

АСТРОФИЗИЧЕСКИЕ S -ФАКТОРЫ РЕАКЦИЙ С ЛЕГКИМИ АТОМНЫМИ ЯДРАМИ

*С. Б. Дубовиченко**

Астрофизический институт им. В. Г. Фесенкова, Алма-Ата, Казахстан

*Ю. Н. Узигов***

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

ВВЕДЕНИЕ	479
МОДЕЛЬ И МЕТОДЫ РАСЧЕТОВ	481
Кластерная модель.	481
Астрофизические S -факторы.	484
Потенциалы и функции.	486
Численные методы.	487
Классификация кластерных состояний.	488
Методы фазового анализа.	490
Обобщенная матричная задача на собственные значения.	491
СИСТЕМА $p^2\text{H}$	494
Потенциалы и фазы рассеяния.	495
Астрофизический S -фактор.	499
СИСТЕМА $p^3\text{H}$	503
Потенциалы и фазы рассеяния.	504
Астрофизический S -фактор.	509
СИСТЕМА $p^6\text{Li}$	512
Дифференциальные сечения.	512
Фазовый анализ.	513
Описание фаз рассеяния в потенциальной модели.	517
Астрофизический S -фактор.	522
СИСТЕМА $p^{12}\text{C}$	524

*E-mail: sergey@dubovichenko.ru

**E-mail: uzikov@numail.jinr.ru

Дифференциальные сечения.	524
Фазовый анализ.	527
Астрофизический S -фактор.	530
СИСТЕМА ${}^4\text{He}{}^{12}\text{C}$	536
Дифференциальные сечения.	537
Фазовый анализ.	537
Описание фаз рассеяния в потенциальной модели.	544
Астрофизический S -фактор.	547
СИСТЕМЫ ${}^3\text{He}{}^4\text{He}$, ${}^3\text{H}{}^4\text{He}$ и ${}^2\text{H}{}^4\text{He}$	550
Потенциалы и фазы рассеяния.	551
Результаты вариационных расчетов.	557
Астрофизический S -фактор.	560
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	565
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	567

АСТРОФИЗИЧЕСКИЕ S -ФАКТОРЫ РЕАКЦИЙ С ЛЕГКИМИ АТОМНЫМИ ЯДРАМИ

С. Б. Дубовиченко*

Астрофизический институт им. В. Г. Фесенкова, Алма-Ата, Казахстан

Ю. Н. Узиков**

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Двухкластерная модель является феноменологическим полумикроскопическим подходом к исследованию ядерных многонуклонных систем. В рамках этой модели взаимодействие нуклонных кластеров описывается локальным двухчастичным потенциалом, определяемым из условия описания данных по рассеянию кластеров и свойств их связанных состояний, а многочастичный характер задачи учитывается приближенно, в терминах двухкластерных связанных состояний, порождаемых этим потенциалом и разделяемых на разрешенные и запрещенные принципом Паули состояния полной системы нуклонов. Существенным является учет зависимости потенциала взаимодействия кластеров от орбитальных схем Юнга, характеризующих свойства перестановочной симметрии в системе нуклонов. На основе данного подхода рассмотрены фотоядерные процессы для систем $p^2\text{H}$, $p^3\text{H}$, $p^6\text{Li}$, $p^{12}\text{C}$, а также $^4\text{He}^{12}\text{C}$, $^3\text{He}^4\text{He}$, $^3\text{H}^4\text{He}$, $^2\text{H}^4\text{He}$ и соответствующие им астрофизические S -факторы. Показано, что этот подход позволяет довольно хорошо описывать имеющиеся данные в области низких энергий, особенно для систем с числом нуклонов $A > 4$ в тех случаях, когда погрешности извлекаемых из экспериментальных данных фаз рассеяния кластеров минимальны.

Two-cluster model constitutes a phenomenological semi-microscopic approach to study many-nucleon systems. Within this model, interaction of the nucleon clusters is described by local potential determined by fit to the scattering data and properties of bound states of these clusters. Many-body character of the problem is taken into account under some approximation, in terms of the two-cluster bound states generated by this interaction potential and separated according to the Pauli principle into allowed or forbidden states of the full system of the nucleons. An important feature of the approach is accounting for a dependence of interaction potential between clusters on the orbital Young scheme, which determines the permutation symmetry of the nucleon system. Photonuclear processes in the $p^2\text{H}$, $p^3\text{H}$, $p^6\text{Li}$, $p^{12}\text{C}$, as well as $^4\text{He}^{12}\text{C}$, $^3\text{He}^4\text{He}$, $^3\text{H}^4\text{He}$, $^2\text{H}^4\text{He}$ systems and corresponding astrophysical S -factors are analyzed in this review on the basis of this approach. It is shown that the approach allows one to describe quite reasonably experimental data available at low energies, especially for systems with number of nucleons $A > 4$ for the cases in which the phase shifts of cluster-cluster scattering are extracted from the data with minimal errors.

PACS: 25.20.-x; 25.20.Dc; 26.35.+c; 26.40.+r; 26.50.+x

*E-mail: sergey@dubovichenko.ru

**E-mail: uzikov@numail.jinr.ru

ВВЕДЕНИЕ

Экспериментальные данные по сечениям ядерных реакций являются основным источником информации о кластерной структуре ядра, свойствах и механизмах взаимодействия между ядрами и их фрагментами. Ядерно-астрофизические экспериментальные исследования реакций осложнены тем, что энергия взаимодействия вещества в звездах очень мала и составляет величину от десятых долей кэВ до десятков кэВ. За редким исключением, в лабораторных условиях при таких энергиях практически отсутствует возможность непосредственного измерения сечений ядерных реакций, необходимых для астрофизических расчетов. Обычно сечения измеряются при более высоких энергиях, а затем полученные результаты экстраполируются в энергетическую область, представляющую интерес для ядерной астрофизики [1]. Однако, как правило, реально выполняемые измерения относятся к довольно высокой энергии (0,2–1 МэВ) по сравнению с энергией в звездах, поэтому простая линейная экстраполяция экспериментальных данных в астрофизическую область энергий не всегда оправдана. Кроме того, коридор экспериментальных ошибок в измеряемых полных сечениях радиационного захвата или астрофизического S -фактора при энергиях 3–300 кэВ в разных системах доходит до 100 %, что сильно обесценивает результаты такой экстраполяции экспериментальных данных.

Поэтому во многих случаях только теоретические предсказания могут восполнить недостающую экспериментальную информацию о характеристиках астрофизических термоядерных реакций. В последние несколько лет ввиду значительного прогресса в киральной эффективной теории адронных взаимодействий стали возможны строгие микроскопические расчеты с реалистическими потенциалами нуклонного взаимодействия. При низких энергиях киральная теория возмущений позволяет на единой основе учитывать как двухнуклонные, так и многонуклонные взаимодействия с контролем точности [2], что дает возможность проводить истинно микроскопические расчеты характеристик малонуклонных систем. Однако, в силу технических сложностей таких расчетов, задача рассеяния ограничена в основном трехнуклонными системами, которые рассматриваются на основе решения уравнений Фаддеева [3]. Четырехнуклонные расчеты в непрерывном спектре при низких энергиях, основанные на уравнениях Фаддеева–Якубовского [4] в форме AGS [5] с реалистическими NN -потенциалами и учетом кулоновского взаимодействия, появились в литературе лишь в последние годы [6, 7]. В этих работах точность расчетов ожидается такой же высокой, как и для трехнуклонных систем, так что отклонение теории от эксперимента можно рассматривать как критический тест для двухнуклонных и многонуклонных сил. Системы с большим числом нуклонов в непрерывном спектре на практике рассматриваются на основе различных микроскопических

методов, таких как метод резонирующих групп [8], no-core shell-model [9] и их комбинации [10], а также вариационных методов с различными базами [11]. Большинство из этих методов сводятся к очень громоздким многоканальным расчетам, точность которых не всегда можно надежно определить.

В этой ситуации при исследовании астрофизических аспектов ядерной физики использование реалистических и сравнительно простых в применении моделей представляется вполне оправданным. Обычно расчеты, проводимые на основе модельных представлений, сравниваются с имеющимися низкоэнергетическими экспериментальными данными, и в результате отбираются подходы, приводящие к наилучшему согласию с экспериментом. Далее на основе отобранных подходов выполняются расчеты в области астрофизических энергий. Полученные при этом результаты по астрофизическим S -факторам, например, реакций радиационного захвата могут рассматриваться как оценка соответствующих значений, которая, в частности, более реалистична, чем простая экстраполяция экспериментальных данных, поскольку используемая теоретическая модель, как правило, имеет вполне разумное микроскопическое обоснование.

В данном обзоре рассмотрены результаты расчетов астрофизических S -факторов в потенциальной кластерной модели (ПКМ) легких атомных ядер. Модель строится на основе предположения, что рассматриваемые ядра имеют двухкластерную структуру. Выбор этой модели обусловлен тем, что во многих легких атомных ядрах вероятность образования нуклонных ассоциаций (кластеров) и степень их обособления друг от друга сравнительно высоки. Это подтверждается многочисленными экспериментальными данными и теоретическими расчетами, полученными за последние пятьдесят лет [12].

Для построения феноменологических потенциалов взаимодействия между кластерами используются результаты фазового анализа экспериментальных данных по дифференциальным сечениям упругого рассеяния соответствующих свободных ядер [13, 14]. При энергиях ниже 1 МэВ в разложении по орбитальным моментам обычно основной вклад дает только S -волна, поэтому данные по дифференциальным сечениям, измеренные при 10–15 углах рассеяния, позволяют выполнить достаточно полный и точный фазовый анализ. Потенциалы взаимодействия в рамках формально двухчастичной задачи рассеяния подбираются из условия наилучшего описания полученных фаз. При этом для рассматриваемой системы нуклонов многочастичный характер проблемы учитывается разделением одночастичных уровней этого потенциала на разрешенные (РС) и запрещенные (ЗС) принципом Паули состояния. Для легчайших атомных ядер ($A < 4$) используется ПКМ, в которой проводится разделение орбитальных состояний по схемам Юнга. Более подробное изложение этого подхода можно найти в работах [15, 16] и, частично, в разд. 1 настоящего обзора.

В используемой модели, в силу ее формально двухчастичного характера, удается сравнительно легко проводить расчеты требуемых ядерных характеристик, например, полных сечений фотоядерных реакций и астрофизических S -факторов практически при любых, самых низких энергиях.

1. МОДЕЛЬ И МЕТОДЫ РАСЧЕТОВ

1.1. Кластерная модель. Рассматриваемая потенциальная кластерная модель очень проста в использовании, поскольку технически сводится к решению проблемы двух тел или, что эквивалентно, к проблеме одного тела в поле силового центра. Поэтому может возникнуть возражение, что эта модель совершенно неадекватна проблеме многих тел, каковой и является задача описания свойств системы, состоящей из A нуклонов. В связи с этим следует заметить, что одной из успешных моделей в теории атомного ядра является модель ядерных оболочек, которая математически представляет собой именно проблему одного тела в поле силового центра. Физические основания рассматриваемой здесь потенциальной кластерной модели восходят к оболочечной модели или, точнее, к удивительной связи между моделью оболочек и кластерной моделью, которая в литературе встречается также под названием модели нуклонных ассоциаций (МНА) [12].

В модели нуклонных ассоциаций волновая функция (ВФ) ядра, состоящего из двух кластеров с числом нуклонов A_1 и A_2 ($A = A_1 + A_2$), имеет вид антисимметризованного произведения полностью антисимметричных внутренних волновых функций кластеров $\Psi(1, \dots, A_1) = \Psi(R_1)$ и $\Psi(A_1 + 1, \dots, A) = \Psi(R_2)$, умноженных на волновую функцию их относительного движения $\Phi(R = R_1 - R_2)$:

$$\Psi = \hat{A}\{\Psi(R_1)\Psi(R_2)\Phi(R)\}, \quad (1)$$

где \hat{A} — оператор антисимметризации по отношению к перестановкам нуклонов из разных кластеров.

Обычно кластерные волновые функции выбирают так, чтобы они соответствовали (в рамках оболочечной модели) основным состояниям ядер, состоящих из A_1 и A_2 нуклонов. Эти оболочечные волновые функции характеризуются специфическими квантовыми числами, включая схемы Юнга $\{f\}$, которые определяют перестановочную симметрию пространственной части волновой функции. Для основных состояний ядер-кластеров схемы Юнга отвечают максимально возможной симметрии с наибольшим числом клеток в строках (≤ 4). По общему правилу для разложения произведения неприводимых представлений некоторой группы симметрии в ряд Клебша–Гордона этой группы схема Юнга рассматриваемого ядра A должна содержаться в прямом внешнем произведении схем Юнга кластеров $\{f_1\} \times \{f_2\}$.

Замечательным является следующий факт: если для кластерных волновых функций используется оболочечная модель с осцилляторным потенциалом в качестве центрального поля, то при равенстве осцилляторных параметров обоих кластеров $\hbar\omega_1$ и $\hbar\omega_2$ соответствующему параметру волновой функции относительного движения $\hbar\omega_3$ ($\hbar\omega_1 = \hbar\omega_2 = \hbar\omega_3$) исходная кластерная волновая функция (1) точно совпадает с волновой функцией трансляционно-инвариантной модели оболочек (ТИМО) для основного состояния ядра из A нуклонов [17] и для $A \leq 16$ имеет оболочечную конфигурацию $s^4 p^{A-4}$. Это означает, что нет резкой границы между кластерной и оболочечной моделями, и поэтому некоторые свойства ядерных оболочек можно использовать для лучшего понимания свойств кластерных ядер.

При различных осцилляторных параметрах указанное равенство, конечно, нарушается. Однако отмеченное соответствие между кластерными и оболочечными волновыми функциями дает основание использовать вытекающие из него определенные следствия и вне той области, в которой это соответствие является строгим, т.е. вне осцилляторной оболочечной модели. В рассматриваемой в настоящей работе модели наиболее важным является правило подсчета числа узлов волновой функции относительного движения кластеров в основном состоянии ядра. В осцилляторной оболочечной модели для ядер $1p$ -оболочки в системе из $A \leq 16$ нуклонов имеется $A - 4$ осцилляторных квантов возбуждения. В полной волновой функции ядра имеющиеся осцилляторные кванты могут перераспределяться произвольным образом между состояниями внутреннего движения кластеров (образуя возбужденные кластеры) и состоянием их относительного движения. Для основных состояний кластеров, имеющих минимальное число квантов возбуждения, совместимое с принципом Паули при заданном числе нуклонов A_1 или A_2 , число квантов возбуждения N , приходящихся на относительное движение, максимально и определяется следующим соотношением:

$$N = (A - 4) - N_1 - N_2. \quad (2)$$

Здесь $N_1 = A_1 - 4$, если $A_1 \geq 4$, и $N_1 = 0$, если $A_1 \leq 4$, и аналогично для N_2 . Численное значение N определяет число узлов волновой функции относительного движения кластеров, которое также зависит от орбитального момента относительного движения L . Для гармонического осциллятора имеем $L = N, N - 2, \dots, 0$ или 1 (в зависимости от четности N). По осцилляторному правилу (2), например, для ядра ${}^6\text{Li}$ в кластерной ${}^2\text{H}^4\text{He}$ -модели находим $N = 2$. Поэтому число узлов (осцилляторной) волновой функции относительного движения невозбужденных кластеров ($N_1 = N_2 = 0$) для $N = 2$ и $L = 0$ равно $\nu = 1$. Волновая функция относительного движения этих же кластеров в состоянии с $N = 2$ и $L = 2$ не имеет узлов.

Следующий шаг состоит в том, что это осцилляторное правило переносится на реалистическую кластерную модель ядра, в которой кластеры

обособлены, т. е. осцилляторные параметры кластеров $\hbar\omega_1$ и $\hbar\omega_2$ численно больше, чем осцилляторный параметр волновой функции относительного движения $\hbar\omega_3$. Если при $\hbar\omega_1 = \hbar\omega_2 = \hbar\omega_3$ убрать оператор-антисимметризатор в (1), то эквивалентность данной функции и функции оболочечной будет разрушена. Однако обособление кластеров, имеющее место в реальных кластерных ядрах, позволяет в первом приближении пренебречь действием оператора антисимметризации в формуле (1), не отменяя осцилляторного правила (2) для основных состояний кластеров. Принимая это правило для неосцилляторных волновых функций, находим, что реалистический (неосцилляторный) потенциал взаимодействия между кластерами в соответствующей парциальной волне L должен быть достаточно глубоким, чтобы в нем при решении уравнения Шредингера помимо «основного» безузловое состояние и заданного состояния с числом узлов ν «поместились» также все уровни с меньшим числом узлов.

Этот вывод приводит к понятию *запрещенных принципом Паули состояний* в кластерной модели: все уровни с числом узлов меньше ν , появляющиеся в задаче двух тел, описывающей относительное движение кластеров, соответствуют числу осцилляторных квантов, которое меньше минимально допустимого принципом Паули числа квантов N из (2), и поэтому полные волновые функции (1) с такими функциями относительного движения обращаются в ноль при антисимметризации по всем A нуклонам. Основное (т. е. нижайшее по энергии) наблюдаемое состояние этой кластерной системы описывается волновой функцией с ненулевым, в общем случае, числом узлов, определяемым из соотношения (2). В приведенном выше примере ядра ${}^6\text{Li}$ ${}^4\text{He}$ - и ${}^2\text{H}$ -кластеры в формуле (1) находятся в состояниях со схемами Юнга $\{4\}$ и $\{2\}$ соответственно. Внешнее произведение этих схем Юнга дает $\{4\} \times \{2\} = \{6\} + \{51\} + \{42\}$. Схемы Юнга $\{6\}$ и $\{51\}$ соответствуют оболочечным конфигурациям s^6 и s^5p^1 , которые запрещены принципом Паули. Схема Юнга $\{42\}$ соответствует основному состоянию ядра и разрешенной конфигурации s^4p^2 .

Таким образом, представление о запрещенных принципом Паули состояниях позволяет учесть многочастичный характер задачи в терминах потенциала взаимодействия между кластерами. При этом на практике потенциал взаимодействия выбирается так, чтобы описать экспериментальные данные (фазы рассеяния) по упругому рассеянию кластеров в соответствующей L -й парциальной волне и, предпочтительно, в состоянии с одной определенной схемой Юнга $[f]$ для пространственной части волновой функции A нуклонов. Поскольку результаты фазового анализа, как правило, не позволяют восстановить потенциал взаимодействия однозначно, то дополнительным ограничением на потенциал является требование воспроизвести энергию связи ядра в соответствующем кластерном канале и некоторые другие статические ядерные свойства. При этом массы кластеров отождествляются с массами соот-

ветствующих свободных ядер. Это дополнительное требование, очевидно, является идеализацией, так как предполагает, что в основном состоянии имеется 100 %-я кластеризация ядра. Фактически успех данной потенциальной модели при описании системы из A нуклонов в связанном состоянии определяется тем, насколько реально велика кластеризация основного состояния.

Примечательно, что модель не требует знания деталей NN -взаимодействия. В этой модели NN -взаимодействие проявляет себя тем, что, как и в оболочечной модели, создает среднее ядерное поле и, кроме того, обеспечивает кластеризацию ядра. Остальную «работу» по формированию необходимого числа узлов волновой функции относительного движения кластеров производит принцип Паули. Поэтому следует ожидать, что область применимости рассматриваемой модели ограничена ядрами с ярко выраженными кластерными свойствами. Однако некоторые ядерные характеристики отдельных ядер могут быть обусловлены преимущественно одним определенным кластерным каналом при малом вкладе других возможных кластерных конфигураций. В этом случае используемая одноканальная кластерная модель позволяет идентифицировать доминирующий кластерный канал и выделить те свойства ядерной системы, которые им обусловлены.

1.2. Астрофизические S -факторы. Астрофизические S -факторы характеризуют поведение сечения ядерных реакций при энергии, стремящейся к нулю, и определяются следующим образом [18]:

$$S(NJ, J_f) = \sigma(NJ, J_f) E_{\text{cm}} \exp\left(\frac{31,335 Z_1 Z_2 \sqrt{\mu}}{\sqrt{E_{\text{cm}}}}\right), \quad (3)$$

где σ — полное сечение процесса радиационного захвата (в барнах); E_{cm} — энергия частиц (в кэВ) в системе центра масс; μ — приведенная масса частиц входного канала (в а. е. м.); $Z_{1,2}$ — заряды частиц (в единицах элементарного заряда) и N — это E - или M -переходы J -й мультипольности на конечное J_f -состояние ядра. Численный коэффициент 31,335 получен на основе современных значений фундаментальных констант [19].

Полные сечения реакций радиационного захвата в кластерной модели приведены, например, в [20, 21] и записываются как

$$\sigma(E) = \sum_{J, J_f} \sigma(NJ, J_f), \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \sigma_c(NJ, J_f) = & \frac{8\pi K e^2}{\hbar^2 q^3} \frac{\mu}{(2S_1 + 1)(2S_2 + 1)} \frac{J + 1}{J[(2J + 1)!!]^2} A_J^2(NJ, K) \times \\ & \times \sum_{L_i, J_i} P_J^2(NJ, J_f, J_i) I_J^2(J_f, J_i), \end{aligned}$$

где для электрических орбитальных $EJ(L)$ -переходов ($S_i = S_f = S$)

$$P_J^2(EJ, J_f, J_i) = \delta_{S_i S_f} [(2J+1)(2L_i+1)(2J_i+1)(2J_f+1)] \times \\ \times (L_i 0 J 0 | L_f 0)^2 \left\{ \begin{matrix} L_i & S & J_i \\ J_f & J & L_f \end{matrix} \right\}^2, \quad (5)$$

$$A_J(EJ, K) = K^J \mu^J \left(\frac{Z_1}{m_1^J} + (-1)^J \frac{Z_2}{m_2^J} \right),$$

$$I_J(J_f, J_i) = \langle \chi_f | R^J | \chi_i \rangle.$$

Здесь q — волновое число частиц входного канала; L_f, L_i, J_f, J_i — моменты частиц входного (i) и выходного (f) канала; S_1, S_2 — спины частиц; m_1, m_2, Z_1, Z_2 — массы и заряды частиц входного канала; K, J — волновое число γ -кванта в выходном канале и мультипольность перехода; I_J — интеграл по волновым функциям начального χ_i и конечного χ_f состояния как функциям относительного движения кластеров с межкластерным расстоянием R .

В приведенные выше выражения для полных сечений иногда включают спектроскопический фактор S_{J_f} конечного состояния ядра, но в используемой нами потенциальной кластерной модели он равен единице, так же как принято в работе [20].

Для рассмотрения магнитного $M1(S)$ -перехода, обусловленного спиновой частью магнитного оператора, используя выражения из [22], можно получить ($S_i = S_f = S, L_i = L_f = L$)

$$P_1^2(M1, J_f, J_i) = \delta_{S_i S_f} \delta_{L_i L_f} [S(S+1)(2S+1)(2J_i+1)(2J_f+1)] \times \\ \times \left\{ \begin{matrix} S & L & J_i \\ J_f & 1 & S \end{matrix} \right\}^2, \quad (6)$$

$$A_1(M1, K) = i \frac{e\hbar}{m_0 c} K \sqrt{3} \left[\mu_1 \frac{m_2}{m} - \mu_2 \frac{m_1}{m} \right],$$

$$I_J(J_f, J_i) = \langle \chi_f | R^{J-1} | \chi_i \rangle, \quad J = 1,$$

где m — масса ядра; μ_1 и μ_2 — магнитные моменты кластеров, которые можно взять из работы [23] и, например, $\mu_{2H} = 0,857\mu_0$ и $\mu_p = 2,793\mu_0$; μ_0 — ядерный магнетон.

Выражение в квадратных скобках (6) для $A_1(M1, K)$ получено в предположении, что в общей форме для спиновой части магнитного оператора [24]

$$W_{Jm}(S) = i \frac{e\hbar}{m_0 c} K^J \sum_i \mu_i \hat{\mathbf{S}}_i \cdot \nabla_i (r_i^J Y_{Jm}(\Omega_i))$$

проводится суммирование по r_i , т.е. по координатам центра масс кластеров, до действия на выражение в круглой скобке $(r_i^J Y_{Jm}(\Omega_i))$ оператора ∇ , которое приводит к понижению степени r_i [22]:

$$\nabla_i(r_i^J Y_{Jm}(\Omega_i)) = \sqrt{J(2J+1)} r_i^{J-1} Y_{Jm}^{J-1}(\Omega_i).$$

В данном случае $r_1 = m_2/mR$ и $r_2 = -m_1/mR$, где R — относительное межкластерное расстояние, r_1 и r_2 — расстояния от общего центра масс до центра масс каждого кластера.

1.3. Потенциалы и функции. Межкластерные потенциалы взаимодействия для каждой парциальной волны, т.е. для заданного орбитального момента L , с точечным кулоновским членом представлялись в виде

$$V(R) = V_0 \exp(-\alpha R^2) + V_1 \exp(-\gamma R) \quad (7)$$

или

$$V(R) = V_0 \exp(-\alpha R^2). \quad (8)$$

Здесь V_1 , V_0 , α , γ — параметры потенциала, которые находятся из условия наилучшего описания фаз упругого рассеяния, извлекаемых в процессе фазового анализа из экспериментальных данных.

В некоторых случаях в кулоновский потенциал вводят кулоновский радиус R_c , и тогда кулоновская часть принимает вид

$$V_c(r) = \frac{2\mu}{\hbar^2} \begin{cases} \frac{Z_1 Z_2}{r}, & r > R_c, \\ \frac{Z_1 Z_2 (3 - r^2/R_c^2)}{2R_c}, & r < R_c. \end{cases}$$

В вариационном методе (ВМ) использовалось разложение ВФ относительного движения кластеров по неортогональному гауссову базису и проводилось независимое варьирование параметров [21]

$$\Phi_L(R) = \frac{\chi_L(R)}{R} = R^L \sum_i C_i \exp(-\beta_i R^2), \quad (9)$$

где β — вариационные параметры и C — коэффициенты разложения [25].

Поведение волновой функции связанных состояний (СС), в том числе основных состояний (ОС), ядер в кластерных каналах на больших расстояниях характеризуется асимптотической константой C_W , имеющей форму [26]

$$\chi_L(R) = \sqrt{2k_0} C_W W_{-\eta L + 1/2}(2k_0 R), \quad (10)$$

где $\chi_L(R)$ — численная волновая функция связанного состояния, получаемая из решения радиального уравнения Шредингера и нормированная на

единицу; $W_{\eta L}$ — функция Уиттекера связанного состояния, определяющая асимптотическое поведение ВФ и являющаяся решением того же уравнения без ядерного потенциала, т. е. на больших расстояниях R ; k_0 — волновое число, обусловленное канальной энергией связи систем; η — кулоновский параметр; L — орбитальный момент связанного состояния.

Среднеквадратичный массовый радиус ядра в системе двух кластеров определялся в виде

$$R_m^2 = \frac{m_1}{m} \langle r_m^2 \rangle_1 + \frac{m_2}{m} \langle r_m^2 \rangle_2 + \frac{m_1 m_2}{m^2} I_2,$$

где $\langle r_m^2 \rangle_{1,2}$ — квадраты массовых радиусов кластеров, в качестве которых принимаются радиусы соответствующих ядер в свободном состоянии; I_2 — интеграл вида

$$I_2 = \langle \chi_L(R) | R^2 | \chi_L(R) \rangle$$

от межкластерного расстояния R по радиальным ВФ $\chi_L(R)$ относительного движения кластеров, нормированных на единицу, в ОС ядра с орбитальным моментом L .

Среднеквадратичный зарядовый радиус записывался в форме

$$R_z^2 = \frac{Z_1}{Z} \langle r_z^2 \rangle_1 + \frac{Z_2}{Z} \langle r_z^2 \rangle_2 + \frac{(Z_2 m_1^2 + Z_1 m_2^2)}{Z m^2} I_2,$$

где $\langle r_z^2 \rangle_{1,2}$ — квадраты зарядовых радиусов кластеров, в качестве которых также принимаются радиусы соответствующих ядер в свободном состоянии; $Z = Z_1 + Z_2$; I_2 — приведенный выше интеграл.

Волновая функция $\chi_L(R)$ является решением радиального уравнения Шредингера вида

$$\chi_L''(R) + \left[k_0^2 - V(R) - V_c(R) - \frac{L(L+1)}{R^2} \right] \chi_L(R) = 0,$$

где $V(R)$ — межкластерный потенциал (7) или (8) (в Φ_m^{-2}); $V_c(R)$ — кулоновский потенциал; k_0 — волновое число, определяемое энергией E взаимодействия частиц $k_0^2 = 2\mu E/\hbar^2$.

1.4. Численные методы. Конечно-разностные методы (КРМ), которые являются модификацией методов [27] и включают учет кулоновских взаимодействий, вариационные методы решения уравнения Шредингера и другие вычислительные методы, используемые в данных расчетах ядерных характеристик, подробно описаны в [25]. Поэтому только вкратце перечислим здесь основные моменты, связанные с общими и численными методами вычислений.

Во всех расчетах, полученных конечно-разностным и вариационным методами [21], в конце области стабилизации асимптотической константы, т. е.

примерно 10–20 Фм, численная или вариационная волновая функция заменялась функцией Уиттекера (10) с учетом найденной ранее асимптотической константы. Численное интегрирование в любых матричных элементах проводилось на интервале от 0 до 25–30 Фм. При этом был использован метод Симпсона [28], который дает хорошие результаты для плавных и слабо осциллирующих функций при задании нескольких сотен шагов на период [25].

Для выполнения настоящих расчетов были переписаны и модифицированы наши компьютерные программы, основанные на конечно-разностном методе [21, 25], для расчета полных сечений радиационного захвата и характеристик связанных состояний ядер с языка TurboBasic на более современный язык Fortran-90, имеющий заметно больше возможностей. Это позволило существенно поднять точность всех вычислений, в том числе энергии связи ядра в двухчастичном канале.

Теперь, например, точность вычисления кулоновских волновых функций для процессов рассеяния, контролируемая по величине вронскиана, и точность поиска корня детерминанта в КРМ [25], определяющая точность поиска энергии связи, находятся на уровне 10^{-14} – 10^{-20} , а реальная абсолютная точность определения энергии связи в конечно-разностном методе для разных двухчастичных систем составила 10^{-6} – 10^{-8} МэВ. Для вычисления самих кулоновских функций рассеяния использовалось быстро сходящееся представление в виде цепных дробей [29], позволяющее получить их значения с высокой степенью точности и в широком диапазоне переменных с малыми затратами компьютерного времени [30].

Была переписана на Fortran и несколько модифицирована вариационная программа для нахождения вариационных ВФ и энергий связи ядер в кластерных каналах, что позволило существенно поднять скорость поиска минимума многопараметрического функционала, который определяет энергию связи двухчастичных систем во всех рассматриваемых ядрах [25]. Модифицированы также аналогичные программы, основанные на многопараметрическом вариационном методе, для выполнения фазового анализа по дифференциальным сечениям упругого рассеяния ядерных частиц.

Во всех расчетах задавались точные значения масс частиц [23], а константа \hbar^2/m_0 принималась равной 41,4686 МэВ·Фм². Кулоновский параметр $\eta = \mu Z_1 Z_2 e^2 / (q \hbar^2)$ представлялся в виде $\eta = 3,44476 \cdot 10^{-2} Z_1 Z_2 \mu / q$, где q — волновое число, определяемое энергией взаимодействующих частиц во входном канале в Фм⁻¹. Кулоновский потенциал при $R_c = 0$ записывался в форме $V_c(\text{МэВ}) = 1,439975 Z_1 Z_2 / r$, где r — расстояние между частицами входного канала в Фм.

1.5. Классификация кластерных состояний. Состояния с минимальным спином в процессах рассеяния некоторых легких атомных ядер оказываются смешанными по орбитальным схемам Юнга, например, дублетное состояние $p^2\text{H}$ [15] смешано по схемам $\{3\}$ и $\{21\}$. В то же время связанное со-

стояние ядра ${}^3\text{He}$ в дублетном $p^2\text{H}$ -канале является чистым со схемой Юнга $\{3\}$ [15].

Напомним классификацию состояний, например, $p^2\text{H}$ -системы по орбитальным и спин-изоспиновым схемам Юнга. В общем случае возможная орбитальная схема Юнга $\{f\}$ некоторого ядра $A(\{f\})$, состоящего из двух частей $A_1(\{f_1\}) + A_2(\{f_2\})$, является прямым внешним произведением орбитальных схем Юнга этих частей $\{f\}_L = \{f_1\}_L \times \{f_2\}_L$ и определяется по теореме Литлвуда [15]. Поэтому возможными орбитальными схемами Юнга $p^2\text{H}$ -системы, когда для ядра ${}^2\text{H}$ используется схема $\{2\}$, оказываются симметрии $\{3\}_L$ и $\{21\}_L$.

Спин-изоспиновые схемы являются прямым внутренним произведением спиновых и изоспиновых схем Юнга ядра из A нуклонов $\{f\}_{ST} = \{f\}_S \otimes \{f\}_T$, и для системы с числом частиц не более восьми приведены в работе [31]. Для любого из этих моментов (спин или изоспин) соответствующая схема ядра, состоящего из A нуклонов, каждый из которых имеет момент равный $1/2$, строится следующим образом. В клетках первой строки указывается число нуклонов, которые имеют моменты, направленные в одну сторону, например, вверх. В клетках второй строки, если она требуется, указывается число нуклонов с моментами, направленными в другую сторону, например, вниз. Суммарное число клеток в обеих строках равно числу нуклонов в ядре. Моменты нуклонов первой строки компенсируются противоположно направленными моментами во второй строке, и в результате полный момент этих нуклонов равен нулю. Сумма моментов нуклонов первой строки, которые не скомпенсированы моментами нуклонов из второй строки, дает значение полного момента всей системы.

В данном случае для $p^2\text{H}$ -системы при изоспине $T = 1/2$ имеем $\{21\}_T$, для спинового состояния с $S = 1/2$ также получается $\{21\}_S$, а при $S = 3/2$ — схема вида $\{3\}_S$. При построении спин-изоспиновой схемы Юнга для квартетного спинового состояния имеем $\{3\}_S \otimes \{21\}_T = \{21\}_{ST}$, а для дублетного состояния $\{21\}_S \otimes \{21\}_T = \{111\}_{ST} + \{21\}_{ST} + \{3\}_{ST}$ [31].

Полная схема Юнга ядра определяется аналогично, как прямое внутреннее произведение орбитальной и спин-изоспиновой схемы $\{f\} = \{f\}_L \otimes \{f\}_{ST}$. Полная волновая функция системы при антисимметризации не обращается тождественно в ноль, только если содержит антисимметричную компоненту $\{1^N\}$, что реализуется при перемножении сопряженных $\{f\}_L$ и $\{f\}_{ST}$. Поэтому схемы $\{f\}_L$, сопряженные к $\{f\}_{ST}$, являются разрешенными в данном канале, а все остальные симметрии запрещены, так как приводят к нулевой полной волновой функции системы частиц.

Отсюда видно, что для $p^2\text{H}$ -системы в квартетном канале разрешена только орбитальная волновая функция с симметрией $\{21\}_L$, а функция с $\{3\}_L$ оказывается запрещенной, так как произведение $\{21\}_{ST} \otimes \{3\}_L$ не приводит к антисимметричной компоненте волновой функции. В то же время в

дублетном канале имеем $\{111\}_{ST} \otimes \{3\}_L = \{111\}$ и $\{21\}_{ST} \otimes \{21\}_L \sim \{111\}$ и в обоих случаях получаем антисимметричную схему. Поэтому дублетное состояние оказывается смешанным по орбитальным схемам Юнга.

В работе [15] предложен метод разделения таких состояний по схемам Юнга и показано, что смешанная фаза рассеяния может быть представлена в виде полусуммы чистых фаз $\{f_1\}$ и $\{f_2\}$

$$\delta^{\{f_1\}+\{f_2\}} = \frac{1}{2}(\delta^{\{f_1\}} + \delta^{\{f_2\}}). \quad (11)$$

В данном случае считается, что $\{f_1\} = \{21\}$ и $\{f_2\} = \{3\}$ и дублетные фазы, извлекаемые из эксперимента, смешаны по этим двум схемам. Далее предполагается, что квартетная фаза рассеяния, чистая по орбитальной схеме Юнга $\{21\}$, может быть отождествлена с чистой дублетной фазой p^2 Н-рассеяния, соответствующей той же схеме Юнга. Тогда из (11) можно найти и чистую со схемой $\{3\}$ дублетную p^2 Н-фазу, а по ней построить чистый по схемам Юнга потенциал взаимодействия, который уже можно применять для описания характеристик связанного состояния. Аналогичные соотношения существуют и для других легчайших ядерных систем, например, p^3 Н, 2 Н 2 Н, 2 Н 3 Не, p^6 Li и т. д. [21].

