

ГЕОМЕТРИЯ, ФИЗИКА И ФЕНОМЕНОЛОГИЯ МОДЕЛИ РЭНДАЛЛ–СУНДРУМА

Э. Э. Боос, В. Е. Буничев, И. П. Волобуев, М. Н. Смоляков

Научно-исследовательский институт ядерной физики им. Д. В. Скобельцына
Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, Москва

ВВЕДЕНИЕ	82
ГЕОМЕТРИЯ МОДЕЛИ РЭНДАЛЛ–СУНДРУМА	85
ФИЗИКА МОДЕЛИ РЭНДАЛЛ–СУНДРУМА	91
ГРАВИТАЦИОННОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ НА БРАНАХ	102
СТАБИЛИЗИРОВАННАЯ МОДЕЛЬ РЭНДАЛЛ–СУНДРУМА	111
ФЕНОМЕНОЛОГИЯ МОДЕЛИ РЭНДАЛЛ–СУНДРУМА	137
ДВУХЧАСТИЧНЫЕ ПРОЦЕССЫ С КАЛУЦА-КЛЕЙНОВСКИМИ ГРАВИТОНАМИ	141
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	149
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	151

ГЕОМЕТРИЯ, ФИЗИКА И ФЕНОМЕНОЛОГИЯ МОДЕЛИ РЭНДАЛЛ–СУНДРУМА

Э. Э. Боос, В. Е. Буничев, И. П. Волобуев, М. Н. Смоляков

Научно-исследовательский институт ядерной физики им. Д. В. Скобельцына
Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, Москва

Обсуждаются геометрия и физика модели Рэндалл–Сундрума с двумя бранами, при этом особое внимание уделяется ее феноменологически приемлемому стабилизированному варианту. Для этой модели построен лагранжиан второй вариации, рассмотрена его калибровочная инвариантность, выведены и расцеплены уравнения движения и явно выделены физические степени свободы. Для стабилизированной модели подробно обсуждаются ее возможные феноменологические проявления в экспериментах на коллайдерах Тэватрон и ЛHC в случаях, когда энергия в системе центра масс ниже или выше порога рождения первого тензорного резонанса Калуцы–Клейна.

The review is devoted to a discussion of the geometry and the physics of the Randall–Sundrum model with two branes, the main emphasis being placed on its phenomenologically acceptable stabilized version. The second variation Lagrangian is constructed for this model, its gauge invariance is studied, the corresponding equations of motion are derived and decoupled, and the physical degrees of freedom are explicitly isolated. For the stabilized model, possible phenomenological manifestations in experiments at the Tevatron and the LHC are discussed in the cases where the center-of-mass energy is below or above the production threshold of the first tensor Kaluza–Klein resonance.

PACS: 04.12.13

ВВЕДЕНИЕ

Гипотеза о существовании дополнительных измерений пространства-времени обсуждается в теоретической физике уже около ста лет и за это время претерпела значительные изменения [1, 2]. В первоначальном варианте этого подхода — в теориях Калуцы–Клейна — макроскопическая ненаблюдаемость дополнительных измерений объяснялась их очень малым, порядка длины Планка, размером [3, 4]. При этом в эффективной четырехмерной теории наблюдаемыми оказывались только нулевые моды, т. е. поля, не зависящие от координат дополнительных измерений.

Около двадцати пяти лет назад для теорий Калуцы–Клейна был предложен новый сценарий, основанный на идее локализации полей на доменной стенке, который допускает существование больших и даже бесконечных дополнительных измерений, не наблюдаемых при «низких» энергиях [5].

В предельном случае бесконечно тонкой доменной стенки в теории возникает новый объект — мембрана, или просто брана, т. е. трехмерная поверхность в многомерном пространстве, на которой локализованы поля Стандартной модели (СМ); модели такого типа получили название моделей «мира на бране».

Модели мира на бране с дополнительными пространственными измерениями и различными полями, живущими во всем многомерном пространстве или локализованными на бранах, открывают большое число интригующих возможностей для того, чтобы решить или по-новому взглянуть на различные проблемы физики элементарных частиц и космологии. Это проблемы иерархии гравитационного взаимодействия, стабильности протона, барио- и лептогенеза, малых масс и большого смешивания нейтрино, темной материи и темной энергии и др. Оказалось, что такие модели возникают также в теориях суперструн [6, 7] и что они естественно могут включать в себя суперсимметрию и другие возможные симметрии. Кроме того, модели мира на бране приводят к интересным предсказаниям для экспериментов на коллайдерах ТэВ-ных энергий — Тэватроне, LHC и ILC.

В сценариях мира на бране важнейшим моментом являются возникающие в модели энергетические масштабы, которые обычно определяются гравитационным взаимодействием. Это является отражением того факта, что именно гравитация создает пространственно-временной фон таких моделей. Оказалось, что в теориях с большими дополнительными измерениями гравитация в многомерном пространстве-времени может стать «сильной» не при планковских энергиях, а при намного меньших энергиях, возможно порядка 1–10 ТэВ, что дает решение проблемы иерархии гравитационного взаимодействия [8, 9].

Предсказываемые такими моделями новые эффекты, вызываемые «сильной» квантовой гравитацией, могут быть проверены уже в ближайшее время в экспериментах на коллайдерах. Именно эти предсказания моделей с большими дополнительными измерениями наиболее широко обсуждаются в последнее время [10, 11].

Первой моделью с сильной гравитацией в пространстве с дополнительными измерениями был так называемый АДД-сценарий [8, 12]. В этих работах было замечено, что если поля Стандартной модели локализованы на бране в многомерном пространстве и пространство компактных дополнительных измерений имеет большой объем, то стандартная формула теории Калуцы–Клейна для связи многомерной и четырехмерной гравитационных постоянных позволяет решить проблему иерархии гравитационного взаимодействия. А именно, при наличии больших дополнительных измерений константа гравитационного взаимодействия в многомерной теории может быть сравнима с константой электрослабого взаимодействия, что соответствует фундаментальному энергетическому масштабу порядка 1 ТэВ, однако эффективная четырехмерная константа гравитационного взаимодействия на бране имеет обыч-

ную величину, соответствующую планковскому энергетическому масштабу. При этом, хотя константа связи каждой отдельной моды с полями СМ на бране определяется четырехмерной гравитационной постоянной, в процессах на коллайдерах в области энергий порядка нескольких ТэВ вклады дает такое большое число мод, что когерентное суммирование этих вкладов приводит к результирующему взаимодействию, сравнимому по силе с электрослабым. Поэтому предсказываемые такими теориями эффекты могут быть проверены уже в ближайшее время в экспериментах на коллайдерах (см., например, [13,14]). Именно возможность обнаружения больших дополнительных измерений и привлекает интерес к таким моделям.

АДД-сценарий отличается простотой и ясностью объяснения слабости гравитационного взаимодействия в четырехмерном пространстве-времени. Однако сделанное в его рамках предположение об отсутствии у браны натяжения (т. е. плотности энергии) представляется слишком грубым приближением. Действительно, брана без натяжения не обладает энергией покоя, и в соответствии с СТО с ней не может быть связана физическая система отсчета. Если же попытаться рассмотреть в рамках АДД-сценария браны с натяжением, то легко увидеть, что гравитационное поле браны нельзя учесть в рамках теории возмущений. Кроме того, уравнения Эйнштейна для гравитационного поля, взаимодействующего с однойбраной в пространстве компактных дополнительных измерений, оказываются противоречивыми.

Эти проблемы были решены в модели Рэндалл–Сундрума (эту модель часто называют RS1-моделью) [9]. Модель основана на точном решении уравнений Эйнштейна для системы двух бран с натяжением, взаимодействующих с гравитацией в пятимерном пространстве-времени. Дополнительное (пятое) измерение представляет собой так называемый орбифолд, а браны расположены в его неподвижных точках, в результате чего они не являются динамическими элементами теории. Структура орбифолда накладывает определенную симметрию на все поля модели, в частности, гравитационное поле должно быть симметричным по отношению к отражениям относительно положения бран. В этой модели метрика фоновое решение является неплоской и проблема иерархии решается благодаря конформному фактору в выражении для четырехмерной метрики.

