. Rev. C.* 2000. V. 61, No. 2. P. 024311.
129. *Myo T. et al.* Resonances and Continuum States in the Breakup of Halo Nuclei // *Nucl. Phys. A.* 2004. V. 738. P. 298–302.
130. *Aoyama S.* Where is the Ground State of ${}^{10}\text{He}$? // *Nucl. Phys. A.* 2003. V. 722. P. c474–c478.
131. *Hellinckx P. et al.* User Experiences with Nuclear Physics Calculations on H_2O and on the BEgrid // *Lecture Notes in Comp. Sci.* 2005. V. 3515. P. 1081–1088.
132. *Tilley D. R., Weller H. R., Hale G. M.* Energy Levels of Light Nuclei $A = 4$ // *Nucl. Phys. A.* 1992. V. 541, No. 1. P. 1–104.
133. *Tombrello T. A.* Phase-Shift Analysis of $T(n, n)T$ // *Phys. Rev.* 1966. V. 143, No. 3. P. 772–774.

134. *Sytcheva A. et al.* Influence of Monopole and Quadrupole Channels on the Cluster Continuum of the Lightest p -Shell Nuclei // *J. Phys. G.* 2006. V. 32, No. 11. P. 2137–2155.
135. *Cs6t6 A., Hale G. M.* S -Matrix and R -Matrix Determination of the Low-Energy ${}^5\text{He}$ and ${}^5\text{Li}$ Resonance Parameters // *Phys. Rev. C.* 1997. V. 55, No. 11. P. 536–539.
136. *Harris F. E.* Expansion Approach to Scattering // *Phys. Rev. Lett.* 1967. V. 19, No. 4. P. 173–175.
137. *Nesbet R. K.* Analysis of the Harris Variational Method in Scattering Theory // *Phys. Rev.* 1968. V. 175, No. 1. P. 134–142.
138. *Ho Y. K.* The Method of Complex Coordinate Rotation and Its Applications to Atomic Collision Processes // *Phys. Rep.* 1983. V. 99, No. 1. P. 1–68.
139. *Typel S. et al.* Microscopic Study of the Low-Energy ${}^3\text{He}({}^3\text{He}, 2p){}^4\text{He}$ and ${}^3\text{H}({}^3\text{H}, 2n){}^4\text{He}$ Fusion Cross Sections // *Z. Phys. A.* 1991. V. 339, No. 2. P. 249–253.
140. *Descouvemont P.* Microscopic Analysis of the ${}^3\text{He}({}^3\text{He}, 2p){}^4\text{He}$ and ${}^3\text{H}({}^3\text{H}, 2n){}^4\text{He}$ Reactions in a Three-Cluster Model // *Phys. Rev. C.* 1994. V. 50, No. 2. P. 2635–2638.
141. *Cs6t6 A., Langanke K.* Large-Space Cluster Model Calculations for the ${}^3\text{He}({}^3\text{He}, 2p){}^4\text{He}$ and ${}^3\text{H}({}^3\text{H}, 2n){}^4\text{He}$ Reactions // *Nucl. Phys. A.* 1999. V. 646, No. 3. P. 387–396.
142. *Varga K., Suzuki Y.* Precise Solution of Few-Body Problems with the Stochastic Variational Method on a Correlated Gaussian Basis // *Phys. Rev. C.* 1995. V. 52, No. 2. P. 2885–2905.
143. *Papp Z., Filikhin I. N., Yakovlev S. L.* Integral Equations for Three-Body Coulombic Resonances // *Few Body Syst.* 2001. V. 30, No. 1–2. P. 31–37.
144. *Серов В. И., Абрамович С. Н., Моркин Л. А.* Измерение полного сечения реакции ${}^3\text{H}(t, 2n)\alpha$ // *АЭ.* 1977. Т. 42, № 1. С. 59–61.
145. *Говоров А. М. и др.* Спектры α -частиц и дифференциальные сечения реакции ${}^3\text{H}(t, 2n)\alpha$ под углом 90° // *ЖЭТФ.* 1961. Т. 41, вып. 3(9). С. 703–707.
146. *Brown R. E., Jarmie N.* Hydrogen Fusion-Energy Reactions // *Rad. Eff.* 1986. V. 92, No. 1–4. P. 45–57.
147. *Agnew H. M. et al.* Measurement of the Cross Section for the Reaction $T + T \rightarrow {}^4\text{He} + 2n + 11.4 \text{ MeV}$ // *Phys. Rev.* 1951. V. 84, No. 4. P. 862–863.
148. *Krauss A. et al.* Astrophysical $S(E)$ Factor of ${}^3\text{He}({}^3\text{He}, 2p){}^4\text{He}$ at Solar Energies // *Nucl. Phys. A.* 1987. V. 467, No. 2. P. 273–290.
149. *Bonetti R. et al.* First Measurement of the ${}^3\text{He}({}^3\text{He}, 2p){}^4\text{He}$ Cross Section Down to the Lower Edge of the Solar Gamow Peak // *Phys. Rev. Lett.* 1999. V. 82, No. 26. P. 5205–5208.
150. *Arpesella C. et al.* The Cross Section of ${}^3\text{He}({}^3\text{He}, 2p){}^4\text{He}$ Measured at Solar Energies // *Phys. Rev. C.* 1998. V. 57. P. 2700–2710.
151. *Dwarakanath M. R., Winkler H.* ${}^3\text{He}({}^3\text{He}, 2p){}^4\text{He}$ Total Cross Section Measurements Below the Coulomb Barrier // *Phys. Rev. C.* 1971. V. 4, No. 5. P. 1532–1540.