1.6. Методы фазового анализа. Зная экспериментальные дифференциальные сечения упругого рассеяния, всегда можно найти некоторый набор параметров, называемых фазами рассеяния $\delta_{S,L}^J$, позволяющий с определенной точностью описать поведение этих сечений. Качество описания экспериментальных данных на основе некоторой теоретической функции (функционала нескольких переменных) можно оценить по методу χ^2 , который представляется в виде [32]

$$\chi^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left[\frac{\sigma_i^t(\theta) - \sigma_i^e(\theta)}{\Delta\sigma_i^e(\theta)} \right]^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \chi_i^2, \quad (12)$$

где σ^e и σ^t — экспериментальное и теоретическое, т. е. рассчитанное при некоторых заданных значениях фаз $\delta_{S,L}^J$ -рассеяния, сечения упругого рассеяния ядерных частиц для i -го угла рассеяния; $\Delta\sigma^e$ — ошибка экспериментальных сечений для этого угла и N — число измерений.

Чем меньше величина χ^2 , тем лучше описание экспериментальных данных на основе полученного набора фаз рассеяния. Выражения, описывающие дифференциальные сечения, являются разложением некоторого функционала $d\sigma(\theta)/d\Omega$ в числовой ряд, и нужно найти такие вариационные параметры разложения $\delta_{S,L}^J$, которые наилучшим образом описывают его поведение. Поскольку выражения для дифференциальных сечений обычно являются точными [32], то при увеличении членов разложения L до бесконечности величина χ^2 должна стремиться к нулю. Именно этот критерий использовался

для выбора определенного набора фаз, приводящего к минимуму χ^2 , который мог бы претендовать на роль глобального минимума данной многопараметрической вариационной задачи [33].

Таким образом, например, в $p^6\text{Li}$ -системе для поиска фаз рассеяния по экспериментальным сечениям выполнялась процедура минимизации функционала χ^2 как функции $2L + 2$ переменных, каждая из которых является фазой δ_L определенной парциальной волны без спин-орбитального расщепления. Для решения этой задачи ищется минимум χ^2 в некоторой ограниченной области значений этих переменных. Но и в этой области можно найти множество локальных минимумов χ^2 с величиной порядка единицы. Выбор наименьшего из них позволяет надеяться, что он будет соответствовать глобальному минимуму, который является решением такой вариационной задачи. Кроме того, величина этого минимума должна сравнительно плавно уменьшаться с увеличением числа парциальных волн L .

Изложенные выше критерии и методы использовались нами для выполнения фазового анализа в системах $p^6\text{Li}$, $p^{12}\text{C}$ и $^4\text{He}^{12}\text{C}$ при низких энергиях, которые важны для астрофизических расчетов. Выражения для нахождения дифференциальных сечений при фазовом анализе для указанных выше систем приведены в соответствующих разделах.

1.7. Обобщенная матричная задача на собственные значения. Остановимся вначале на стандартном методе решения обобщенной матричной задачи для уравнения Шредингера, которая возникает при использовании неортогонального вариационного метода, а затем рассмотрим ее модификацию, которую удобно применять для решения этой задачи при численных расчетах на компьютере [25, 34].

Для определения спектра собственных значений энергии и собственных волновых функций в вариационном методе, при разложении ВФ по неортогональному гауссову базису [35], решается обобщенная матричная задача на собственные значения [36]

$$(H - EL)C = 0, \quad (13)$$

где H — симметричная матрица гамильтониана; L — матрица интегралов перекрытия, которая при ортогональном базисе превращается в единичную матрицу I ; E — собственные значения энергии и C — собственные векторы задачи.

Представляя матрицу L в виде произведения нижней N и верхней V треугольных матриц [36], после несложных преобразований переходим к обычной задаче на собственные значения

$$H'C' = EIC',$$

где

$$H' = N^{-1}HV^{-1}, \quad C' = VC,$$

а V^{-1} и N^{-1} — обратные матрицы по отношению к V и N соответственно.

Далее находим матрицы N и V , выполняя триангуляризацию симметричной матрицы L [37], например, методом Халецкого [36]. Затем определяем обратные матрицы N^{-1} и V^{-1} , например, методом Гаусса и вычисляем элементы матрицы $H' = N^{-1}HV^{-1}$. Находим полную диагональную по E матрицу $(H' - EI)$ и вычисляем ее детерминант $\det(H' - EI)$ при некоторой энергии E . Та энергия, которая приводит к нулю детерминанта, является собственной энергией задачи, а соответствующие ей векторы C' — собственные векторы. Зная C' , не трудно найти и собственные векторы исходной задачи C , поскольку матрица V^{-1} уже известна. Описанный метод сведения обобщенной матричной задачи к обычной матричной задаче называется методом ортогонализации по Шмидту [38].

В двухтельных задачах для легких атомных ядер с одним вариационным параметром β_i в вариационной ВФ (9) такой метод достаточно устойчив и позволяет получать разумные результаты. Но в трехтельной ядерной системе, когда вариационная ВФ представляется в виде [21]

$$\Phi_{l,\lambda}(r, R) = r^\lambda R^l \sum_i C_i \exp(-\delta_i r^2 - \beta_i R^2) = \sum_i C_i \Phi_i,$$

при некоторых значениях двух вариационных параметров δ_i и β_i , метод нахождения обратных матриц иногда приводит к неустойчивости и переполнению при работе компьютерной программы [39], что представляет определенную проблему для решения задач такого типа.

Поэтому можно предложить альтернативный метод численного решения обобщенной матричной задачи на собственные значения, свободный от указанных трудностей и имеющий большую скорость счета на компьютере. А именно, исходное матричное уравнение (13) есть однородная система линейных уравнений и имеет нетривиальные решения, только если детерминант $\det(H - EL)$ равен нулю. Для численных методов, реализуемых на компьютере, не обязательно разлагать матрицу L на треугольные матрицы и находить новую матрицу H' и новые векторы C' , определяя обратные матрицы, как это было описано выше. Можно сразу разлагать на треугольные недиагональную, симметричную матрицу $(H - EL)$ и численными методами в заданной области искать энергии, которые приводят к нулю ее детерминанта, т. е. являются собственными энергиями. В такой задаче не стоит условие поиска всех собственных значений и собственных функций — требуется найти только 1–2 собственных значения для энергии системы и соответствующие им собственные ВФ.

Поэтому методом, например, Халецкого исходная матрица $(H - EL)$ разлагается на две треугольные, причем в главной диагонали верхней треугольной матрицы V стоят единицы

$$A = H - EL = NV$$

и вычисляется ее детерминант при $\det(V) = 1$ [36]

$$D(E) = \det(A) = \det(N) \det(V) = \det(N) = \prod_{i=1}^m n_{ii},$$

по нулю которого ищется нужное собственное значение энергии. Здесь m — размерность матриц, а детерминант треугольной матрицы N равен произведению ее диагональных элементов.

Таким образом, имеем довольно простую задачу поиска нуля функционала одной переменной

$$D(E) = 0,$$

решение которой не представляет большой сложности и может быть выполнено с любой точностью, например, методом половинного деления.

В результате мы избавляемся от необходимости искать две обратные к V и N матрицы, что заметно увеличивает скорость счета, и выполнять несколько матричных умножений, чтобы вначале получить новую матрицу H' , а затем конечную матрицу собственных векторов C .

Для оценки точности решения, т. е. точности разложения исходной матрицы на две треугольные, можно использовать невязки [40] для матричных элементов. После разложения матрицы A на две треугольные вычисляется матрица невязок

$$T = S - A,$$

т. е. разность по всем элементам исходной матрицы A и приближенной матрицы

$$S = NV,$$

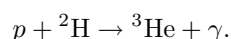
где V и N — найденные численные треугольные матрицы.

В результате матрица невязок T дает отклонение приближенной величины S , найденной численными методами, от истинного значения каждого элемента исходной матрицы A . Во всех приведенных далее расчетах максимальное значение любого элемента матрицы T не превышало величину 10^{-10} .

Такой метод, который представляется вполне очевидным в численном исполнении, позволил получить хорошую устойчивость алгоритма решения рассматриваемой задачи и не приводит к переполнению при работе компьютерных программ, поскольку он не требует определения обратных к V и N матриц [41]. Кроме того, и в трехтельном, и в двухтельном варианте задачи рассмотренный метод позволяет заметно сократить счетное время и повысить точность вычислений, так как не требуется определять обратные матрицы и выполнять с ними несколько лишних матричных умножений [42].

2. СИСТЕМА $p^2\text{H}$

Рассмотрим радиационный захват

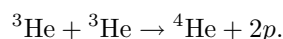


Эта реакция входит в протонный цикл и дает существенный вклад в энергетический выход термоядерных реакций [43], которые обуславливают горение Солнца и звезд нашей Вселенной. Взаимодействующие ядерные частицы протонного цикла имеют минимальную величину потенциального барьера. Поэтому протонный цикл является первой цепочкой ядерных реакций, которые могут происходить при самых низких энергиях и звездных температурах.

В этой цепочке процесс радиационного $p^2\text{H}$ -захвата является основным для перехода от первичного слияния протонов



до одной из финальных в p - p -цепочке реакций захвата двух ядер ${}^3\text{He}$ [44]:



Детальное изучение реакции радиационного $p^2\text{H}$ -захвата с теоретической и экспериментальной точки зрения представляет существенный интерес не только для ядерной астрофизики, но и для всей ядерной физики сверхнизких энергий и легчайших атомных ядер [45]. Поэтому продолжают экспериментальные исследования этого процесса, и сравнительно недавно, благодаря европейскому проекту LUNA, появились новые экспериментальные данные при энергиях до 2,5 кэВ. Такие энергии могут иметь место в термоядерных реакциях на Солнце и звездах.

Следует отметить, что легчайшие ядра с $A \leq 4$, строго говоря, не являются ни оболочечными, ни кластерными. Это следует из микроскопических расчетов этих ядер с реалистическими NN -потенциалами [46]. Например, в ядре ${}^3\text{He}$ наряду с $p^2\text{H}$ кластерной конфигурацией представлена $p^2\text{H}^*$ -конфигурация, где ${}^2\text{H}^*$ — синглетный по спину дейтрон (np -пара в 1S_0 -состоянии), причем спектроскопические факторы для обычного и синглетного дейтронов приблизительно равны $S = 1,5$ [47, 48]. Канал с синглетным дейтроном отчетливо проявляется в упругом $p^3\text{He}$ -рассеянии назад при энергиях несколько сотен МэВ как в чисто нуклонном механизме рассеяния [47], так и в процессах с рождением виртуального π -мезона [48]. Тем не менее при низких энергиях и малых передачах импульса имеет смысл применить рассматриваемый двухкластерный подход и к малонуклонным системам с $A = 3$ и 4 хотя бы для того, чтобы сопоставить получаемые результаты с результатами для систем с $A > 4$. В основных состояниях легчайших ядер в оболочечной модели нет квантов возбуждения, поэтому в рамках рассматриваемого

здесь подхода можно надеяться описать только S -состояния относительного движения кластеров в таких системах и статические свойства соответствующих ядер в S -волновом приближении. Однако, применяя формулу (2) для возбужденного (по числу осцилляторных квантов) состояния ядра с невозбужденными кластерами под знаком оператора-антисимметризатора, можно расширить область применимости рассматриваемой потенциальной модели на случай рассеяния в P - и D -волнах.

2.1. Потенциалы и фазы рассеяния. Ранее полные сечения фотопроцессов для легчайших ядер ${}^3\text{He}$ и ${}^3\text{H}$ в потенциальной кластерной модели рассматривались в работе [16]. В этих расчетах для процессов фоторазвала ${}^3\text{He}$ и ${}^3\text{H}$ в $p^2\text{H}$ - и $n^2\text{H}$ -каналы учитывались $E1$ -переходы, обусловленные орбитальной частью электрического оператора $Q_{Jm}(L)$ [21]. Сечения $E2$ -процессов и сечения, зависящие от спиновой части электрического оператора, оказались на несколько порядков меньше.

Далее предполагалось, что электрические $E1$ -переходы в N^2H -системе возможны между основным чистым по схеме Юнга $\{3\}$ дублетным 2S -состоянием ядер ${}^3\text{H}$ и ${}^3\text{He}$ и дублетным 2P -состоянием рассеяния, смешанным по схемам Юнга $\{3\} + \{21\}$. На основе использованного подхода удалось получить вполне приемлемые результаты при описании имевшихся экспериментальных данных по фоторазвалу ядер ${}^3\text{He}$ и ${}^3\text{H}$ в кластерные каналы [16].

Для выполнения расчетов фотоядерных процессов в системах $p^2\text{H}$ и $n^2\text{H}$ ядерная часть межкластерного потенциала взаимодействий представляется в виде (7) с точечным кулоновским членом, гауссовой притягивающей V_0 и экспоненциальной отталкивающей V_1 частями. Потенциал каждой парциальной волны строился так, чтобы правильно описывать соответствующую парциальную фазу упругого рассеяния [49]. С использованием этих представлений были получены потенциалы $p^2\text{H}$ -взаимодействия для процессов рассеяния, параметры которых приведены в работах [16, 21, 50] и табл. 1. Затем в дублетном канале, смешанном по схемам Юнга $\{3\}$ и $\{21\}$ [15], были выделены чистые фазы (11) и на их основе построен чистый, со схемой $\{3\}$, 2S -потенциал связанного состояния ${}^3\text{He}$ в $p^2\text{H}$ -канале [16, 21, 50].

Проведенные расчеты $E1$ -перехода показали [16], что лучшие результаты по описанию полных сечений фоторазвала ядра ${}^3\text{He}$ в области энергий γ -квантов 6–28 МэВ, включая величину максимума при $E_\gamma = 10$ –13 МэВ, удастся получить, если использовать потенциал 2P -волны $p^2\text{H}$ -рассеяния с периферическим отталкиванием, приведенный в табл. 1. При этом предполагается, что 2S -взаимодействие в связанном состоянии является чистым по схеме Юнга $\{3\}$ и имеет гауссову форму с параметрами $V_0 = -34,75$ МэВ и $\alpha = 0,15$ Фм $^{-2}$, полученными на основе правильного описания энергии связи (с точностью до нескольких кэВ) и зарядового радиуса ядра ${}^3\text{He}$. С этими потенциалами были выполнены и расчеты полных сечений радиационного $p^2\text{H}$ -захвата и астрофизического S -фактора при энергиях до 10 кэВ [16, 21],

Таблица 1. Потенциалы $p^2\text{H}$ -взаимодействия в дублетном канале [16]

$^{2J+1}L, \{f\}$	$V_0, \text{МэВ}$	$\alpha, \text{Фм}^{-2}$	$V_1, \text{МэВ}$	$\gamma, \text{Фм}^{-1}$
$^2S, \{3\}$	-34,76170133	0,15	—	—
$^2P, \{3\} + \{21\}$	-10,0	0,16	+ 0,6	0,1
$^2S, \{3\} + \{21\}$	-35,0	0,1	—	—

хотя на тот момент нам были известны экспериментальные данные по S -фактору только в области энергий выше 150–200 кэВ [51].

Сравнительно недавно появились новые экспериментальные данные по S -фактору $p^2\text{H}$ -захвата при энергиях до 2,5 кэВ [52–54]. Поэтому представляется интересным выяснить, способна ли потенциальная кластерная модель на основе $E1$ - и $M1$ -переходов описать новые данные с использованием полученного ранее 2P -взаимодействия рассеяния и уточненного здесь 2S -потенциала связанного $p^2\text{H}$ -состояния.

Наши предварительные результаты [55] показали, что для расчетов S -фактора при энергиях порядка 1 кэВ требуется существенно повысить точность вычисления энергии связи $p^2\text{H}$ -системы в ядре ^3He , которая находилась на уровне 1–2 кэВ [16]. Требуется более строго контролировать поведение «хвоста» волновой функции связанного состояния на больших расстояниях. Кроме того, необходимо повысить точность вычисления кулоновских волновых функций [25], определяющих поведение асимптотики ВФ рассеяния в 2P -волне.

С помощью усовершенствованных компьютерных программ для более правильного описания экспериментальной энергии связи ядра ^3He в $p^2\text{H}$ -канале были уточнены параметры чистого, со схемой Юнга $\{3\}$, дублетного 2S -потенциала. Такой потенциал (табл. 1) стал несколько глубже, чем тот, который использовался в нашей работе [16], и приводит теперь к полному совпадению экспериментальной $-5,4934230$ МэВ и расчетной энергии связи $-5,4934230$ МэВ, которая получается с точными значениями масс частиц [23]. Разница потенциалов, приведенных в работе [16] и в табл. 1, обусловлена, в первую очередь, использованием здесь точных значений масс частиц и более точным описанием энергии связи ядра ^3He в $p^2\text{H}$ -канале. Для выполнения всех этих расчетов абсолютная точность вычисления энергии связи в нашей компьютерной программе, использующей конечно-разностный метод, задавалась на уровне 10^{-8} МэВ.

Величина зарядового радиуса ^3He с таким потенциалом оказывается равной 2,28 Фм, что несколько больше экспериментальных данных, приведенных в табл. 2 [23, 56, 57]. В этих расчетах использованы экспериментальные значения радиусов протона и дейтрона, которые также даны в табл. 2, причем

Таблица 2. Экспериментальные данные по массам и зарядовым радиусам легких ядер, использованные в настоящих расчетах [23, 56, 57]

Ядро	Радиус, Фм	Масса, а. е. м.
p	0,8768(69)	1,00727646677
${}^2\text{H}$	2,1402(28)	2,013553212724
${}^3\text{H}$	1,63(3); 1,76(4); 1,81(5) Среднее 1,73	3,0155007134
${}^3\text{He}$	1,976(15); 1,93(3); 1,877(19); 1,935(30) Среднее 1,93	3,0149322473
${}^4\text{He}$	1,671(14)	4,001506179127

последний из них оказывается больше радиуса ядра ${}^3\text{He}$. Поэтому если дейтрон находится внутри ${}^3\text{He}$ в качестве кластера, то для правильного описания радиуса ${}^3\text{He}$ он должен быть сжат примерно на 20–30 % от своего размера в свободном состоянии [21, 35, 58].

Для контроля поведения ВФ связанных состояний на больших расстояниях вычислялись асимптотическая константа C_W с асимптотикой волновой функции в виде функции Уиттекера (10) [59], величина которой в интервале 5–20 Фм оказалась равной $C_W = 2,333(3)$. Приведенная здесь ошибка определяется усреднением константы по указанному выше интервалу. Определение этой константы из экспериментальных данных дает значения в интервале 1,76–1,97 [60, 61], что несколько меньше полученной здесь величины. Следует отметить также результаты трехтельных расчетов [62], в которых получено хорошее согласие с экспериментом [63] для отношения асимптотических констант 2S - и 2D -волн, а для самой константы 2S -волны найдено значение $C = 1,878$.

Однако в более поздней, чем [60, 61], работе [26] для константы C_W приводится величина 2,26(9), которая вполне согласуется с нашими расчетами. Из приведенных в работе [26] данных видно, что имеется довольно большое различие экспериментальных результатов по асимптотическим константам, полученным в разное время. Эти данные заключены в области от 1,76 до 2,35 со средним значением 2,06.

В кластерной модели величина константы C_W сильно зависит от ширины потенциальной ямы. Кроме того, всегда можно найти и другие параметры 2S -потенциала CC , например

$$V_0 = -48,04680730 \text{ МэВ} \quad \text{и} \quad \alpha = 0,25 \text{ Фм}^{-2}, \quad (14)$$

$$V_0 = -41,55562462 \text{ МэВ} \quad \text{и} \quad \alpha = 0,2 \text{ Фм}^{-2}, \quad (15)$$

$$V_0 = -31,20426327 \text{ МэВ} \quad \text{и} \quad \alpha = 0,125 \text{ Фм}^{-2}, \quad (16)$$

которые дают точно такую же энергию связи ${}^3\text{He}$ в $p^2\text{H}$ -канале. Первый из них на интервале 5–20 Фм приводит к асимптотической константе $C_W = 1,945(3)$ и зарядовому радиусу $R_{\text{ch}} = 2,18$ Фм, второй дает константу $C_W = 2,095(5)$ и $R_{\text{ch}} = 2,22$ Фм, а третий — $C_W = 2,519(3)$ и $R_{\text{ch}} = 2,33$ Фм.

Из этих результатов видно, что потенциал (14) позволяет получить наиболее близкие к эксперименту значения зарядового радиуса. Дальнейшее уменьшение ширины потенциала могло бы привести к правильному описанию его величины, но, как будет видно далее, не позволит воспроизвести S -фактор радиационного $p^2\text{H}$ -захвата. В этом смысле потенциал (15), характеризующийся несколько большей шириной, имеет минимально допустимую ширину потенциальной ямы, при которой удастся получить асимптотическую константу, практически равную ее экспериментальной средней величине 2,06, и приемлемо описать поведение астрофизического S -фактора в наиболее широкой энергетической области.

Для дополнительного контроля определения энергии связи в двухчастичных каналах использовался вариационный метод, который уже на сетке с размерностью 10 и независимым варьированием параметров [25] позволил получить для потенциала в табл. 1 энергию связи $-5,4934228$ МэВ. Асимптотическая константа C_W вариационной ВФ на расстояниях 5–20 Фм в этих расчетах находится на уровне 2,34(1), а величина невязок не превышает 10^{-12} [25]. Параметры радиальной волновой функции для этого потенциала, имеющей вид (9), приведены в табл. 3.

В рамках вариационного метода был рассмотрен и вариант потенциала (15), для которого получена такая же энергия связи $-5,4934228$ МэВ. Вариационные параметры и коэффициенты разложения радиальной волно-

Таблица 3. Вариационные параметры и коэффициенты разложения радиальной ВФ связанного состояния $p^2\text{H}$ -системы для потенциала из табл. 1. Нормировка функции с этими коэффициентами на интервале 0–25 Фм равна $N = 0,999999997$

i	β_i	C_i
1	2,682914012452794E-001	-1,139939646617903E-001
2	1,506898472480031E-002	-3,928173077162038E-003
3	8,150892061325998E-003	-2,596386495718163E-004
4	4,699184204753572E-002	-5,359449556198755E-002
5	2,664477374725231E-002	-1,863994304088623E-002
6	4,4687619986542310E+001	1,098799639286601E-003
7	8,482112461789261E-002	-1,172712856304303E-001
8	1,541789664414691E-001	-1,925839668633162E-001
9	1,527248552219977E-000	3,969648696293301E-003
10	6,691341326208045E-000	2,097266548250023E-003

Таблица 4. Вариационные параметры и коэффициенты разложения радиальной ВФ связанного состояния $p^2\text{H}$ -системы для варианта потенциала (15). Нормировка функции с этими коэффициентами на интервале 0–25 Фм равна $N = 0,999999998$

i	β_i	C_i
1	3,485070088054969E-001	-1,178894628072507E-001
2	1,739943603152822E-002	-6,168137382276252E-003
3	8,973931554450264E-003	-4,319325351926516E-004
4	5,977571392609325E-002	-7,078243409099880E-002
5	3,245586616581442E-002	-2,743665993408441E-002
6	5,8379917320454490E+001	1,102401456221556E-003
7	1,100441373510820E-001	-1,384847981550261E-001
8	2,005318455817479E-001	-2,114723533577409E-001
9	1,995655373133832E-000	3,955231655325594E-003
10	8,741651544040529E-000	2,101576342365150E-003

вой функции приведены в табл. 4. Асимптотическая константа в области 5–20 Фм оказалась равной 2,09(1), а величина невязок имеет порядок 10^{-13} .

Поскольку вариационная энергия при увеличении размерности базиса уменьшается и дает верхнюю границу истинной энергии связи, а конечно-разностная энергия при уменьшении величины шага и увеличении числа шагов увеличивается [25], то в качестве реальной оценки энергии связи в таком потенциале можно принять среднюю величину $-5,4934229(1)$ МэВ. Таким образом, ошибка определения энергии связи двумя методами, на основе двух различных компьютерных программ, составляет $\pm 0,1$ эВ.

2.2. Астрофизический S-фактор. В наших расчетах астрофизического S-фактора рассматривалась область энергий радиационного $p^2\text{H}$ -захвата от 1 кэВ до 10 МэВ. Для величины $S(E1)$ -фактора с потенциалом из табл. 1 при 1 кэВ получено значение 0,165 эВ·б. Найденное значение несколько меньше известных данных, если рассматривать полный S-фактор без разделения его на S_s - и S_p -части, обусловленные M1- и E1-переходами. Такое разделение было сделано в работе [53], где получено $S_s(0) = 0,109(10)$ эВ·б и $S_p(0) = 0,073(7)$ эВ·б, что для полного S-фактора должно давать величину 0,182(17) эВ·б. В то же время в выражении для линейной интерполяции

$$S(E_{\text{cm}}) = S_0 + E_{\text{cm}}S_1 \quad (17)$$

авторы приводят $S_0 = 0,166(5)$ эВ·б и $S_1 = 0,0071(4)$ эВ·б·кэВ $^{-1}$, а для $S(0)$ дают величину 0,166(14) эВ·б, определенную с учетом всех возможных ошибок. Результаты, полученные с разделением S-фактора на M1- и E1-части, приведены и в одной из самых первых работ [51], посвященных астрофизическим факторам, где получено $S_s = 0,12(3)$ эВ·б, $S_p = 0,127(13)$ эВ·б при полном S-факторе 0,25(4) эВ·б.

Как видно, имеется заметная разница между этими результатами, поэтому в дальнейшем мы будем ориентироваться на полное значение S -фактора при нулевой энергии, которое определялось во многих работах. Экспериментальные данные [54] приводят к величине полного $S(0) = 0,216(10)$ эВ·б, а это означает, что вклады $M1$ и $E1$ отличаются от приведенных выше значений. В этой работе приводятся следующие параметры линейной экстраполяции (17): $S_0 = 0,216(6)$ эВ·б и $S_1 = 0,0059(4)$ эВ·б·кэВ⁻¹, которые заметно отличаются от данных работы [53].

Известные результаты для S -фактора, полученные из экспериментальных данных без разделения на $M1$ - и $E1$ -части, дают при нулевой энергии $0,165(14)$ эВ·б [64]. Предыдущие результаты тех же авторов приводят к величине $0,121(12)$ эВ·б [65], а в теоретических расчетах работы [66] для разных моделей получены значения $S_s = 0,105$ эВ·б и $S_p = 0,08–0,0865$ эВ·б.

Из приведенных результатов следует, что имеется большая неоднозначность в данных, полученных за последние 10–15 лет. Эти результаты позволяют заключить, что, скорее всего, величина полного S -фактора при нулевой энергии находится в области $0,11–0,23$ эВ·б. Среднее между этими значениями дает S -фактор, равный $0,17(6)$ эВ·б, который вполне согласуется с полученным здесь, только на основе $E1$ -перехода, результатом.

Наши расчеты S -фактора радиационного p^2 Н-захвата для потенциала из табл. 1 при энергиях от 1 кэВ до 10 МэВ приведены на рис. 1, 2 пунктирными линиями. Полученный S -фактор довольно хорошо воспроизводит новые экспериментальные данные при энергиях 10–50 кэВ [53], а при более низких энергиях расчетная кривая находится в полосе экспериментальных ошибок работы [54].

Сплошной линией на рис. 1, 2 приведены результаты для потенциала (15), который несколько лучше передает поведение S -фактора при энергиях 50 кэВ — 10 МэВ и при энергии 1 кэВ дает $S = 0,135$ эВ·б. Для энергий 20–50 кэВ расчетная кривая идет по нижней границе ошибок работы [53], а ниже 10 кэВ попадает в полосу экспериментальных ошибок данных проекта LUNA, полученных в самое последнее время [54]. Величина S -фактора, полученного при нулевой энергии с этим потенциалом, неплохо согласуется с данными работы [51] для электрического $E1$ -перехода S_p .

Штриховой линией на рис. 1, 2 показаны результаты для потенциала (16) и штрихпунктирной — для потенциала (14). На основе этих расчетов можно считать, что лучшие результаты получаются для потенциала СС (15), который описывает экспериментальные данные в наиболее широком энергетическом интервале. Он дает определенный компромисс при описании асимптотической константы, зарядового радиуса и S -фактора радиационного p^2 Н-захвата.

На рис. 1 видно, что S -фактор при низких энергиях, примерно 1–3 кэВ, практически не зависит от энергии, определяя тем самым его величину при нулевой энергии, которая оказывается примерно такой же, как его значения

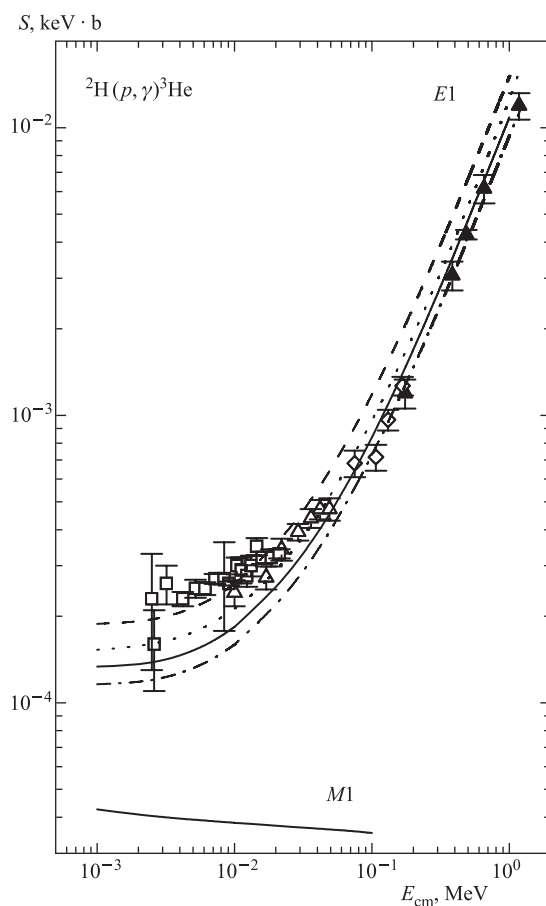


Рис. 1. Астрофизический S -фактор радиационного $p^2\text{H}$ -захвата в области 1 кэВ — 1 МэВ. Линии — расчеты с приведенными в тексте потенциалами. Темные треугольники — экспериментальные данные из работы [51]; ромбы — [52]; светлые треугольники — [53]; квадраты — [54]

при 1 кэВ. Поэтому различие S -фактора при 0 и 1 кэВ, по-видимому, составит не более $0,005 \text{ эВ} \cdot \text{б}$, и эту величину вполне можно считать ошибкой определения расчетного S -фактора для нулевой энергии.

При низких энергиях в астрофизический S -фактор может давать вклад и $M1$ -переход из S -состояния рассеяния, смешанного по схемам Юнга, на связанное чистое по орбитальной симметрии S -состояние ядра ${}^3\text{He}$. Для этих расчетов мы использовали дублетный S -потенциал состояний рассеяния с

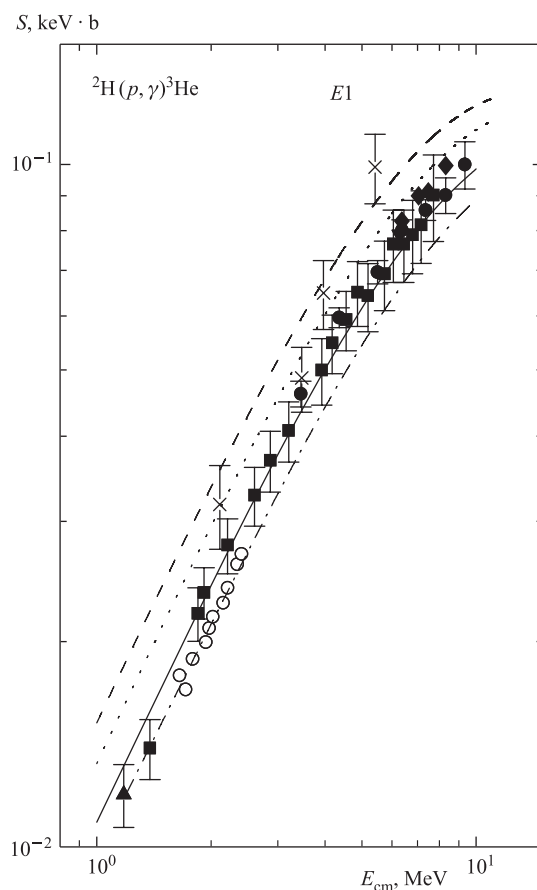


Рис. 2. Астрофизический S -фактор радиационного $p^2\text{H}$ -захвата в области 1–10 МэВ. Линии — расчеты с приведенными в тексте потенциалами. Треугольник — экспериментальные данные из работы [51]; квадраты — [68]; темные кружки — [69]; крестики — [70]; ромбы — [71]; светлые кружки — [72]

приведенными в табл. 1 параметрами и потенциал СС (15). Результаты расчетов при энергиях 1–100 кэВ показаны на рис. 1 сплошной линией внизу. Видно, что сечение $M1$ -процесса оказывается в несколько раз меньше сечения $E1$ -перехода.

Однако надо отметить, что из-за неоднозначностей фазового анализа не удастся найти единственное решение для потенциала рассеяния. Например, другой вариант потенциала с параметрами $V_0 = -55,0$ МэВ и $\alpha = 0,2$ Фм^{-2} [21, 45, 67], который не хуже описывает S -фазу рассеяния,

приводит при этих энергиях к сечениям $M1$ -процесса в несколько раз большим, чем $E1$.

Большая неоднозначность в параметрах S -потенциала рассеяния, связанная с погрешностями извлекаемых из экспериментальных данных фаз рассеяния, не позволяет сделать определенные выводы о вкладе $M1$ -процесса в радиационный $p^2\text{H}$ -захват. Так, если потенциалы CC определяются вполне однозначно по энергии связи, асимптотической константе и зарядовому радиусу ядра, а также по дополнительному критерию — использованию чистых по схемам Юнга взаимодействий, то при построении потенциалов рассеяния ситуация не столь однозначна. В случае рассеяния требуется более точный фазовый анализ для 2S -волны и, возможно, учет спин-орбитального расщепления 2P -фаз при низких энергиях, как это было сделано, например, для упругого $p^{12}\text{C}$ -рассеяния при энергиях 0,2–1,2 МэВ [73]. Проведение этого дополнительного анализа позволит уточнить параметры потенциалов, используемых для расчетов $p^2\text{H}$ -захвата в потенциальной кластерной модели, и тем самым повысить точность этих расчетов.

Таким образом, расчеты S -фактора $p^2\text{H}$ радиационного захвата для $E1$ -перехода при энергии до 10 кэВ, выполненные нами около 15 лет назад [16], когда для S -факторов были известны только экспериментальные данные выше 150–200 кэВ, довольно хорошо согласуются с новыми данными из работ [52, 53] в области от 10–20 до 150–200 кэВ. Причем это относится и к потенциалу из табл. 1, и к взаимодействию с параметрами (15). Результаты для обоих рассмотренных потенциалов, полученные ниже 10 кэВ, укладываются в полосу ошибок работы [54] и демонстрируют определенную тенденцию к постоянству S -фактора в области 1–3 кэВ. Полученные результаты свидетельствуют о том, что ПКМ довольно успешно работает в данной области энергий, хотя и приводит, из-за погрешностей фаз рассеяния, к неоднозначности вклада $M1$ -процесса.

3. СИСТЕМА $p^3\text{H}$

Продолжая изучение термоядерных реакций [45] на основе потенциальной кластерной модели с разделением орбитальных состояний по схемам Юнга [75], рассмотрим возможность описания астрофизического S -фактора радиационного $p^3\text{H}$ -захвата при энергиях до 1 кэВ. Эта реакция представляет определенный интерес как с теоретической, так и с экспериментальной точки зрения для понимания в целом динамики фотоядерных процессов с легчайшими атомными ядрами при низких энергиях. Поэтому продолжают экспериментальные исследования этой реакции, и сравнительно недавно были получены новые данные для полных сечений радиационного $p^3\text{H}$ -захвата и астрофизического S -фактора в области энергий от 50 кэВ до 5 МэВ и при 12 и 39 кэВ (с. ц. м.).

3.1. Потенциалы и фазы рассеяния. Для выполнения расчетов фото-ядерных процессов в рассматриваемой системе ядерная часть межкластерного потенциала $p^3\text{H}$ - и $p^3\text{He}$ -взаимодействий представляется в виде (7) с точечным кулоновским членом. Потенциал каждой парциальной волны, как и для предыдущей системы $p^2\text{H}$, строился так, чтобы правильно описывать соответствующую парциальную фазу упругого рассеяния [74].