В АДД-сценарии [8] и в модели Рэндалл–Сундрума с двумя бранами [9] дополнительные измерения имеют конечный размер. Однако существуют модели «мира на бране» и с бесконечными дополнительными измерениями. Например, в работе [15] описана модель Рэндалл–Сундрума с однойбраной, в которой имеется одно бесконечное дополнительное измерение. Хотя в этом случае иерархия между четырехмерными электрослабым и гравитационным масштабами уже не может быть объяснена геометрией пятимерного пространства-времени, модель предлагает некоторые интересные следствия. В частности, в этой модели нулевая с четырехмерной точки зрения мода

гравитона оказывается локализованной на бране, и поэтому на достаточно больших расстояниях гравитация на бране сводится к четырехмерной эйнштейновской гравитации.

В последнее время широко обсуждаются также модели с так называемыми «универсальными дополнительными измерениями» [16–19]. В таких моделях предполагается, что поля Стандартной модели не локализованы на бране, а могут распространяться во всем пространстве, что идейно достаточно близко к первоначальным предположениям Калуцы и Клейна. В частности, в недавних работах этого направления [20–25] предполагается, что все поля Стандартной модели, кроме поля Хиггса, распространяются в дополнительных измерениях. Поле Хиггса предполагается локализованным на бране с отрицательным натяжением, при этом разные лептоны и кварки локализованы у разных бран, что позволяет объяснить иерархию их масс.

Помимо упомянутых вариантов, существуют экзотические сценарии, в которых дополнительные измерения имеют совсем другую геометрию или другие свойства. Это, например, модели с временными дополнительными измерениями (см. [26–28]).

В настоящем обзоре мы подробно рассмотрим первоначальный вариант модели Рэндалл–Сундрума, в котором поля Стандартной модели локализованы на одной из бран, а во всем многомерном пространстве может распространяться только гравитация. Для этой модели мы найдем связь пятимерного и четырехмерного энергетических масштабов, явно выделим в линейном приближении физические степени свободы и найдем их взаимодействие с полями материи на бранах. Затем аналогичное рассмотрение будет проведено для варианта этой модели со стабилизированным расстоянием между бранами, который является феноменологически приемлемым. Далее на основе этого рассмотрения будут изучены различные коллайдерные процессы в случаях, когда энергия в системе центра масс ниже или выше порога рождения первого тензорного резонанса Калуцы–Клейна.

1. ГЕОМЕТРИЯ МОДЕЛИ РЭНДАЛЛ–СУНДРУМА

Модель Рэндалл–Сундрума [9] описывает гравитацию в пятимерном пространстве-времени E , взаимодействующую с двумя мембранами. Обозначим координаты в E $\{x^M\} = \{x^\mu, y\}$, $M = 0, 1, 2, 3, 4$, при этом $\{x^\mu\}$, $\mu = 0, 1, 2, 3$, суть координаты в четырехмерном пространстве-времени, а координата y соответствует пятому измерению. Оно образует орбифолд S^1/Z_2 , который является окружностью диаметром $2L/\pi$ с отождествленными точками (x, y) и $(x, -y)$. В соответствии с этим метрика $g_{MN}(x, y)$ удовлетворяет

условию симметрии орбифолда

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}(x, -y) &= g_{\mu\nu}(x, y), & g_{\mu 4}(x, -y) &= -g_{\mu 4}(x, y), \\ g_{44}(x, -y) &= g_{44}(x, y). \end{aligned} \quad (1)$$

Браны расположены в неподвижных точках орбифолда $y = 0$ и $y = L$. В дополнение к этому мы имеем обычное условие периодичности, которое отождествляет точки (x, y) и $(x, y + 2nL)$.

Действие для этой модели записывается как

$$S = S_g + S_{b1} + S_{b2}, \quad (2)$$

где гравитационное действие S_g дается формулой

$$S_g = \frac{1}{16\pi\hat{G}} \int_E (R - \Lambda) \sqrt{-g} d^5x, \quad (3)$$

а действия мембран суть

$$S_{b1} = -\lambda_1 \int_E \sqrt{-\tilde{g}} \delta(y) d^5x, \quad S_{b2} = -\lambda_2 \int_E \sqrt{-\tilde{g}} \delta(y - L) d^5x. \quad (4)$$

Здесь \hat{G} — пятимерная гравитационная постоянная; R и Λ — пятимерные кривизна и космологическая постоянная, $\tilde{g} = \det \tilde{g}_{\mu\nu}$ и $\tilde{g}_{\mu\nu}$ обозначает индуцированную на бранах метрику. Сигнатура метрики g_{MN} выбрана равной $(-, +, +, +, +)$. Индексы 1 и 2 различают браны. Интегрирование по dy ведется по окружности S^1 .

Решение для метрики ищется в виде, сохраняющем пуанкаре-инвариантность в любом подпространстве $y = \text{const}$,

$$ds^2 = \gamma_{MN}(y) dx^M dx^N = e^{-2\sigma(y)} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dy^2, \quad (5)$$

где $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ есть метрика Минковского.

В рамках этой подстановки отвечающие действию (2) пятимерные уравнения Эйнштейна

$$R_{MN} - \frac{1}{2} g_{MN} (R - \Lambda) = 8\pi\hat{G} T_{MN} \quad (6)$$

с тензором энергии-импульса бран

$$T_{MN} = \sqrt{\frac{\tilde{g}}{g}} \delta_M^\mu \delta_N^\nu (\lambda_1 \delta(y) + \lambda_2 \delta(y - L)) \quad (7)$$

сводятся к следующим уравнениям для функции $\sigma(y)$:

$$\left(\frac{d\sigma}{dy}\right)^2 = -\frac{\Lambda}{12}, \quad 6\frac{d^2\sigma}{dy^2} = 16\pi\hat{G}(\lambda_1\delta(y) + \lambda_2\delta(y-L)). \quad (8)$$

Четная функция $\sigma(y)$ (т.е. обладающая симметрией орбифолда), которая удовлетворяет этим уравнениям на интервале $-L \leq y \leq L$, имеет вид

$$\sigma(y) = k|y| + c. \quad (9)$$

В последнем выражении c есть константа интегрирования, которая может быть устранена дилатацией четырехмерных координат в формуле (5). Однако оказывается целесообразным сохранить эту константу и фиксировать ее в дальнейшем выбором удобной системы координат. Функция $\sigma(y)$ обладает свойствами

$$\frac{d\sigma}{dy} = k \operatorname{sign}(y), \quad \frac{d^2\sigma}{dy^2} = 2k(\delta(y) - \delta(y-L)) \equiv 2k\tilde{\delta}(y). \quad (10)$$

Фигурирующий здесь параметр k имеет размерность массы, а $\Lambda, \lambda_{1,2}$ вследствие (8) выражаются через него следующим образом:

$$\Lambda = -12k^2, \quad \lambda_1 = -\lambda_2 = \frac{3k}{4\pi\hat{G}}. \quad (11)$$

Отсюда, в частности, следует, что брана 1 имеет положительное натяжение, в то время как брана 2 — отрицательное. Кроме того, пятимерная космологическая постоянная оказывается отрицательной. Последнее означает, что метрика в пространстве между бранами должна быть метрикой анти-де Ситтера [29].

Известно, что пятимерное пространство анти-де Ситтера является пространством постоянной кривизны и канонически реализуется как однополостный гиперболоид в шестимерном псевдоевклидовом пространстве с координатами $\{X^\mu, Y, Z\}$, задаваемый уравнением

$$-\eta_{\mu\nu}X^\mu X^\nu - Y^2 + Z^2 = a^2, \quad (12)$$

и что стандартная метрика на этом пространстве конформно-плоская; константа a называется радиусом этого пространства.

Нетрудно убедиться, что метрика (5) может быть легко приведена к конформно-плоскому виду. Действительно, для этой метрики с функцией $\sigma(y)$, заданной уравнением (9), имеем:

$$ds^2 = e^{-2\sigma(y)}(\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + (e^{\sigma(y)} dy)^2) = \frac{\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dz^2}{(kz)^2}, \quad (13)$$

где координата z определяется формулой $z = \exp(ky + c)/k$ и принимает значения на отрезке $[\exp(c)/k, \exp(kL + c)/k]$. Эта форма метрики модели

Рэндалл–Сундрума является основой для установления ее связи с конформными теориями поля (AdS/CFT-соответствие) [30, 31].