В результате были получены потенциалы $p^3\text{He}$ -взаимодействий, чистые по изоспину ($T = 1$) для процессов упругого рассеяния, параметры которых приведены в табл. 5 [75, 76]. Синглетная чистая по изоспину S -фаза упругого $p^3\text{He}$ -рассеяния, использованная в дальнейшем для получения синглетных $p^3\text{H}$ -фаз с изоспином $T = 0$, показана сплошной линией на рис. 3 вместе с экспериментальными данными из работ [77–79].

Поскольку имеется несколько различных вариантов фазовых анализов [74, 77–79] для синглетной 1P_1 - и триплетной 3P_1 -волн, параметры потенциалов, приведенные в табл. 5, подбирались так, чтобы получить определенный компромисс между результатами разных анализов. На рис. 4 сплошной линией представлена синглетная 1P_1 -фаза упругого $p^3\text{He}$ -рассеяния

Таблица 5. Параметры синглетных потенциалов вида (7) $p^3\text{He}$ -системы, чистых по изоспину ($T = 1$) [76]

L	V_0 , МэВ	α , Фм^{-2}	V_1 , МэВ	γ , Фм^{-1}
1S	-110,0	0,37	45,0	0,67
1P	-15,0	0,1	—	—

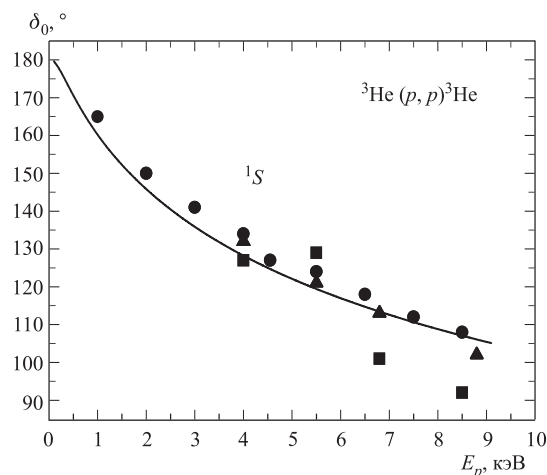


Рис. 3. Синглетная 1S -фаза упругого $p^3\text{He}$ -рассеяния. Экспериментальные данные: кружки — [77]; квадраты — [78]; треугольники — [79]

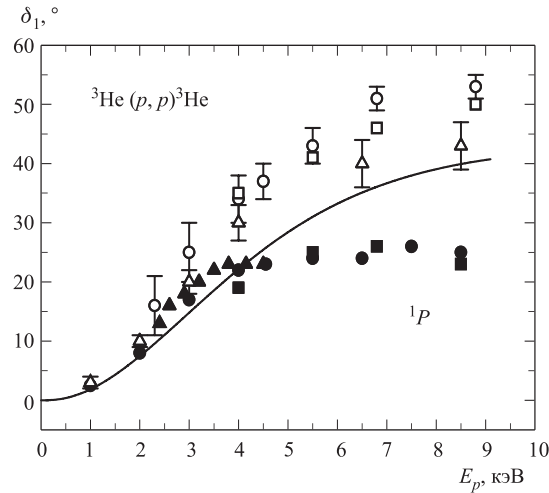


Рис. 4. Синглетная 1P -фаза упругого $p^3\text{He}$ -рассеяния. Экспериментальные данные: темные кружки — [77]; темные квадраты — [78]; темные треугольники — [80]; светлые кружки — [81]; светлые квадраты — [79]; светлые треугольники — [82]

с $T = 1$, использованная в наших расчетах $E1$ -перехода на основное состояние ядра ^4He в $p^3\text{H}$ -канале с $T = 0$, и экспериментальные данные работ [77–82].

Система $p^3\text{H}$ является смешанной по изоспину, так как для нее возможны значения $T = 0$ и 1. Здесь триплетные и синглетные фазы, а значит, и потенциалы эффективно зависят от двух значений изоспина. В силу принципа Паули смешивание по изоспину приводит к смешиванию по схемам Юнга. В частности, в синглетном спиновом состоянии разрешены две орбитальные схемы Юнга $\{31\}$ и $\{4\}$ [75]. Синглетная смешанная по изоспину S -фаза упругого $p^3\text{H}$ -рассеяния, определяемая из экспериментальных дифференциальных сечений и использованная далее для получения чистых $p^3\text{H}$ -фаз, показана сплошной кривой на рис. 5 для потенциала с параметрами $V_0 = -50$ МэВ и $\alpha = 0,2$ Фм $^{-2}$ при $V_1 = 0$ МэВ вместе с экспериментальными данными работ [83–85]. Из последней работы был взят первый набор фаз рассеяния.

Далее, в работах [67, 75, 76] было показано, что смешанные по изоспину синглетные фазы $p^3\text{H}$ -рассеяния могут быть представлены в виде полусуммы чистых по изоспину синглетных фаз

$$\delta^{\{T=1\}+\{T=0\}} = \frac{1}{2}\delta^{\{T=1\}} + \frac{1}{2}\delta^{\{T=0\}}, \quad (18)$$

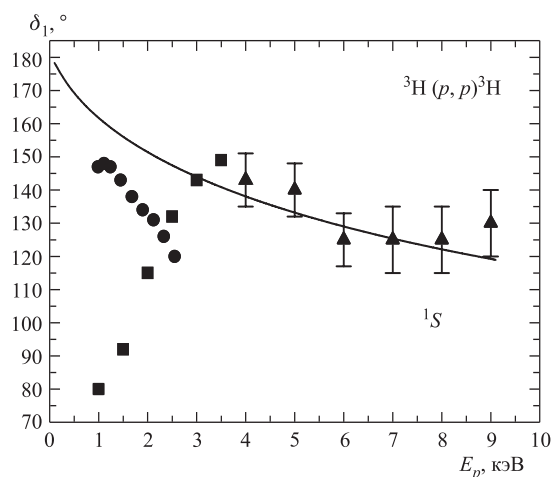


Рис. 5. Синглетная 1S -фаза упругого $p^3\text{H}$ -рассеяния. Экспериментальные данные: кружки — [83]; квадраты — [84]; треугольники — [85]

что эквивалентно следующей записи для фаз рассеяния с указанием схем Юнга:

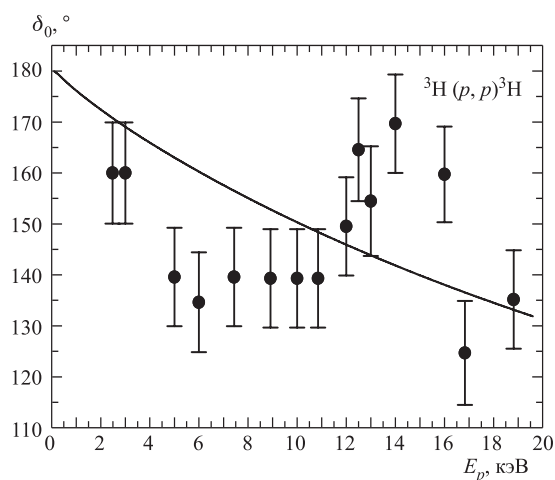
$$\delta^{\{4\}+\{31\}} = \frac{1}{2}\delta^{\{31\}} + \frac{1}{2}\delta^{\{4\}}.$$

Чистые фазы соответствуют схемам Юнга $\{31\}$ при $T = 1$ для $p^3\text{He}$ -системы и $\{4\}$ при $T = 0$ для $p^3\text{H}$ -системы. Из выражения (18) на основе известных чистых фаз рассеяния с $T = 1$ в $p^3\text{He}$ -системе [77–79] и смешанных фаз в $p^3\text{H}$ -системе с изоспином $T = 0$ и 1 [83–85] выделяются чистые по изоспину фазы $p^3\text{H}$ -рассеяния с $T = 0$ и на их основе строятся соответствующие чистые потенциалы $p^3\text{H}$ -взаимодействия [76].

В частности, для потенциала вида (8) в 1S -волне были найдены следующие параметры:

$$V_0 = -63,1 \text{ МэВ} \quad \text{и} \quad \alpha = 0,17 \text{ Фм}^{-2}. \quad (19)$$

На рис. 6 кружками показана чистая по схеме Юнга синглетная 1S -фаза упругого $p^3\text{H}$ -рассеяния, а кривой — результаты расчета этой фазы с потенциалом (19). Полученные таким образом чистые (по схеме Юнга) взаимодействия можно использовать для расчетов различных характеристик связанного основного состояния ^4He в $p^3\text{H}$ -канале. Степень согласия получаемых при этом результатов с экспериментальными будет теперь зависеть только от степени кластеризации этого ядра в рассматриваемый канал.


 Рис. 6. Синглетная чистая по схемам Юнга 1S -фаза упругого $p^3\text{H}$ -рассеяния

Полученные в [67, 76] потенциалы взаимодействия в целом правильно описывают каналную энергию связи $p^3\text{H}$ -системы (с точностью до нескольких кэВ) и среднеквадратичный радиус ядра ^4He [76]. С этими потенциалами были выполнены расчеты дифференциальных [75] и полных сечений радиационного $p^3\text{H}$ -захвата и астрофизические S -факторы при энергиях до 10 кэВ [76]. Следует отметить, что тогда нам были известны экспериментальные данные по S -фактору только в области энергий выше 700 кэВ [86].

Сравнительно недавно появились новые экспериментальные данные при энергиях от 50 кэВ до 5 МэВ [87] и при 12 и 36 кэВ [88]. Поэтому представляется интересным выяснить, способна ли потенциальная кластерная модель с полученными ранее синглетным 1P -потенциалом и уточненным взаимодействием основного 1S -состояния ядра ^4He описать эти новые данные.

Наши предварительные результаты [89] показали, что для расчетов S -фактора при энергиях порядка 1 кэВ нужно выполнить те же условия, что и в $p^2\text{H}$ -системе [55], которые обсуждались в предыдущем разделе, и, в первую очередь, повысить точность нахождения энергии связи ^4He в $p^3\text{H}$ -канале. С помощью новых, измененных программ были уточнены параметры потенциалов основного состояния $p^3\text{H}$ -системы в ядре ^4He (табл. 6), которые отличаются от приведенных в работе [76] примерно на 0,2 МэВ. В основном это отличие связано с использованием в новых расчетах более точных значений масс частиц p и ^3H [43] и более точным описанием энергии связи ядра ^4He в $p^3\text{H}$ -канале. Для этой энергии на основе уточненных значений масс частиц [23] получено значение $-19,813810$ МэВ, а расчет с рассматриваемым

Таблица 6. Параметры чистых по изоспину ($T = 0$) потенциалов вида (8) $p^3\text{H}$ -взаимодействий [76] в синглетном канале. E_{cc} — вычисленная энергия связанного состояния, $E_{\text{эксп}}$ — ее экспериментальное значение [57]

L	V_0 , МэВ	α , Фм $^{-2}$	E_{cc} , МэВ	$E_{\text{эксп}}$, МэВ
1S	-62,906841138	0,17	-19,81381000	-19,813810
1P	+8,0	0,03	—	—

здесь потенциалом дает величину $-19,81381000$ МэВ. Точность определения численного значения энергии в таком потенциале по нашей программе, основанной на конечно-разностном методе [25], составляет 10^{-8} МэВ.

Поведение «хвоста» волновой функции связанного состояния $p^3\text{H}$ -системы на больших расстояниях проверялось по асимптотической константе (10) [26, 90], которая на интервале 5–10 Фм оказалась равной $C_W = 4,52(1)$. Известные результаты по извлечению асимптотической константы из экспериментальных данных дают для $p^3\text{H}$ -канала значение 5,16(13) [26]. Для асимптотической константы $n^3\text{He}$ -системы в работе [26] получена величина 5,1(4), которая очень близка к константе $p^3\text{H}$ -канала.

В то же время в работе [90] для константы $n^3\text{He}$ -системы приводится значение 4,1. Если считать, что в силу изотопической инвариантности эти константы мало различаются (см. [26]), то для $p^3\text{H}$ -канала соответствующая величина должна находиться в области 4,2–4,4, что вполне согласуется с нашими результатами. Как видно, и здесь существует довольно большое различие данных по асимптотическим константам. Для $n^3\text{He}$ -системы константа находится в интервале 4,1–5,5, а для $p^3\text{H}$ -канала может, по-видимому, принимать значения примерно от 4,2–4,4 до 5,3. Для зарядового радиуса ядра ^4He получено значение 1,73 Фм, при радиусах трития 1,63 Фм [56], протона 0,877 Фм [23] и экспериментальном значении радиуса ^4He 1,671(14) Фм [57] (см. табл. 2).

Для дополнительного контроля точности определения энергии связи в S -потенциале из табл. 6 использовался вариационный метод с разложением волновой функции по неортогональному гауссову базису, который при размерности 10 и независимом варьировании параметров [25] позволил получить энергию связи $-19,81380998$ МэВ. Асимптотическая константа C_W (10) вариационной волновой функции на расстояниях 5–10 Фм сохранялась на уровне 4,52(2), а величина невязок не превышала 10^{-11} [25]. Вариационные параметры и коэффициенты разложения межкластерной радиальной волновой функции, имеющей вид (9), приведены в табл. 7.

Как уже говорилось в предыдущем разделе, вариационная энергия при увеличении размерности базиса уменьшается и дает верхний предел истинной энергии связи, а конечно-разностная энергия при уменьшении величины

Таблица 7. Вариационные параметры и коэффициенты разложения радиальной ВФ связанного состояния $p^3\text{H}$ -системы для S -потенциала из табл. 6. Нормировка функции с этими коэффициентами на интервале 0–25 Фм равна $N = 0,9999999998$

i	β_i	C_i
1	3,775399682294165E–002	–3,553662130779118E–003
2	7,390030511120065E–002	–4,689092850709087E–002
3	1,377393687979590E–001	–1,893147614352133E–001
4	2,427238748079469E–001	–3,619752356073335E–001
5	4,021993911220914E–001	–1,988757841748206E–001
6	1,780153251456691E+000	5,556224701527299E–003
7	5,459871888661887E+000	3,092889292994009E–003
8	1,9213177238092050E+001	1,819890982631486E–003
9	8,4161171211980260E+001	1,040709526875803E–003
10	5,60393988031844500E+002	5,559240350868498E–004

шага и увеличении числа шагов увеличивается [25]. Поэтому для реальной энергии связи в таком потенциале можно принять среднюю между этими значениями величину $-19,81380999(1)$ МэВ. При этом ошибка определения энергии связи двумя использованными выше методами и на основе двух разных компьютерных программ составляет $\pm 0,01$ эВ.

Из приведенных результатов видно, что простая двухкластерная $p^3\text{H}$ -модель с классификацией орбитальных состояний по схемам Юнга позволяет получить вполне разумные значения для таких характеристик связанного состояния ядра ^4He , как зарядовые радиусы и асимптотические константы. Поэтому эти результаты могут свидетельствовать в пользу сравнительно большой степени кластеризации этого ядра в $p^3\text{H}$ -канале.

3.2. Астрофизический S -фактор. Ранее в работе [76] на основе потенциальной кластерной модели выполнялись расчеты полных сечений и астрофизического S -фактора процесса радиационного $p^3\text{H}$ -захвата и считалось, что основной вклад в сечения $E1$ -фоторазвала ядра ^4He в $p^3\text{H}$ -канал или радиационного $p^3\text{H}$ -захвата дают переходы с изменением изоспина $\Delta T = 1$ [91]. Поэтому в расчетах нужно использовать 1P_1 -потенциал для $p^3\text{He}$ -рассеяния в чистом по изоспину ($T = 1$) синглетном состоянии этой системы и 1S -потенциал для основного чистого по изоспину ($T = 0$) связанного состояния ядра ^4He в $p^3\text{H}$ -канале [76].

На основе этих представлений здесь были заново выполнены расчеты $E1$ -перехода с уточненным потенциалом основного состояния ^4He (см. табл. 6). Результаты расчета астрофизического S -фактора при энергиях до 1 кэВ приведены на рис. 7, 8 сплошной линией. При энергиях до 10 кэВ полученные результаты практически не отличаются от наших прежних ре-

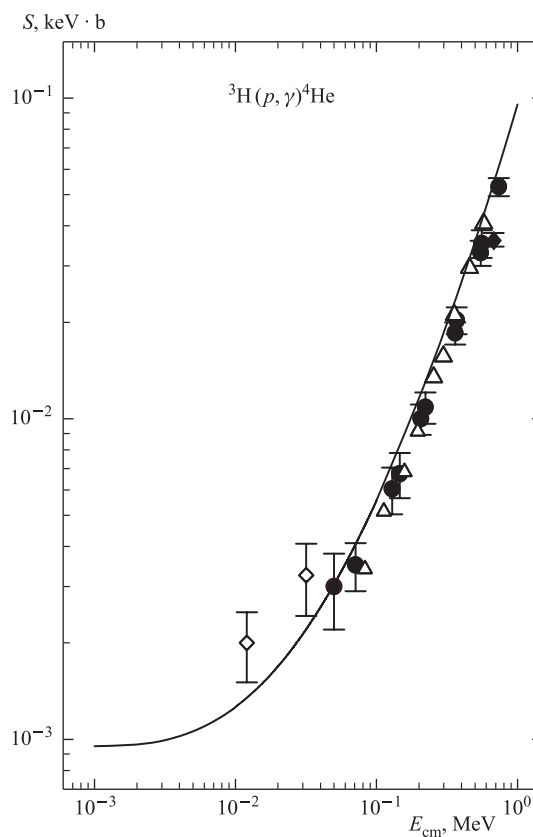


Рис. 7. Астрофизический S -фактор радиационного $p^3\text{H}$ -захвата в области 1 кэВ — 1 МэВ. Линия — расчет с приведенным в тексте потенциалом. Кружки — пересчет полных сечений захвата из [87], приведенных в работе [88]; треугольники — данные [92]; светлые ромбы — [88], темный ромб — [86]

зультатов, приведенных в работе [76]. Новые экспериментальные данные взяты из работ [87, 88] и, кроме того, дополнительно использованы неизвестные нам ранее данные из работы [92].

Из рисунков видно, что расчеты, сделанные нами около 15 лет назад, хорошо воспроизводят новые данные по S -фактору, полученные в работе [87] при энергиях от 50 кэВ до 5 МэВ (с. ц. м.). Эти данные имеют заметно меньшую неоднозначность при энергиях выше 1 МэВ по сравнению с прежними результатами работ [86, 93–95] и более точно определяют общее поведение S -фактора при низких энергиях, практически совпадая с ранними данными [92] в области энергий 80–600 кэВ. Область энергий выше 1–2 МэВ исследова-

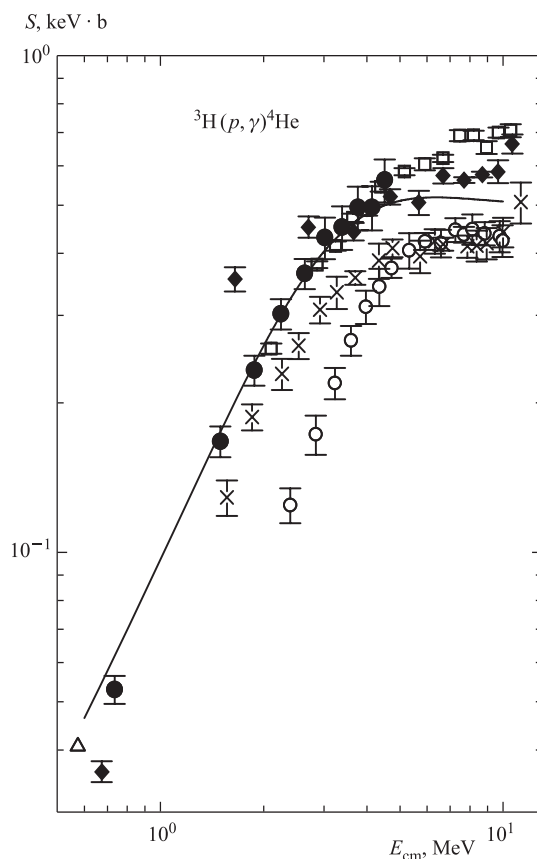


Рис. 8. Астрофизический S -фактор радиационного $p^3\text{H}$ -захвата в области 1–10 МэВ. Линия — расчет с приведенным в тексте потенциалом. Темные кружки — пересчет полных сечений захвата из [87], приведенных в работе [88]; треугольник — данные [92]; светлые кружки — [93]; квадраты — [94]; крестики — [95]; ромбы — [86]

лась во многих работах, поэтому для сравнения на рис. 8 мы приводим эти более ранние результаты [86, 93–95].

При энергии 1 кэВ величина S -фактора оказалась равной 0,95 эВ·б, а результаты расчета при энергиях меньше 50 кэВ лежат несколько ниже новых данных работы [88], где для $S(0)$ получено 2,0(2) эВ·б. Заметим, что простая экстраполяция имеющихся экспериментальных данных к 1 кэВ по трем последним точкам работ [87, 92] приводит к его значению примерно 0,6(3) эВ·б, т. е. в три раза меньше, чем величина, полученная в [88].

Из рис. 7 видно, что S -фактор при самых низких энергиях, примерно в области 1–3 кэВ, почти не зависит от энергии. Это дает основание предположить, что его величина при нулевой энергии практически не отличается от значения при 1 кэВ. Поэтому различие S -фактора при 0 и 1 кэВ, по-видимому, составит не более 0,05 эВ·б и эту величину можно считать ошибкой определения расчетного S -фактора при нулевой энергии.

Таким образом, в рамках рассматриваемой кластерной модели на основе $E1$ -перехода удалось, по сути, предсказать общее поведение S -фактора $p^3\text{H}$ -захвата при энергиях от 50 до 700 кэВ. Действительно, на основе анализа экспериментальных данных выше 700 кэВ около 15 лет назад нами были сделаны предсказания поведения S -фактора для энергий до 10 кэВ [76]. Как теперь видно, результаты этих расчетов хорошо воспроизводят новые данные по S -фактору, полученные в работе [87] (темные кружки на рис. 7, 8) при энергиях в области от 50 кэВ до 5 МэВ.

4. СИСТЕМА $p^6\text{Li}$

Для уточнения экспериментальных данных в [13] было выполнено новое измерение дифференциальных сечений упругого $p^6\text{Li}$ -рассеяния в области энергий 350 кэВ–1,15 МэВ (л. с.), при этом погрешность измерений составила 10%. Данные [13], которые будут рассматриваться в этом разделе, получены при пяти значениях энергии: 593 кэВ для 13 углов рассеяния в диапазоне 57–172°, 746,7 и 866,8 кэВ для 11 углов в интервале 45–170° и при энергиях 976,5 и 1136,6 кэВ для 15 углов в области 30–170°.

На основе измерений, выполненных в работе [13], и дифференциальных сечений упругого рассеяния при энергии 500 кэВ из более ранней работы [96] мы провели фазовый анализ и получили $^{2,4}S$ - и 2P -фазы рассеяния. По найденным фазам построены потенциалы для $L = 0$ и 1 в $p^6\text{Li}$ -взаимодействиях при низких энергиях без учета спин-орбитального расщепления, а затем выполнены расчеты астрофизического S -фактора при энергии, начиная с 10 кэВ.

4.1. Дифференциальные сечения. При рассмотрении процессов рассеяния в системе частиц со спинами $1/2$ и 1 без учета спин-орбитального расщепления фаз сечение упругого рассеяния представляется в виде [32]

$$\frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega} = \frac{2}{6} \frac{d\sigma_d(\theta)}{d\Omega} + \frac{4}{6} \frac{d\sigma_k(\theta)}{d\Omega}, \quad (20)$$

где индексы d и k относятся к дублетному (с полным спином $1/2$) и квартетному (с полным спином $3/2$) состояниям $p^6\text{Li}$ -рассеяния и

$$\frac{d\sigma_d(\theta)}{d\Omega} = |f_d(\theta)|^2, \quad \frac{d\sigma_k(\theta)}{d\Omega} = |f_k(\theta)|^2. \quad (21)$$

Амплитуды рассеяния записываются в виде

$$f_{d,k}(\theta) = f_c(\theta) + f_{d,k}^N(\theta), \quad (22)$$

где

$$\begin{aligned} f_c(\theta) &= - \left(\frac{\eta}{2k \sin^2(\theta/2)} \right) \exp \{ i\eta \ln [\sin^{-2}(\theta/2)] + 2i\sigma_0 \}, \\ f_a^N(\theta) &= \frac{1}{2ik} \sum_L (2L+1) \exp(2i\sigma_L) [S_L^d - 1] P_L(\cos \theta), \\ f_k^N(\theta) &= \frac{1}{2ik} \sum_L (2L+1) \exp(2i\sigma_L) [S_L^k - 1] P_L(\cos \theta), \end{aligned} \quad (23)$$

$S_L^{d,k} = \eta_L^{d,k} \exp[2i\delta_L^{d,k}(k)]$ — матрица рассеяния в дублетном или квартетном спиновом состоянии [32].

Возможность использования простых выражений (20)–(23) для расчетов сечений упругого рассеяния обусловлена тем, что в области низких энергий спин-орбитальное расщепление фаз оказывается сравнительно малым, что подтверждается результатами фазового анализа, выполненного в работе [97], в которой учитывалось спин-орбитальное расщепление фаз рассеяния.

4.2. Фазовый анализ. Ранее фазовый анализ без учета дублетной 2P -волны дифференциальных сечений и функций возбуждения для упругого $p^6\text{Li}$ -рассеяния был выполнен в работе [97]. Наш фазовый анализ проводится при более низких энергиях, имеющих значение для ядерной астрофизики, и учитывает все низшие парциальные волны, в том числе дублетную 2P -волну. Анализ основан на дифференциальных сечениях, приведенных в работах [13, 96].

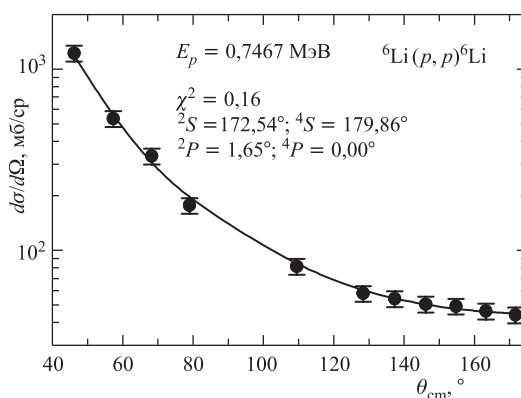
При энергии 500 кэВ на основе данных работы [96] находим 2S - и 4S -фазы рассеяния, которые показаны в табл. 8. Полученные результаты расчета сечений вполне согласуются с экспериментальными данными при среднем по всем точкам $\chi^2 = 0,15$. Погрешность дифференциальных сечений этих данных принималась равной 10%. Учет дублетной 2P - и квартетной 4P -фаз показал, что их численные значения меньше $0,1^\circ$.

Следующие пять энергий относятся к новым результатам измерений дифференциальных сечений, выполненных в работе [13]. Первая из них, 593 кэВ, дает возможность найти ${}^{2,4}S$ -фазы, которые мало отличаются от фаз при предыдущей энергии, имеют такой же χ^2 и показаны в табл. 8, а фазы для ${}^{2,4}P$ -волн также стремятся к нулю.

При энергии 746,7 кэВ мы находим ${}^{2,4}S$ -фазы (табл. 8), которые позволяют описать сечения с точностью $\chi^2 = 0,23$. Несмотря на малость величины χ^2 , была предпринята попытка учесть ${}^{2,4}P$ -фазы. Вначале полагалось,

Таблица 8. Результаты фазового анализа упругого $p^6\text{Li}$ -рассеяния

E , кэВ	2S , °	4S , °	2P , °	4P , °	χ^2
500	176,2	178,7	—	—	0,15
593	174,2	178,8	—	—	0,15
746,7	170,1	180,0	—	—	0,23
	172,5	179,9	1,7	0,0	0,16
866,8	157,8	180,0	—	—	0,39
	170,2	174,9	3,9	0,0	0,22
	169,6	175,0	3,5	0,1	0,23
976,5	160,0	178,5	—	—	0,12
	167,0	174,5	1,1	0,0	0,12
1136,3	144,9	180,0	—	—	0,58
	164,7	171,1	5,8	0,0	0,32
	166,4	169,9	5,5	0,1	0,32

Рис. 9. Сечения упругого $p^6\text{Li}$ -рассеяния при 746,7 кэВ

что квартетная 4P -фаза пренебрежимо мала, что следует из результатов работы [97], в которой их учет начинался только с 1,0–1,5 МэВ. Результаты нашего анализа с учетом только 2P -фазы представлены на рис. 9 и в табл. 8. Видно, что учет небольшой дублетной 2P -фазы несколько изменяет величину дублетной 2S -фазы, увеличивая ее значение, и уменьшает $\chi^2 = 0,16$. Учет квартетной 4P -фазы дал для ее численного значения пренебрежимо малую величину, меньше $0,1^\circ$, что полностью соответствует результатам работы [97] и нашим результатам при следующей энергии 866,8 кэВ.

Результат поиска фаз для энергии 866,8 кэВ с учетом только $^{2,4}S$ -волн приведен в табл. 8 при $\chi^2 = 0,39$. Как видно, величина 2S -фазы резко спа-

дает по сравнению с предыдущей энергией. Учет же 2P -волны заметно увеличивает ее значение (рис. 10 и табл. 8) и практически в два раза уменьшает величину χ^2 . Попытка учесть квартетную 4P -фазу привела к значению не больше $0,1^\circ$ (табл. 8), что указывает на ее малый вклад и при этой энергии. Любое изменение 4P -волны в большую сторону, в том числе при других значениях остальных фаз, приводило к увеличению χ^2 . При этой энергии, как и при всех других рассмотренных энергиях из работы [13], не удастся найти какой-либо вариант для ненулевой квартетной фазы при стремлении χ^2 к минимуму.

Для следующей энергии, 976,5 кэВ, без учета ${}^{2,4}P$ -волн найдены значения 2S - и 4S -фаз, приведенные в табл. 8. Последующий учет 2P -волны заметно увеличивает значения 2S -фазы, если пренебречь 4P -волной, как это видно

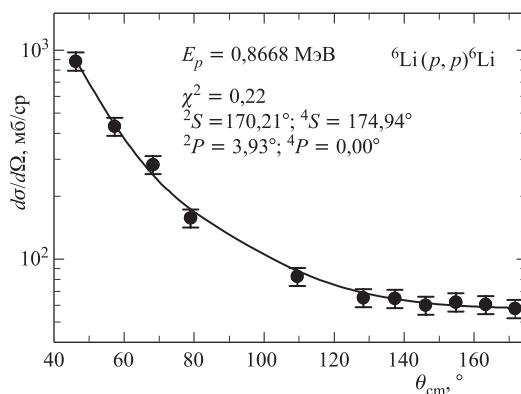


Рис. 10. Сечения упругого $p^6\text{Li}$ -рассеяния при 866,8 кэВ

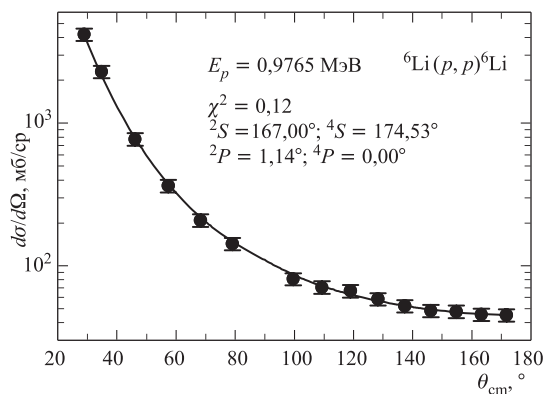


Рис. 11. Сечения упругого $p^6\text{Li}$ -рассеяния при 976,5 кэВ

на рис. 11 и табл. 8 при $\chi^2 = 0,12$. Если включить в анализ квартетную 4P -волну, то она просто стремится к нулю при уменьшении величины χ^2 .

Последняя из рассмотренных энергий — 1,1363 МэВ из работы [13] даже при учете только $^{2,4}S$ -волн приводит к сравнительно малому χ^2 , равному 0,58, как это видно в табл. 8. И в этом случае учет 2P -волны приводит к заметному увеличению значения 2S -фазы. Соответствующие результаты расчета сечений показаны на рис. 12 и табл. 8.

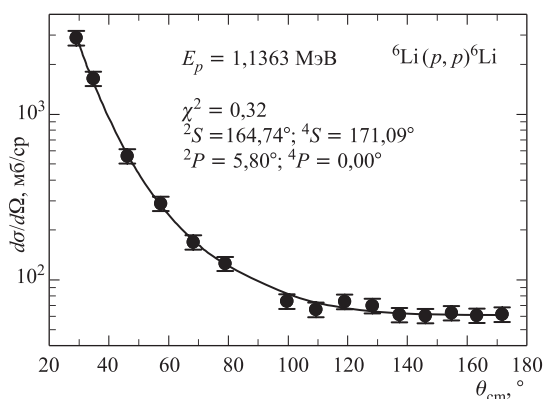


Рис. 12. Сечения упругого $p^6\text{Li}$ -рассеяния при 1136,3 кэВ

Таким образом, при описании всех экспериментальных данных из работы [13] не требуется учета квартетных 4P -волн в этой области энергии, т. е. их величина равна или меньше $0,1^\circ$. Это в целом согласуется с результатами работы [97], однако дублетная 2P -фаза доходит почти до 6° и ею нельзя пренебречь, как это было сделано в [97].

Общий вид 2S - и 4S -фаз рассеяния показан на рис. 13, а дублетные 2P -фазы приведены на рис. 14. На этих рисунках указаны параметры потенциалов V_0 (МэВ), α (Фм^{-2}) для состояний $^{2S+1}L_J$. Несмотря на довольно большой разброс результатов для 4S -фаз, дублетная 2S -фаза имеет определенную тенденцию к убыванию, но происходит это заметно медленнее, чем следует из результатов анализа [97], в котором не учитывалась 2P -волна. Если в нашем анализе не учитывать дублетную 2P -волну, то для 2S -фазы получаются результаты, очень близкие к результатам фазового анализа работы [97].

Погрешности фаз упругого рассеяния определяются неоднозначностью фазового анализа, а именно: при практически одном и том же значении χ^2 оказывается возможным получить несколько разные значения самих фаз рассеяния. Эта неоднозначность оценивается нами на уровне $1\text{--}1,5^\circ$ и показана для S - и 2P -фаз на рис. 13.

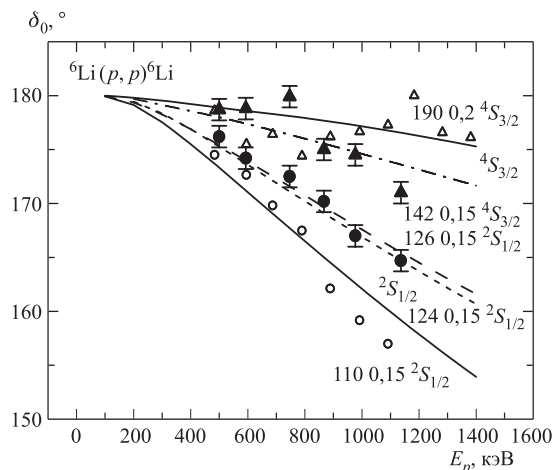


Рис. 13. Дублетные и квартетные S -фазы упругого $p^6\text{Li}$ -рассеяния при низких энергиях. Приведены дублетные и квартетные S -фазы при наличии 2P -волны, когда 4P -фаза принималась равной нулю. Темные кружки и треугольники — 2S - и 4S -фазы, полученные по данным работ [13, 96]. Для сравнения светлыми треугольниками и кружками показаны результаты фазового анализа [97]. Линии — результаты расчетов с разными потенциалами

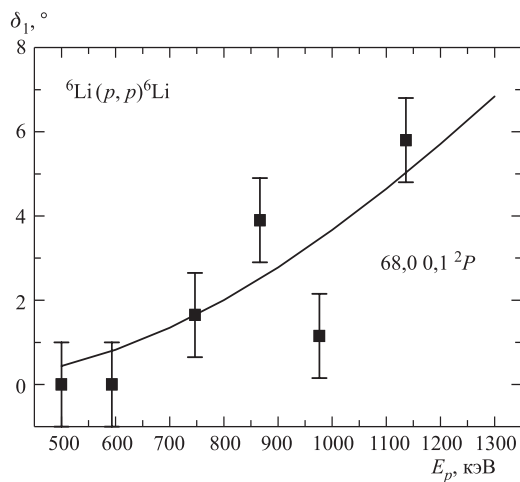


Рис. 14. Дублетные 2P -фазы упругого $p^6\text{Li}$ -рассеяния при низких энергиях. Квадраты — результаты нашего фазового анализа при ${}^4P = 0$. Линия — результат расчета с найденным потенциалом

4.3. Описание фаз рассеяния в потенциальной модели. Для получения парциальных межкластерных $p^6\text{Li}$ -взаимодействий по имеющимся фазам рассеяния используем обычный гауссов потенциал с точечным кулоновским чле-

ном, который может быть представлен в виде (8). При описании результатов фазового анализа работы [97] нами были получены следующие параметры потенциалов:

$$\begin{aligned} \text{для } {}^2S V_0 &= -110 \text{ МэВ}, & \alpha &= 0,15 \text{ Фм}^{-2}, \\ \text{для } {}^4S V_0 &= -190 \text{ МэВ}, & \alpha &= 0,2 \text{ Фм}^{-2}. \end{aligned}$$

Полученные потенциалы содержат по два запрещенных связанных состояния, которые соответствуют схемам Юнга {52} и {7} [21, 98]. Результаты расчета фаз для этих потенциалов показаны на рис. 13 сплошными линиями вместе с результатами фазового анализа [97], представленного светлыми кружками и треугольниками.