Отображение пространства-времени модели Рэндалл–Сундрума с координатами $\{x^\mu, z\}$ на пространство анти-де Ситтера (12) задается в явном виде формулами [32]

$$\begin{aligned} X^\mu &= \frac{x^\mu}{kz}, & Y &= \frac{1}{2} \left(\frac{\eta_{\rho\sigma} x^\rho x^\sigma}{z} + z - \frac{1}{k^2 z} \right), \\ Z &= \frac{1}{2} \left(\frac{\eta_{\rho\sigma} x^\rho x^\sigma}{z} + z + \frac{1}{k^2 z} \right), \end{aligned} \quad (14)$$

при этом метрика (13) получается как индуцированная из псевдоевклидовой метрики шестимерного плоского пространства. Параметрически заданные этими формулами координаты $\{X^\mu, Y, Z\}$ удовлетворяют уравнению (12) с $a = 1/k$, и поэтому величина $1/k$ называется антидеситтеровским радиусом.

Решение Рэндалл–Сундрума (5) с функцией $\sigma(y)$, заданной уравнением (9), дает вакуумное состояние модели, на фоне которого нужно рассматривать взаимодействия гравитационного поля, распространяющегося во всем пятимерном пространстве-времени, и полей Стандартной модели, локализованных на бране. Последняя задача оказывается очень сложной вследствие нелинейности гравитационного взаимодействия. Однако, поскольку оно достаточно слабое и нас интересует в первую очередь взаимодействие гравитации с полями Стандартной модели, мы можем использовать линейное приближение для гравитационного поля. Наиболее последовательное описание линеаризованной гравитации достигается в рамках лагранжева подхода, в основе которого лежит так называемый лагранжиан второй вариации [33].

Следуя работе [34], мы построим теперь лагранжиан второй вариации модели Рэндалл–Сундрума. Для этого параметризуем метрику как

$$g_{MN}(x, y) = \gamma_{MN}(y) + \hat{\kappa} h_{MN}(x, y), \quad (15)$$

подставим в действие (2) и сохраним члены нулевого порядка по $\hat{\kappa} = \sqrt{16\pi\hat{G}}$. Эта процедура в применении к гравитационному действию S_g приводит к лагранжиану

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{L}_g^{(2)}}{\sqrt{-\gamma}} &= -\frac{1}{4} (\nabla_R h_{MN} \nabla^R h^{MN} - \nabla_R h \nabla^R h + 2\nabla_M h^{MN} \nabla_N h - \\ &\quad - 2\nabla^R h^{MN} \nabla_M h_{RN}) + \frac{\Lambda}{2(d+2)} \left(h_{MN} h^{MN} - \frac{1}{2} h h \right) - \\ &\quad - \frac{4\pi\hat{G}}{d+2} T_R^R \left(h_{MN} h^{MN} - \frac{1}{2} h h \right) + \\ &\quad + \left(8\pi\hat{G} T^{MN} h_{MR} h_N^R - 4\pi\hat{G} T^{MN} h_{MN} h \right), \end{aligned} \quad (16)$$

где $\gamma = \det \gamma_{MN}$, ∇_M обозначает ковариантную производную в смысле метрики γ_{MN} , $h = \gamma^{MN} h_{MN}$, а тензор энергии-импульса есть

$$T_{MN} = -\frac{3k}{4\pi\tilde{G}} \sqrt{\frac{\tilde{\gamma}}{\gamma}} \gamma_{\mu\nu} \delta_M^\mu \delta_N^\nu \tilde{\delta}, \quad (17)$$

при этом $\tilde{\gamma}$ обозначает определитель матрицы $\gamma_{\mu\nu}$. Действия обеих бран приводят к лагранжиану

$$\Delta\mathcal{L}_{1,2}^{(2)} = 3k \left(h_{\mu\nu} h^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \tilde{h} \tilde{h} \right) \tilde{\delta} \sqrt{\tilde{\gamma}}, \quad (18)$$

где $\tilde{h} = \gamma^{\mu\nu} h_{\mu\nu}$.

Удобно привести член $(1/2)\nabla^R h^{MN} \nabla_M h_{RN}$ в (16) к стандартной форме Фирца–Паули

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \nabla^R h^{MN} \nabla_M h_{RN} &= \frac{1}{2} \nabla_M h^{MN} \nabla^R h_{RN} + \\ &+ \frac{1}{2} h^{MN} h^{PQ} R_{MNPQ} - \frac{1}{2} h^{MN} h_{NP} R_M^P, \end{aligned} \quad (19)$$

где R_{MNPQ} и R_M^P — тензор кривизны и тензор Риччи метрики γ_{MN} соответственно. После подстановки (19) в (16) и объединения этого выражения с вкладом бран (18) полный лагранжиан модели получается в виде

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{L}}{\sqrt{-\gamma}} &= -\frac{1}{4} (\nabla_R h_{MN} \nabla^R h^{MN} - \nabla_R h \nabla^R h + 2\nabla_M h^{MN} \nabla_N h - \\ &- 2\nabla_M h^{MN} \nabla^R h_{RN}) + \frac{k^2}{2} (h_{MN} h^{MN} + hh) + \\ &+ \left[-2kh_{MN} h^{MN} + kh\tilde{h} - kh_{M\nu} h^{M\nu} + 3k \left(h_{\mu\nu} h^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \tilde{h} \tilde{h} \right) \right] \tilde{\delta}. \end{aligned} \quad (20)$$

Известно, что линеаризованная гравитация представляет собой калибровочную теорию, и поэтому нам нужно изучить калибровочную инвариантность полученного лагранжиана. Нетрудно проверить, что этот лагранжиан инвариантен относительно калибровочных преобразований [35, 36]

$$h_{MN}^{(l)}(x, y) = h_{MN}(x, y) - (\nabla_M \xi_N + \nabla_N \xi_M), \quad (21)$$

если функции $\xi^M(x, y)$ удовлетворяют условию симметрии орбифолда

$$\begin{aligned} \xi^\mu(x, -y) &= \xi^\mu(x, y), \\ \xi^4(x, -y) &= -\xi^4(x, y) \end{aligned} \quad (22)$$

(здесь и далее в формулах для калибровочных преобразований штрих (\prime) обозначает преобразованное поле).

Для метрики Рэндалл–Сундрума эти калибровочные преобразования могут быть найдены явно и имеют вид

$$\begin{aligned} h_{\mu\nu}^{(\prime)}(x, y) &= h_{\mu\nu}(x, y) - (\partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu - 2\gamma_{\mu\nu} \partial_4 \sigma \xi_4), \\ h_{\mu 4}^{(\prime)}(x, y) &= h_{\mu 4}(x, y) - (\partial_\mu \xi_4 + \partial_4 \xi_\mu + 2\partial_4 \sigma \xi_\mu), \\ h_{44}^{(\prime)}(x, y) &= h_{44}(x, y) - 2\partial_4 \xi_4, \end{aligned} \quad (23)$$

где $\partial_4 \equiv \partial/\partial y$. Эти калибровочные преобразования в другой параметризации обсуждались в работах [37, 38]. Мы будем использовать их для выделения физических степеней свободы поля h_{MN} .

Для этого сначала сделаем калибровочное преобразование с функцией

$$\xi_4(x, y) = \frac{1}{4} \int_{-y}^y h_{44}(x, y') dy' - \frac{y}{4L} \int_{-L}^L h_{44}(x, y') dy'. \quad (24)$$

Легко увидеть, что ξ_4 удовлетворяет условиям симметрии орбифолда. После этого преобразования h_{44} принимает вид

$$h_{44}^{(\prime)}(x) = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L h_{44}(x, y) dy, \quad (25)$$

т. е. не зависит от y . Более того, остаточных калибровочных преобразований с функцией ξ_4 нет.

Теперь рассмотрим компоненты $h_{\mu 4}$. Вследствие симметрии орбифолда

$$h_{\mu 4}(x, -y) = -h_{\mu 4}(x, y), \quad (26)$$

и калибровочные преобразования для $h_{\mu 4}$ имеют вид

$$h_{\mu 4}^{(\prime)}(x, y) = h_{\mu 4}(x, y) - (\partial_4 \xi_\mu + 2\partial_4 \sigma \xi_\mu). \quad (27)$$

Покажем, что можно наложить условие $h_{\mu 4}^{(\prime)} = 0$. Из (27) следует, что соответствующее уравнение для ξ_μ имеет вид

$$\partial_4(e^{2\sigma} \xi_\mu) = e^{2\sigma} h_{\mu 4}.$$

Таким образом,

$$\xi_\mu(x, y) = e^{-2\sigma} \int_0^y e^{2\sigma} h_{\mu 4}(x, y') dy', \quad (28)$$

причем ξ_μ удовлетворяет условиям симметрии орбифолда (22). Назовем калибровку

$$h_{\mu 4} = 0, \quad h_{44} = h_{44}(x) \equiv \phi(x) \quad (29)$$

унитарной калибровкой. Это название несколько условно, так как хотя после наложения этой калибровки основные физические степени свободы уже выделены, тем не менее еще остаются калибровочные преобразования, удовлетворяющие условию

$$\partial_4(e^{2\sigma}\xi_\mu) = 0. \quad (30)$$

Они необходимы для устранения калибровочных степеней свободы безмассовой моды гравитационного поля.

Следует отметить, что во многих исследованиях модели Рэндалл–Сундрума используются гауссовы нормальные координаты, т.е. координаты, в которых $h_{44} = h_{\mu 4} = 0$ [38]. В рамках нашего подхода калибровка, отвечающая выбору гауссовых нормальных координат, получается, если в качестве функции ξ_4 , параметризующей калибровочное преобразование, на некотором интервале $0 \leq y < a$ взять первое слагаемое из уравнения (24) и гладко продолжить его на интервал $a < y \leq L$ так, что $\xi_4(L) = 0$. Очевидно, что после такого калибровочного преобразования $h_{44} = 0$ при $0 \leq y < a$. Затем компоненты $h_{\mu 4}$ можно обратить в нуль так же, как это было сделано выше. Таким образом, калибровка, отвечающая выбору гауссовых нормальных координат, с необходимостью является локальной, т.е. определена в некоторой окрестности одной из бран, не пересекающейся с другой браной. Поэтому, в отличие от введенной нами глобальной унитарной калибровки, она не позволяет рассматривать теорию на обеих бранах одновременно.

2. ФИЗИКА МОДЕЛИ РЭНДАЛЛ–СУНДРУМА

Для физической интерпретации этой модели нужно выделить из пятимерного гравитационного поля четырехмерные степени свободы и изучить их взаимодействия с полями Стандартной модели на бране. Прежде всего заметим, что пятимерное гравитационное поле должно с необходимостью описывать четырехмерную гравитацию. Нетрудно понять, что пятимерная метрика, отвечающая четырехмерному гравитационному полю, получается, если в формуле (13) заменить метрику Минковского $\eta_{\mu\nu}$ четырехмерной метрикой $\bar{g}_{\mu\nu}(x)$:

$$ds^2 = e^{-2\sigma(y)} \bar{g}_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu + dy^2. \quad (31)$$

Если подставить эту пятимерную метрику в действие модели (2), то мы получим

$$S = \frac{1}{16\pi\hat{G}} \int_{-L}^L e^{-2\sigma(y)} dy \int d^4x R_4(\bar{g}) \sqrt{-\bar{g}}, \quad (32)$$

где $R_4(\bar{g})$ обозначает скалярную кривизну четырехмерного пространства, вычисленную по метрике $\bar{g}_{\mu\nu}(x)$. Интегрируя в (32) по дополнительному измерению, мы получаем эффективное действие для четырехмерной гравитации:

$$S_{\text{eff}} = e^{-2c} \frac{1 - e^{-2kL}}{16\pi\hat{G}k} \int d^4x R_4(\bar{g}) \sqrt{-\bar{g}}. \quad (33)$$

Таким образом, мы видим, что редуцированное действие представляет собой стандартное действие четырехмерной гравитации, и поле $\bar{g}_{\mu\nu}(x)$ действительно можно рассматривать как четырехмерное гравитационное поле. Поэтому выражение перед интегралом есть четырехмерная гравитационная постоянная, которая определяет силу взаимодействия четырехмерной гравитации с материей на бране. Но, поскольку у нас две браны, мы должны выяснить, какой бране соответствует эта гравитационная постоянная.

Рассмотрим сначала метрику на бране в $y = 0$, индуцированную из метрики (31); она имеет вид

$$ds^2 = e^{-2\sigma(0)} \bar{g}_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu. \quad (34)$$

Метрика $\bar{g}_{\mu\nu}(x)$ совпадает с индуцированной метрикой на бране 1, только если $\sigma(0) = 0$. Как мы уже упоминали в предыдущем разделе, этого можно добиться выбором постоянной c в формуле (9); в данном случае нужно положить $c = 0$. Отметим, что в этом случае метрика на бране 1, индуцированная из метрики решения Рэндалл–Сундрума, является метрикой Минковского, а координаты $\{x^\mu\}$ на бране называются галилеевыми [35].

Теперь формула (33) дает нам связь постоянной Ньютона G_1 на бране 1 с пятимерной гравитационной постоянной

$$G_1 = \frac{\hat{G}k}{1 - e^{-2kL}}, \quad (35)$$

или, эквивалентно, связь массы Планка на этой бране с фундаментальным пятимерным энергетическим масштабом:

$$M_1^2 = M^3 \frac{1 - e^{-2kL}}{k}. \quad (36)$$

Если наблюдатель расположен на бране 1, то мы должны положить $M_1 = M_{\text{Pl}}$, и в этом случае равенство (36) приводит к тому, что пятимерный

энергетический масштаб M и параметр k тоже должны быть порядка M_{Pl} , $M \sim k \sim M_{\text{Pl}}$. Таким образом, для наблюдателя на бране 1 пятимерная гравитация такая же слабая, что и гравитация на бране.

Метрика на бране в $y = L$, индуцированная из метрики (31), имеет вид

$$ds^2 = e^{-2\sigma(L)} \bar{g}_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu, \quad (37)$$

и поэтому метрика $\bar{g}_{\mu\nu}(x)$ совпадает с индуцированной метрикой на бране 2, только если $\sigma(L) = 0$. Для этого, как мы уже показали выше, достаточно положить в формуле (9) константу $c = -kL$. В этом случае формула (33) дает нам связь постоянной Ньютона G_2 на бране 2 с пятимерной гравитационной постоянной:

$$G_2 = \frac{\hat{G}k}{e^{2kL} - 1} \quad (38)$$

и соответствующую связь массы Планка M_2 на этой бране с фундаментальным пятимерным энергетическим масштабом:

$$M_2^2 = M^3 \frac{e^{2kL} - 1}{k}. \quad (39)$$

Заметим, что если в формулах (35)–(39) перейти к пределу $k \rightarrow 0$, то они перейдут в обычные формулы теории Калуцы–Клейна.

Если наш мир расположен на бране 2, то мы должны положить $M_2 = M_{\text{Pl}}$, и в этом случае из равенства (39) следует, что если $kL \sim 35$, то пятимерный энергетический масштаб M и параметр k могут быть порядка 1 ТэВ. Т.е. для наблюдателя на бране 2 в этом случае решается проблема иерархии гравитационного взаимодействия: энергетический масштаб пятимерной гравитации оказывается сравнимым с электрослабым масштабом, а гравитация на бране становится слабой вследствие экспоненциального фактора в формуле (39). Таким образом, в модели Рэндалл–Сундрума наблюдатели на разных бранах воспринимают пятимерную гравитацию по-разному.

В предыдущем разделе мы выяснили, что в линеаризованной теории помимо тензорного поля присутствует также скалярное поле $\phi(x)$, происходящее из компоненты метрики, отвечающей дополнительному измерению. Остановимся на физическом смысле этого поля. Для этого вычислим в линейном приближении расстояние между бранами вдоль геодезической $x = \text{const}$:

$$l = \int_0^L \sqrt{ds^2} \approx \int_0^L \left(1 + \frac{1}{2} \hat{\kappa} h_{44} \right) dy = L \left(1 + \frac{1}{2} \hat{\kappa} \phi(x) \right). \quad (40)$$

Из последней формулы следует, что поле $\phi(x)$ описывает изменение расстояния между бранами, т.е. колебания бран относительно друг друга, и называется полем *радиона*.