Для описания полученных нами фаз рассеяния более предпочтительны потенциалы с параметрами

$$\begin{aligned} \text{для } {}^2S V_0 &= -126 \text{ МэВ}, & \alpha &= 0,15 \text{ Фм}^{-2}, \\ \text{для } {}^4S V_0 &= -142 \text{ МэВ}, & \alpha &= 0,15 \text{ Фм}^{-2}. \end{aligned}$$

Эти потенциалы также содержат по два запрещенных связанных состояния со схемами Юнга {52} и {7}. Фазы, рассчитанные с использованием этих потенциалов, показаны на рис. 13 штриховой и штрихпунктирной линиями в сравнении с результатами нашего фазового анализа, приведенного темными кружками и треугольниками.

Потенциал для дублетной 2P -волны рассеяния может быть представлен следующими параметрами:

$$\text{для } {}^2P V_0 = -68,0 \text{ МэВ}, \quad \alpha = 0,1 \text{ Фм}^{-2}.$$

На рис. 14 сплошной линией показаны результаты расчета фаз с этим потенциалом, который имеет одно запрещенное связанное состояние со схемой Юнга {61} и разрешенное состояние со схемами Юнга {43} и {421}.

Этот потенциал неверно передает энергию связи ядра ${}^7\text{Be}$ в $p^6\text{Li}$ -канале, потому что разрешенное состояние оказывается смешанным по двум указанным выше симметриям, в то время как основному связанному состоянию соответствует только схема {43} [98]. Но даже если использовать методы получения чистых фаз, приведенные в [98], не удастся получить чистый по схемам Юнга потенциал основного состояния. Это обусловлено, по-видимому, малой вероятностью кластеризации ядра ${}^7\text{Be}$ в $p^6\text{Li}$ -канал.

Поэтому чистый по орбитальным симметриям со схемой Юнга {43} ${}^2P_{3/2}$ -волновой потенциал основного состояния ${}^7\text{Be}$ строился так, чтобы в первую очередь описать канальную энергию — энергию связи основного состояния ядра с $J = 3/2^-$ как системы $p^6\text{Li}$ и его среднеквадратичный радиус.

Полученные таким образом параметры чистого ${}^2P_{3/2}^{\{43\}}$ -потенциала имеют следующие значения:

$$V_P = -252,914744 \text{ МэВ}, \quad \alpha_P = 0,25 \text{ Фм}^{-2}. \quad (24)$$

Этот потенциал в рамках конечно-разностного метода дает энергию связи разрешенного состояния со схемой Юнга {43}, равную $-5,605800$ МэВ, при экспериментальной величине $-5,6058$ МэВ [99] и имеет одно запрещенное состояние, соответствующее схеме Юнга {61}. Среднеквадратичный зарядовый радиус оказывается равным $2,63$ Фм, что в целом согласуется с данными [99], а константа C_W из (10) на интервале $5-13$ Фм равна $2,66(1)$.

Для параметров ${}^2P_{1/2}^{\{43\}}$ -потенциала первого возбужденного состояния ${}^7\text{Be}$ с $J = 1/2^-$ получены значения

$$V_P = -251,029127 \text{ МэВ}, \quad \alpha_P = 0,25 \text{ Фм}^{-2}. \quad (25)$$

Такой потенциал приводит к энергии связи $-5,176700$ МэВ при экспериментальной величине $-5,1767$ МэВ [99] и содержит запрещенное состояние со схемой {61}. Асимптотическая константа (10) на интервале $5-13$ Фм равна $2,53(1)$, а зарядовый радиус $2,64$ Фм. Абсолютная точность поиска энергии связанных уровней $p^6\text{Li}$ -системы в ядре ${}^7\text{Be}$ для наших новых программ задавалась 10^{-6} МэВ.

Полученные здесь параметры потенциалов связанных состояний несколько отличаются от наших предыдущих результатов [98]. Это связано с использованием в настоящих расчетах точных значений масс частиц и более точным описанием экспериментальных значений энергий уровней.

Вариационным методом для энергии основного состояния получено значение $-5,605797$ МэВ, а значит, для такого потенциала среднее значение энергии связи, полученной двумя методами, равно $-5,6057985(15)$ МэВ. Следовательно, точность вычисления энергии связи составляет $\pm 1,5$ эВ. Асимптотическая константа на интервале $5-13$ Фм оказалась сравнительно устойчивой и равной $2,67(2)$, а зарядовый радиус совпадает с результатами конечно-разностных расчетов. Вариационная волновая функция вида (9) для основного состояния ${}^7\text{Be}$ в $p^6\text{Li}$ -канале с потенциалом (24) приведена в табл. 9, а величина невязок не превышает 10^{-12} .

Вариационным методом для первого возбужденного уровня получена энергия $-5,176697$ МэВ, так что средняя энергия равна $-5,1766985(15)$ МэВ с той же точностью ее определения обоими методами, как для основного состояния. Асимптотическая константа на интервале $5-13$ Фм находится на уровне $2,53(2)$, величина невязок не более 10^{-12} , а зарядовый радиус почти не отличается от соответствующего значения для основного состояния. Параметры ВФ возбужденного состояния ядра ${}^7\text{Be}$ для потенциала (25) приведены в табл. 10.

Таблица 9. Вариационные параметры и коэффициенты разложения радиальной ВФ основного связанного состояния $p^6\text{Li}$ -системы в ядре ${}^7\text{Be}$ для P -потенциала (24). Нормировка функции с этими коэффициентами на интервале 0–25 Фм равна $N = 0,9999999999999895$

i	β_i	C_i
1	2,477181344627947E–002	1,315463702527344E–003
2	5,874061769072439E–002	1,819913407984276E–002
3	1,277190608958812E–001	9,837541674753882E–002
4	2,556552559403827E–001	3,090018297080802E–001
5	6,962545656024610E–001	–1,195304944694753
6	87,215179556255360	3,237908749007494E–003
7	20,660304078047520	5,006096657700867E–003
8	1,037788131786810	–6,280751485496025E–001
9	2,768782138965186	1,282309968994793E–002
10	6,753591325944827	8,152343478073063E–003

Таблица 10. Вариационные параметры и коэффициенты разложения радиальной ВФ первого возбужденного связанного состояния $p^6\text{Li}$ -системы в ядре ${}^7\text{Be}$ для P -потенциала (25). Нормировка ВФ с этими коэффициентами на интервале 0–25 Фм равна $N = 0,9999999999999462$

i	β_i	C_i
1	2,337027900191992E–002	1,218101547601343E–003
2	5,560733180673633E–002	1,653319276756672E–002
3	1,214721917930904E–001	9,009619752334307E–002
4	2,474544878067495E–001	3,003291466882630E–001
5	7,132725465249825E–001	–1,332325501226168
6	84,896023494945160	3,273725679869025E–003
7	1,162854732120233	–5,340018423135894E–001
8	1,574203000936825	9,367648737801053E–002
9	5,779896847077723	1,033713941440747E–002
10	19,422905786572090	5,314592946045428E–003

Приведем далее параметры потенциалов, которые описывают квартетные фазы упругого рассеяния из работы [97]:

$$\begin{aligned} \text{для } {}^4P_{1/2} \quad V_0 &= -802,0 \text{ МэВ}, & \alpha &= 0,5 \text{ Фм}^{-2}, \\ \text{для } {}^4P_{3/2} \quad V_0 &= -4476,0 \text{ МэВ}, & \alpha &= 2,65 \text{ Фм}^{-2}, \\ \text{для } {}^4P_{5/2} \quad V_0 &= -1959,0 \text{ МэВ}, & \alpha &= 1,15 \text{ Фм}^{-2}. \end{aligned}$$

Качество описания фаз с этими потенциалами показано на рис. 15 и 16. Потенциалы содержат по два запрещенных связанных состояния, которые соответствуют запрещенным схемам Юнга {61} и {43}.

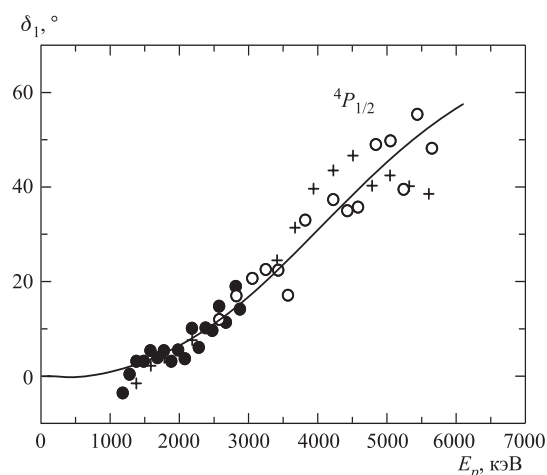


Рис. 15. Квартетные 4P -фазы упругого $p^6\text{Li}$ -рассеяния. Темные и светлые кружки и крестики — результаты фазового анализа работы [97], линия — результат расчета с найденным потенциалом

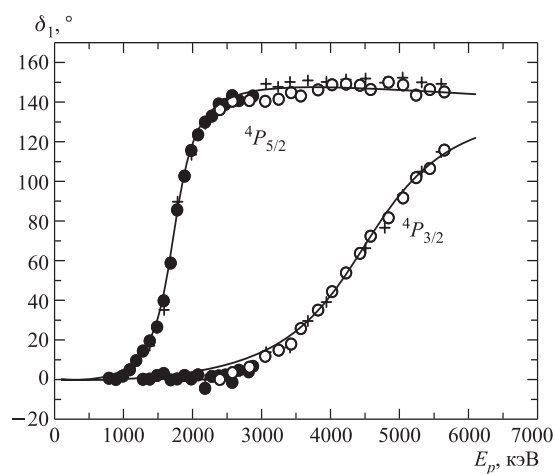


Рис. 16. Квартетные 4P -фазы упругого $p^6\text{Li}$ -рассеяния. Темные и светлые кружки и крестики — результаты фазового анализа работы [97], линии — результаты расчета с предложенными потенциалами

Следует отметить, что на основе полученных в данном фазовом анализе результатов для дублетной 2P -фазы рассеяния, показанной на рис. 14, невозможно построить однозначный 2P -потенциал. Для этого требуются результаты анализа при более высоких энергиях, получить которые необходимо с учетом 2P -волны и спин-орбитального расщепления фаз.

4.4. Астрофизический S -фактор. Хотя реакция $p^6\text{Li}$ радиационного захвата может, по-видимому, представлять определенный интерес для ядерной астрофизики [100], экспериментально она изучена не достаточно хорошо. Имеется только несколько работ по измерению полных сечений и определению астрофизического S -фактора [20], выполненных в области энергий от 35 кэВ до 1,2 МэВ. Однако, как нам кажется, представляет интерес, на основе потенциальной кластерной модели с классификацией связанных состояний по орбитальным схемам Юнга [98, 101], рассмотреть возможность описания S -фактора в астрофизической области энергий, где имеются экспериментальные данные.

При рассмотрении астрофизического S -фактора учитывались $E1$ -переходы из 2S - и 2D -состояний рассеяния на основное $^2P_{3/2^-}$ и первое возбужденное $^2P_{1/2^-}$ -связанные состояния ядра ^7Be в $p^6\text{Li}$ -канале. Расчет волновой функции 2D -состояния рассеяния без учета спин-орбитального расщепления проводился на основе 2S -потенциала, но с орбитальным моментом $L = 2$.

Результаты расчетов показали, что приведенный выше 2S -потенциал рассеяния, основанный на фазовом анализе [97] с глубиной 110 МэВ, сильно занижает астрофизический S -фактор. В то же время дублетный 2S -потенциал с глубиной 126 МэВ, следующий из наших результатов, правильно передает общее поведение экспериментального S -фактора. Полученные результаты показаны на рис. 17. Штриховой линией приведен результат для переходов из 2S - и 2D -волн рассеяния на основное состояние ядра ^7Be , пунктирной — для переходов на первое возбужденное состояние, а сплошной линией — полный S -фактор. Темные и светлые кружки и треугольники — экспериментальные данные работ [102], которые приведены в [103].

Расчетный S -фактор при 10 кэВ имеет значения $S(3/2^-) = 76 \text{ эВ} \cdot \text{б}$ и $S(1/2^-) = 38 \text{ эВ} \cdot \text{б}$ при суммарной величине 114 $\text{эВ} \cdot \text{б}$. Полученный $S(1/2^-)$ -фактор вполне описывает экспериментальные данные для перехода на первое возбужденное состояние ядра ^7Be при малых энергиях (светлые кружки на рис. 17).

Для сравнения расчетного S -фактора при нулевой энергии (за ноль принята энергия 10 кэВ) приведем известные результаты для полного $S(0)$ -фактора: 79(18) $\text{эВ} \cdot \text{б}$ [104], 105 $\text{эВ} \cdot \text{б}$ (при 10 кэВ) [103] и 106 $\text{эВ} \cdot \text{б}$ [105]. Для S -фактора при переходах на основное состояние в работе [106] приведено значение 39 $\text{эВ} \cdot \text{б}$, а для перехода на первое возбужденное состояние — 26 $\text{эВ} \cdot \text{б}$, так что суммарный S -фактор равен 65 $\text{эВ} \cdot \text{б}$. Как видно, имеется довольно большое различие в данных и наши результаты, в целом, согласуются с ними.

Кроме того, небольшое изменение глубины 2S -потенциала рассеяния, которое практически не сказывается на поведении расчетных фаз, довольно сильно влияет на S -фактор. Например, если принять глубину потенциала равной 124 МэВ (фазы показаны на рис. 13 пунктирной линией), то при

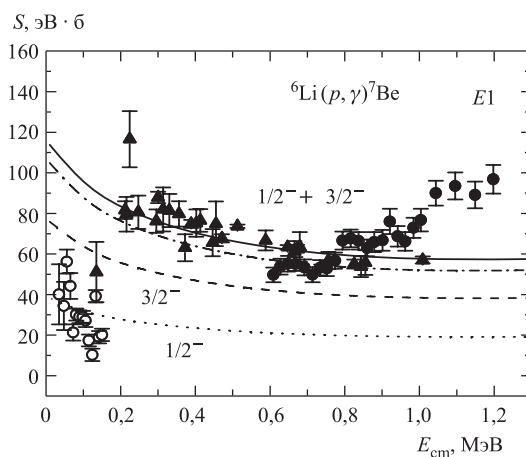


Рис. 17. Астрофизический S -фактор радиационного $p^6\text{Li}$ -захвата. Треугольники и темные и светлые кружки — экспериментальные данные из работ [102], которые приведены в [103]. Штриховой линией показан результат для переходов из 2S - и 2D -волн рассеяния на основное состояние ядра ^7Be , пунктирной — для переходов на первое возбужденное состояние. Полный S -фактор показан сплошной ($V_0 = 126$ МэВ) и штрихпунктирной ($V_0 = 124$ МэВ) линиями

энергии 10 кэВ для S -фактора получим 105 эВ·б. Полный S -фактор с таким потенциалом показан на рис. 17 штрихпунктирной линией, которая в пределах ошибок согласуется с экспериментальными данными при энергиях ниже 1 МэВ.

Следует отметить, что если использовать в S - или P -волнах потенциалы без запрещенных состояний или с другим их числом, то величина расчетного S -фактора оказывается значительно меньше полученных выше значений. Например, 2S -потенциал с одним запрещенным состоянием и параметрами 25 МэВ и $0,15 \text{ Фм}^{-2}$, который неплохо описывает фазы рассеяния, и приведенный выше потенциал основного состояния дают при 10 кэВ величину S -фактора, равную примерно 1 эВ·б.

Таким образом, дублетные 2S -фазы, полученные в нашем фазовом анализе, который учитывает дублетную 2P -фазу, приводят к потенциалу, который, в отличие от взаимодействия, построенного на основе результатов анализа [97], вполне позволяет описать экспериментальный S -фактор при энергиях ниже 1 МэВ. Как и в случае более легких ядер [107], используемая потенциальная кластерная модель с приведенными выше потенциалами позволяет в целом получить вполне приемлемые результаты при описании процесса радиационного $p^6\text{Li}$ -захвата в астрофизической области энергий [108].

5. СИСТЕМА $p^{12}\text{C}$

В этом разделе рассматривается система $p^{12}\text{C}$ и процесс радиационного захвата протона ядром ^{12}C при астрофизических энергиях. Недавно в работах [14] было выполнено новое измерение дифференциальных сечений упругого $p^{12}\text{C}$ -рассеяния при энергиях от 200 кэВ до 1,1 МэВ (с. ц. м.) в диапазоне углов рассеяния $10\text{--}170^\circ$ с погрешностью 10%. На основе этих измерений проведен стандартный фазовый анализ и построен потенциал S -состояния для $p^{12}\text{C}$ -системы [73], а затем в потенциальной кластерной модели вычислен астрофизический S -фактор при энергиях до 20 кэВ.

5.1. Дифференциальные сечения. При рассмотрении упругого рассеяния в системе частиц со спинами 0 и $1/2$ учтем спин-орбитальное расщепление фаз, которое имеет место в ядерных системах типа N^4He , $^3\text{H}^4\text{He}$, $p^{12}\text{C}$. В этом случае упругое рассеяние ядерных частиц полностью описывается двумя независимыми спиновыми амплитудами (A и B), а сечение представляется в виде [32]

$$\frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega} = |A(\theta)|^2 + |B(\theta)|^2, \quad (26)$$

где

$$A(\theta) = f_c(\theta) + \frac{1}{2ik} \sum_{L=0}^{\infty} \{(L+1)S_L^+ + LS_L^- - (2L+1)\} \exp(2i\sigma_L) P_L(\cos \theta), \quad (27)$$

$$B(\theta) = \frac{1}{2ik} \sum_{L=0}^{\infty} (S_L^+ - S_L^-) \exp(2i\sigma_L) P_L^1(\cos \theta).$$

Здесь $S_L^\pm = \eta_L^\pm \exp(2i\delta_L^\pm)$ — матрица рассеяния; η_L^\pm — параметры неупругости, а знаки « \pm » соответствуют полному моменту системы $J = L \pm 1/2$; f_c — кулоновская амплитуда, представляемая в виде

$$f_c(\theta) = - \left(\frac{\eta}{2k \sin^2(\theta/2)} \right) \exp\{i\eta \ln[\sin^{-2}(\theta/2)] + 2i\sigma_0\},$$

$P_n^m(x)$ — присоединенные полиномы Лежандра; η — кулоновский параметр; μ — приведенная масса; k — волновое число относительного движения частиц $k^2 = 2\mu E/\hbar^2$; E — энергия сталкивающихся частиц в системе центра масс.

Через амплитуды A и B (27) можно выразить и поляризацию в упругом рассеянии таких частиц [32]

$$P(\theta) = \frac{2 \operatorname{Im}(AB^*)}{|A|^2 + |B|^2}. \quad (28)$$

Для полного сечения упругого рассеяния можно получить выражение [32]

$$\sigma_s = \frac{\pi}{k^2} \sum_L [(L+1)|1 - S_L^+|^2 + L|1 - S_L^-|^2] \quad (29)$$

или

$$\sigma_s = \frac{4\pi}{k^2} \sum_L \{(L+1)[\eta_L^+ \sin \delta_L^+]^2 + L[\eta_L^- \sin \delta_L^-]^2\}.$$

Качество описания экспериментальных данных на основе некоторой теоретической функции (функционала нескольких переменных) можно оценить по методу χ^2 , который представляется в виде (12). Текст нашей компьютерной программы для расчета полных и дифференциальных сечений упругого рассеяния частиц с полуцелым спином для выполнения соответствующего фазового анализа полностью приведен в работе [25] и протестирован на $p^4\text{He}$ -системе. Здесь приведем только один вариант контрольного счета по этой программе для $p^4\text{He}$ -рассеяния, в сравнении с данными из работы [109], где выполнен фазовый анализ для энергии 9,89 МэВ, получены положительные D -фазы и среднее по всем точкам значение $\chi^2 = 0,60$.

В анализе [109] использованы 22 точки по сечениям из работы [110] при энергии 9,954 МэВ (в [109] не указано, какие именно 22 точки были взяты из 24, приведенных в работе [110]) и несколько точек по поляризациям из работ [109, 111]. В последнем случае, по-видимому, использовано 10 данных при восьми углах: 46,5, 55,9, 56,2, 73,5, 89,7, 99,8, 114,3, 128,3° и энергиях 9,89, 9,84, 9,82 МэВ.

Фазы из работы [109] приведены в табл. 11, а среднее χ_σ^2 только для дифференциальных сечений по нашей программе с учетом 24 точек из [110] (энергия задавалась равной 9,954 МэВ) и с этими фазами получается равным 0,586. Для 10 экспериментальных данных из работ [109, 111] по поляризациям при энергиях 9,82–9,89 МэВ при восьми углах рассеяния с фазами из [109] можно получить $\chi_p^2 = 0,589$ (энергия по-прежнему задается равной 9,954 МэВ).

Таблица 11. Фазы упругого $p^4\text{He}$ -рассеяния из работы [109] при энергии 9,954 МэВ

S_0, \circ	$P_{3/2}, \circ$	$P_{1/2}, \circ$	$D_{5/2}, \circ$	$D_{3/2}, \circ$
$119,3^{+2,0}_{-1,8}$	$112,4^{+3,5}_{-5,2}$	$65,7^{+2,7}_{-3,2}$	$5,3^{+1,6}_{-2,5}$	$3,7^{+1,6}_{-2,8}$

Если усреднить χ^2 по всем точкам ($24 + 10 = 34$), т. е. использовать более общее выражение

$$\begin{aligned} \chi^2 &= \frac{1}{(N_\sigma + N_P)} \left\{ \sum_{i=1}^N \left[\frac{\sigma_i^t - \sigma_i^e}{\Delta \sigma_i^e} \right]^2 + \sum_{i=1}^N \left[\frac{P_i^t - P_i^e}{\Delta P_i^e} \right]^2 \right\} = \\ &= \frac{1}{(N_\sigma + N_P)} \{ \chi_\sigma^2 + \chi_p^2 \}, \quad (30) \end{aligned}$$

то получается величина $\chi^2 = 0,5875 \approx 0,59$ в хорошем согласии с результатами работы [109]. Здесь N_σ и N_P — число данных по сечениям (24 точки) и поляризациям (10 точек), σ^e , P^e , σ^t , P^t — экспериментальные и теоретические значения сечений и поляризаций, $\Delta\sigma$ и ΔP — их ошибки.

Если выполнить дополнительную минимизацию χ^2 по нашей программе, то для χ_σ^2 по сечениям получим 0,576, для поляризаций $\chi_p^2 = 0,561$ и среднее $\chi^2 = 0,572 \approx 0,57$ при следующих значениях фаз:

$$\begin{aligned} \delta(S_0) = 119,01^\circ, \quad \delta(P_{3/2}) = 112,25^\circ, \quad \delta(P_{1/2}) = 65,39^\circ, \\ \delta(D_{5/2}) = 5,24^\circ, \quad \delta(D_{3/2}) = 3,63^\circ, \end{aligned}$$

которые полностью ложатся в полосу ошибок, приведенных в [109], и показаны в табл. 11. Таким образом, написанная программа позволяет получить результаты, хорошо совпадающие с ранее выполненным анализом. Далее наша программа тестировалась по фазовому анализу, проведенному в других работах при низких энергиях, но уже непосредственно для $p^{12}\text{C}$ -системы.

Ранее фазовый анализ функций возбуждения для упругого $p^{12}\text{C}$ -рассеяния, измеренных в [112] при энергиях в области 400–1300 кэВ (л.с.) и углах 106–169°, был выполнен в работе [113], где получено, что, например, при $E_{\text{lab}} = 900$ кэВ S -фаза должна лежать в области 153–154°. С теми же экспериментальными данными нами получено значение 152,7°. Сечения рассеяния брались из функций возбуждения работы [113] при энергиях 866–900 кэВ. Результаты наших расчетов σ_t в сравнении с экспериментальными данными σ_e приведены в табл. 12. В последнем столбце таблицы даны парциальные значения χ_i^2 на каждую точку при погрешности 10% в экспериментальных сечениях, а для среднего по всем экспериментальным точкам χ^2 была получена величина 0,11.

Таблица 12. Сравнение теоретических и экспериментальных сечений $p^{12}\text{C}$ упругого рассеяния при энергии 900 кэВ

$\theta, ^\circ$	$\sigma_e, \text{мб}$	$\sigma_t, \text{мб}$	χ_i^2
106	341	341,5	1,90E-04
127	280	282,1	5,76E-03
148	241	251,2	1,80E-01
169	250	237,5	2,50E-01

Таблица 13. Сравнение теоретических и экспериментальных сечений $p^{12}\text{C}$ упругого рассеяния при энергии 751 кэВ

$\theta, ^\circ$	$\sigma_e, \text{мб}$	$\sigma_t, \text{мб}$	χ_i^2
106	428	428,3	3,44E-05
127	334	342,8	6,91E-02
148	282	299,1	3,66E-01
169	307	279,9	7,82E-01

При энергии 751 кэВ (л.с.) в работе [113] для S -фазы было найдено значение 155–157°. Результаты, полученные нами для этой энергии, приведены в табл. 13. Данные по сечениям брались из функций возбуждения в диапазоне энергий 749–754 кэВ, а для S -фазы найдено 156,8° при среднем $\chi^2 = 0,30$.

Таким образом, по нашей программе при двух энергиях упругого $p^{12}\text{C}$ -рассеяния получены фазы, совпадающие с результатами анализа, выполненного на основе функций возбуждения в работе [113].

5.2. Фазовый анализ. Приведенные выше контрольные результаты хорошо согласуются между собой, поэтому, по написанной нами программе, был выполнен фазовый анализ [73] новых экспериментальных данных по дифференциальным сечениям $p^{12}\text{C}$ -рассеяния в диапазоне энергий 230–1200 кэВ (л. с.) [14]. Результаты нашего анализа приведены в табл. 14 и представлены кружками на рис. 18 в сравнении с данными работы [113], которые показаны штриховой линией.

Таблица 14. Результаты фазового анализа $p^{12}\text{C}$ упругого рассеяния при низких энергиях с учетом только S -фазы

E_{cm} , кэВ	$S_{1/2}$, °	χ^2	E_{cm} , кэВ	$S_{1/2}$, °	χ^2
213	2,0	1,35	434	107,8	0,78
317	2,5	0,31	478	153,3	2,56
371	7,2	0,51	689	156,3	2,79
409	36,2	0,98	900	153,6	2,55
422	58,0	3,75	1110	149,9	1,77

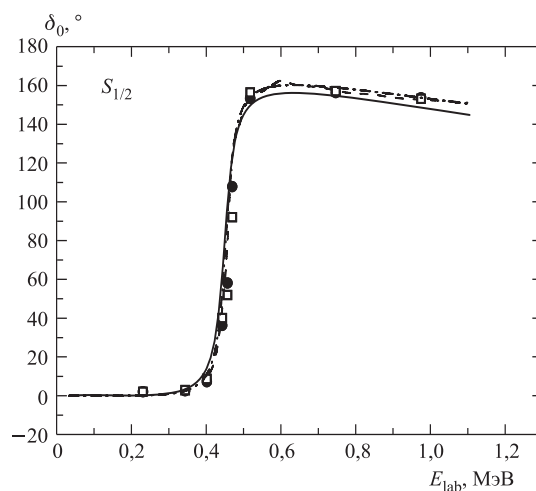


Рис. 18. 2S -фаза $p^{12}\text{C}$ -рассеяния при низких энергиях. Кружки — результаты фазового анализа для S -фазы с учетом только S -волны, квадраты — результаты фазового анализа для S -фазы с учетом S - и P -волн, штриховая кривая — результаты из работы [113], другие кривые — расчеты с разными потенциалами

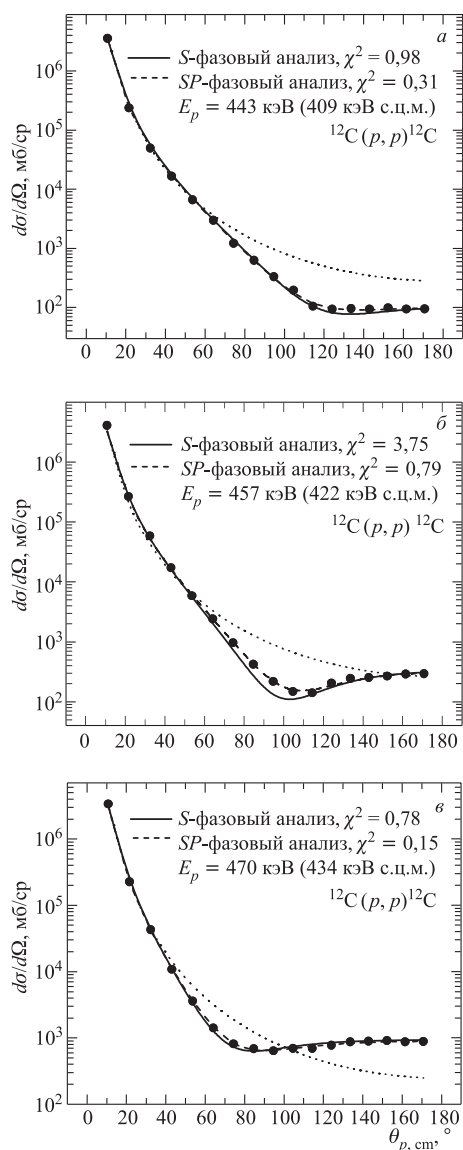


Рис. 19. Дифференциальные сечения $p^{12}\text{C}$ -рассеяния. Сплошная кривая — результаты фазового анализа с учетом только S -волны; пунктирная кривая — резерфордского рассеяния; штриховая — фазового анализа с учетом S - и P -волн; кружки — эксперимента [14]

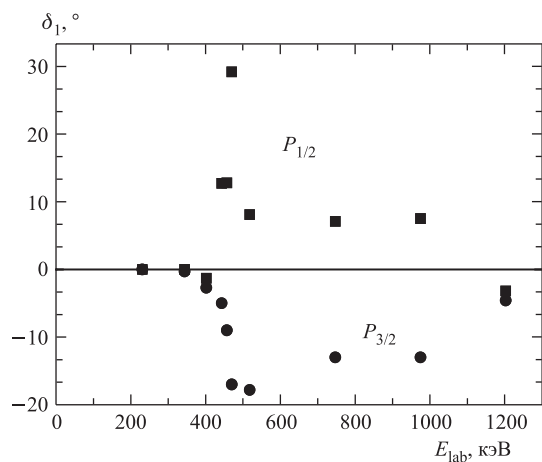


Рис. 20. 2P -фазы $p^{12}\text{C}$ -рассеяния при низких энергиях. Круги — $P_{3/2}$ -фазы и квадраты — $P_{1/2}$ -фазы, полученные в результате фазового анализа с учетом S - и P -волн

На рис. 19 кружками представлены экспериментальные дифференциальные сечения в области резонанса при 457 кэВ (л. с.), результаты расчета этих сечений на основе формулы Резерфорда (пунктирная кривая), а также сечения, полученные из нашего фазового анализа (сплошная линия), который учитывает только S -фазу. Штриховой линией показаны сечения при учете в фазовом анализе S - и P -волн. Из рисунков видно, что в области резонанса не удастся описать сечение только на основе одной S -фазы. Заметную роль начинает играть P -волна, представленная на рис. 20, учет которой заметно улучшает описание экспериментальных данных. В частности, при энергии 457 кэВ (л. с.) учет P -волны уменьшает величину χ^2 с 3,75 до 0,79 (рис. 19, б).

На рис. 20 видно, что при низких энергиях $P_{1/2}$ -фаза идет выше, чем $P_{3/2}$, но при энергии порядка 1,2 МэВ они пересекаются, и далее $P_{3/2}$ идет выше в отрицательной области углов [114, 115]. Величина S -фазы при учете P -волны практически не меняется — ее форма показана на рис. 18 светлыми квадратами. Учет D -волны в фазовом анализе приводит к ее величине порядка 1° в области резонанса и практически не влияет на поведение расчетных дифференциальных сечений.

Полные сечения упругого рассеяния, полученные на основе выражения (29), представлены темными кружками на рис. 21. Они рассчитаны на основе извлеченных из экспериментальных дифференциальных сечений [14] S -фаз рассеяния. Светлые квадраты представляют полные сечения, полученные из фазового анализа работы [113].

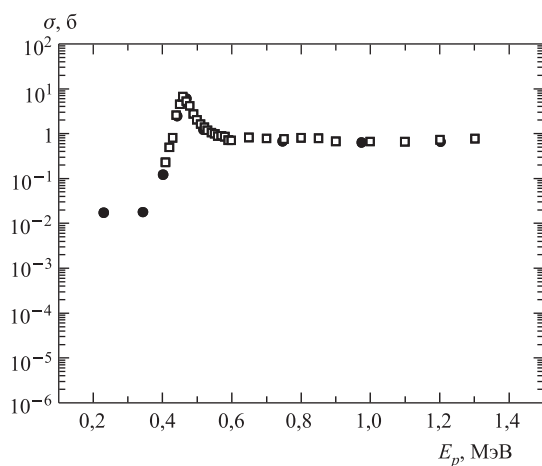


Рис. 21. Полные сечения упругого $p^{12}\text{C}$ -рассеяния. Кружки — полные сечения, найденные из фаз рассеяния работ [14]; квадраты — то же для работ [112, 113]

На рис. 21 в области энергий 200–300 кэВ (л. с.) наблюдается некоторое плато в полных сечениях, а следовательно, и в S -фазе рассеяния. В данный момент не понятно, вызвано оно экспериментальными неточностями, непредвиденными ошибками фазового анализа или действительно существует при этих энергиях. Для выяснения этого вопроса требуются новые измерения угловых распределений $p^{12}\text{C}$ -рассеяния в области энергий от 100–150 до 300–350 кэВ с шагом по энергии порядка 50 кэВ или функций возбуждения при разных углах.

5.3. Астрофизический S -фактор. Радиационный $p^{12}\text{C}$ -захват при низких энергиях входит в CNO термоядерный цикл и дает заметный вклад в энергетический выход термоядерных реакций [43, 100]. Имеющиеся экспериментальные данные по S -фактору [20] показывают наличие узкого, с шириной около 32 кэВ, резонанса при энергии 0,422 МэВ (с. ц. м.), который приводит к подъему S -фактора на два-три порядка.

Представляется интересным выяснить возможность описания резонансного S -фактора этой реакции на основе потенциальной кластерной модели с запрещенными состояниями. Проведение таких исследований оказывается возможным, так как был выполнен фазовый анализ новых экспериментальных данных [14] по дифференциальным сечениям упругого $p^{12}\text{C}$ -рассеяния при астрофизических энергиях [73], который позволяет построить потенциалы $p^{12}\text{C}$ -взаимодействия по фазам упругого рассеяния.

В настоящих расчетах процесса радиационного $p^{12}\text{C}$ -захвата учитывался $E1(L)$ -переход, который обусловлен орбитальной частью электрического опе-

ратора $Q_{JM}(L)$ [21,67]. Сечения $E2(L)$ - и $MJ(L)$ -переходов и сечения, зависящие от спиновой части $EJ(S)$, $M2(S)$, оказались на несколько порядков меньше. Электрический $E1$ -переход в процессе захвата $p^{12}\text{C} \rightarrow \gamma^{13}\text{N}$ возможен между дублетными $^2S_{1/2}$ - и $^2D_{3/2}$ -состояниями рассеяния и основным $^2P_{1/2}$ связанным состоянием ядра ^{13}N в $p^{12}\text{C}$ -канале.