Для того, чтобы выделить остальные четырехмерные степени свободы теории, сначала нужно получить и расцепить уравнения движения для пятимерных полей. Варьируя действие, соответствующее лагранжиану (20), получим следующие уравнения движения:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\nabla_R\nabla^R h_{MN} - \frac{1}{2}\gamma_{MN}\nabla_R\nabla^R h + \frac{1}{2}\nabla_M\nabla_N h + \frac{1}{2}\gamma_{MN}\nabla^R\nabla^S h_{RS} - \\ & - \frac{1}{2}\nabla_M\nabla^R h_{RN} - \frac{1}{2}\nabla_N\nabla^R h_{RM} + k^2(h_{MN} + \gamma_{MN}h) + \left[-4kh_{MN} - \right. \\ & \quad \left. - k(h_{M\nu}\delta_N^\nu + h_{\mu N}\delta_M^\mu) + k\gamma_{MN}\tilde{h} + k\delta_M^\mu\delta_N^\nu\gamma_{\mu\nu}h + \right. \\ & \quad \left. + 6k\delta_M^\mu\delta_N^\nu\left(h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\gamma_{\mu\nu}\tilde{h}\right) \right] \tilde{\delta} = 0. \quad (41) \end{aligned}$$

Свертка индексов в этом выражении дает очень простое уравнение

$$\frac{3}{2}\nabla^R\nabla^S h_{RS} - \frac{3}{2}\nabla_R\nabla^R h + 6k^2h - 3k\tilde{h}\tilde{\delta} = 0, \quad (42)$$

которое будет использовано в дальнейшем. Уравнения движения для разных компонент получаются из (41) и в унитарной калибровке (29) имеют вид:

1) $\mu\nu$ -компонента

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\left(\partial_\rho\partial^\rho h_{\mu\nu} - \partial_\mu\partial^\rho h_{\rho\nu} - \partial_\nu\partial^\rho h_{\rho\mu} + \frac{\partial^2 h_{\mu\nu}}{\partial y^2}\right) - 2k^2 h_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial_\mu\partial_\nu\tilde{h} + \\ & + \frac{1}{2}\partial_\mu\partial_\nu\phi + \frac{1}{2}\gamma_{\mu\nu}\left(\partial^\rho\partial^\sigma h_{\rho\sigma} - \partial_\rho\partial^\rho\tilde{h} - \frac{\partial^2\tilde{h}}{\partial y^2} + 4\partial_4\sigma\partial_4\tilde{h} - \partial_\rho\partial^\rho\phi + 12k^2\phi\right) + \\ & \quad + [2kh_{\mu\nu} - 3k\gamma_{\mu\nu}\phi] \tilde{\delta} = 0, \quad (43) \end{aligned}$$

2) $\mu 4$ -компонента

$$\partial_4(\partial_\mu\tilde{h} - \partial^\nu h_{\mu\nu}) + 3\partial_4\sigma\partial_\mu\phi = 0, \quad (44)$$

играющая роль уравнения связи,

3) 44 -компонента

$$\frac{1}{2}(\partial^\mu\partial^\nu h_{\mu\nu} - \partial_\rho\partial^\rho\tilde{h}) + \frac{3}{2}\partial_4\sigma\partial_4\tilde{h} + 6k^2\phi = 0. \quad (45)$$

В унитарной калибровке свернутое уравнение принимает вид

$$\frac{3}{2}(\partial^\mu\partial^\nu h_{\mu\nu} - \partial_\rho\partial^\rho\tilde{h}) + \frac{15}{2}\partial_4\sigma\partial_4\tilde{h} - \frac{3}{2}\frac{\partial^2\tilde{h}}{\partial y^2} - \frac{3}{2}\partial_\rho\partial^\rho\phi + 30k^2\phi - 12k\phi\tilde{\delta} = 0. \quad (46)$$

Сначала рассмотрим 44-компоненту и свернутое уравнение. Умножая уравнение (45) на 3 и вычитая его из (46), получим уравнение, содержащее только \tilde{h} и ϕ :

$$\frac{\partial^2 \tilde{h}}{\partial y^2} - 2\partial_4 \sigma \partial_4 \tilde{h} - 8k^2 \phi + 8k\phi\tilde{\delta} + \partial_\rho \partial^\rho \phi = 0. \quad (47)$$

Для корректного описания физических степеней свободы данной модели представим гравитационное поле в виде

$$h_{\mu\nu} = b_{\mu\nu} - \gamma_{\mu\nu}(y)(k|y| + s)\phi + \frac{1}{2k^2} \left(\frac{1}{2} - k|y| - s + \frac{s}{2} e^{2k|y|} \right) \partial_\mu \partial_\nu \phi, \quad (48)$$

где s есть некоторая константа. В дальнейшем мы увидим, что поле $b_{\mu\nu}(x, y)$ описывает безмассовый гравитон и массивные тензорные поля Калуцы–Клейна [9, 15], а $\phi(x)$ описывает безмассовое скалярное поле — радион. Повидимому, радион как безмассовое четырехмерное поле был впервые идентифицирован в работах [38, 39]. Как будет показано ниже, выражение (48) с соответствующей константой s диагонализует лагранжиан второй вариации и расцепляет уравнения движения (43)–(45). Вид подстановки (48) подсказан видом калибровочных преобразований, переводящих теорию из локальных гауссовых нормальных координат [38], в которых лагранжиан второй вариации диагонален во всем пространстве, кроме бран, к координатам общего вида. Отметим, что уравнения движения, полученные в работе [38], остаются зацепленными в неподвижных точках орбифолда, т. е. в точках, где находятся браны. Для их расцепления нужен член $\sim e^{2k|y|}$ в выражении (48). Как следует из (48),

$$\tilde{h} = \tilde{b} - 4(k|y| + s)\phi + \frac{1}{2k^2} \left(\frac{1}{2} - k|y| - s + \frac{s}{2} e^{2k|y|} \right) \partial_\mu \partial^\mu \phi. \quad (49)$$

Подставляя (49) в (47), получаем

$$\partial_4(e^{-2\sigma} \partial_4 \tilde{b}) + 2s\partial_\rho \partial^\rho \phi - \frac{2}{k}(k|y| + s - s e^{2k|y|})\partial_\rho \partial^\rho \phi \tilde{\delta} = 0.$$

Выбирая константу s таким образом, чтобы граничный член, пропорциональный $\tilde{\delta}(y)$, обратился в нуль, т. е.

$$s = \frac{kL}{e^{2kL} - 1}, \quad (50)$$

уравнение можно упростить:

$$\partial_4(e^{-2\sigma} \partial_4 \tilde{b}) + 2s\partial_\rho \partial^\rho \phi = 0. \quad (51)$$

Учитывая, что $\gamma_{\mu\nu} = e^{-2\sigma} \eta_{\mu\nu}$, перейдем в этом уравнении к плоской метрике и обозначим $b = \eta^{\mu\nu} b_{\mu\nu}$. Тогда получим

$$\partial_4(e^{-2\sigma} \partial_4(e^{2\sigma} b)) + 2s e^{2\sigma} \square\phi = 0, \quad (52)$$

где $\square = \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu$ — оператор Даламбера в плоском пространстве.

Рассмотрим разложение правой и левой частей этого уравнения в ряд Фурье по координате y . Так как член с производной ∂_4 не имеет нулевой моды, то из этого следует, что радион является свободным безмассовым полем [38], т. е.

$$\square\phi = 0, \quad (53)$$

и $\partial_4(e^{2\sigma} b) = e^{2\sigma} f(x)$. Применяя аналогичные рассуждения к последнему уравнению, получаем

$$\partial_4(e^{2\sigma} b) = 0.$$

Напомним, что в нашем распоряжении остались еще калибровочные преобразования, удовлетворяющие условию (30). С помощью этих преобразований мы можем наложить калибровку

$$\tilde{b} = b = 0. \quad (54)$$

Видно, что остаточные калибровочные преобразования имеют вид $\xi_\mu = e^{-2\sigma} \epsilon_\mu(x)$, где $\epsilon_\mu(x)$ удовлетворяет уравнению $\partial^\mu \epsilon_\mu = 0$. Подставляя (48) в (44), (45) и используя калибровку (54), мы получим следующую систему уравнений:

$$\partial^\mu \partial^\nu b_{\mu\nu} = 0, \quad (55)$$

$$\partial_4(e^{2\sigma} \partial^\mu b_{\mu\nu}) = 0. \quad (56)$$

С помощью остаточных калибровочных преобразований можно наложить калибровку

$$\partial^\mu b_{\mu\nu} = 0. \quad (57)$$

Соотношения (54) и (57) определяют калибровку, которую обычно называют поперечно-бесследовой (ТТ) калибровкой. После наложения этой калибровки у нас все еще остаются калибровочные преобразования, удовлетворяющие условиям

$$\xi_\mu = e^{-2\sigma} \epsilon_\mu(x), \quad \square\epsilon_\mu = 0, \quad \partial^\mu \epsilon_\mu = 0, \quad (58)$$

которые важны для нахождения числа степеней свободы безмассовой моды поля $b_{\mu\nu}$.

Итак, в калибровке (54), (57) свернутое уравнение и уравнения (44), (45) удовлетворяются автоматически. Теперь рассмотрим уравнение (43). Подставляя в него выражения (48), (49) и переходя к ТТ-калибровке, получим

$$\frac{1}{2} e^{2\sigma} \square b_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 b_{\mu\nu}}{\partial y^2} - 2k^2 b_{\mu\nu} + 2k b_{\mu\nu} \tilde{\delta} = 0. \quad (59)$$

Это уравнение для поперечно-бесследовой части гравитационного поля было фактически постулировано в работе [9]. Итак, мы расцепили все уравнения.

Таким образом, флуктуации метрики на фоне решения Рэндалл–Сундрума описываются полем $b_{\mu\nu}(x, y)$ со спином 2 и безмассовым скалярным радионем $\phi(x)$. Их классические уравнения движения даются формулами (59) и (53) соответственно.

Теперь рассмотрим лагранжиан второй вариации в этой теории. Подставляя (48), (49) с учетом (50) в лагранжиан (20) и переходя в ТТ-калибровку (54), (57) для $b_{\mu\nu}$, получим

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{L}}{\sqrt{-\gamma}} = & -\frac{1}{4}\partial_\rho b_{\mu\nu}\partial^\rho b^{\mu\nu} - \\ & -\frac{1}{4}(\partial_4 b_{\mu\nu} - 2\partial_4 \sigma b_{\mu\nu})(\partial_4 b^{\mu\nu} + 2\partial_4 \sigma b^{\mu\nu}) - \frac{3}{4}s e^{2k|y|}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi. \end{aligned} \quad (60)$$

Для получения эффективного лагранжиана на бране нужно перейти к галилеевым координатам на этой бране, т. е. положить в (9) $c = 0$ для браны 1 или $c = -kL$ для браны 2, представить поле $b_{\mu\nu}$ в виде суммы безмассовой моды и мод с конечными массами, а затем проинтегрировать \mathcal{L} , определяемый формулой (60), по y . В частности, после интегрирования по y мы получим следующий четырехмерный эффективный лагранжиан для поля ϕ :

$$\mathcal{L}_\phi = -\frac{3}{2}\frac{kL^2 e^{-2c}}{e^{2kL} - 1}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi, \quad (61)$$

где индекс поднят с помощью плоской метрики. Чтобы привести кинетический член к каноническому виду, следует переопределить скалярное поле следующим образом:

$$\phi = e^c \sqrt{\frac{e^{2kL} - 1}{3kL^2}} \varphi. \quad (62)$$

Вернемся к рассмотрению мод поля $b_{\mu\nu}$. Следуя работам [15, 40, 41], сначала найдем собственные функции $\psi_n(y)$ и собственные значения m_n уравнения

$$\left[\frac{1}{2} \frac{d^2}{dy^2} + 2k(\delta(y) - \delta(y - L)) - 2k^2 \right] \psi_n(y) = \frac{m_n^2}{2} e^{2k|y|+2c} \psi_n(y). \quad (63)$$

Отметим, что это уравнение фактически представляет собой уравнение (59), в котором четырехмерный оператор Даламбера заменен его собственным значением m_n^2 в координатах, галилеевых на бране наблюдателя, т. е. константа c выбрана соответствующим образом.

Уравнение (63) можно решить точно. Для этого нужно ввести переменную $\xi = m_n/k \exp(k|y| + c)$, которая фактически представляет собой переменную z из формулы (13), обезразмеренную собственным значением m_n . После замены переменной в уравнении (63) оно принимает вид

$$\left[\frac{d^2}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} + 1 - \frac{4}{\xi^2} + \frac{4}{\xi} (\delta(\xi - \xi_1) - \delta(\xi - \xi_2)) \right] f(\xi) = 0, \quad (64)$$

где $\xi_1 = m_n/k \exp(c)$ и $\xi_2 = m_n/k \exp(kL + c)$. Это уравнение без членов с δ -функцией есть просто уравнение Бесселя, решением которого является линейная комбинация функций Бесселя и Неймана $J_2(\xi)$ и $Y_2(\xi)$ соответственно: $Z_2(\xi) = aJ_2(\xi) + bY_2(\xi)$. Член с δ -функцией учитывается наложением граничного условия $Z_2'(\xi) + (2/\xi)Z_2(\xi) = 0$ в точках $\xi = \xi_1 = m_n/k \exp(c)$ и $\xi = \xi_2 = m_n/k \exp(kL + c)$. Первое граничное условие, при $\xi = \xi_1$, удовлетворяется выбором соответствующих коэффициентов a и b :

$$Z_2(\xi) = Y_1\left(\frac{m_n}{k} e^c\right) J_2(\xi) - J_1\left(\frac{m_n}{k} e^c\right) Y_2(\xi). \quad (65)$$

Второе граничное условие, в точке $\xi = \xi_2$, определяет спектр масс теории и может быть переписано в виде

$$J_1(\xi_1)Y_1(t\xi_1) - J_1(t\xi_1)Y_1(\xi_1) = 0, \quad (66)$$

где $t = \exp(kL)$. Существует теорема о свойствах такой комбинации функций Бесселя и Неймана, утверждающая, что при $t > 1$ эта комбинация является четной функцией ξ_1 и ее корни действительные и простые [42]. Таким образом, ненулевые массы тензорных гравитонов определяются положительными нулями $\xi_1 = \gamma_n$, $n = 1, 2, \dots$, приведенной выше комбинации (66) и равны $m_n = \gamma_n k e^{-c}$. Как обсуждалось во многих работах (см., например, [15, 40, 41]), величина kL выбирается равной примерно 30–35 для того, чтобы решить проблему иерархии. Так как e^{kL} — большой фактор, то $\gamma_n \ll 1$ для малых n . Используя разложение функций Бесселя для малого аргумента, легко получить, что для малых n имеет место представление $\gamma_n = \beta_n e^{-kL}$, где β_n приближенно являются корнями уравнения $J_1(\beta_n) = 0$.

Таким образом, на бране 1, для которой $c = 0$, получаем спектр масс (для малых n)

$$m_n = k e^{-kL} \beta_n, \quad J_1(\beta_n) = 0. \quad (67)$$

Поскольку на этой бране $k \sim M_{\text{Pl}}$, массы тензорных возбуждений могут быть порядка ТэВ.

На бране 2, для которой $c = -kL$, получаем другую формулу для зависимости спектра масс от k (опять же для малых n):

$$m_n = k \beta_n, \quad J_1(\beta_n) = 0. \quad (68)$$

Однако, поскольку на этой бране $k \sim 1$ ТэВ, массы тензорных мод имеют тот же порядок величины, что и на бране 1.

Теперь опишем полную ортонормированную систему $\{\psi_n(y), n = 0, 1, \dots\}$ собственных функций уравнения (63), удовлетворяющих условию

$$\int_{-L}^L e^{2k|y|+2c} \psi_m(y) \psi_n(y) dy = \delta_{mn}. \quad (69)$$

Нормированные функции $\psi_n(y)$, отвечающие нулевой массе $m_0 = 0$ и ненулевым массам $m_n = \gamma_n k > 0$, имеют вид

$$\psi_0(y) = N_0 e^{-(2k|y|+2c)}, \quad N_0 = \frac{k^{1/2} e^c}{(1 - \exp(-2kL))^{1/2}}, \quad (70)$$

$$\psi_n(y) = N_n (Y_1(\gamma_n) J_2(\gamma_n e^{k|y|}) - J_1(\gamma_n) Y_2(\gamma_n e^{k|y|})),$$

$$N_n = \frac{k^{1/2} e^{-c}}{(\exp(2kL) Z_2^2(\gamma_n \exp(kL)) - Z_2^2(\gamma_n))^{1/2}}, \quad (71)$$

$$\gamma_n = \frac{m_n}{k} e^c = \beta_n e^{-kL},$$

где соответствующая функция $Z_2(\xi)$ определена в (65).