Для построения потенциалов взаимодействия по фазам упругого рассеяния вначале рассмотрим классификацию орбитальных состояний по схемам Юнга для $p^{12}\text{C}$ -системы. Возможные орбитальные схемы Юнга в системе частиц можно определить как прямое внешнее произведение орбитальных схем каждой подсистемы, что в данном случае дает $\{1\} \times \{444\} = \{544\}$ и $\{4441\}$ [116]. Первая из них совместима только с орбитальным моментом $L = 0$ и является запрещенной, поскольку в s -оболочке не может находиться пять нуклонов. Вторая схема совместима с орбитальными моментами 1 и 3 [116], первый из которых соответствует основному связанному состоянию ядра ^{13}N с $J = 1/2^-$. Таким образом, в потенциале 2S -волны должно присутствовать запрещенное связанное состояние, а 2P -волна имеет только разрешенное состояние при энергии $-1,9435$ МэВ [117].

Для выполнения расчетов фотоядерных процессов ядерная часть межкластерного потенциала $p^{12}\text{C}$ -взаимодействия представляется в виде (8) с точечным кулоновским членом. Потенциал $^2S_{1/2}$ -волны строился так, чтобы правильно описать соответствующую парциальную фазу упругого рассеяния, которая имеет ярко выраженный резонанс при $0,457$ МэВ (л. с.). С использованием результатов фазового анализа [73], приведенного выше, здесь был получен $^2S_{1/2}$ -потенциал $p^{12}\text{C}$ -взаимодействия с запрещенным состоянием при энергии $E_{3C} = -25,5$ МэВ. Этот потенциал имеет параметры

$$V_S = -67,75 \text{ МэВ}, \quad \alpha_S = 0,125 \text{ Фм}^{-2},$$

а результаты расчета $^2S_{1/2}$ -фазы с таким потенциалом показаны на рис. 18 сплошной линией.

Потенциал связанного $^2P_{1/2}$ -состояния должен правильно воспроизводить энергию связи ядра ^{13}N в $p^{12}\text{C}$ -канале $-1,9435$ МэВ [117] и разумно описывать среднеквадратичный радиус, который, возможно, не очень отличается от радиуса ^{14}N , равного $2,560(11)$ Фм [117]. В результате были получены следующие параметры:

$$V_{0C} = -81,698725 \text{ МэВ}, \quad \alpha_{0C} = 0,22 \text{ Фм}^{-2}. \quad (31)$$

С этим потенциалом получена энергия связи $-1,943500$ МэВ и среднеквадратичный зарядовый радиус $R = 2,54$ Фм. Для радиусов протона и ядра ^{12}C использованы величины: $0,8768(69)$ Фм [23] и $2,472(15)$ Фм [118]. Контроль поведения ВФ связанного состояния на больших расстояниях проводился по асимптотической константе C_W (10) с асимптотикой в виде функ-

ции Уиттекера [25], а ее величина на интервале 5–20 Фм оказалась равной 1,96(1).

Результаты расчета S -фактора радиационного $p^{12}\text{C}$ -захвата с полученными выше ${}^2P_{1/2}$ - и ${}^2S_{1/2}$ -потенциалами при энергиях от 20 кэВ до 1,0 МэВ приведены на рис. 22 сплошной линией в сравнении с экспериментальными данными из обзора [20]. При энергии 25 кэВ для S -фактора получено значение $3,0 \text{ кэВ} \cdot \text{б}$, а экстраполяция экспериментальных значений S -фактора к энергии 25 кэВ дает $1,45(20) \text{ кэВ} \cdot \text{б}$ и $1,54^{+15}_{-10} \text{ кэВ} \cdot \text{б}$ [117].

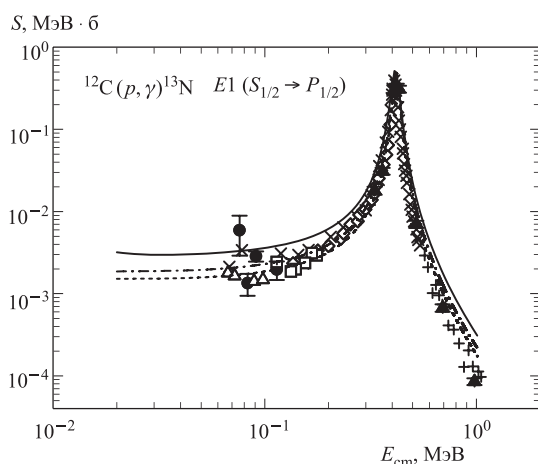


Рис. 22. Астрофизический S -фактор радиационного $p^{12}\text{C}$ -захвата при низких энергиях. \times , \bullet , \square , $+$ и Δ — экспериментальные данные из [20], \blacktriangle — из [119]. Кривые — расчеты с разными потенциалами

Приведенный здесь вариант 2S -потенциала далеко не единственный из возможных вариантов, способных описать резонансное поведение S -фазы при энергиях ниже 1 МэВ. Всегда можно найти другие комбинации потенциалов SS и рассеяния, которые приводят к близким результатам для ${}^2S_{1/2}$ -фазы и хорошо описывают величину и положение максимума S -фактора, например,

$$\begin{aligned} V_{OC} &= -65,8814815 \text{ МэВ}, & \alpha_{OC} &= 0,17 \text{ Фм}^{-2}, \\ R_{ch} &= 2,58, & C_W &= 2,30(1), & E_{OC} &= -1,943500 \text{ МэВ}, \\ V_S &= -55,15 \text{ МэВ}, & \alpha_S &= 0,1 \text{ Фм}^{-2}. \end{aligned}$$

Существует определенное соответствие между параметрами потенциала SS и рассеяния, которое возникает из требования описания резонансной S -

фазы, энергии связи и величины резонанса в S -факторе. Увеличение ширины потенциалов рассеяния и CC приводит к более плавному спаду S -фактора в обе стороны от резонанса. Например, величина S -фактора приведенного выше потенциала при 25 кэВ равна $3,8 \text{ кэВ} \cdot \text{б}$.

Можно предложить другие варианты потенциалов, но с более узким, чем в (31), потенциалом CC , например, со следующими параметрами:

$$\begin{aligned} V_{OC} &= -121,788933 \text{ МэВ}, & \alpha_{OC} &= 0,35 \text{ Фм}^{-2}, \\ R_{ch} &= 2,49, & C_W &= 1,50(1), & E_{OC} &= -1,943500 \text{ МэВ}, \\ V_S &= -102,05 \text{ МэВ}, & \alpha_S &= 0,195 \text{ Фм}^{-2}, & E_{3C} &= -12,8 \text{ МэВ}. \end{aligned} \quad (32)$$

Эти потенциалы приводят к более резкому спаду S -фактора при энергиях вблизи резонанса. Фаза рассеяния и соответствующий S -фактор, полученные с потенциалом (32), показаны на рис. 18 и 22 штрихпунктирными линиями. Величина S -фактора для этого варианта потенциалов при 25 кэВ равна $1,85 \text{ кэВ} \cdot \text{б}$, что в целом согласуется с данными, приведенными в обзоре [117].

Приведенный ниже более узкий, чем (32), потенциал связанного состояния с параметрами

$$\begin{aligned} V_{OC} &= -144,492278 \text{ МэВ}, & \alpha_{OC} &= 0,425 \text{ Фм}^{-2}, \\ R_{ch} &= 2,47, & C_W &= 1,36(1), & E_{OC} &= -1,943500 \text{ МэВ}, \end{aligned} \quad (33)$$

но с тем же потенциалом рассеяния приводит к небольшому уменьшению S -фактора при резонансной энергии, как показано на рис. 22 штриховой кривой, и дает $S(25) = 1,52 \text{ кэВ} \cdot \text{б}$, что полностью согласуется с данными [117]. Однако, как видно из приведенных выше результатов, с уменьшением ширины потенциалов CC уменьшается и асимптотическая константа, и зарядовый радиус ядра. По-видимому, потенциал (33) дает минимальные значения этих параметров, совместимые с экспериментальными данными по сечениям и поляризациям.

Для дополнительного контроля вычисления энергии связи использовался вариационный метод с разложением ВФ по неортогональному вариационному базису [25], который на сетке с размерностью 10 при независимом варьировании параметров для первого варианта (31) потенциала CC позволил получить энергию $-1,943498 \text{ МэВ}$. Асимптотическая константа C_W вариационной ВФ, параметры которой приведены в табл. 15, на расстояниях 5–20 Фм находится на уровне 1,97(2), а величина невязок не превышает 10^{-13} [25]. Зарядовый радиус не отличается от величины, полученной в КРМ-расчетах.

Напомним, что вариационная энергия, полученная в ВМ, при увеличении размерности базиса уменьшается и поэтому дает верхний предел истинной энергии связи, а энергия из конечно-разностного метода при уменьшении величины шага и увеличении числа шагов увеличивается. Поэтому для реальной

Таблица 15. Вариационные параметры и коэффициенты разложения радиальной ВФ в p^{12} С-системе для варианта (31) потенциала СС

i	β_i	C_i
1	4,310731038130567E-001	-2,059674967002619E-001
2	1,110252143696502E-002	-1,539976053334172E-004
3	4,617318488940146E-003	-2,292772895754105E-006
4	5,244199809745243E-002	-1,240687319547592E-002
5	2,431248255158095E-002	-1,909626327101099E-003
6	8,481652230536312E-000	5,823965673819461E-003
7	1,121588023402944E-001	-5,725546189065398E-002
8	2,309223399000618E-001	-1,886468874357471E-001
9	2,297327380843046E-000	1,244238759439573E-002
10	3,7567721497435540E+001	3,435757447077250E-003

Таблица 16. Вариационные параметры и коэффициенты разложения радиальной ВФ в p^{12} С-системе для варианта (32) потенциала СС

i	β_i	C_i
1	1,393662782203888E-002	3,536427343510346E-004
2	1,041704259743847E-001	3,075071412877344E-002
3	4,068236340341411E-001	3,364496084003433E-001
4	3,517787678267637E-002	4,039427231852849E-003
5	2,074448420678197E-001	1,284484754736406E-001
6	7,360025091178769E-001	2,785322894825304E-001
7	3,551046173695889E-000	-1,636661944722212E-002
8	1,5131407009411240E+001	-9,289494991217288E-003
9	9,726024028584802E-001	-1,594107798542716E-002
10	6,634603967502104E-002	8,648073851532037E-003

энергии связи в таком потенциале можно принять среднюю, между получаемыми этими методами, величину $-1,943499(1)$ МэВ. Таким образом, точность вычисления энергии связи находится на уровне ± 1 эВ.

Для варианта (32) потенциала СС вариационным методом получена такая же энергия связи $-1,943498$ МэВ с величиной невязок $3 \cdot 10^{-14}$, среднеквадратичным радиусом $2,49$ Фм и асимптотической константой $1,50(2)$ в области $5-17$ Фм. Вариационные параметры и коэффициенты разложения для радиальной волновой функции этого потенциала приведены в табл. 16.

Вариант (33) потенциала СС в вариационном методе приводит к энергии связи $-1,943499$ МэВ с величиной невязок $6 \cdot 10^{-14}$, таким же, как в

Таблица 17. Вариационные параметры и коэффициенты разложения радиальной ВФ в $p^{12}\text{C}$ -системе для варианта (33) потенциала СС

i	β_i	C_i
1	1,271482702554672E-002	2,219877609724907E-004
2	9,284155511162226E-002	2,240043561912315E-002
3	3,485413978134982E-001	2,407314126671507E-001
4	3,088717918378341E-002	2,494885124596691E-003
5	1,815363020074388E-001	8,792233462610707E-002
6	5,918532693855678E-001	3,652121068403727E-001
7	3,909887088341156E+000	-1,906081640167417E-002
8	1,6356080812096500E+001	-1,111922033874987E-002
9	9,358886757095011E-001	2,314583156796476E-001
10	5,673177540516311E-002	5,956470542991426E-003

КРМ-расчетах, среднеквадратичным радиусом и асимптотической константой 1,36(2) в области 5–17 Фм. Вариационные параметры радиальной волновой функции для этого потенциала приведены в табл. 17.

Таким образом, приведенные пары потенциалов с ЗС для рассеяния в ${}^2S_{1/2}$ -волне и для связанного состояния, правильно передающего энергию связи, приводят одновременно к описанию резонанса в S -факторе и резонанса в 2S -фазе рассеяния. Наилучшие результаты по описанию характеристик процессов рассеяния, радиационного $p^{12}\text{C}$ -захвата при низких энергиях и S -фактора при 25 кэВ получаются для варианта (33) потенциала взаимодействия. В этих расчетах масса протона полагалась равной единице.

С другой стороны, если использовать мелкие потенциалы ${}^2S_{1/2}$ -волны без запрещенного состояния, например, с параметрами

$$\begin{aligned} V_S &= -15,87 \text{ МэВ}, & \alpha_S &= 0,1 \text{ Фм}^{-2}, \\ V_S &= -18,95 \text{ МэВ}, & \alpha_S &= 0,125 \text{ Фм}^{-2}, \\ V_S &= -21,91 \text{ МэВ}, & \alpha_S &= 0,15 \text{ Фм}^{-2}, \end{aligned} \quad (34)$$

то вообще не удастся правильно передать величину максимума S -фактора радиационного захвата. Не удастся описать абсолютную величину S -фактора, которая для любых вариантов потенциалов рассеяния (34) и СС оказывается выше экспериментального максимума в 2–3 раза. Причем для всех приведенных мелких потенциалов вида (34) вполне удастся воспроизвести резонансное поведение ${}^2S_{1/2}$ -фазы рассеяния. При уменьшении ширины ${}^2S_{1/2}$ -потенциала, т.е. увеличении α , величина максимума S -фактора растет и, например, для последнего варианта ${}^2S_{1/2}$ -потенциала рассеяния из (34) превышает экспериментальное значение примерно в три раза.

Следует отметить, что во всех расчетах сечение, соответствующее электрическому $E1$ -переходу из дублетного ${}^2D_{3/2}$ -состояния рассеяния на основное ${}^2P_{1/2}$ связанное состояние ядра ${}^{13}\text{N}$, оказывается на 4–5 порядков меньше, чем сечение перехода из ${}^2S_{1/2}$ -состояния рассеяния. Так что основной вклад в расчетный S -фактор процесса $p^{12}\text{C} \rightarrow {}^{13}\text{N}\gamma$ дает $E1$ -переход из 2S -волны рассеяния на основное состояние ядра ${}^{13}\text{N}$.

Таким образом, на основе ПКМ и глубокого ${}^2S_{1/2}$ -потенциала с ЗС удастся совместить описание астрофизического S -фактора и ${}^2S_{1/2}$ -фазы рассеяния в резонансной области энергий 0,457 МэВ (л.с.) и получить разумные значения для зарядового радиуса и асимптотической константы. Мелкие потенциалы рассеяния не позволяют одновременно описать S -фактор и 2S -фазу рассеяния при любых рассмотренных комбинациях $p^{12}\text{C}$ -взаимодействий [120].

6. СИСТЕМА ${}^4\text{He}^{12}\text{C}$

Рассмотрим теперь процесс радиационного захвата ${}^{12}\text{C}({}^4\text{He},\gamma){}^{16}\text{O}$, который, наряду с тройным гелиевым захватом, присутствует в цепочке термоядерных реакций на горячей стадии развития звезд, когда температура внутри звезды составляет сотни миллионов кельвинов [121]. При такой высокой температуре взаимодействующие частицы имеют достаточную энергию для существенного увеличения вероятности прохождения через кулоновский барьер в область сильного взаимодействия, а значит, для увеличения вклада такой реакции в полный энергетический баланс звезды.

Рассматриваемая реакция приводит к образованию стабильного ядра ${}^{16}\text{O}$, которое является промежуточным звеном в процессе образования более тяжелых элементов, например, с помощью реакций ${}^{16}\text{O}({}^4\text{He},\gamma){}^{20}\text{Ne}$ и ${}^{20}\text{Ne}({}^4\text{He},\gamma){}^{24}\text{Mg}$ и т.д. [100]. Поэтому знание сечения этой реакции в зависимости от энергии является важным для ядерной астрофизики. Однако длительное время существовали большие неопределенности в точном определении скорости реакции ${}^{12}\text{C}({}^4\text{He},\gamma){}^{16}\text{O}$, и только сравнительно недавно появились новые экспериментальные данные в области энергий 1,9–4,9 МэВ [122], которые имеют высокую точность и, по-видимому, устраняют большую часть этих неопределенностей.

В данном разделе будут приведены результаты выполненного нами фазового анализа упругого ${}^4\text{He}^{12}\text{C}$ -рассеяния при низких энергиях. Заметим, что в разных ядерных системах в зависимости от энергии сталкивающихся частиц число параметров возникающей при этом многопараметрической вариационной задачи для поиска фаз рассеяния может колебаться от 1–2 до 20–40 [73, 123]. Далее, по найденным фазам упругого рассеяния будут построены потенциалы ${}^4\text{He}^{12}\text{C}$ -взаимодействия, позволяющие правильно опи-

сывать полученные фазы рассеяния и энергии связанных состояний ядра ^{16}O в предположении $^4\text{He}^{12}\text{C}$ кластерной конфигурации. И в итоге в потенциальной кластерной модели будет исследована возможность описания астрофизического *S*-фактора реакции радиационного захвата $^4\text{He}^{12}\text{C}$ при малых энергиях.

6.1. Дифференциальные сечения. В случае упругого рассеяния нетождественных частиц с нулевым спином выражение для сечения принимает наиболее простой вид [32]

$$\frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega} = |f(\theta)|^2, \quad (35)$$

где полная амплитуда рассеяния $f(\theta)$ представляется в виде суммы кулоновской $f_c(\theta)$ и ядерной $f_N(\theta)$ амплитуд

$$f(\theta) = f_c(\theta) + f_N(\theta),$$

которые выражаются через ядерные ($\delta_L \rightarrow \delta_L + i\Delta_L$) и кулоновские (σ_L) фазы рассеяния, а вид этих амплитуд приведен в разд. 4.

6.2. Фазовый анализ. Приведем теперь результаты фазового анализа, полученные для $^4\text{He}^{12}\text{C}$ упругого рассеяния в области от 1,5 до 6,5 МэВ. Ранее фазовый анализ дифференциальных сечений при энергиях 2,5–5 МэВ был проведен в работе [124]. Описание таких фаз рассеяния на основе потенциалов с запрещенными состояниями было выполнено нами в работе [125]. В данной работе, используя экспериментальные данные по функциям возбуждения при семи углах из [124], мы повторили фазовый анализ [124] в области энергий 2,5–4,5 МэВ. Заметим, что измерения функций возбуждения при таком небольшом количестве точек по углам недостаточно, чтобы с хорошей точностью воспроизвести форму угловых распределений даже при низких энергиях. Поэтому фазовый анализ не позволяет получить полностью однозначные значения фаз рассеяния, особенно в *S*-волне, несмотря на то, что в качестве начальных фаз были использованы известные результаты фазового анализа из работы [124].

Результаты нашего анализа приведены на рис. 23–27. На рис. 23 показаны значения среднего χ^2 , которые получены для различных энергий рассеяния. Как видно из рисунков, *S*-фаза несколько отличается от результатов работы [124], а фазы во всех остальных парциальных волнах вполне согласуются с результатами [124]. Поскольку данные по функциям возбуждения брались из рисунков работы [124], возможная ошибка в нашем фазовом анализе может составлять 3–5°, что вполне способно объяснить расхождение в *S*-фазе.

Далее, в работе [126] был выполнен очень аккуратный фазовый анализ экспериментальных данных при 49 энергиях в области от 1,5 до 6,5 МэВ. Используя эти данные, мы провели свой фазовый анализ при энергиях 1,466,

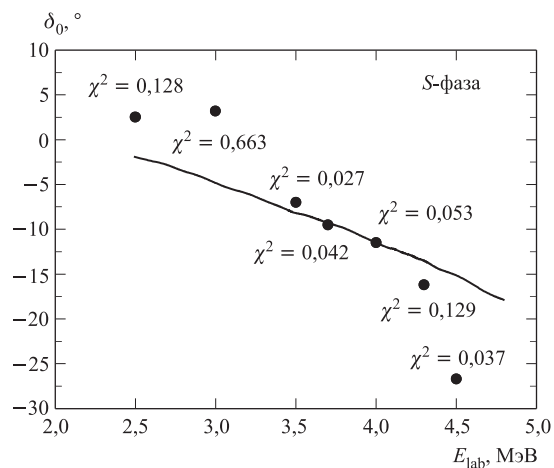


Рис. 23. *S*-фаза упругого ${}^4\text{He}^{12}\text{C}$ -рассеяния. Кривая — данные работы [124]; кружки — наши результаты, полученные на основе данных [124]

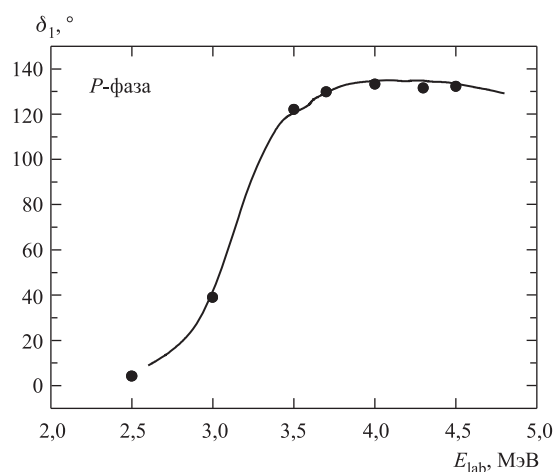


Рис. 24. *P*-фаза упругого ${}^4\text{He}^{12}\text{C}$ -рассеяния. Обозначения те же, что и на рис. 23

1,973, 2,073, 2,870, 3,371, 4,851, 5,799 и 6,458 МэВ. Результаты, полученные в нашем анализе, представлены в табл. 18–25 вместе со средними значениями χ^2 в сравнении с табличными данными работы [126]. В табл. 26 показан спектр резонансных уровней, наблюдаемых в упругом ${}^4\text{He}^{12}\text{C}$ -рассеянии [127].

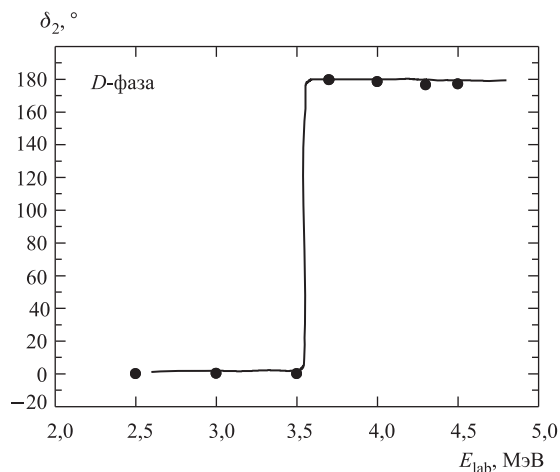


Рис. 25. D -фаза упругого ${}^4\text{He}^{12}\text{C}$ -рассеяния. Обозначения те же, что и на рис. 23

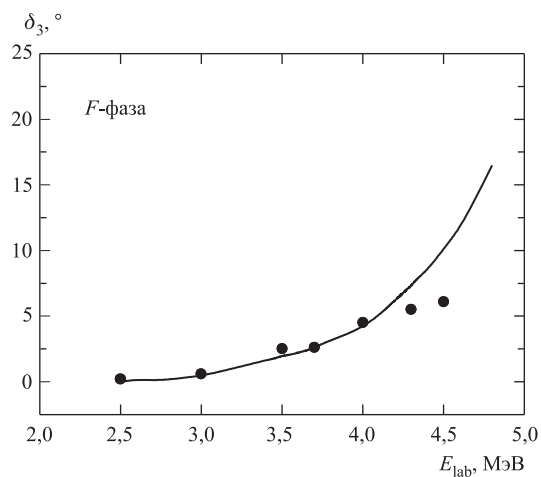
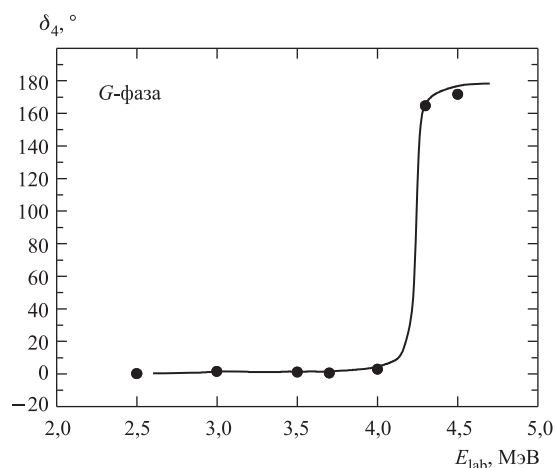


Рис. 26. F -фаза упругого ${}^4\text{He}^{12}\text{C}$ -рассеяния. Обозначения те же, что и на рис. 23

Из приведенных таблиц видно, что энергия ${}^4\text{He}^{12}\text{C}$ -рассеяния 3,371 МэВ приходится на уровень 3,324 МэВ с шириной (480 ± 20) кэВ. Хотя в таблицах работы [126] не приводится фаза для S -волны (прочерк в табл. 22) при этой энергии, наш фазовый анализ на основе действительных фаз рассеяния позволяет определить эту фазу, которая приведена в табл. 22 с $\chi^2 = 0,31$ при 10 %-х ошибках определения экспериментальных данных из рисунка работы [126].

Рис. 27. G-фаза упругого ${}^4\text{He}^{12}\text{C}$ -рассеяния. Обозначения те же, что и на рис. 23Таблица 18. Результаты фазового анализа ${}^4\text{He}^{12}\text{C}$ упругого рассеяния и их сравнение с данными работы [126] при энергии 1,466 МэВ ($\chi^2 = 0,055$)

L	$\delta_L,^\circ$ (данная работа)	$\delta_L,^\circ$ [126]
0	-0,2	$0,5 \pm 1,0$
1	-0,4	$-0,1 \pm 1,0$
2	-1,1	$-0,8 \pm 1,0$

Таблица 19. Результаты фазового анализа ${}^4\text{He}^{12}\text{C}$ упругого рассеяния и их сравнение с данными работы [126] при энергии 1,973 МэВ ($\chi^2 = 0,077$)

L	$\delta_L,^\circ$ (данная работа)	$\delta_L,^\circ$ [126]
0	-2,6	$-0,5 \pm 1,0$
1	0,0	$0,9 \pm 1,7$
2	-1,2	$-0,1 \pm 1,3$

Таблица 20. Результаты фазового анализа ${}^4\text{He}^{12}\text{C}$ упругого рассеяния и их сравнение с данными работы [126] при энергии 2,073 МэВ ($\chi^2 = 0,029$)

L	$\delta_L,^\circ$ (данная работа)	$\delta_L,^\circ$ [126]
0	-1,2	$0 \pm 0,8$
1	-0,1	$0,1 \pm 1,2$
2	-1,1	$-0,6 \pm 0,9$

Таблица 21. Результаты фазового анализа ${}^4\text{He}^{12}\text{C}$ упругого рассеяния и их сравнение с данными работы [126] при энергии 2,870 МэВ ($\chi^2 = 0,038$)

L	$\delta_L,^\circ$ (данная работа)	$\delta_L,^\circ$ [126]
0	-3,1	$-2,1 \pm 1,1$
1	21,3	$22,0 \pm 2,1$
2	0,0	$0,4 \pm 0,9$
3	0,5	$1,0 \pm 0,5$

Энергия 5,799 МэВ точно приходится на уровень $(5,809 \pm 18)$ МэВ, и в таблицах работы [126] не приводятся значения фаз рассеяния для некоторых парциальных волн (прочерки в табл. 24). В нашем фазовом анализе вполне удается описать дифференциальные сечения рассеяния со средним значением $\chi^2 = 0,37$ и найти все парциальные фазы.

Таблица 22. Результаты фазового анализа ${}^4\text{He}^{12}\text{C}$ упругого рассеяния и их сравнение с данными работы [126] при энергии 3,371 МэВ ($\chi^2 = 0,31$)

L	$\delta_L,^\circ$ (данная работа)	$\delta_L,^\circ$ [126]
0	169,4	—
1	103,4	$103,7 \pm 1,7$
2	-1,7	$0,0 \pm 0,7$
3	0,2	$0,8 \pm 0,6$

Таблица 23. Результаты фазового анализа ${}^4\text{He}^{12}\text{C}$ упругого рассеяния и их сравнение с данными работы [126] при энергии 4,851 МэВ ($\chi^2 = 0,26$)

L	$\delta_L,^\circ$ (данная работа)	$\delta_L,^\circ$ [126]
0	164,2	$164 \pm 1,1$
1	128,4	$129,5 \pm 0,9$
2	177,1	$178,8 \pm 0,9$
3	15,5	$16,4 \pm 0,8$
4	176,9	$177,2 \pm 0,8$
5	-0,3	$0,5 \pm 0,5$

Таблица 24. Результаты фазового анализа ${}^4\text{He}^{12}\text{C}$ упругого рассеяния и их сравнение с данными работы [126] при энергии 5,799 МэВ ($\chi^2 = 0,37$)

L	$\text{Re } \delta_L,^\circ$ (данная работа)	$\text{Re } \delta_L,^\circ$ [126]
0	162,2	—
1	128,2	—
2	83,2	$82,3 \pm 0,6$
3	86,0	—
4	173,8	$175,3 \pm 0,7$
5	-1,0	$0,2 \pm 0,4$

Таблица 25. Результаты фазового анализа ${}^4\text{He}^{12}\text{C}$ упругого рассеяния и их сравнение с данными работы [126] при энергии 6,458 МэВ ($\chi^2 = 0,41$)

L	$\delta_L,^\circ$ (данная работа)	$\delta_L,^\circ$ [126]
0	151,2	$153 \pm 2,5$
1	115,8	$119,4 \pm 2,1$
2	172,2	$172,2 \pm 1,9$
3	120,8	$122,0 \pm 2,4$
4	176,4	$179,1 \pm 1,2$
5	0,8	$2,2 \pm 0,8$
6	0,1	$0,4 \pm 0,4$

Таблица 26. Спектр уровней ядра ${}^{16}\text{O}$ в упругом ${}^4\text{He}^{12}\text{C}$ -рассеянии с изоспином $T = 0$ [127]. J^π — полный момент и четность, E_{lab} — энергия налетающей α -частицы, Γ_{cm} — ширина уровня

E_{lab} , МэВ	J^π	Γ_{cm} , кэВ
3,324	1^-	480 ± 20
$3,5770 \pm 0,5$	2^+	$0,625 \pm 0,1$
4,259	4^+	27 ± 3
$5,245 \pm 8$	4^+	$0,28 \pm 0,05$
5,47	0^+	2500
$5,809 \pm 18$	2^+	73 ± 5
$5,92 \pm 20$	3^-	800 ± 100
$6,518 \pm 10$	0^+	$1,5 \pm 0,5$
$7,043 \pm 4$	1^-	99 ± 7
$7,82 \pm 10$	2^+	150 ± 11
$7,960 \pm 10$	3^-	110 ± 30

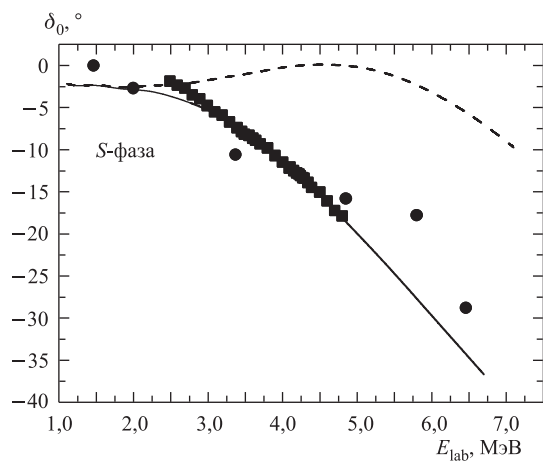


Рис. 28. S -фаза упругого ${}^4\text{He}^{12}\text{C}$ -рассеяния. Квадраты — данные работы [124]; кружки — наши результаты [128], полученные на основе данных [126]; кривые — результаты расчетов с найденными потенциалами

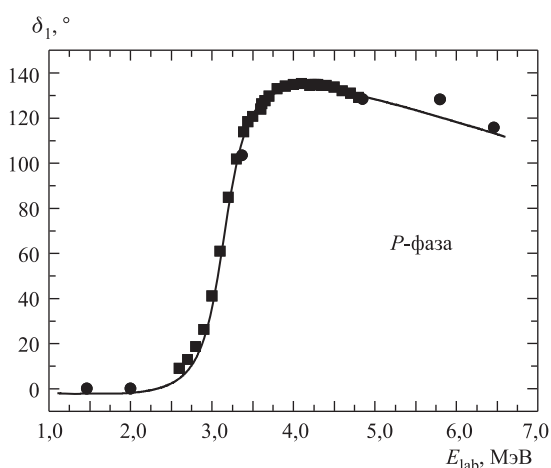
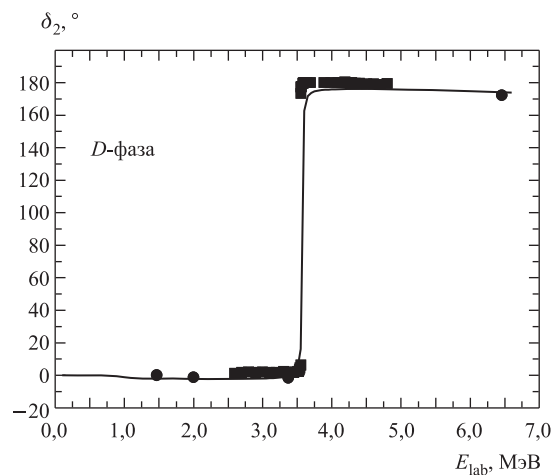
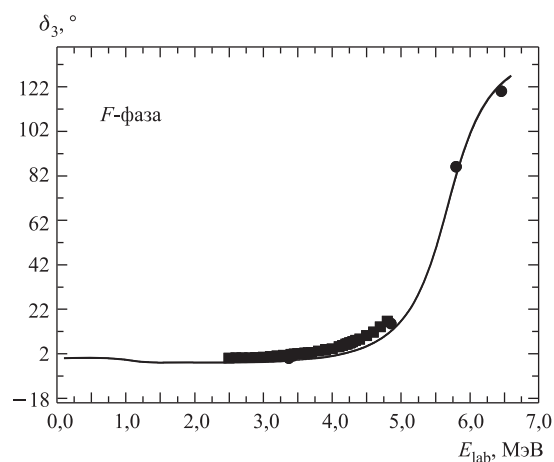


Рис. 29. P -фаза упругого ${}^4\text{He}^{12}\text{C}$ -рассеяния. Обозначения те же, что и на рис. 28

Другие данные при нерезонансных энергиях (2,870, 4,851 и 6,458 МэВ) описываются фазами, которые совпадают с данными работы [126] в пределах приведенных в ней ошибок измерения фаз и с учетом возможных ошибок, возникающих при определении численных значений для экспериментальных фаз рассеяния из рисунков [126]. Последние три энергии, 1,466, 1,973 и


 Рис. 30. D -фаза упругого ${}^4\text{He}^{12}\text{C}$ -рассеяния. Обозначения те же, что и на рис. 28

 Рис. 31. F -фаза упругого ${}^4\text{He}^{12}\text{C}$ -рассеяния. Обозначения те же, что и на рис. 28

2,073 МэВ, по сути, совместимы с нулевыми значениями ядерных фаз и соответствуют чисто кулоновскому, т. е. резерфордскому рассеянию.

Небольшие отличия в фазах рассеяния могут быть обусловлены различными значениями констант или масс частиц, которые используются в таком анализе. Например, можно использовать точные значения масс частиц [23] или же их целые величины, а константа \hbar^2/m может быть взята равной, например, 41,47 или, более точно, 41,4686 МэВ \cdot Фм². Точность определения

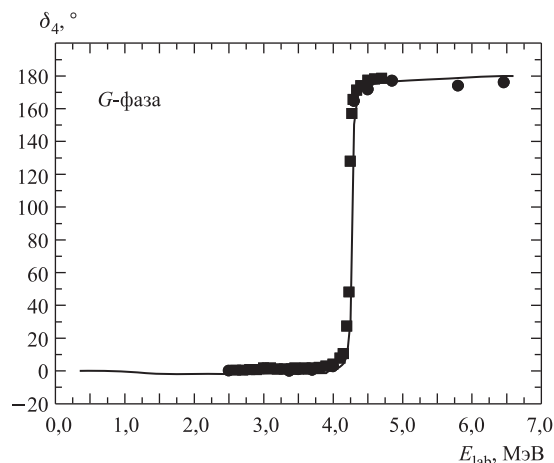


Рис. 32. G -фаза упругого ${}^4\text{He}^{12}\text{C}$ -рассеяния. Обозначения те же, что и на рис. 28

фаз в проведенном фазовом анализе на основе данных [126] оценивается нами на уровне $1\text{--}2^\circ$.