Оценим значения собственных функций для малых значений n в точках $y = 0$ и $y = L$, которые понадобятся нам в дальнейшем. Используя тот факт, что $\exp(kL) \gg 1$, получим

$$\psi_0(0) = N_0 e^{-2c} \approx \sqrt{k} e^{-c}, \quad \psi_n(0) \approx \frac{\sqrt{k}}{|J_2(\beta_n)|} e^{-(kL+c)}, \quad (72)$$

$$\psi_0(L) = N_0 e^{-(2kL+2c)} \approx \sqrt{k} e^{-(2kL+c)}, \quad \psi_n(L) \approx -\sqrt{k} e^{-(kL+c)}. \quad (73)$$

Теперь представим $b_{\mu\nu}(x, y)$ в виде

$$b_{\mu\nu}(x, y) = \sum_n b_{\mu\nu}^n(x) \psi_n(y), \quad (74)$$

где $b_{\mu\nu}^n(x)$ являются поперечно-бесследовыми 4-мерными полями со спином 2 и массой m_n . Подставляя (74) в (60), переходя к соответствующему действию, интегрируя по орбиболду и переопределяя поле ϕ в соответствии с (62), получим эффективное действие для физических степеней свободы 5-мерного гравитационного поля

$$S_{\text{eff}} = \int \left(-\frac{1}{4} \sum_n (\partial_\mu b_{\rho\sigma}^n \partial^\mu b^{n,\rho\sigma} + m_n^2 b_{\rho\sigma}^n b^{n,\rho\sigma}) - \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi \right) dx. \quad (75)$$

Итак, в четырехмерной теории имеется безмассовое тензорное поле со спином 2, бесконечное число массивных тензорных полей со спином 2 и одно безмассовое скалярное поле — радион. Массы тензорных полей различны на разных бранах и даются формулой (67) или (68) в зависимости от того, на какой бране мы находимся.

Очень важно, что, в соответствии с видом функции (70), остаточные калибровочные преобразования (58) являются калибровочными преобразованиями поля $b_{\mu\nu}^0(x)$:

$$b_{\mu\nu}^{0(\prime)}(x) = b_{\mu\nu}^0(x) - (\partial_\mu \zeta_\nu(x) + \partial_\nu \zeta_\mu(x)), \quad \partial^\mu \zeta_\mu(x) = 0, \quad \square \zeta_\nu(x) = 0. \quad (76)$$

Это обеспечивает наличие у поля $b_{\mu\nu}^0(x)$ только двух степеней свободы, и, следовательно, оно может быть отождествлено с полем безмассового гравитона.

Рассмотрим теперь взаимодействие найденных физических полей с материей на бранах. Стандартная форма этого взаимодействия имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\hat{\kappa}}{2} \int_{B_1} h^{\mu\nu}(x, 0) T_{\mu\nu}^1 \sqrt{-\det \gamma_{\mu\nu}(0)} dx + \\ + \frac{\hat{\kappa}}{2} \int_{B_2} h^{\mu\nu}(x, L) T_{\mu\nu}^2 \sqrt{-\det \gamma_{\mu\nu}(L)} dx, \quad (77) \end{aligned}$$

где $T_{\mu\nu}^1$ и $T_{\mu\nu}^2$ — тензоры энергии-импульса материи на бране 1 и бране 2 соответственно:

$$T_{\mu\nu}^{1,2} = 2 \frac{\delta L^{1,2}}{\delta \gamma^{\mu\nu}} - \gamma_{\mu\nu}^{1,2} L^{1,2}.$$

Сначала рассмотрим взаимодействие с материей на бране с положительным натяжением, т. е. первый член в формуле (77). В соответствии с (5) и (9) индуцированная метрика на бране $y = 0$ есть

$$\gamma_{\mu\nu}(0) = e^{-2c} \eta_{\mu\nu}. \quad (78)$$

Напомним, что координаты называются галилеевыми, если $\gamma_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ (см. [35]). Хотя выбор координат ничем не ограничен, галилеевы координаты являются наиболее предпочтительными для интерпретации экспериментальных данных, так как все физические наблюдаемые сразу будут получаться в стандартных единицах (сантиметрах, гигаэлектронвольтах и т. д.). Поэтому мы будем использовать на бране в точке $y = 0$ галилеевы координаты $\{x^\mu\}$ и в соответствии с этим положим $c = 0$ также в (62), (69)–(73).

Подставляя (48) в (77), представляя $b_{\mu\nu}(x, y)$ в виде (74) и переопределяя поле ϕ в соответствии с (62), получим, что взаимодействие гравитационного

поля $b_{\mu\nu}^n(x)$ и безмассового канонически нормированного поля радиона φ с материей в координатах, галилеевых на бране 1, имеет вид

$$S_{\text{int}} = \frac{1}{2} \int_{B_1} \left(\kappa_1 b_{\mu\nu}^0(x) T^{\mu\nu} + \kappa_2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi_n(0) e^{kL}}{N_0} b_{\mu\nu}^n(x) T^{\mu\nu} - \frac{\kappa_2}{\sqrt{3}} \varphi T_{\mu}^{\mu} \right) dx, \quad (79)$$

где

$$\kappa_1 = \hat{\kappa} N_0, \quad \kappa_2 = \kappa_1 e^{-kL}, \quad (80)$$

и фактор N_0 определен в (70). Вследствие соотношений (72) фактор $\psi_n(0) e^{kL}/N_0$ перед $b_{\mu\nu}^n(x)$ оказывается порядка единицы для малых n .

Так как κ_1 является константой взаимодействия безмассового гравитона, через нее можно выразить четырехмерную гравитационную постоянную G_1 на бране 1 как $G_1 = \kappa_1^2/16\pi$, и тогда первая формула в (80) воспроизводит соотношения (35), (36) для связи пятимерных и четырехмерных гравитационных постоянных и энергетических масштабов.

Предположим, что брана 1 является нашей браной. В этом случае мы должны потребовать, чтобы $\kappa_1 \sim M_{\text{Pl}}^{-1}$, что необходимо для воспроизведения закона Ньютона. Учитывая, что $\hat{G} \sim M^{-3}$, где M есть пятимерная масса Планка, т. е. фундаментальная масса теории, этого можно достичь, взяв $M \sim k \sim M_{\text{Pl}}$ и $\exp(kL) \gg 1$. Тогда мы получим, что $\kappa_1 \gg \kappa_2$, т. е. взаимодействие массивных мод и поля радиона с материей на бране 1 намного слабее (экспоненциально подавлено), чем взаимодействие безмассового гравитона. Следовательно, на бране 1 поле радиона и массивные тензорные моды вследствие слабости их взаимодействия с полями СМ не влияют на ньютоновскую гравитацию, которая определяется только взаимодействием безмассового гравитона в (79). Массы калуца-клейновских мод при этом оказываются порядка $M_{\text{Pl}} e^{-kL}$. Таким образом, теория на бране 1 феноменологически приемлема, но неинтересна.

Рассмотрим теперь взаимодействие с материей на бране с отрицательным натяжением. Индуцированная метрика на этой бране имеет вид

$$\gamma_{\mu\nu}(L) = e^{-2(kL+c)} \eta_{\mu\nu}, \quad (81)$$

откуда следует, что координаты $\{x^\mu\}$ галилеевы на бране в точке $y = L$, если константа $c = -kL$. Отметим, что такой способ перехода к галилеевым координатам на бране 2 отличается от предложенного в работе [34], где для этого были использованы преобразования координат. Однако несложно показать, что оба подхода эквивалентны. Ясно, что на этой бране мы должны использовать формулы (62), (69)–(73) с константой $c = -kL$.

Таким образом, взаимодействие скалярного и тензорного полей с материей на бране в точке $y = L$ примет вид

$$S_{\text{int}} = \frac{1}{2} \int_{B_2} \left(\kappa_2 b_{\mu\nu}^0(x) T^{\mu\nu} + \kappa_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi_n(L) e^{-kL}}{N_0} b_{\mu\nu}^n(x) T^{\mu\nu} - \frac{\kappa_1}{\sqrt{3}} \varphi T_{\mu}^{\mu} \right) dx, \quad (82)$$

где κ_1 и κ_2 определены в (80) и в координатах, галилеевых на бране 2, выглядят следующим образом:

$$\kappa_1 = \hat{\kappa} N_0 e^{kL} = \hat{\kappa} \sqrt{\frac{k}{1 - e^{-2kL}}}, \quad \kappa_2 = \kappa_1 e^{-kL} = \hat{\kappa} \sqrt{\frac{k}{e^{2kL} - 1}}. \quad (83)$$

Фактор $\psi_n(L) e^{-kL} / N_0$ перед $b_{\mu\nu}^n(x)$, как и в ранее рассмотренном случае, оказывается порядка единицы для малых n .

Используя выражение (82), получим связь энергетического масштаба M_2 на бране с отрицательным натяжением с масштабом M во всем пятимерном пространстве, ранее найденную в формуле (39).