На рис. 28–32 приведено сравнение результатов нашего фазового анализа [128], полученного на основе экспериментальных данных работы [126] (кружки), и фазового анализа работы [124] (квадраты). Как видно из приведенных табл. 18–25 и рис. 28–32, полученные фазы практически совпадают с результатами работы [126], но несколько отличаются от данных [124], особенно в S -волне.

6.3. Описание фаз рассеяния в потенциальной модели. Рассмотрим вначале классификацию орбитальных S -состояний ${}^4\text{He}^{12}\text{C}$ -системы, которая позволяет определить общее количество ЗС в потенциале S -волнового взаимодействия. Полученные в результате потенциалы можно использовать в дальнейшем для расчетов астрофизических S -факторов, например, реакции захвата ${}^{12}\text{C}({}^4\text{He}, \gamma){}^{16}\text{O}$ [20].

Возможные орбитальные схемы Юнга системы ${}^4\text{He}^{12}\text{C}$ определяются по теореме Литлвуда [116], что в данном случае дает $\{444\} \times \{4\} = \{844\} + \{754\} + \{7441\} + \{664\} + \{655\} + \{6442\} + \{6541\} + \{5551\} + \{5542\} + \{5443\} + \{4444\}$ [125]. В модели оболочек схемы Юнга $\{4\}$ и $\{444\}$ соответствуют ядрам ${}^4\text{He}$ и ${}^{12}\text{C}$ в основном состоянии. В соответствии с правилами [116] можно сделать вывод, что разрешенной принципом Паули схемой Юнга для ядра ${}^{16}\text{O}$ будет только $\{4444\}$, а все остальные орбитальные конфигурации запрещены. В частности, все возможные конфигурации, где в первой строке находится больше четырех клеток, не могут существовать, так как в S -оболочке не может быть больше четырех нуклонов.

Используя правило Эллиотта [116], можно определить орбитальные моменты, соответствующие различным схемам Юнга. В результате находим, что состояния ядра ^{16}O с моментом $L = 0$ в $^4\text{He}^{12}\text{C}$ -системе соответствуют следующим орбитальным схемам: {4444}, {5551}, {664}, {844} и {6442}. Этот результат можно использовать для определения числа связанных запрещенных состояний в потенциале основного состояния. Поскольку в основном состоянии разрешена только симметрия {4444}, а остальные четыре схемы Юнга запрещены, то потенциал $^4\text{He}^{12}\text{C}$ -взаимодействия должен иметь четыре связанных запрещенных состояния и одно разрешенное СС [125].

В работе [125] были получены параметры потенциала вида (8), но со сферическим кулоновским взаимодействием [32], при $R_c = 3,55$ Фм для основного состояния $^4\text{He}^{12}\text{C}$ -системы в ядре ^{16}O . Этот потенциал строился исходя из требований описания таких характеристик, как энергия связи, зарядовый радиус, кулоновский формфактор при малых переданных импульсах, вероятности электромагнитных переходов между связанными уровнями и парциальные фазы упругого рассеяния.

Далее, в работе [129] были уточнены параметры потенциала основного $1S$ -состояния [127] (рис. 33) ^{16}O в $^4\text{He}^{12}\text{C}$ -канале и при таком же кулоновском радиусе получено

$$V_{1S} = -256,845472 \text{ МэВ}, \quad \alpha = 0,189 \text{ Фм}^{-2}. \quad (36)$$

Конечно-разностным методом [25] для этого потенциала получена энергия связи $-7,161950$ МэВ при экспериментальной величине $-7,16195$ МэВ [127] и зарядовый радиус $2,705$ Фм при радиусах ^4He $1,671(14)$ Фм [57] и ^{12}C $2,4829(19)$ Фм [118], а экспериментальное значение радиуса ядра ^{16}O равно $2,710(15)$ Фм [127]. Такой потенциал имеет ЗС при четырех энергиях: $-37,6$; $-80,8$; $-134,5$; $-197,2$ МэВ, в соответствии с приведенной выше классификацией ЗС и РС.

Для потенциала первого возбужденного $2S$ -уровня с экспериментальной энергией $-1,113$ МэВ [127], которая им правильно воспроизводится, также получены более точные параметры

$$V_0 = -143,1092 \text{ МэВ}, \quad \alpha = 0,111 \text{ Фм}^{-2}.$$

Он приводит к ЗС при $-16,9$, $-40,5$, $-70,6$ и $-106,1$ МэВ.

При уточнении параметров потенциала связанного состояния в $1P$ -волне получены следующие значения:

$$V_0 = -161,2665 \text{ МэВ}, \quad \alpha = 0,16 \text{ Фм}^{-2}.$$

^{16}O	$G \ 4^+$	3,19
	$D \ 2^+$	2,69
	$P \ 1^-$	2,46
$^4\text{He}^{12}\text{C}$	$1P \ 1^-$	-0,045
	$1D \ 2^+$	-0,245
	$1F \ 3^-$	-1,032
	$2S \ 0^+$	-1,113
	$1S \ 0^+$	-7,162

Рис. 33. Спектр уровней ядра ^{16}O

Он точно передает энергию связанного состояния $-0,045$ МэВ и имеет три ЗС при энергиях $-20,4$, $-52,0$, $-92,5$ МэВ.

Для параметров потенциала связанного состояния в $1D$ -волне, показанного на рис. 33, получено

$$V_0 = -90,3803 \text{ МэВ}, \quad \alpha = 0,1 \text{ Фм}^{-2}.$$

Он приводит к энергии связанного уровня $-0,245$ МэВ в полном соответствии с данными [127] и содержит два запрещенных связанных состояния при $-14,0$ и $-34,3$ МэВ.

Для $1F$ -состояния ядра ^{16}O в $^4\text{He}^{12}\text{C}$ -канале получены следующие значения параметров:

$$V_0 = -191,4447 \text{ МэВ}, \quad \alpha = 0,277 \text{ Фм}^{-2}.$$

Потенциал дает энергию связанного состояния $-1,032$ МэВ, согласующуюся с данными [127], и содержит одно запрещенное связанное состояние при энергии $-38,3$ МэВ.

Вариационным методом с разложением волновой функции по неортонормальному гауссову базису при размерности базиса $N = 8$ для основного $1S$ -состояния ядра ^{16}O с параметрами потенциала (36) получена энергия $-7,16194$ МэВ, т.е. примерно на 10 эВ меньше экспериментальной величины. Параметры вариационной ВФ относительного движения кластеров в ОС ядра ^{16}O вида (9) приведены в табл. 27.

Для зарядового радиуса получено значение $2,697$ Фм, которое лишь немного меньше КРМ-результата. Однако нужно отметить, что пока не удается построить ВФ с большими значениями размерности базиса N , как обычно делалось в более легких кластерных системах (см., например, [45]), поэтому

Таблица 27. Вариационные параметры и коэффициенты разложения радиальной ВФ связанного состояния $^4\text{He}^{12}\text{C}$ -системы для потенциала (36). Нормировка функции с этими коэффициентами на интервале $0-25$ Фм равна $N = 1,0000000000000735$

i	β_i	C_i
1	8,763690790288099E-002	-1,911450719348557E-001
2	1,866025286442256E-001	-2,207934474863762
3	4,827753981321283E-001	28,389690447396200
4	8,199789461942612E-001	-96,796133806414110
5	1,201089178851195	117,191836404848400
6	1,811929119752430	-48,033080106666700
7	2,549438805955688	-8,312967983049469E-001
8	6,019066491886866	2,748007062675085E-003

значения этой ВФ уже при $R > 7,5$ Фм уменьшаются быстрее, чем это следует из асимптотики (10). При использовании такой ВФ ее нужно сшивать с асимптотическим выражением на расстояниях порядка 7,0–7,5 Фм. Только увеличение размерности базиса до 10 и более может позволить получить правильную асимптотику вариационной ВФ на расстояниях порядка 10–15 Фм [45].

Потенциал основного $1S$ -состояния не приводит к правильной S -фазе рассеяния, как показано на рис. 28 штриховой кривой. Для того чтобы описать фазы, полученные из фазового анализа, приходится изменить его глубину и принять

$$V_0 = -155 \text{ МэВ}, \quad \alpha = 0,189 \text{ Фм}^{-2}$$

с таким же кулоновским радиусом. Результаты расчета S -фазы с таким потенциалом показаны на рис. 28 сплошной линией. Потенциал также содержит четыре связанных запрещенных состояния при энергиях $-1,3$, $-25,1$, $-61,5$ и $-107,7$ МэВ и, как видно на рис. 28, вполне приемлемо описывает S -фазу, полученную в работе [124].

Для P -, D -, F - и G -волн рассеяния получены потенциалы взаимодействия, также отличные от потенциалов связанных состояний. Приведем их параметры вместе с энергиями ЗС ($R_c = 3,55$ Фм):

$$\begin{aligned} V_P &= -145,0 \text{ МэВ}, & \alpha_P &= 0,160 \text{ Фм}^{-2}, & \text{ЗС: } & -13,6; -42,1; -79,7 \text{ МэВ}; \\ V_D &= -435,25 \text{ МэВ}, & \alpha_D &= 0,592 \text{ Фм}^{-2}, & \text{ЗС: } & -61,9; -167,0 \text{ МэВ}; \\ V_F &= -73,4 \text{ МэВ}, & \alpha_F &= 0,125 \text{ Фм}^{-2}, & \text{ЗС: } & -7,5 \text{ МэВ}; \\ V_G &= -55,55 \text{ МэВ}, & \alpha_G &= 0,1 \text{ Фм}^{-2}, & \text{ЗС: } & \text{нет.} \end{aligned}$$

Результаты расчета фаз для этих потенциалов показаны на рис. 29–32 сплошными кривыми.

Таким образом, получены потенциалы ${}^4\text{He}{}^{12}\text{C}$ -взаимодействия для состояний рассеяния и дискретных уровней, правильно описывающие фазы упругого рассеяния и каналные энергии состояний. Отличие потенциалов, описывающих фазы рассеяния, от потенциалов, описывающих характеристики связанных состояний, может быть объяснено малостью вклада рассмотренного канала в связанных состояниях ядра ${}^{16}\text{O}$. Возможно, простая кластерная ${}^4\text{He}{}^{12}\text{C}$ -модель ядра ${}^{16}\text{O}$, в отличие от более легких ядер [67], не способна полностью описать различные характеристики ядра ${}^{16}\text{O}$ и ${}^4\text{He}{}^{12}\text{C}$ -канала рассеяния на базе единых потенциалов.

6.4. Астрофизический S -фактор. Рассмотрим теперь на основе потенциальной кластерной модели с запрещенными состояниями астрофизический S -фактор реакции радиационного ${}^{12}\text{C}({}^4\text{He}, \gamma){}^{16}\text{O}$ захвата при энергиях от 0,3 до 4,0 МэВ и сравним его с результатами новых экспериментальных данных работы [122].

Считается, что экспериментальные данные, полученные ниже 2,5 МэВ, обусловлены $E1$ -переходом [122]. Однако в рассматриваемой модели такой переход возможен только благодаря отличию масс частиц от соответствующих целочисленных значений. Результаты расчета S -фактора этого перехода оказались на два-три порядка меньше экспериментальных данных, хотя полученный S -фактор и имеет правильную форму, обусловленную резонансным поведением P -фазы рассеяния [125].

Тем самым используемая модель не может правильно описать экспериментальные данные на основе $E1$ -процесса. Однако в рамках ПКМ с ЗС эти данные вполне описываются на основе только $E2$ -переходов из различных парциальных волн рассеяния на основное связанное состояние и некоторые возбужденные связанные уровни ядра ^{16}O , показанные на рис. 33. Эти результаты могут представлять некоторый интерес с точки зрения демонстрации общих возможностей потенциальной кластерной модели, если допустить наличие $E2$ -процессов в рассматриваемом радиационном захвате при низких энергиях. Поэтому далее будем рассматривать только $E2$ -переходы и первый из них — это переход из D -волны рассеяния на основное связанное $1S$ -состояние ядра ^{16}O . Такой процесс приводит к S -фактору, показанному на рис. 34 штрихпунктирной линией. Полученный S -фактор вполне объясняет эксперимент при энергиях 0,9–3,0 МэВ, но не описывает резонанс при 2,46 МэВ, поскольку этот резонанс обусловлен поведением P -фазы рассеяния в этой области энергий.

При энергиях от 2,5 до 3,0 МэВ расчетный S -фактор в целом передает положение и высоту пика, обусловленного резонансом в D -волне рассеяния при энергии 2,69 МэВ, но ширина уровня оказывается несколько больше экспериментальной. Это указывает на недостаточно быстрый подъем расчетной D -фазы рассеяния в области 2,69 МэВ резонанса.

Если допустить, что эксперимент включает переходы на $1P$ -уровень, то можно рассмотреть $E2$ -процесс из P -волны рассеяния на связанное $1P$ -состояние ядра ^{16}O при энергии $-0,045$ МэВ (рис. 33). Результаты этого расчета, показанные на рис. 34 штриховой линией, вполне передают форму резонанса при 2,46 МэВ.

Штриховой с двумя точками линией показаны результаты расчета возможного $E2$ -перехода из G -волны рассеяния на связанное $1D$ -состояние, которые правильно передают положение и ширину максимума 4^+ -резонанса, но его величина оказывается примерно в два раза меньше экспериментальных данных. Следует отметить, что не удалось найти такие параметры потенциала для G -волны, чтобы правильно описать величину S -фактора при энергии 4^+ -резонанса. Сплошной линией на рис. 34 приведена сумма всех трех $E2$ -переходов, которая в целом описывает экспериментальное поведение астрофизического S -фактора при энергиях от 0,9 до 4,0 МэВ.

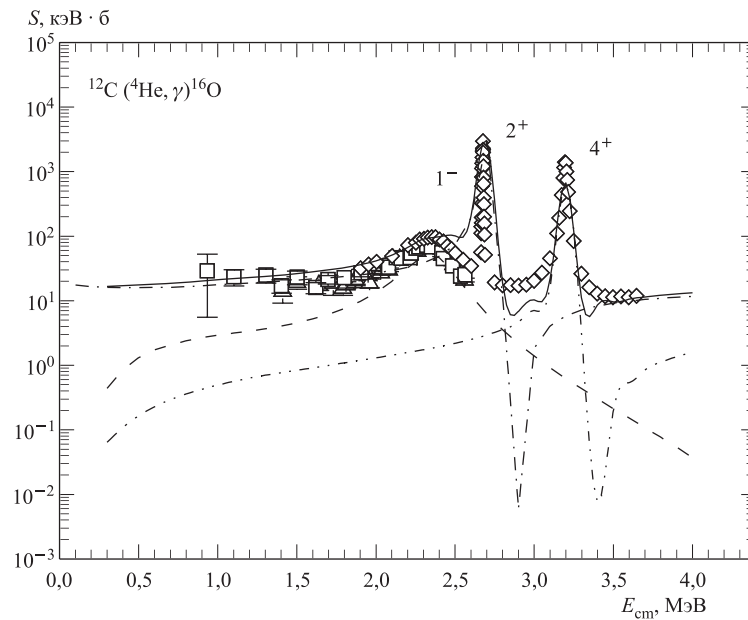


Рис. 34. Астрофизический S -фактор радиационного ${}^4\text{He}^{12}\text{C}$ -захвата. Экспериментальные данные: \square — из обзора [20]; \triangle — [130], ∇ — [131]; \diamond — [122]. Кривые — расчет S -фактора для разных переходов

Если использовать потенциалы с другим числом ЗС, то для потенциала G -волны при одном ЗС

$$V_G = -110,7 \text{ МэВ}, \quad \alpha_G = 0,127 \text{ Фм}^{-2}, \quad \text{ЗС: } -13,6 \text{ МэВ}$$

или двух ЗС

$$V_G = -222,4 \text{ МэВ}, \quad \alpha_G = 0,127 \text{ Фм}^{-2}, \quad \text{ЗС: } -42,8; -14,6 \text{ МэВ}$$

расчетная величина пика 4^+ -резонанса заметно уменьшается, а уменьшение числа ЗС в связанном $1D$ -состоянии до одного $V_D = -254,8 \text{ МэВ}$, $\alpha_D = 0,592 \text{ Фм}^{-2}$, ЗС: $-57,0 \text{ МэВ}$ или вообще без ЗС $V_D = -57,7833 \text{ МэВ}$, $\alpha_D = 0,1 \text{ Фм}^{-2}$ не приводит к существенному увеличению S -фактора в области 4^+ -резонанса.

Наш расчетный S -фактор при 300 кэВ, обусловленный $E2$ -процессом с переходом из D -волны на ОС ядра, оказывается равным 16,0 кэВ·б, а при 100 кэВ его величина несколько больше — 17,5 кэВ·б. Однако эти результаты заметно меньше известных данных для 300 кэВ, приводящих, например,

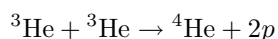
к величинам $S_{E1} = 101(17)$ и $S_{E2} = 42^{(+16)}_{(-23)}$ [132], $S_{E1} = 79(21)$ или $82(26)$ кэВ·б [133] и $S_{E2} = 120(60)$ кэВ·б [20]. В методе генераторных координат [134], учитывающих различные кластерные конфигурации, при 300 кэВ получено $S_{E1} = 160$ кэВ·б и $S_{E2} = 70$ кэВ·б.

Как видно, эти результаты сильно различаются между собой, а из имеющихся экспериментальных данных, приведенных на рис. 34, явно не следует, что при энергиях ниже 1 МэВ S -фактор испытывает резкий подъем и при 300 кэВ имеет значение порядка 100 кэВ·б. В области 1,1–1,8 МэВ величина S -фактора находится в интервале 16–25 кэВ·б с ошибками от 3 до 7 кэВ·б, а при 0,9 МэВ он имеет значение (29 ± 23) кэВ·б.

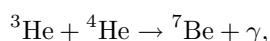
Таким образом, проведенный качественный анализ числа ЗС и РС в межкластерных взаимодействиях ${}^4\text{He}^{12}\text{C}$ -системы и полученные на его основе парциальные потенциалы, согласованные с фазами упругого рассеяния и энергиями связанных состояний ядра ${}^{16}\text{O}$, позволяют при определенных допущениях получить приемлемое описание имеющихся данных по астрофизическому S -фактору радиационного ${}^4\text{He}^{12}\text{C}$ -захвата при энергиях от 0,9 до 4,0 МэВ на основе вклада только $E2$ -переходов.

7. СИСТЕМЫ ${}^3\text{He}^4\text{He}$, ${}^3\text{H}^4\text{He}$ и ${}^2\text{H}^4\text{He}$

Радиационный захват ${}^3\text{He} + {}^4\text{He} \rightarrow {}^7\text{Be} + \gamma$ при сверхнизких энергиях представляет несомненный интерес для ядерной астрофизики, поскольку входит в протонный термоядерный цикл, и в самое последнее время появились новые экспериментальные данные по астрофизическим S -факторам этого процесса при энергиях до 90 кэВ, а радиационного ${}^3\text{H}^4\text{He}$ -захвата — до 50 кэВ. Протонный цикл может завершаться с вероятностью 69% (по данным работы [135] эта вероятность составляет 86%) процессом [100]



или реакцией с участием дозвездного ядра ${}^4\text{He}$



имеющей вероятность 31% [100] (по данным [135] вероятность составляет примерно 14%). Кроме того, реакции радиационного ${}^3\text{He}^4\text{He}$ - и ${}^2\text{H}^4\text{He}$ -захвата могут играть определенную роль при дозвездном нуклеосинтезе после Большого взрыва, когда температура Вселенной понизилась до $0,3 T_9$ ($T_9 = 10^9$ К) [136].

В данном разделе в рамках потенциальной кластерной модели с классификацией орбитальных состояний по схемам Юнга [137] и уточненными

параметрами потенциалов для основных состояний ядер ${}^7\text{Be}$, ${}^7\text{Li}$ и ${}^6\text{Li}$ рассмотрены астрофизические S -факторы процессов радиационного захвата ${}^3\text{He}{}^4\text{He}$ до 15 кэВ, ${}^3\text{H}{}^4\text{He}$ и ${}^2\text{H}{}^4\text{He}$ до 5 кэВ.

7.1. Потенциалы и фазы рассеяния. Как было показано в работе [137], орбитальные состояния в системах ${}^3\text{He}{}^4\text{He}$, ${}^3\text{H}{}^4\text{He}$ и ${}^2\text{H}{}^4\text{He}$ для ядер ${}^7\text{Be}$, ${}^7\text{Li}$ и ${}^6\text{Li}$, в отличие от более легких кластерных систем типа $p{}^2\text{H}$ или $p{}^3\text{H}$ [75, 101], являются чистыми по схемам Юнга. Поэтому ядерные потенциалы вида (8) с параметрами, полученными на основе фаз упругого рассеяния и со сферическим кулоновским членом [32], можно непосредственно использовать для рассмотрения характеристик связанных состояний этих ядер в потенциальной кластерной модели. Согласие получаемых при этом результатов с данными эксперимента будет зависеть, главным образом, от степени кластеризации таких ядер в рассматриваемых кластерных каналах. Поскольку вероятность кластеризации этих ядер сравнительно высока [116], то следует ожидать, что результаты расчетов должны в целом соответствовать имеющимся экспериментальным данным [21].

Параметры гауссовых потенциалов взаимодействия для чистых по схемам Юнга кластерных состояний в ядрах ${}^7\text{Li}$, ${}^7\text{Be}$ и ${}^6\text{Li}$, полученные ранее в наших работах [138, 139], приведены в табл. 28, а взаимодействия в системах ${}^3\text{H}{}^4\text{He}$ и ${}^3\text{He}{}^4\text{He}$ отличались только кулоновским членом. В табл. 28 приведены также энергии связанных запрещенных состояний для ${}^2\text{H}{}^4\text{He}$ -канала в ядре ${}^6\text{Li}$ и ${}^3\text{H}{}^4\text{He}$ -системы, которые мало отличаются от соответствующих значений для ${}^3\text{He}{}^4\text{He}$ -взаимодействий.

В S -волне для систем ${}^3\text{H}{}^4\text{He}$ и ${}^3\text{He}{}^4\text{He}$ эти связанные состояния соответствуют запрещенным схемам Юнга $\{7\}$ и $\{52\}$ (отвечающим осцилляторным состояниям относительного движения $NL = 00$ и 20 соответственно), в P -волне схеме $\{61\}$ (для $NL = 11$) при разрешенном связанном состоянии со

Таблица 28. Параметры потенциалов упругого ${}^3\text{H}{}^4\text{He}$ -, ${}^3\text{He}{}^4\text{He}$ - и ${}^2\text{H}{}^4\text{He}$ -рассеяния и энергии соответствующих им запрещенных связанных состояний [138, 139]. Параметр ширины потенциалов для ${}^3\text{H}{}^4\text{He}$ -, ${}^3\text{He}{}^4\text{He}$ -систем равен $\alpha = 0,15747 \text{ Фм}^{-2}$, а кулоновский радиус $R_c = 3,095 \text{ Фм}$. Для ${}^2\text{H}{}^4\text{He}$ -рассеяния и СС принято $R_c = 0$

${}^7\text{Li}$ и ${}^7\text{Be}$			${}^6\text{Li}$			
L_J	V_0 , МэВ	$E_{зс}({}^7\text{Li})$, МэВ	L_J	V_0 , МэВ	α , Фм^{-2}	$E_{зс}$, МэВ
${}^2S_{1/2}$	-67,5	-36,0, -7,4	3S_1	-76,12	0,2	-33,2
${}^2P_{1/2}$	-81,92	-27,5	3P_0	-68,0	0,22	-7,0
${}^2P_{3/2}$	-83,83	-28,4	3P_1	-79,0	0,22	-11,7
${}^2D_{3/2}$	-66,0	-2,9	3P_2	-85,0	0,22	-14,5
${}^2D_{5/2}$	-69,0	-4,1	3D_1	-63,0 (-45,0)	0,19 (0,15)	—
$F_{5/2}$	-75,9	—	3D_2	-69,0 (-52,0)	0,19 (0,15)	—
$F_{7/2}$	-84,8	—	3D_3	-80,88	0,19	—

схемой Юнга {43} (трехквантовое возбуждение $NL = 31$), а D -волна имеет ЗС со схемой {52} (двухквантовое возбуждение $NL = 22$) [67, 137]. Для ${}^2\text{H}^4\text{He}$ -системы в S -волне присутствует запрещенное связанное состояние со схемой {6} ($NL = 00$) и разрешенное связанное состояние с {42} ($NL = 20$), а в P -волне запрещено состояние со схемой {51} ($NL = 11$) [67, 137].

Качество описания фаз рассеяния демонстрируется на рис. 35–39, на которых приведены также экспериментальные данные из работ [140, 141] для ${}^3\text{He}^4\text{He}$, [141, 142] для ${}^3\text{H}^4\text{He}$ и [143–146] для ${}^2\text{H}^4\text{He}$ упругого рассеяния. Показанные ошибки обусловлены неточностями определения фаз, сканированных с рисунков работ [140, 141]. Для систем ${}^3\text{He}^4\text{He}$ и ${}^3\text{H}^4\text{He}$ приведены только S -фазы рассеяния, поскольку, как будет показано далее, именно переходы из S -волн на основное и первое возбужденное связанные состояния ядер ${}^7\text{Be}$ и ${}^7\text{Li}$ дают преобладающий вклад в S -фактор радиационного захвата. Из рис. 35–37 видно, что расчетные S -фазы для упругого ${}^3\text{H}^4\text{He}$ -, ${}^3\text{He}^4\text{He}$ - и ${}^2\text{H}^4\text{He}$ -рассеяния вполне описывают известные результаты фазовых анализов при низких энергиях.

Рис. 38 показывает, что данные по P -фазам ${}^2\text{H}^4\text{He}$ -рассеяния в разных работах сильно отличаются, так что построить P -потенциалы удается только приблизительно, но в целом они описывают фазы при низких энергиях, представляя определенный компромисс между результатами разных фазовых анализов. Причем при энергии ниже 1 МэВ, т. е. в области определения S -факторов, результаты расчета всех P -фаз мало различаются и близки к нулю.

На рис. 39 штриховыми линиями показаны результаты расчета 3D_1 - и 3D_2 -фаз ${}^2\text{H}^4\text{He}$ -рассеяния, полученные с измененными потенциалами, пара-

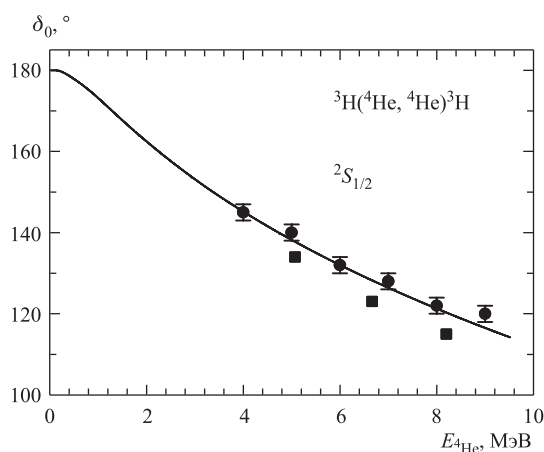


Рис. 35. ${}^2S_{1/2}$ -фаза упругого ${}^3\text{H}^4\text{He}$ -рассеяния при низких энергиях. Кружки — экспериментальные данные из работы [141]; квадраты — [142]

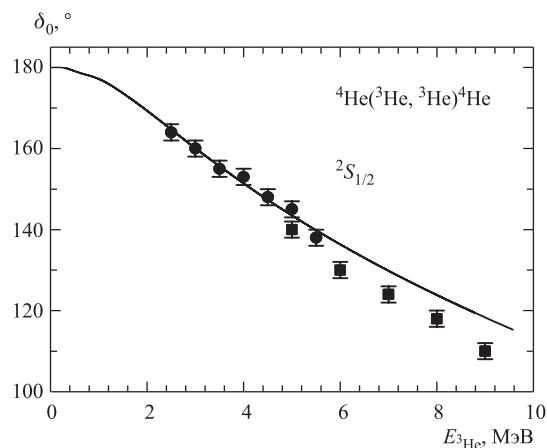


Рис. 36. ${}^2S_{1/2}$ -фаза упругого ${}^3\text{He}^4\text{He}$ -рассеяния при низких энергиях. Круги — экспериментальные данные из работ [140]; квадраты — [141]

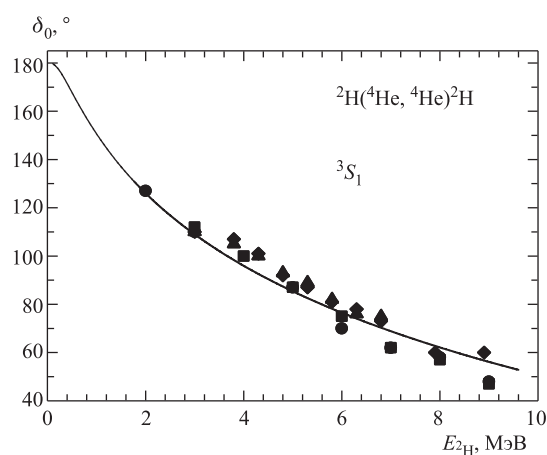


Рис. 37. 3S_1 -фаза упругого ${}^2\text{H}^4\text{He}$ -рассеяния при низких энергиях. Круги — экспериментальные данные из работы [143]; квадраты — [144]; треугольники — [145]; ромбы — [146]

метры которых приведены в скобках в табл. 28. Эти потенциалы несколько лучше описывают поведение имеющихся экспериментальных данных. Все S -фазы рассеяния при нулевой энергии показаны на рис. 35–37, начиная со значения 180° , хотя при наличии двух связанных (разрешенных или запрещенных) состояний во всех системах, согласно обобщенной теореме Ле-

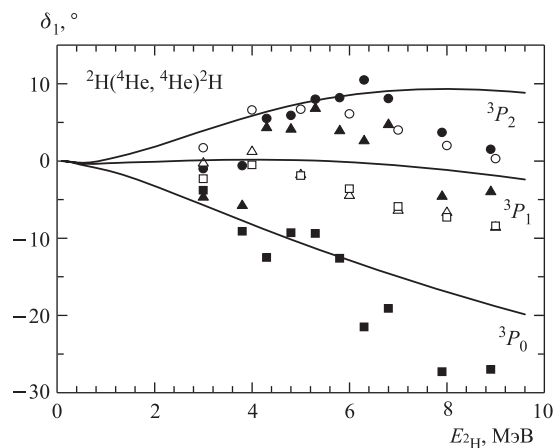


Рис. 38. 3P -фаза упругого ${}^2\text{H}^4\text{He}$ -рассеяния при низких энергиях. Светлые кружки (P_2), треугольники (P_1) и квадраты (P_0) — экспериментальные данные из работы [144]; темные кружки (P_2), треугольники (P_1) и квадраты (P_0) — [146]

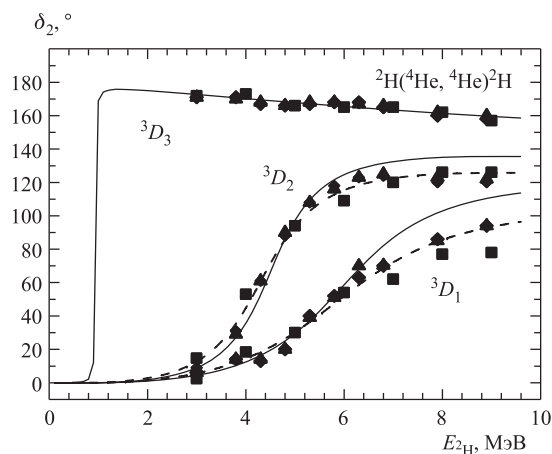


Рис. 39. 3D -фазы упругого ${}^2\text{H}^4\text{He}$ -рассеяния при низких энергиях. Квадраты — экспериментальные данные из работы [144]; треугольники — [145]; ромбы — [146]

винсона [137], они должны начинаться с 360° . Рис. 38 показывает P -фазы ${}^2\text{H}^4\text{He}$ -рассеяния при нулевой энергии от 0° , хотя при наличии связанного запрещенного состояния со схемой {51} они должны отсчитываться от значения 180° .

Далее межкластерные взаимодействия, согласованные таким образом с фазами рассеяния, использовались для вычисления различных характери-

стик основных состояний ${}^7\text{Li}$, ${}^7\text{Be}$ и ${}^6\text{Li}$ и электромагнитных процессов в этих ядрах, а кластерам сопоставлялись соответствующие свойства свободных ядер [67, 138]. Параметры потенциалов основных состояний в P -волне для ${}^3\text{He}^4\text{He}$, ${}^3\text{H}^4\text{He}$ и S -волне для ${}^2\text{H}^4\text{He}$ фиксировались, в первую очередь, на основе правильного описания энергии связи [67]. В последнем случае удастся не только передать энергию связи, но и правильно воспроизвести поведение S -фазы упругого рассеяния при низких энергиях (рис. 37). Следует отметить, что все результаты получены без учета тензорных сил [147].

В рамках такого подхода получено неплохое согласие результатов проведенных расчетов с различными экспериментальными данными как для электромагнитных процессов, так и для основных характеристик CS многих легких ядер в кластерных каналах [67, 137]. Однако, например, энергия связи ядра ${}^7\text{Li}$ в ${}^3\text{H}^4\text{He}$ -канале с $J = 3/2^-$, как и других систем, реально определялась с точностью до нескольких кэВ, поэтому точность вычисления S -фактора радиационного захвата даже при 10 кэВ оказалась сравнительно мала.

Поэтому в работе [148] проведено уточнение основных расчетных характеристик связанных состояний ядер ${}^7\text{Li}$, ${}^7\text{Be}$ и ${}^6\text{Li}$ в каналах ${}^3\text{H}^4\text{He}$, ${}^3\text{He}^4\text{He}$ и ${}^2\text{H}^4\text{He}$. Для этого были уточнены параметры потенциалов связанных состояний, и теперь расчетные энергии уровней полностью совпадают с экспериментальными величинами [99]. Иначе говоря, параметры потенциалов подбирались так, чтобы описать экспериментальные энергии уровней с максимально возможной точностью. Если экспериментальная энергия связи [99] была известна с точностью до четвертого знака после запятой, например, $-1,4743$ МэВ, то считалось, что ее можно представить с шестью знаками: $-1,474300$ МэВ.

Энергии связанных уровней рассматриваемых ядер в заданных потенциалах вычислялись конечно-разностным методом [25] с точностью не хуже 10^{-6} МэВ. Далее будет показано, что реальная точность определения энергии связи во всех системах двумя разными методами оказалась на уровне ± 1 эВ, причем наибольшую ошибку вносит, по-видимому, вариационный метод с разложением ВФ по неортогональному гауссову базису и независимым варьированием параметров [25].

Необходимое изменение параметров потенциалов ${}^3\text{H}^4\text{He}$ и ${}^3\text{He}^4\text{He}$, которое требуется для более точного описания канальных энергий, представлено в табл. 29. Столь небольшое изменение параметров потенциалов ${}^3\text{H}^4\text{He}$, ${}^3\text{He}^4\text{He}$ и ${}^2\text{H}^4\text{He}$ относительно результатов работ [21, 67] и табл. 28 практически не сказывается на поведении фаз рассеяния. Однако такое изменение позволяет максимально точно воспроизвести энергии уровней в кластерных каналах, что играет существенную роль при расчетах S -факторов для энергий порядка 1–10 кэВ.

Ширины потенциалов в табл. 28, 29 были выбраны исходя из описания зарядовых радиусов и асимптотических констант [67]. В табл. 29 приведены

Таблица 29. Уточненные параметры потенциалов ${}^3\text{H}^4\text{He}$ -, ${}^3\text{He}^4\text{He}$ - и ${}^2\text{H}^4\text{He}$ -взаимодействия, вычисленные с ними энергии уровней и зарядовые радиусы ядер ${}^7\text{Li}$, ${}^7\text{Be}$ и ${}^6\text{Li}$. Параметр α для ${}^3\text{H}^4\text{He}$ -, ${}^3\text{He}^4\text{He}$ -систем равен $0,15747 \text{ Фм}^{-2}$ и $R_c = 3,095 \text{ Фм}$. Для ${}^2\text{H}^4\text{He}$ -рассеяния положено $\alpha = 0,2 \text{ Фм}^{-2}$, $R_c = 0 \text{ Фм}$

$2S+1L_J$	V_0 , МэВ	E , МэВ	$\langle r^2 \rangle^{1/2}$, Фм
${}^7\text{Li}$			
${}^2P_{3/2}$	-83,616808	-2,467000	2,46
${}^2P_{1/2}$	-81,708413	-1,990390	2,50
${}^7\text{Be}$			
${}^2P_{3/2}$	-83,589554	-1,586600	2,64
${}^2P_{1/2}$	-81,815179	-1,160820	2,69
${}^6\text{Li}$			
3S_1	-75,8469155	1,474300	2,65

результаты расчета зарядовых радиусов рассматриваемых ядер в кластерных каналах. Для нахождения зарядового радиуса ядра использовались радиусы кластеров, приведенные в работах [23, 57, 99], значения которых вместе с массами кластеров и энергиями связанных состояний в кластерных каналах даны в табл. 2 и 30 соответственно. При наличии нескольких различных экспериментальных результатов использовалось их среднее значение.

Из табл. 29 видно, что среднеквадратичный зарядовый радиус ядра ${}^7\text{Li}$ оказывается несколько больше экспериментальной величины (табл. 30). Это может быть обусловлено имеющейся экспериментальной неопределенностью радиусов кластеров (табл. 2), которая достигает до $\pm 5\%$ от среднего значения и может изменить радиус ядра ${}^7\text{Li}$ примерно на $0,05 \text{ Фм}$. Из трехтелных и МРГ-расчетов следует, что дейтронный кластер в ядре ${}^6\text{Li}$ сжат примерно в 1,5 раза, а при нашем рассмотрении ядра ${}^6\text{Li}$ в кластерной ${}^2\text{H}^4\text{He}$ -модели эта деформация не учитывалась. Именно это позволяет объяснить несколько завышенный радиус ${}^6\text{Li}$, полученный в наших расчетах [21, 67]. Таким образом, не только для энергий уровней, которые теперь передаются точно, но и для зарядовых радиусов получено вполне приемлемое согласие с экспериментальными данными при использовании уточненных потенциалов.

Таблица 30. Экспериментальные данные по зарядовым радиусам и энергиям связи [23, 57, 99]

Ядро	Радиус, Фм	Энергия, МэВ
${}^6\text{Li}$	2,51(10)	$E_{4\text{He}^2\text{H}} = -1,4743$
${}^7\text{Li}$	2,35(10)	$E_{4\text{He}^3\text{H}} = -2,467 (3/2^-); -1,99039 (1/2^-)$
${}^7\text{Be}$	—	$E_{4\text{He}^3\text{He}} = -1,5866 (3/2^-); -1,16082 (1/2^-)$

Для контроля устойчивости «хвоста» волновой функции основных и первых возбужденных связанных состояний на больших расстояниях использовалась асимптотическая константа C_W , представляемая в виде (10). В результате для ОС ядер ${}^7\text{Be}$, ${}^7\text{Li}$ и ${}^6\text{Li}$ в рассматриваемых каналах были получены следующие значения: 5,03(1), 3,92(1) и 3,22(1) соответственно. Для первых возбужденных состояний ядер ${}^7\text{Be}$ и ${}^7\text{Li}$ в такой модели найдено 4,64(1) и 3,43(1). Приведенная ошибка определяется усреднением полученной в результате расчета константы на интервале 6–16 Фм, а для ${}^6\text{Li}$ в области 5–19 Фм.

В работе [35] на основе трехтельной $np^4\text{He}$ -модели для асимптотической константы основного S -состояния ${}^6\text{Li}$ в ${}^2\text{H}^4\text{He}$ -канале получено 2,71. Из анализа фаз упругого ${}^2\text{H}^4\text{He}$ -рассеяния в [149] найдена величина 2,93(15). В работе [150] для различных типов NN - и $N\alpha$ -взаимодействий получены значения от 1,64 до 2,78. В той же работе даются ссылки на экспериментальные данные, которые меняются от 2,29(20) до 2,32(11) [150].

Если асимптотическую ${}^2\text{H}^4\text{He}$ -константу определять исходя из обычной экспоненциальной асимптотики, т.е. без учета кулоновских эффектов, то для ее величины в используемой здесь модели на интервале 4–12 Фм получено 1,9(2). Для этого случая известны следующие значения: 2,4 [151] и 2,15(5) [26, 60].

В работе [59] приведен обзор асимптотических и вершинных констант, в том числе для ${}^2\text{H}^4\text{He}$ -канала, и замечено, что их величины, в зависимости от наличия или отсутствия кулоновских эффектов, могут различаться в несколько раз. Реальное изменение асимптотической константы в приведенных выше результатах примерно составляет 1,5–3,0.

Для основного состояния ${}^3\text{H}^4\text{He}$ -системы в ядре ${}^7\text{Li}$, например, в работе [152] с уиттекеровской асимптотикой, учитывающей кулоновские эффекты, получено значение асимптотической константы в интервале 3,54–3,83, а в [153] найдена величина 3,55(28). Для основного состояния ядра ${}^7\text{Be}$ в ${}^3\text{He}^4\text{He}$ -канале в работе [154] на основе анализа различных экспериментальных данных предложено значение 4,82(14).

Таким образом, результаты, полученные в этих работах, позволяют заключить, что найденные здесь асимптотические константы для ядер ${}^7\text{Be}$ и ${}^7\text{Li}$ завышены примерно на 5–10%. Заметим, что сами результаты определения асимптотических констант для этих ядер в разных работах, полученные на основе разных методов, могут различаться на 10–20% [152, 154].

7.2. Результаты вариационных расчетов. Для контроля точности определения энергии связи в рассматриваемых кластерных системах использовался вариационный метод [25], который в ${}^3\text{H}^4\text{He}$ -канале даже при невысокой размерности неортогонального гауссова базиса 10 при независимом варьировании параметров позволил получить энергию связи $-2,466998$ МэВ. Поэтому, как говорилось в п. 2.1, для реальной энергии связи в таком потенциале можно принять среднюю величину $-2,466999(1)$ МэВ.

Таблица 31. Параметры вариационных волновых функций ядра ${}^7\text{Li}$ в ${}^3\text{H}^4\text{He}$ -модели. Нормировочный коэффициент ВФ на интервале 0–25 Фм равен $N = 9,9999999992\text{E}-001$ при $J = 3/2^-$ и $9,999999994\text{E}-001$ при $J = 1/2^-$

i	β_i	C_i
$J = 3/2^-$		
1	6,567905679421632E-001	4,270672892119584E-001
2	1,849427298619411E-002	-6,326508826973404E-004
3	1,729324040753008E-001	-2,047665503330138E-001
4	4,173925751998056E-002	-1,032337189461229E-002
5	8,818471551829664E-002	-6,301223045259621E-002
6	4,503350223878621E-001	6,962475101962766E-001
7	9,210585557350788E-001	2,076348167318741E-002
8	2,000570770210328	1,488688664230068E-003
9	2,925234985697186	-1,124699482527892E-003
10	3,981951253509630	3,797289741762020E-004
$J = 1/2^-$		
1	3,767783843541890E-001	4,630588198830661E-001
2	3,862289845123266E-002	-1,122717538276013E-002
3	1,902467043551489E-001	-2,185424962074149E-001
4	1,465702154047247E-002	-4,355239784992325E-004
5	9,174545622012323E-002	-7,860947071320935E-002
6	8,478055592043516E-001	-5,602419628674884E-001
7	6,512974681188465E-001	1,017849119474616
8	1,401572634787409	57,704730892399640
9	1,405534176137368	-58,402969632676760
10	1,569682720436807	9,151457061882704E-001

Параметры разложения радиальной межкластерной вариационной волновой функции вида (9) для ${}^3\text{H}^4\text{He}$ -системы приведены в табл. 31. Асимптотическая константа на расстояниях 6–16 Фм сохранялась на уровне 3,93(3), а величина невязок не превышала $3 \cdot 10^{-12}$ [25]. Для первого возбужденного состояния в этом канале получена энергия $-1,990374$ МэВ. Параметры соответствующей волновой функции также приведены в табл. 31. Асимптотическая константа на интервале 6–20 Фм оказалась равной 3,40(5), а невязки равны $4 \cdot 10^{-13}$.

Для энергии связи в ${}^3\text{He}^4\text{He}$ -канале при размерности базиса 10 получено $-1,586598$ МэВ, а коэффициенты разложения ВФ даны в табл. 32. Из этих результатов следует, что за среднюю величину энергии связи в таком потенциале можно принять $-1,586699(1)$ МэВ. Асимптотическая константа в области 6–15 Фм сохраняется на уровне 5,01(4), а величина невязок не

Таблица 32. Параметры вариационных волновых функций ядра ${}^7\text{Be}$ в ${}^3\text{He}^4\text{He}$ -модели. Нормировочный коэффициент ВФ на интервале 0–25 Фм равен $N = 9,999999995\text{E}-001$ при $J = 3/2^-$ и $9,99999998\text{E}-001$ при $J = 1/2^-$

i	β_i	C_i
$J = 3/2^-$		
1	7,592678086347688E-001	4,226683168050651E-001
2	1,764646518442939E-002	-9,297447488403448E-004
3	1,713620418679277E-001	-1,913577297864284E-001
4	4,166190335743666E-002	-1,157464906616252E-002
5	8,829356096205253E-002	-6,210954724479718E-002
6	4,566882349965201E-001	7,725352747968277E-001
7	1,263871984172901	-7,575809619184885E-001
8	1,358053110884124	7,836457309371079E-001
9	1,741955980844547	-1,277551712466414E-001
10	2,379459759640717	1,446300395173141E-002
$J = 1/2^-$		
1	3,857719633413334E-001	4,891511738383773E-001
2	3,862289845123266E-002	-1,229249560611409E-002
3	1,881845128735454E-001	-2,002401467853206E-001
4	1,465702154047247E-002	-7,752125472489987E-004
5	9,174545622012323E-002	-7,680363457361430E-002
6	8,478055592043516E-001	-3,264723437643782E-001
7	6,512974681188465E-001	8,230628856230295E-001
8	1,401572634787409	21,258288548024340
9	1,405534176137368	-21,437482795337960
10	1,569682720436807	2,883954334066227E-001

превышает $5 \cdot 10^{-13}$. Для первого возбужденного состояния получена энергия $-1,160801$ МэВ, параметры ВФ также приведены в табл. 32. При этом асимптотическая константа на интервале 6–14 Фм получилась равной 4,64(4), а невязки меньше $5 \cdot 10^{-12}$.

В ${}^2\text{H}^4\text{He}$ -канале вариационный метод приводит к энергии $-1,474298$ МэВ, так что средняя величина энергии связи в таком потенциале составляет $-1,474299(1)$ МэВ. Асимптотическая константа на интервале 6–20 Фм равна 3,23(3), величина невязок не более $7 \cdot 10^{-13}$, а параметры разложения вариационной волновой функции даны в табл. 33.

Тем самым разница в энергии связи основных состояний всех систем, найденная двумя методами, не превышает ± 1 эВ, а асимптотические константы в указанных областях расстояний и пределах приведенных ошибок полностью совпадают. Для всех рассмотренных систем также наблюдается совпадение

Таблица 33. Параметры вариационных волновых функций ядра ${}^6\text{Li}$ в ${}^2\text{H}^4\text{He}$ -модели ($J = 1^+$). Нормировочный коэффициент ВФ на интервале 0–25 Фм равен $N = 9,99999865\text{E}-001$

i	β_i	C_i
1	9,437818606389059E-003	5,095342831090755E-003
2	2,339033265895747E-002	3,991949900002217E-002
3	5,360473343158653E-002	1,164934149242748E-001
4	1,140512295822141E-001	2,165501771045687E-001
5	2,076705835662333E-001	1,831336962855912E-001
6	3,702254820081791E-001	-6,350857624465279E-001
7	2,848601430685521	2,165544802826948E-002
8	5,859924777191484E-001	-7,358532868463539E-001
9	82,336677993239830	5,086893578426774E-003
10	12,344385769445580	1,002621348014230E-002

до второго знака после запятой значений зарядовых радиусов, полученных двумя разными методами. Эти результаты показывают хорошее совпадение волновых функций связанных состояний всех рассмотренных ядер, которые получены двумя разными методами, на интервале от 6 до 16–20 Фм.

7.3. Астрофизический S -фактор. Ранее расчеты полных сечений фотопротонов и астрофизические S -факторы для ${}^2\text{H}^4\text{He}$ -, ${}^3\text{H}^4\text{He}$ - и ${}^3\text{He}^4\text{He}$ -систем выполнялись в кластерной модели [155], аналогичной используемой здесь, а также по методу резонирующих групп (МРГ) [156]. Для потенциалов взаимодействий с запрещенными состояниями были проведены расчеты полных сечений фоторазвала в ${}^2\text{H}^4\text{He}$ кластерном канале ядра ${}^6\text{Li}$ на основе трехтельных волновых функций основного состояния [157]. Расчеты полных сечений фотопротонов для ядер ${}^6\text{Li}$ и ${}^7\text{Li}$ в двухкластерных моделях с запрещенными состояниями были выполнены в наших работах [67, 138] на основе гауссовых потенциалов, согласованных с фазами упругого рассеяния. В связи с публикацией новых экспериментальных данных в настоящем разделе рассматриваются астрофизические S -факторы ${}^3\text{H}^4\text{He}$, ${}^3\text{He}^4\text{He}$ и ${}^2\text{H}^4\text{He}$ радиационного захвата при максимально низких энергиях на основе потенциальной кластерной модели [67, 138, 139] и уточненных потенциалов основных состояний ядер ${}^7\text{Li}$, ${}^7\text{Be}$ и ${}^6\text{Li}$ (табл. 29). В расчетах для систем ${}^3\text{H}^4\text{He}$ и ${}^3\text{He}^4\text{He}$ учитываются только $E1$ -переходы, поскольку вклады $E2$ - и $M1$ -переходов оказываются на 2–3 порядка меньше [67]. В этих системах возможен $E1$ -переход между основным $P_{3/2}$ -состоянием ядер ${}^7\text{Li}$, ${}^7\text{Be}$ и $S_{1/2}$ -, $D_{3/2}$ -, $D_{5/2}$ -состояниями рассеяния, а также между первым возбужденным связанным $P_{1/2}$ -состоянием и $S_{1/2}$ -, $D_{3/2}$ -состояниями рассеяния.

Для радиационного захвата в ${}^2\text{H}^4\text{He}$ -канале ядра ${}^6\text{Li}$ возможны $E1$ -переходы из 3P -волн рассеяния на основное связанное 3S -состояние ядра ${}^6\text{Li}$ и $E2$ -переходы из 3D -волн рассеяния также на основное состояние. Основной вклад в $E2$ -переход при низких энергиях дает 3D_3 -волна, имеющая резонанс при 0,71 МэВ, а $E1$ -переход оказывается сильно подавлен за счет кластерного множителя $A_J(K)$, приведенного в (5), поэтому сечение процесса радиационного захвата в основном определяется $E2$ -переходом. Но, как было показано ранее [67], при самых низких энергиях, порядка 100–150 кэВ, вклад $E1$ -перехода становится преобладающим, поэтому, как будет видно далее, именно $E1$ -процесс определяет поведение астрофизического S -фактора в этой области энергий.

Результаты расчета астрофизического S -фактора радиационного ${}^3\text{H}^4\text{He}$ -захвата при энергиях до 5 кэВ показаны на рис. 40 сплошной линией. Экспериментальные данные взяты из работ [158, 159], в первой из которых приводятся результаты при энергиях до 55 кэВ. Величина S -фактора при 10 кэВ оказалась равной 111,0 эВ · б при извлеченном из эксперимента значении для нулевой энергии 106,7(4) эВ · б [158]. Более ранние результаты [159] приводят к 64 эВ · б, однако эти данные содержат столь большие ошибки, что экстраполируются прямой линией. Имеются и другие данные, которые при нулевой энергии приводят к значениям 140(20) эВ · б [160] и 100(20) эВ · б [20].

Если учитывать только переходы из S -волны рассеяния на основное и первое возбужденное связанные P -состояния, то при 10 кэВ получаем величину 110,8 эВ · б, которая практически не отличается от приведенной выше.

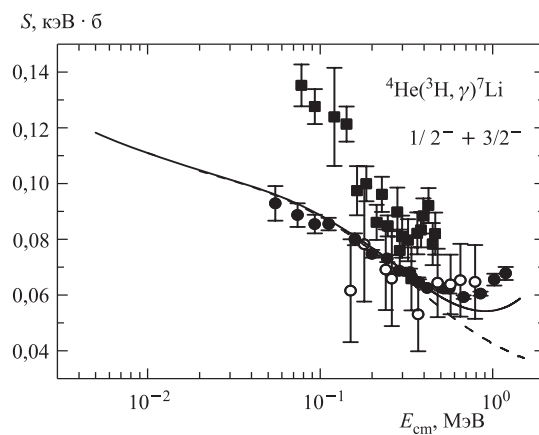


Рис. 40. Астрофизический S -фактор ${}^3\text{H}^4\text{He}$ -захвата. Темные кружки — экспериментальные данные [158]; светлые кружки — [159]; квадраты — [160]; линии — результаты расчета с параметрами потенциалов ОС из табл. 29

Результаты расчета самого S -фактора в этом случае представлены на рис. 40 штриховой линией, которая отличается от предыдущих результатов только при энергиях выше 0,3 МэВ.

Результаты работы [160], показанные на рис. 40 квадратами, не согласуются с более поздними измерениями [158] и имеют сравнительно большие ошибки. Среди теоретических расчетов можно отметить результаты кластерной модели [155], в которой при нулевой энергии было получено $100 \text{ эВ} \cdot \text{б}$, и результаты метода резонирующих групп $98(6) \text{ эВ} \cdot \text{б}$ [156], а также недавней работы [152], в которой найдено $S(0) = 97,4(10) \text{ эВ} \cdot \text{б}$.

Таким образом, результаты нашего расчета S -фактора радиационного ${}^3\text{H}^4\text{He}$ -захвата вполне описывают экспериментальные данные работы [158] при энергиях ниже 0,5 МэВ и приводят к величине S -фактора при 10 кэВ, которая разумно согласуется с экстраполяцией этого эксперимента к нулевой энергии. Следует отметить, что наши предыдущие расчеты для этого S -фактора приводили к величине $87 \text{ эВ} \cdot \text{б}$ [67]. Такое отличие можно связать со свойствами использованного потенциала для связанного состояния, который давал энергию связи с точностью всего лишь нескольких кэВ [67].

Результаты расчета астрофизического S -фактора ${}^3\text{He}^4\text{He}$ -захвата при энергиях до 15 кэВ показаны на рис. 41 сплошной линией. Экспериментальные данные взяты из работ [161–165]. Расчетная кривая при энергии ниже 200 кэВ лучше всего согласуется с результатами [162, 163], полученными в самое последнее время, и частично с данными работы [165] при энергиях

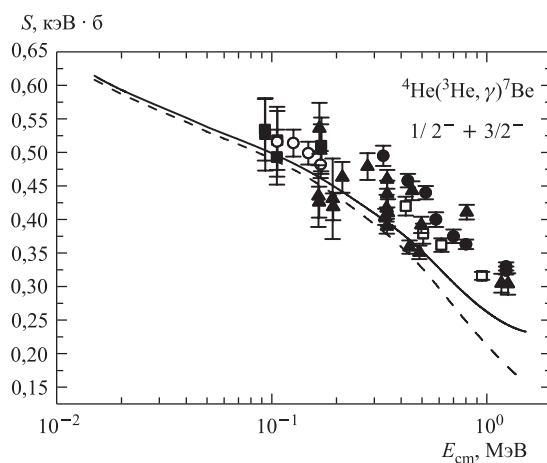


Рис. 41. Астрофизический S -фактор ${}^3\text{He}^4\text{He}$ -захвата. Темные кружки — экспериментальные данные [161]; темные квадраты — [162]; светлые кружки — [163]; светлые квадраты — [164]; треугольники — [165]; линии — результаты расчета с параметрами потенциалов ОС из табл. 29

ниже 0,5 МэВ. Для энергии 20 кэВ наш расчет дает величину S -фактора 0,593 кэВ·б.

Для сравнения приведем результаты экстраполяции экспериментальных данных к нулевой энергии: 0,54(9) кэВ·б [20], 0,550(12) кэВ·б [166], 0,595(18) кэВ·б [161], 0,560(17) кэВ·б [162], 0,550(17) кэВ·б [163] и 0,567(18) кэВ·б [167]. В кластерной модели [155] для этого S -фактора была получена величина 0,56 кэВ·б, а методом резонирующих групп [156] найдено значение 0,5(3) кэВ·б. Недавно в работе [154] на основе анализа различных экспериментальных данных получено $S(0) = 0,610(37)$ кэВ·б и $S(23 \text{ кэВ}) = 0,599(36)$ кэВ·б, что хорошо согласуется с найденной здесь величиной.

Если учитывать только переходы из S -волн рассеяния на основное и первое возбужденное связанные состояния, так же как в предыдущей ядерной системе, то при 20 кэВ получаем величину 0,587 кэВ·б, которая мало отличается от приведенного выше значения. Расчет S -фактора в этом случае представлен на рис. 41 штриховой линией, которая очень мало отличается от предыдущих результатов, полученных с учетом переходов из S - и D -волн.

Как видно из результатов, полученных в последнее время, значение S -фактора при нулевой энергии может находиться в области 0,45–0,65 кэВ·б и наша расчетная величина попадает в этот диапазон. Форма S -фактора при энергиях ниже 0,5 МэВ вполне согласуется с данными работы [165], а при более низких энергиях описывает новые данные [162, 163]. Отметим, что наши предыдущие расчеты S -фактора ${}^3\text{He}^4\text{He}$ -захвата приводили к величине 0,47 кэВ·б [67]. Отличие этой величины от новых результатов также может быть связано с недостатками потенциала основного состояния, использованного в работе [67].

Результаты расчета S -фактора ${}^2\text{H}^4\text{He}$ -захвата приведены на рис. 42 сплошной линией, а вклад $E1$ -перехода показан штриховой кривой. Экспериментальные данные взяты из работ [168–170], причем результаты последней работы определялись из рисунков, приведенных в обзоре [20]. В области 5–10 кэВ для полного расчетного S -фактора, определяемого $E1$ - и $E2$ -переходами, получено значение $1,67(1) \cdot 10^{-3}$ эВ·б или $1,67(1)$ эВ·мб. Вклад от $E1$ -перехода в этой области энергий оказался определяющим и равным $1,39(1)$ эВ·мб. Очевидно, что именно $E1$ -переход дает основной вклад в астрофизический S -фактор при низких энергиях. Приведенные ошибки S -фактора определяются усреднением по указанному интервалу энергий. В отличие от рассмотренных выше систем, данный S -фактор остается практически постоянным в этом интервале энергий.

Результаты экстраполяции экспериментальных данных, приведенных в работе [20], при 10 кэВ дают величину $1,6(1)$ эВ·мб, которая хорошо согласуется с полученным нами значением. Однако если экстраполировать только данные работы [170], которые вполне допускают линейную экстраполяцию,

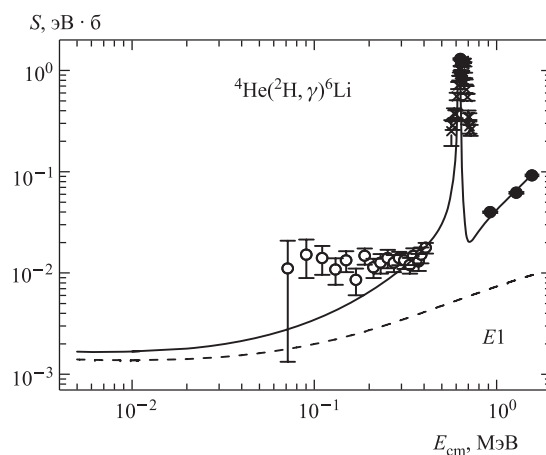


Рис. 42. Астрофизический S -фактор ${}^2\text{H}^4\text{He}$ -захвата. Темные кружки — экспериментальные данные [168]; крестики — [169]; светлые кружки — [170]. Штриховая линия — вклад $E1$ -перехода на основное состояние из P -волн рассеяния; сплошная линия — полный S -фактор с параметрами потенциала 3S_1 из табл. 29

то можно получить среднюю величину $13 \text{ эВ} \cdot \text{мб}$, что почти на порядок выше. Отметим, что наши предыдущие расчеты S -фактора радиационного ${}^2\text{H}^4\text{He}$ -захвата приводили к величине $1,5 \text{ эВ} \cdot \text{мб}$ [21]. Небольшое отличие от полученного здесь значения $1,67(1) \text{ эВ} \cdot \text{мб}$ также обусловлено приближенным характером потенциала связанного состояния, который был способен определять энергию связи с точностью до нескольких кэВ [67].

В теоретических расчетах работы [150] для S -фактора при нулевой энергии получено $1,2(1) \text{ эВ} \cdot \text{мб}$, что соответствует асимптотической константе 2,4, а константа, извлекаемая из экспериментальных данных [149, 171], равна $2,32(11)$. Однако получаемая в расчетах величина асимптотической константы, через которую вычисляется S -фактор, колеблется в области 1,6–2,8, а значит, и S -фактор может иметь значения, отличающиеся, по сути, в два раза. В результате имеющаяся неоднозначность экспериментальных данных и теоретических результатов не позволяет сделать окончательные выводы о величине S -фактора радиационного ${}^2\text{H}^4\text{He}$ -захвата при нулевой энергии и его поведении в области ниже резонанса.

Таким образом, на основе классификации орбитальных состояний по схемам Юнга удастся построить потенциалы взаимодействия кластеров, которые непосредственно описывают как фазы упругого рассеяния, так и основные характеристики связанных состояний ядер в соответствующих кластерных каналах. В отличие от более легких систем [45, 89], это оказывается возможным благодаря отсутствию смешивания схем Юнга в связанных состояниях

и большой степени кластеризации таких ядер в кластерные каналы ${}^3\text{He}^4\text{He}$, ${}^3\text{H}^4\text{He}$ и ${}^2\text{H}^4\text{He}$ [21, 137]. В результате рассматриваемая потенциальная кластерная модель позволяет описать последние экспериментальные данные по астрофизическим S -факторам радиационного ${}^3\text{He}^4\text{He}$ - и ${}^3\text{H}^4\text{He}$ -захвата при низких энергиях и дает их значения при нулевой энергии, согласующиеся с экспериментальными данными в пределах экспериментальных ошибок.

Что касается ${}^2\text{H}^4\text{He}$ -системы в ядре ${}^6\text{Li}$, то в настоящее время для астрофизического S -фактора радиационного ${}^2\text{H}^4\text{He}$ -захвата нет достаточно точных экспериментальных данных при низких энергиях. Они нужны хотя бы в области 70–500 кэВ, но с меньшими, чем в работе [170], ошибками. Получение таких данных позволит сделать более определенные выводы о форме и величине S -фактора при малых энергиях [148].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящем обзоре на основе потенциальной кластерной модели рассмотрены астрофизические S -факторы реакций радиационного захвата в восьми кластерных системах: $p^2\text{H}$, $p^3\text{H}$, $p^6\text{Li}$, $p^{12}\text{C}$, ${}^2\text{H}^4\text{He}$, ${}^3\text{H}^4\text{He}$, ${}^3\text{He}^4\text{He}$ и ${}^4\text{He}^{12}\text{C}$. Для построения потенциалов взаимодействия между кластерами в некоторых из рассматриваемых систем был проведен фазовый анализ имеющихся экспериментальных данных по их упругому рассеянию при астрофизических энергиях. Затем на основе описания полученных фазовых сдвигов в рамках концепции запрещенных состояний в многонуклонной системе, состоящей из двух подсистем, взаимодействие между которыми, как предполагается, описывается локальным потенциалом, были построены соответствующие взаимодействия. При этом для каждой парциальной волны был получен свой потенциал гауссова вида, отличающийся от потенциалов для других парциальных волн.

Для кластерных систем, которые находятся в чистых по орбитальным схемам Юнга состояниях, ядерный потенциал, получаемый из описания фаз упругого рассеяния, используется далее для описания свойств основных связанных состояний ядер. При этом предполагается, что ядро состоит из двух фрагментов, внутренние свойства которых совпадают со свойствами соответствующих ядер в свободном состоянии. Такая ситуация имеет место в системе $p^{12}\text{C}$ и, с большой вероятностью, в системах ${}^2\text{H}^4\text{He}$, ${}^3\text{H}^4\text{He}$, ${}^3\text{He}^4\text{He}$ вследствие ярко выраженной кластеризации ядер ${}^6\text{Li}$, ${}^7\text{Li}$ и ${}^7\text{Be}$ в рассматриваемых каналах.

В системах $p^2\text{H}$, $p^3\text{H}$, $p^6\text{Li}$ ситуация оказывается более сложной из-за смешивания орбитальных состояний по изоспину или схемам Юнга. Для указанных систем в непрерывном спектре в состояниях с минимальным спином разрешены две орбитальные симметрии с разными схемами Юнга, в то время

как для связанных основных состояний этих систем разрешена только одна из двух схем [15]. Поэтому нельзя построить потенциалы для связанных состояний кластеров на основе описания экспериментальных данных по фазам упругого рассеяния без предварительного разделения фаз по схемам Юнга. Метод разделения орбитальных состояний и потенциалов по схемам Юнга продемонстрирован в разд. 2 и 3 на примерах $p^2\text{H}$ - и $p^3\text{H}$ -систем.

Классификация состояний по орбитальным схемам Юнга позволяет определить наличие и количество запрещенных принципом Паули состояний. В свою очередь, это дает возможность фиксировать число узлов волновой функции относительного движения кластеров и диктует вполне определенную глубину потенциала взаимодействия. Тем самым удается избавиться от дискретной неоднозначности глубины потенциала, присущей оптической модели [32]. Форма каждой парциальной фазы рассеяния как функции энергии очень чувствительна к ширине потенциала с запрещенными состояниями. Это свойство используется для устранения непрерывной неоднозначности потенциала, которая также присуща обычной оптической модели [32]. Таким образом, все параметры потенциала в рассматриваемой кластерной модели, по сравнению с обычной оптической моделью, фиксируются более определенно. Полученный таким образом чистый по перестановочной симметрии и изоспину потенциал взаимодействия позволяет правильно описать основные характеристики связанного состояния ядра как системы двух кластеров.

Формализм, разработанный для получения межкластерных потенциалов, применен здесь для описания ядерных реакций фотозахвата в рассматриваемых системах. Оператор электромагнитного перехода для процессов радиационного захвата, в отличие от других ядерных реакций, идущих только за счет сильного взаимодействия, хорошо известен. Кроме того, в реакциях фотозахвата отсутствует взаимодействие в конечном состоянии, а взаимодействие в начальном состоянии учитывается достаточно корректно на основе развитого потенциального подхода. Поэтому при теоретическом описании рассматриваемых реакций можно ожидать количественного согласия с экспериментом. В связи с этим надо отметить, что в рамках рассматриваемой кластерной модели при учете только $E1$ -перехода удалось предсказать энергетическую зависимость S -фактора радиационного $p^3\text{H}$ -захвата при энергиях от 50 до 700 кэВ. На основе экспериментальных данных выше 700 кэВ около 15 лет назад были сделаны расчеты S -фактора при энергиях до 10 кэВ [76]. Как было показано в разд. 3, результаты этих расчетов хорошо воспроизводят новые данные по S -фактору [87] в области энергий от 50 кэВ до 5 МэВ. Аналогично ранее сделанные в рамках этой модели предсказания для S -фактора радиационного $p^2\text{H}$ -захвата при энергиях до 10 кэВ [16] довольно хорошо согласуются с появившимися много позднее данными [52, 53] в области 10–200 кэВ.

Приведенные здесь потенциалы взаимодействия кластеров можно использовать для теоретического описания и других ядерных процессов при низких

энергиях с участием этих частиц. Как показано в данном обзоре, получить надежные результаты для межкластерных потенциалов, а следовательно, и для рассчитываемых на их основе характеристик ядерных процессов можно только при достаточно точном определении из эксперимента фазовых сдвигов упругого рассеяния. К сожалению, в настоящее время для большинства легчайших ядерных систем фазы рассеяния найдены с довольно большими погрешностями, иногда доходящими до 20–30 % [148]. В связи с этим задача повышения точности измерения экспериментальных данных по упругому рассеянию легких атомных ядер при астрофизических энергиях представляется очень важной.

Авторы выражают большую признательность В. Г. Неудачину (Научно-исследовательский институт ядерной физики МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва), Н. Т. Буртебаеву и А. Д. Дуйсебаеву (Институт ядерной физики Национального ядерного центра Казахстана, Алма-Ата) за исключительно полезное обсуждение рассмотренных в работе вопросов. Авторы благодарны также А. В. Джазаирову-Кахраманову (Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алма-Ата) и Д. М. Зазулину (Институт ядерной физики Национального ядерного центра РК, Алма-Ата) за помощь в подборе экспериментального материала.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ядерная астрофизика / Под. ред. У. Барнса, Д. Клейтона, Д. Шрама. М.: Мир, 1986. 519 с.
2. *Epelbaum E., Gleockle W., Meissner U. G.* The Two-Nucleon System at Next-to-Next-to-Next-to-Leading Order // *Nucl. Phys. A.* 2005. V. 747. P. 362–424;
Epelbaum A. et al. Three-Nucleon Forces from Chiral Effective Field Theory // *Phys. Rev. C.* 2002. V. 66. P. 064001-1–064001-17;
Epelbaum E. Four-Nucleon Force Using the Method of Unitary Transformation // *Eur. Phys. J. A.* 2007. V. 34. P. 197–214.
3. *Фаддеев Л. Д.* Теория рассеяния для системы из трех частиц // *ЖЭТФ.* 1960. Т. 39. С. 1459–1467.
4. *Якубовский О. А.* Об интегральных уравнениях теории рассеяния для N частиц // *ЯФ.* 1967. Т. 5. С. 1312–1320.
5. *Grassberger P., Sandhas W.* Systematical Treatment of the Non-relativistic N -particle Scattering Problem // *Nucl. Phys. B.* 1967. V. 2. P. 181–206;
Alt E. O., Grassberger P., Sandhas W. Systematical and Practical Treatment of the Few-Body Problem. JINR, E4-6688. Dubna, 1972.
6. *Deltuva A., Fonseca A. C.* Four-Body Calculation of Proton- ^3He Scattering // *Phys. Rev. Lett.* 2007. V. 98. P. 162502-1–162502-4; An Initio Four-Body Calculation of n - ^3He , p - ^3H , and d - d Scattering // *Phys. Rev. C.* 2007. V. 76. P. 021001-1(R)–021001-4(R).

7. *Lazauskas R.* Elastic Proton Scattering on Tritium below the $n-^3\text{He}$ Threshold // *Phys. Rev. C.* 2009. V. 79. P. 054007-1–054007-5.
8. *Tang Y. C., Lemere M., Thompson D. R.* Resonating-Group Method for Nuclear Many-Body Problems // *Phys. Rep.* 1978. V. 47. P. 167–223.
9. *Navratil P., Vary J. P., Barrett B. R.* Properties of ^{12}C in the Ab Initio Nuclear Shell Model // *Phys. Rev. Lett.* 2000. V. 84. P. 5728–5731.
10. *Quaglioni S., Navratil P.* An Initio Many-Body Calculations of $n-^3\text{H}$, $n-^4\text{He}$, $p-^3,4\text{He}$, and $n-^{10}\text{Be}$ Scattering // *Phys. Rev. Lett.* 2008. V. 101. P. 092501-1–092501-4.
11. *Kievsky A., Viviani M., Rosati S.* Polarization Observables in $p-d$ Elastic Scattering below 30 MeV // *Phys. Rev. C.* 2001. V. 64. P. 024002-1–024002-18.
12. *Немец О. Ф. и др.* Нуклонные ассоциации в атомных ядрах и ядерные реакции многонуклонных передач. Киев: Наук. думка, 1988. 488 с.
13. *Baktybaev M. K. et al.* The Scattering of Protons from ^6Li and ^7Li Nuclei // The Fourth Eurasian Conf. «Nuclear Science and Its Application», Baku, Azerbaijan, Oct. 31 – Nov. 3, 2006. P. 62;
Burtebaev N. et al. The New Experimental Data on the Elastic Scattering of Protons from ^6Li , ^7Li , ^{16}O and ^{27}Al Nuclei // Book of Abstr. of the Fifth Eurasian Conf. «Nuclear Science and Its Application», Ankara, Turkey, Oct. 14–17, 2008. P. 40.
14. *Zazulin D. M. et al.* Scattering of Protons from ^{12}C // The Sixth Intern. Conf. «Modern Problems of Nuclear Physics», Tashkent, Uzbekistan, Sept. 19–22, 2006. P. 127;
Baktybaev M. K. et al. Elastic Scattering of Protons from ^{12}C , ^{16}O and ^{27}Al // The 4th Eurasian Conf. «Nuclear Science and Its Application», Baku, Azerbaijan, 2006. P. 56.
15. *Neudatchin V. G. et al.* Generalized Potential-Model Description of Mutual Scattering of the Lightest $p+d$, $d+^3\text{He}$ Nuclei and the Corresponding Photonuclear Reactions // *Phys. Rev. C.* 1992. V. 45. P. 1512–1527.
16. *Дубовиченко С. Б.* Фотопроцессы в Nd и $d^3\text{He}$ -системах на основе кластерных моделей для потенциалов с запрещенными состояниями // *ЯФ.* 1995. Т. 58. С. 1253–1259.
17. *Вильдермут Л., Тан Я.* Единая теория ядра. М.: Мир, 1980. 502 с.
18. *Fowler W. A., Caughlan G. R., Zimmerman B. A.* Thermonuclear Reaction Rates, II // *Ann. Rev. Astr. Astrophys.* 1975. V. 13. P. 69–112.
19. *Mohr P. J., Taylor B. N.* CODATA Recommended Values of the Fundamental Physical Constants: 2002 // *Rev. Mod. Phys.* 2005. V. 77(1). P. 1–107.
20. *Angulo C. et al.* A Compilation of Charged-Particle Induced Thermonuclear Reaction Rates // *Nucl. Phys. A.* 1999. V. 656. P. 3–183.
21. *Дубовиченко С. Б.* Свойства легких атомных ядер в потенциальной кластерной модели. Алматы: Данекер, 2004. 248 с.
22. *Варишолович Д. А., Москалев А. Н., Херсонский В. К.* Квантовая теория углового момента. Л.: Наука, 1975. 436 с.

23. http://physics.nist.gov/cgi-bin/cuu/Value?mud|search_for=atomnuc!
24. Айзенберг И., Грайнер В. Механизмы возбуждения ядра. М.: Атомиздат, 1973. 347 с.
25. Дубовиченко С. Б. Методы расчета ядерных характеристик. Алматы: Комплекс, 2006. 311 с.
26. Plattner G. R., Viollier R. D. Coupling Constants of Commonly Used Nuclear Probes // Nucl. Phys. A. 1981. V. 365. P. 8–12.
27. Марчук Г. И., Колесов В. Е. Применение численных методов для расчета нейтронных сечений. М.: Атомиздат, 1970. 304 с.
28. Абрамовиц И. Г. и др. Справочная математическая библиотека. Математический анализ. Дифференцирование и интегрирование. М.: Физматгиз, 1961. 350 с.
29. Barnet A. et al. Coulomb Wave Function for All Real η and ρ // Comp. Phys. Commun. 1974. V. 8. P. 377–395.
30. Дубовиченко С. Б., Чечин Л. С. Методы расчета кулоновских функций и фаз рассеяния // Вестн. КазНПУ. Сер. физ.-мат. 2003. № 1(7). С. 115–122.
31. Itzykson C., Nauenberg M. Unitary Groups: Representations and Decompositions // Rev. Mod. Phys. 1966. V. 38. P. 95–101.
32. Ходгсон П. Е. Оптическая модель упругого рассеяния. М.: Атомиздат, 1966. 230 с.
33. Дубовиченко С. Б. Фазовый анализ упругого $^4\text{He}^4\text{He}$ -рассеяния в области энергий 40–50 МэВ // ЯФ. 2008. Т. 71. С. 66–75.
34. Дубовиченко С. Б., Такибаев Н. Ж., Чечин Л. М. Физические процессы в дальнем и ближнем космосе. Алматы: Дайк-Пресс, 2008. 228 с.
35. Kukulin V. I. et al. Detailed Study of the Cluster Structure of Light Nuclei in a Three-Body Model: I. Ground State of ^6Li // Nucl. Phys. A. 1984. V. 417. P. 128–156.
36. Скорняков Л. А. Справочная математическая библиотека. Общая алгебра. М.: Наука, 1990. 591 с.
37. Попов Б. А., Теслер Г. С. Вычисление функций на ЭВМ. Киев: Наук. думка, 1984. 598 с.
38. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. М.: Мир, 1974. 832 с.
39. Дубовиченко С. Б., Чечин Л. С. Методы решения обобщенной задачи на собственные значения // Вестн. КазНПУ. Сер. физ.-мат. 2003. № 1(7). С. 110–115;
Дубовиченко С. Б. Некоторые методы решения задач ядерной физики на связанные состояния // Вестн. КазНУ. Сер. физ. 2008. № 1. С. 49–58.
40. Михлин С. Г., Смолицкий Х. Л. Приближенные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. М.: Наука, 1965. 383 с.
41. Дубовиченко С. Б., Чечин Л. М. Современные методы программирования актуальных физических задач // Тр. конф. «Современные проблемы и задачи информатизации в Казахстане», КазНТУ, Алматы, Казахстан, 6–10 окт. 2004 г. С. 358–390.

42. Дубовиченко С. Б. Альтернативный метод решения обобщенной матричной задачи на собственные значения // Изв. НАН РК. Физ.-мат. сер. 2007. №4. С. 52–55.
43. Fowler W. A. Experimental and Theoretical Nuclear Astrophysics: The Quest for the Original of the Elements. Nobel Lecture. Stockholm. 8 Dec. 1983;
Фаулер У. А. Экспериментальная и теоретическая ядерная астрофизика, поиски происхождения элементов // УФН. 1985. Т. 145. С. 441–488.
44. Snover K. A. Solar $p-p$ Chain and the ${}^7\text{Be}$ (p, γ) ${}^8\text{B}$ S -factor. Univ. of Washington, CEPRA. NDM03. 1/6/2008.
45. Dubovichenko S. B., Dzhezairov-Kakhramanov A. V. Astrophysical S -factor of the Radiative $p^2\text{H}$ Capture // Eur. Phys. J. A. 2009. V. 39, No. 2. P. 139–143.
46. Schiavilla R., Pandaripande V. R., Wiringa R. B. Momentum Distributions in $A = 3$ and 4 Nuclei // Nucl. Phys. 1986. A. V. 449. P. 219–242.
47. Uzikov Yu. N. Backward Elastic $p^3\text{He}$ Scattering and High Momentum Components of ${}^3\text{He}$ Wave Function // Phys. Rev. C. 1998. V. 58. P. 36–39.
48. Uzikov Yu. N., Haidenbauer J. ${}^3\text{He}$ Structure and Mechanism of $p^3\text{He}$ Elastic Scattering // Phys. Rev. C. 2003. V. 68. P. 014001-1–014001-6.
49. Schmelzbach P. et al. Phase Shift Analysis of $p^2\text{H}$ Elastic Scattering // Nucl. Phys. A. 1972. V. 197. P. 273–289;
Arvieux J. Analyse en dephasages des sections efficaces et polarisations dans la diffusion elastique $p^2\text{H}$ // Nucl. Phys. A. 1967. V. 102. P. 513–528;
Chauvin J., Arvieux J. Phase Shift Analysis of Spin Correlation Coefficients in $p^2\text{H}$ Scattering // Nucl. Phys. A. 1975. V. 247. P. 347–358;
Huttel E. et al. Phase Shift Analysis of $p^2\text{H}$ Elastic Scattering below Break-up Threshold // Nucl. Phys. A. 1983. V. 406. P. 443–455.
50. Дубовиченко С. Б., Джазаиров-Кахраманов А. В. Потенциальное описание процессов упругого Nd -, dd -, $N\alpha$ - и $d\tau$ -рассеяния // ЯФ. 1990. Т. 51. С. 1541–1550.
51. Griffiths G. M., Larson E. A., Robertson L. P. The Capture of Proton by Deuteron // Can. J. Phys. 1962. V. 40. P. 402–411.
52. Ma L. et al. Measurements of ${}^1\text{H}(\vec{d}, \gamma){}^3\text{He}$ and ${}^2\text{H}(\vec{p}, \gamma){}^3\text{He}$ at Very Low Energies // Phys. Rev. C. 1997. V. 55. P. 588–596.
53. Schind G. J. et al. The ${}^2\text{H}(\vec{p}, \gamma){}^3\text{He}$ and ${}^1\text{H}(\vec{d}, \gamma){}^3\text{He}$ Reactions below 80 keV // Ibid. V. 56. P. 2565–2681.
54. Casella C. et al. First Measurement of the $d(p, \gamma){}^3\text{He}$ Cross Section Down to the Solar Gamow Peak // Nucl. Phys. A. 2002. V. 706. P. 203–216.
55. Дубовиченко С. Б. Астрофизический S -фактор радиационного $p^2\text{H}$ -захвата при низких энергиях // Докл. НАН РК. 2008. Т. 60, № 3. С. 33–38.
56. Tilley D. R., Weller H. R., Hasan H. H. Energy Levels of Light Nuclei $A = 3$ // Nucl. Phys. A. 1987. V. 474. P. 1–60.
57. Tilley D. R., Weller H. R., Hale G. M. Energy Levels of Light Nuclei $A = 4$ // Nucl. Phys. A. 1992. V. 541. P. 1–157.

58. Киржниц Д. А. Содержится ли дейтрон внутри тритона? // Письма в ЖЭТФ. 1978. Т. 28. С. 479–481.
59. Блохинцев Л. Д., Борбей И., Долинский Э. И. Ядерные вершинные константы // ЭЧАЯ. 1977. Т. 8. С. 1189–1245.
60. Bornard M. et al. Coupling Constants for Several Light Nuclei from a Dispersion Analysis of Nucleon and Deuteron Scattering Amplitudes // Nucl. Phys. A. 1978. V. 294. P. 492–512.
61. Platner G. R., Bornard M., Viollier R. D. Accurate Determination of the ${}^3\text{He}$ - pd and ${}^3\text{He}$ - pd^* Coupling Constants // Phys. Rev. Lett. 1977. V. 39. P. 127–130.
62. Kievsky A. et al. The Three-Nucleon System near the $N-d$ Threshold // Phys. Lett. B. 1997. V. 406. P. 292–296.
63. Ayer Z. et al. Determination of the Asymptotic D - to S -state Ratio for ${}^3\text{He}$ via ($d, {}^3\text{He}$) Reactions // Phys. Rev. C. 1995. V. 52. P. 2851–2858.
64. Schimid G. J. et al. Effects of Non-nucleonic Degrees of Freedom in the $D(\vec{p}, \gamma){}^3\text{He}$ and $p(\vec{d}, \gamma){}^3\text{He}$ Reactions // Phys. Rev. Lett. 1996. V. 76. P. 3088–3091.
65. Schimid G. J. et al. Polarized Proton Capture by Deuterium and the ${}^2\text{H}(p, \gamma){}^3\text{He}$ Astrophysical S -factor // Phys. Rev. 1995. V. 52. P. R1732–R1735.
66. Viviani M., Schiavilla R., Kievsky A. Theoretical Study of the Radiative Capture Reactions ${}^2\text{H}(n, \gamma){}^3\text{H}$ and ${}^2\text{H}(p, \gamma){}^3\text{He}$ at Low Energies // Phys. Rev. C. 1996. V. 54. P. 534–553.
67. Дубовиченко С. Б., Джазаиров-Кахраманов А. В. Электромагнитные эффекты в легких ядрах на основе потенциальной кластерной модели // ЭЧАЯ. 1997. Т. 28. С. 1529–1594.
68. Warren J. B. et al. Photodisintegration of He^3 near the Threshold // Phys. Rev. 1963. V. 132. P. 1691–1692.
69. Berman B. L., Koester L. J., Smith J. H. Photodisintegration of ${}^3\text{He}$ // Phys. Rev. 1964. V. 133. P. B117–B129.
70. Fetisov V. N., Gorbunov A. N., Varfolomeev A. T. Nuclear Photoeffect on Three-Particle Nuclei // Nucl. Phys. 1965. V. 71. P. 305–342.
71. Ticcioni G. et al. The Two-Body Photodisintegration of ${}^3\text{He}$ // Phys. Lett. B. 1973. V. 46. P. 369–371.
72. Geller K. N., Muirhead E. G., Cohen L. D. The ${}^2\text{H}(p, \gamma){}^3\text{He}$ Reaction at the Breakup Threshold // Nucl. Phys. A. 1967. V. 96. P. 397–400.
73. Дубовиченко С. Б. Фазовый анализ $p^{12}\text{C}$ -рассеяния при астрофизических энергиях // Изв. вузов. Сер. физ. 2008. № 11. С. 21–27.
74. Berg H. et al. Differential Cross Section, Analyzing Power and Phase Shifts for $p^3\text{He}$ Elastic Scattering below 1.0 MeV // Nucl. Phys. A. 1980. V. 334. P. 21–34;
Kavanagh R. W., Parker P. D. $\text{He}+p$ Elastic Scattering below 1 MeV // Phys. Rev. 1966. V. 143. P. 779–782;
Morrow L., Haerberli W. Proton Polarization in $p-{}^3\text{He}$ Elastic Scattering between 4 and 11 MeV // Nucl. Phys. A. 1969. V. 126. P. 225–232.

75. Дубовиченко С. Б. и др. Обобщенное потенциальное описание взаимодействия легчайших ядер pt и ph // Изв. АН СССР. Сер. физ. 1990. Т. 54. С. 911–916;
Neudatchin V. G., Sakharuk A. A., Dubovichenko S. B. Photodisintegration of ${}^4\text{He}$ and Supermultiplet Potential Model of Cluster–Cluster Interaction // *Few Body Syst.* 1995. V. 18. P. 159–172.
76. Дубовиченко С. Б. Фотопроцессы в $p^3\text{H}$ - и $n^3\text{He}$ -каналах ядра ${}^4\text{He}$ на основе потенциальных кластерных моделей // ЯФ. 1995. Т. 58. С. 1377–1384.
77. *Tombrello T. A.* Phase Shift Analysis for ${}^3\text{He}(p,p){}^3\text{He}$ // *Phys. Rev.* 1965. V. 138. P. B40–B47.
78. *Yoshino Y. et al.* Phase Shift of $p^3\text{He}$ Scattering at Low Energies // *Prog. Theor. Phys.* 2000. V. 103. P. 107–125.
79. *McSherry D. H., Baker S. D.* ${}^3\text{He}$ Polarization Measurements and Phase Shifts for $p^3\text{He}$ Elastic Scattering // *Phys. Rev. C.* 1970. V. 1. P. 888–892.
80. *Drigo L., Pisent G.* Analysis of the $p^3\text{He}$ Low Energy Interaction // *Nuovo Cim.* 1967. V. B11. P. 419–436.
81. *Szaloky G., Seiler F.* Phase Shift Analysis of ${}^3\text{He}(p,p){}^3\text{He}$ Elastic Scattering // *Nucl. Phys. A.* 1978. V. 303. P. 57–66.
82. *Tombrello T. A. et al.* The Scattering of Protons from ${}^3\text{He}$ // *Nucl. Phys.* 1962. V. 39. P. 541–550.
83. *McIntosh J. S., Gluckstern R. L., Sack S.* Proton Triton Interaction // *Phys. Rev.* 1952. V. 88. P. 752–759.
84. *Frank R. M., Gammel J. L.* Elastic Scattering of Proton by ${}^3\text{He}$ and ${}^3\text{H}$ // *Phys. Rev.* 1955. V. 99. P. 1406–1410.
85. *Kankowsky R. et al.* Elastic Scattering of Polarized Protons on Tritons between 4 and 12 MeV // *Nucl. Phys. A.* 1976. V. 263. P. 29–46.
86. Аркатов Ю. М. и др. Изучение реакции ${}^4\text{He}(\gamma,p){}^3\text{H}$ при максимальной энергии гамма-излучения 120 МэВ // ЯФ. 1970. Т. 12. С. 227–233.
87. *Hahn K. et al.* ${}^3\text{H}(p,\gamma){}^4\text{He}$ Cross Section // *Phys. Rev. C.* 1995. V. 51. P. 1624–1632.
88. *Canon R. et al.* ${}^3\text{H}(p,\gamma){}^4\text{He}$ Reaction below $E_p = 80$ keV // *Phys. Rev. C.* 2002. V. 65. P. 044008.1–044008.7.
89. Дубовиченко С. Б. Астрофизический S -фактор радиационного $p^3\text{H}$ -захвата при низких энергиях // Изв. НАН РК. Сер. физ.-мат. 2008. № 4. С. 89–92;
Dubovichenko S. B., Dzhezairov-Kakhramanov A. V. Astrophysical S -factors of the $p^2\text{H}$ and $p^3\text{H}$ Radiative Capture at Low Energies // *Uz. J. Phys.* 2008. V. 10, No. 6. P. 364–370.
90. *Lim T. K.* ${}^3\text{He}$ - n Vertex Constant and Structure of ${}^4\text{He}$ // *Phys. Lett. B.* 1975. V. 55. P. 252–254.
91. *Gibson B. F.* Electromagnetic Disintegration of the $A = 3$ and $A = 4$ Nuclei // *Nucl. Phys. A.* 1981. V. 353. P. 85–98.
92. *Perry J. E., Bame S. J.* ${}^3\text{H}(p,\gamma){}^4\text{He}$ Reaction // *Phys. Rev.* 1955. V. 99. P. 1368–1375.

93. *Balestra F. et al.* Photodisintegration of ${}^4\text{He}$ in Giant-Resonance Region // *Nuovo Cim.* A. 1977. V. 38. P. 145–166.
94. *Meyerhof W. et al.* ${}^3\text{He}(p, \gamma){}^4\text{He}$ Reaction from 3 to 18 MeV // *Nucl. Phys. A.* 1970. V. 148. P. 211–224.
95. *Feldman G. et al.* ${}^3\text{H}(p, \gamma){}^4\text{He}$ Reaction and the $(\gamma, p)/(\gamma, n)$ Ratio in ${}^4\text{He}$ // *Phys. Rev. C.* 1990. V. 42. P. R1167– R1170.
96. *Skill M. et al.* Differential Cross Section and Analyzing Power for Elastic Scattering of Protons on ${}^6\text{Li}$ below 2.2 MeV // *Nucl. Phys. A.* 1995. V. 581. P. 93–106.
97. *Petitjean C., Brown L., Seyler R.* Polarization and Phase Shifts in ${}^6\text{Li}(p, p){}^6\text{Li}$ from 0.5 to 5.6 MeV // *Nucl. Phys. A.* 1969. V. 129. P. 209–219.
98. *Дубовиченко С. Б., Джазаиров-Кахраманов А. В., Сахарук А. А.* Потенциальное описание упругого $N^6\text{Li}$ - и αt -рассеяния // *ЯФ.* 1993. Т. 56. С. 90–106.
99. *Tilley D. R. et al.* Energy Levels of Light Nuclei $A = 5, 6, 7$ // *Nucl. Phys. A.* 2002. V. 708. P. 3–163.
100. *Капитонов И. М., Ииханов Б. С., Тутынь И. А.* Нуклеосинтез во вселенной. М.: Либроком, 2009; <http://nuclphys.sinp.msu.ru/nuclsynt.html>
101. *Неудачин В. Г., Сахарук А. А., Смирнов Ю. Ф.* Обобщенное потенциальное описание взаимодействия легчайших кластеров — рассеяние и фотоядерные реакции // *ЭЧАЯ.* 1992. Т. 23. С. 480–541;
Неудачин В. Г., Стружко Б. Г., Лебедев В. М. Супермультиплетная потенциальная модель взаимодействия легчайших кластеров и единое описание различных ядерных реакций // *ЭЧАЯ.* 2005. Т. 36. С. 888–941.
102. *Switkowski Z. E. et al.* Cross Section of the Reaction ${}^6\text{Li}(p, \gamma){}^7\text{Be}$ // *Nucl. Phys. A.* 1979. V. 331. P. 50–60;
Bruss R. et al. Astrophysical S -factors for the Radiative Capture Reaction ${}^6\text{Li}(p, \gamma){}^7\text{Be}$ at Low Energies // *Proc. of the 2nd Intern. Symp. on Nuclear Astrophysics. Nuclei in the Cosmos, Karlsruhe, Germany, July 6–10, 1992 / Eds.: Kappeler F., Wisshak K.* Bristol, 1993. P. 169.
103. *Arai K., Baye D., Descouvemont P.* Microscopic Study of the ${}^6\text{Li}(p, \gamma){}^7\text{Be}$ and ${}^6\text{Li}(p, \alpha){}^3\text{He}$ Reactions // *Nucl. Phys. A.* 2002. V. 699. P. 963–975.
104. *Prior R. M. et al.* Energy Dependence of the Astrophysical S -factor for the ${}^6\text{Li}(p, \gamma){}^7\text{Be}$ Reaction // *Phys. Rev. C.* 2004. V. 70. P. 055801–055809.
105. *Burker F. C.* Neutron and Proton Capture by ${}^6\text{Li}$ // *Austr. J. Phys.* 1980. V. 33. P. 159–176.
106. *Cecil F. E. et al.* Radiative Capture of Protons by Light Nuclei at Low Energies // *Nucl. Phys. A.* 1992. V. 539. P. 75–96.
107. *Дубовиченко С. Б.* Астрофизические S -факторы радиационного $p^2\text{H}$ - и $p^3\text{H}$ -захвата // *Изв. вузов. Сер. физ.* 2009. № 3. С. 68–73.
108. *Дубовиченко С. Б., Джазаиров-Кахраманов А. В.* Астрофизический S -фактор радиационного $p^6\text{Li}$ -захвата // *Докл. НАН РК.* 2009. № 6. С. 41–45.

109. *Jahns M. F., Bernstein E. M.* Polarization in $p\alpha$ Scattering // *Phys. Rev.* 1967. V. 162. P. 871–877.
110. *Barnard A., Jones C., Well J.* Elastic Scattering of 2–11 MeV Proton by ^4He // *Nucl. Phys.* 1964. V. 50. P. 604–620.
111. *Brown R. I., Haeberli W., Saladin J. X.* Polarization in the Scattering of Protons by α Particles // *Nucl. Phys.* 1963. V. 47. P. 212–213.
112. *Jackson H. L. et al.* The $^{12}\text{C}(p, p)^{12}\text{C}$ Differential Cross Section // *Phys. Rev.* 1953. V. 89. P. 365–369.
113. *Jackson H. L. et al.* The Excited States of the ^{13}N Nucleus // *Phys. Rev.* 1953. V. 89. P. 370–374.
114. *Moss S. J., Haeberli W.* The Polarization of Protons Scattered by Carbon // *Nucl. Phys.* 1965. V. 72. P. 417–435.
115. *Barnard A. C. L. et al.* Cross Section as a Function of Angle and Complex Phase Shifts for the Scattering of Protons from ^{12}C // *Nucl. Phys.* 1966. V. 86. P. 130–144.
116. *Неудачин В. Г., Смирнов Ю. Ф.* Нуклонные ассоциации в легких ядрах. М.: Наука, 1969. 414 с.
117. *Ajzenberg-Selove F.* Energy Levels of Light Nuclei $A = 13, 14$ // *Nucl. Phys. A.* 1991. V. 523. P. 1–116.
118. *Ajzenberg-Selove F.* Energy Levels of Light Nuclei $A = 12$ // *Nucl. Phys. A.* 1990. V. 506. P. 1–186.
119. *Burtebaev N. et al.* New Measurements of the Astrophysical S -factor for $^{12}\text{C}(p, \gamma)^{13}\text{N}$ Reaction at Low Energies and the Asymptotic Normalization Coefficient (Nuclear Vertex Constant) for $p+^{12}\text{C}\rightarrow^{13}\text{N}$ Reaction // *Phys. Rev. C.* 2008. V. 78. P. 035802–035813.
120. *Дубовиченко С. Б., Джазаиров-Кахраманов А. В.* Астрофизический S -фактор радиационного $p^{12}\text{C}\rightarrow^{13}\text{N}\gamma$ -захвата // *Изв. вузов. Сер. физ.* 2009. № 8. С. 58–64.
121. *Salpeter E. E.* Nuclear Reactions in Stars // *Phys. Rev.* 1957. V. 107. P. 516–525;
Salpeter E. E. Nuclear Reactions in Stars without Hydrogen // *Astrophys. J.* 1952. V. 115. P. 326;
Rolfs C. Nuclear Reactions in Stars Far below the Coulomb Barrier // *Progress in Part. and Nucl. Phys.* 2007. V. 59. P. 43.
122. *Schurmann D. et al.* nucl-ex/0511050v1. 2005.
123. *Дубовиченко С. Б.* Фазовый анализ $^4\text{He}^4\text{He}$ -рассеяния при 40–50 МэВ // *Изв. вузов. Сер. физ.* 2007. № 6. С. 74–79.
124. *Jones C. M.* The Scattering of Alpha Particles from ^{12}C // *Nucl. Phys.* 1962. V. 37. P. 1–9.
125. *Дубовиченко С. Б.* Фотопроцессы в $^4\text{He}^{12}\text{C}$ -канале ядра ^{16}O на основе потенциальной кластерной модели // *ЯФ.* 1996. Т. 59. С. 447–553.
126. *Plaga R. et al.* The Scattering of Alpha Particles from ^{12}C and the $^{12}\text{C}(\alpha, \gamma)^{16}\text{O}$ Stellar Reaction Rate // *Nucl. Phys. A.* 1987. V. 465. P. 291–316.

127. *Tilley D. R., Weller H. R., Cheves C. M.* Energy Levels of Light Nuclei $A = 16-17$ // Nucl. Phys. A. 1993. V. 564. P. 1–183.
128. *Дубовиченко С. Б. и др.* Фазовый анализ и потенциальное описание упругого ${}^4\text{He}^{12}\text{C}$ -рассеяния при низких энергиях // Изв. вузов. Сер. физ. 2009. № 7. С. 55–62.
129. *Дубовиченко С. Б., Джазаиров-Кахраманов А. В.* Астрофизический *S*-фактор радиационного ${}^4\text{He}^{12}\text{C}$ -захвата при низких энергиях // Докл. НАН РК. 2009. № 3. С. 30–36.
130. *Kettner K. U. et al.* The ${}^4\text{He}({}^{12}\text{C}, \gamma){}^{16}\text{O}$ Reaction at Stellar Energies // Z. Phys. A. 1982. V. 308. P. 73–94.
131. *Dyer P., Barnes C. A.* The ${}^{12}\text{C}(\alpha, \gamma){}^{16}\text{O}$ Reaction and Stellar Helium Burning // Nucl. Phys. A. 1974. V. 233. P. 495–520.
132. *Brune C. R. et al.* Sub-Coulomb α Transfers on ${}^{12}\text{C}$ and the ${}^{12}\text{C}(\alpha, \gamma){}^{16}\text{O}$ *S*-factor // Phys. Rev. Lett. 1999. V. 83. P. 4025–4028.
133. *Asuma R. E. et al.* Constraints on the Low-Energies E_1 Cross Section of ${}^{12}\text{C}(\alpha, \gamma){}^{16}\text{O}$ from the β -delayed α Spectrum of ${}^{16}\text{N}$ // Phys. Rev. C. 1994. V. 50. P. 1194–1215.
134. *Descouvemont P., Baye D.* ${}^{12}\text{C}(\alpha, \gamma){}^{16}\text{O}$ Reaction in a Multi-Configuration Microscopic Model // Phys. Rev. C. 1987. V. 36. P. 1249–1255.
135. *Imbriani G.* Underground Laboratory Studies of *pp* and CNO Some Astrophysical Consequences LUNA // Third Eur. Summer School on Exp. Nucl. Astrophysics, Sicily, Italy, Oct. 2–9, 2005. Catania, 2005.
136. *Caciolli A. et al.* Ultra-sensitive In-beam γ -ray Spectroscopy for Nuclear Astrophysics at LUNA // Eur. Phys. J. A. 2009. V. 39. P. 179–186.
137. *Кукулин В. И., Неудачин В. Г., Смирнов Ю. Ф.* Взаимодействие составных частиц и принцип Паули // ЭЧАЯ. 1979. Т. 10. С. 1236–1255.
138. *Дубовиченко С. Б., Джазаиров-Кахраманов А. В.* Фотопроцессы на ядрах ${}^7\text{Li}$ и ${}^7\text{Be}$ в кластерной модели для потенциалов с запрещенными состояниями // ЯФ. 1995. Т. 58. С. 635–641;
Дубовиченко С. Б., Джазаиров-Кахраманов А. В. Фотопроцессы на ядре ${}^6\text{Li}$ в кластерных моделях для потенциалов с запрещенными состояниями // Там же. С. 852–859.
139. *Дубовиченко С. Б., Джазаиров-Кахраманов А. В.* Потенциальное описание кластерных каналов лития // ЯФ. 1993. Т. 56. С. 87–98;
Дубовиченко С. Б., Джазаиров-Кахраманов А. В. Кулоновские формфакторы ядер лития в кластерной модели на основе потенциалов с запрещенными состояниями // ЯФ. 1994. Т. 57. С. 784–791.
140. *Barnard A. C., Jones C. M., Phillips G. C.* The Scattering of ${}^3\text{He}$ by ${}^4\text{He}$ // Nucl. Phys. 1964. V. 50. P. 629–640.
141. *Spiger R., Tombrello T. A.* Scattering of ${}^3\text{He}$ by ${}^4\text{He}$ and of ${}^4\text{He}$ by Tritium // Phys. Rev. 1967. V. 163. P. 964–984.

142. *Ivanovich M., Young P. G., Ohlsen G. G.* Elastic Scattering of the Several Hydrogen and Helium Isotopes from Tritium // Nucl. Phys. A. 1968. V. 110. P. 441–462.
143. *McIntyre L. C., Haeberli W.* Phase Shifts Analysis of $d-\alpha$ Scattering // Nucl. Phys. A. 1967. V. 91. P. 382–398.
144. *Keller L. G., Haeberli W.* Vector Polarization Measurements and Phase Shift Analysis for $d-\alpha$ Scattering between 3 and 11 MeV // Nucl. Phys. A. 1979. V. 156. P. 465–476.
145. *Gruebler W. et al.* Phase Shift Analysis of $d-\alpha$ Elastic Scattering between 3 and 17 MeV // Nucl. Phys. A. 1975. V. 242. P. 265–284.
146. *Schmelzbach P. A. et al.* Phase Shift Analysis of $d-\alpha$ Elastic Scattering // Nucl. Phys. A. 1972. V. 184. P. 193–213.
147. *Дубовиченко С. Б.* Тензорные ${}^2\text{H}^4\text{He}$ -взаимодействия в потенциальной кластерной модели с запрещенными состояниями // ЯФ. 1998. Т. 61. С. 210–217.
148. *Дубовиченко С. Б.* Астрофизические S -факторы радиационного ${}^3\text{He}^4\text{He}$ -, ${}^3\text{H}^4\text{He}$ - и ${}^2\text{H}^4\text{He}$ -захвата // ЯФ. 2010. № 7.
149. *Blokhintsev L. D. et al.* Determination of the ${}^6\alpha + d$ Vertex Constant (Asymptotic Coefficient) from the ${}^4\text{He}+d$ Phase-Shift Analysis // Phys. Rev. C. 1993. V. 48. P. 2390–2394.
150. *Блохинцев Л. Д. и др.* Расчет ядерной вершинной константы для виртуального распада ${}^6\text{Li} \rightarrow \alpha + d$ в модели трех тел и ее применение для описания астрофизической ядерной реакции $d(\alpha, \gamma){}^6\text{Li}$ при сверхнизких энергиях // ЯФ. 2006. Т. 69. С. 456–466.
151. *Lim T. K.* The ${}^6\text{Li}-\alpha-d$ Vertex Constant // Phys. Lett. B. 1975. V. 56. P. 321–324.
152. *Igamov S. B., Yarmukhamedov R.* Modified Two-Body Potential Approach to the Peripheral Direct Capture Astrophysical $a + A \rightarrow B + \gamma$ Reaction and Asymptotic Normalization Coefficients // Nucl. Phys. A. 2007. V. 781. P. 247–276.
153. *Brune C. R. et al.* Sub-Coulomb α Transfers on ${}^{12}\text{C}$ and the ${}^{12}\text{C}(\alpha, \gamma){}^{16}\text{O}$ S -factor // Phys. Rev. Lett. 1999. V. 83. P. 4025–4028.
154. *Igamov S. B., Tursunmakhatov K. I., Yarmukhamedov R.* Determination of the ${}^3\text{He}+\alpha$ to ${}^7\text{Be}$ Asymptotic Normalization Coefficients (Nuclear Vertex Constants) and Their Application for Extrapolation of the ${}^3\text{He}(\alpha, \gamma){}^7\text{Be}$ Astrophysics S -factors to the Solar Energy Region. nucl-th/0905.2026v3. 2009. 29 p.
155. *Langanke K.* Microscopic Potential Model Studies of Light Nuclear Capture Reactions // Nucl. Phys. A. 1986. V. 457. P. 351–366.
156. *Kajino T.* The ${}^3\text{He}(\alpha, \gamma){}^7\text{Be}$ and ${}^3\text{He}(\alpha, \gamma){}^7\text{Li}$ Reactions at Astrophysical Energies // Ibid. V. 460. P. 559–580.
157. *Burkova N. A. et al.* Is It Possible to Observe an Isoscalar $E1$ -multipole in ${}^6\text{Li}\gamma\alpha d$ Reactions? // Phys. Lett. B. 1990. V. 248. P. 15–20.
158. *Brune C. R., Kavanagh R. W., Rolf C.* ${}^3\text{H}(\alpha, \gamma){}^7\text{Li}$ Reaction at Low Energies // Phys. Rev. C. 1994. V. 50. P. 2205–2218.

159. *Griffiths G. M. et al.* The ${}^3\text{H}({}^4\text{He}, \gamma){}^7\text{Li}$ Reactions // *Can. J. Phys.* 1961. V. 39. P. 1397–1403.
160. *Schroder U. et al.* Astrophysical S -factor of ${}^3\text{H}(\alpha, \gamma){}^7\text{Li}$ // *Phys. Lett. B.* 1987. V. 192. P. 55–58.
161. *Brown T. A. D. et al.* ${}^3\text{He}+{}^4\text{He} \rightarrow {}^7\text{Be}$ Astrophysical S -factor // *Phys. Rev. C.* 2007. V. 76. P. 055801.1–055801.12; nucl-ex/0710.1279v4. 2007.
162. *Confortola F. et al.* Astrophysical S Factor of the ${}^3\text{He}(\alpha, \gamma){}^7\text{Be}$ Reaction Measured at Low Energy via Detection of Prompt and Delayed γ Rays // *Phys. Rev. C.* 2007. V. 75. P. 065803; nucl-ex/0705.2151v1. 2007.
163. *Gyurky G. et al.* ${}^3\text{He}(\alpha, \gamma){}^7\text{Be}$ Cross Section at Low Energies // *Phys. Rev. C.* 2007. V. 75. P. 035805.
164. *Singh N. et al.* New Precision Measurement of the ${}^3\text{He}({}^4\text{He}, \gamma){}^7\text{Be}$ Cross Section // *Phys. Rev. Lett.* 2004. V. 93. P. 262503.
165. *Osborn J. L. et al.* Low-Energy Behavior of the ${}^3\text{He}(\alpha, \gamma){}^7\text{Be}$ Cross Section // *Nucl. Phys. A.* 1984. V. 419. P. 115–132.
166. *Bemmerer D. et al.* Activation Measurement of the ${}^3\text{He}(\alpha, \gamma){}^7\text{Be}$ Cross Section at Low Energy // *Phys. Rev. Lett.* 2006. V. 97. P. 122502–122507; nucl-ex/0609013v1. 2006.
167. *Costantini H.* The ${}^3\text{He}(\alpha, \gamma){}^7\text{Be}$ S -factor at Solar Energies: the Prompt Experiment at LUNA. nucl-ex/0809.5269v1. 2008.
168. *Robertson R. C. et al.* Observation of the Capture Reaction ${}^2\text{H}(\alpha, \gamma){}^6\text{Li}$ and Its Role in Production of ${}^6\text{Li}$ in the Big Bang // *Phys. Rev. Lett.* 1981. V. 47. P. 1867–1870.
169. *Mohr P. et al.* Direct Capture in the 3^+ Resonance of ${}^2\text{H}(\alpha, \gamma){}^6\text{Li}$ // *Phys. Rev. C.* 1994. V. 50. P. 1543–1549.
170. *Kiener J. et al.* Measurements of the Coulomb Dissociation Cross Section of 156 MeV ${}^6\text{Li}$ Projectiles at Extremely Low Relative Fragment Energies of Astrophysical Interest // *Phys. Rev. C.* 1991. V. 44. P. 2195–2208.
171. *Igamov S. B., Yarmukhamedov R.* Triple-Differential Cross Section of the ${}^{208}\text{Pb}({}^6\text{Li}, \alpha d){}^{208}\text{Pb}$ Coulomb Breakup and Astrophysical S -factor of the $d(\alpha, \gamma){}^6\text{Li}$ Reaction at Extremely Low Energies // *Nucl. Phys. A.* 2000. V. 673. P. 509–525.