Для наблюдателя на бране с отрицательным натяжением $M_2 = M_{\text{P1}}$, и, чтобы добиться этого, положим $M \sim k \sim 1$ ТэВ и $kL \simeq 35$. Таким образом, для наблюдателей, находящихся на разных бранах, физическая картина существенно отличается. Фундаментальный пятимерный энергетический масштаб может быть порядка 1 ТэВ, однако для наблюдателя на бране с отрицательным натяжением четырехмерный энергетический масштаб может принимать обычное значение $M_2 = M_{\text{P1}}$. Таким образом, слабость гравитационного взаимодействия объясняется экспоненциальным фактором в метрике. Из уравнений (82), (83) следует, что константы связи массивных мод и безмассового радиона оказываются порядка 1 ТэВ⁻¹ [40, 41].

Мы видим, что гравитация в многомерном пространстве существенно отличается от гравитации на бранах. В случае браны с отрицательным натяжением можно говорить о решении проблемы иерархии благодаря экспоненциальному фактору в метрике решения Рэндалл–Сундрума. Во всем пространстве фундаментальный энергетический масштаб может быть порядка 1 ТэВ, а четырехмерный планковский масштаб на нашей бране выглядит как эффективный масштаб $M_{\text{P1}} \sim M e^{kL}$, который объясняет наблюдаемую слабость ньютоновской гравитации.

3. ГРАВИТАЦИОННОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ НА БРАНАХ

Теперь, когда найдены физические степени свободы модели и их константы связи с материей на бранах, встает вопрос о том, как дополнительные степени свободы влияют на гравитационное взаимодействие материи на бранах. Для этого, естественно, нужно найти гравитационное поле, порождаемое

материей на бранах. Мы сделаем это в линеаризованной теории, следуя работе [43].

Прежде всего заметим, что в случае присутствия материи на бранах линеаризованные уравнения движения в унитарной калибровке будут отличаться от уравнений (43)–(47) только наличием тензора энергии-импульса материи $T_{\mu\nu}$ и его следа в правых частях уравнений (43), (46), (47). В частности, нужные нам уравнения (43), (47) теперь имеют вид

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(\partial_\rho \partial^\rho h_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial^\rho h_{\rho\nu} - \partial_\nu \partial^\rho h_{\rho\mu} + \frac{\partial^2 h_{\mu\nu}}{\partial y^2} \right) - 2k^2 h_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \partial_\mu \partial_\nu \tilde{h} + \\ & + \frac{1}{2} \partial_\mu \partial_\nu \phi + \frac{1}{2} \gamma_{\mu\nu} \left(\partial^\rho \partial^\sigma h_{\rho\sigma} - \partial_\rho \partial^\rho \tilde{h} - \frac{\partial^2 \tilde{h}}{\partial y^2} + 4\partial_4 \sigma \partial_4 \tilde{h} - \partial_\rho \partial^\rho \phi + 12k^2 \phi \right) + \\ & + [2kh_{\mu\nu} - 3k\gamma_{\mu\nu}\phi] \tilde{\delta} = -\frac{\hat{\kappa}}{2} T_{\mu\nu}, \quad (84) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{h}}{\partial y^2} - 2\partial_4 \sigma \partial_4 \tilde{h} - 8k^2 \phi + 8k\phi \tilde{\delta} + \partial_\rho \partial^\rho \phi = \frac{\hat{\kappa}}{3} T_\mu^\mu. \quad (85)$$

Если $T_{\mu\nu} = 0$, то, как мы уже показали, физические степени свободы модели могут быть выделены с помощью подстановки (48). Однако в случае наличия материи на бранах ситуация несколько меняется.

Сначала рассмотрим случай, когда материя расположена на бране 1 (в точке $y = 0$), т. е. тензор энергии-импульса имеет вид $T_{\mu\nu} = t_{\mu\nu}(x)\delta(y)$. Подстановка, позволяющая расцепить уравнения движения, имеет следующий вид:

$$h_{\mu\nu} = u_{\mu\nu} - \gamma_{\mu\nu}(y)(k|y| + s)\phi + \frac{1}{2k^2} \left(\frac{1}{2} - k|y| - s + s e^{2kL} \right) \partial_\mu \partial_\nu \phi. \quad (86)$$

С учетом (86), уравнения (44), (45), (85), переписанные через плоскую метрику ($u = \eta^{\mu\nu} u_{\mu\nu}$) в галилеевых координатах на бране 1 (т. е. $c = 0$ в (9)), принимают вид:

$$\frac{\partial}{\partial y} (e^{2\sigma} (\partial^\nu u_{\mu\nu} - \partial_\mu u)) = 0, \quad (87)$$

$$e^{4\sigma} (\partial^\mu \partial^\nu u_{\mu\nu} - \square u) + 3 \frac{d\sigma}{dy} \frac{\partial}{\partial y} (e^{2\sigma} u) + 3s e^{2kL+2\sigma} \square \phi = 0, \quad (88)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} (e^{-2\sigma} \frac{\partial}{\partial y} (e^{2\sigma} u)) + 2 \frac{s}{k} \delta(y) [e^{2kL} - 1] \square \phi = \frac{\hat{\kappa}}{3} t_\mu^\mu \delta(y). \quad (89)$$

Рассмотрим преобразование Фурье по координате y всех членов уравнения (89). Так как член с производной $\partial/\partial y$ не содержит нулевую моду, из

этого уравнения следует, что

$$\square\phi = \frac{\hat{\kappa}}{6L}t, \quad t \equiv t_{\mu}^{\mu}, \quad (90)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(e^{2\sigma}u) = 0. \quad (91)$$

Из последнего уравнения и уравнения (87) следует, что

$$\partial^{\nu}u_{\mu\nu} = e^{-2\sigma}A_{\mu}(x), \quad (92)$$

$$\partial_{\mu}u = e^{-2\sigma}B_{\mu}(x), \quad (93)$$

где $A_{\mu}(x)$ и $B_{\mu}(x)$ зависят только от четырехмерных координат. Легко увидеть, что с помощью остаточных калибровочных преобразований (30) на поле $u_{\mu\nu}$ можно наложить калибровку де Дондера

$$\partial^{\nu}\left(u_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}u\right) = 0. \quad (94)$$

В результате у нас в наличии остаются калибровочные преобразования вида

$$\xi_{\mu} = e^{-2\sigma}\epsilon_{\mu}(x), \quad \square\epsilon_{\mu} = 0, \quad (95)$$

отличающиеся от остаточных калибровочных преобразований в свободной теории (58). Из уравнения (88) следует, что

$$\square u = e^{-2\sigma}\frac{\hat{\kappa}k}{1 - e^{-2kL}}t. \quad (96)$$

Теперь рассмотрим уравнение (84) для $\mu\nu$ -компонент флуктуаций метрики. После подстановки (86) и в калибровке де Дондера оно принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}e^{2\sigma}\square u_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}u_{\mu\nu} - 2k^2u_{\mu\nu} + 2ku_{\mu\nu}(\delta(y) - \delta(y - L)) = \\ = -\frac{\hat{\kappa}}{2}f_{\mu\nu}\delta(y) + \frac{\hat{\kappa}k}{12(1 - e^{-2kL})}\left(\eta_{\mu\nu} + 2\frac{\partial_{\mu}\partial_{\nu}}{\square}\right)t, \end{aligned} \quad (97)$$

где

$$f_{\mu\nu} = t_{\mu\nu} - \frac{1}{3}\left(\eta_{\mu\nu} - \frac{\partial_{\mu}\partial_{\nu}}{\square}\right)t. \quad (98)$$

Легко видеть, что тензор $f_{\mu\nu}$ — поперечно-бесследовый. Здесь и далее обратный даламбертиан является интегральным оператором, который однозначно определяется условиями излучения.

Чтобы решить это уравнение, воспользуемся подстановкой

$$u_{\mu\nu} = v_{\mu\nu} + \frac{\hat{\kappa}k}{6(1 - e^{-2kL})} e^{-2\sigma} \square^{-1} \left(\eta_{\mu\nu} + 2 \frac{\partial_\mu \partial_\nu}{\square} \right) t, \quad (99)$$

которая не нарушает условие (94), принимающее вид

$$\partial^\nu v_{\mu\nu} = 0, \quad v = v^\nu = 0. \quad (100)$$

Подставляя (99) в (97), получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} e^{2\sigma} \square v_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} v_{\mu\nu} - 2k^2 v_{\mu\nu} + \\ + 2k v_{\mu\nu} (\delta(y) - \delta(y - L)) = -\frac{\hat{\kappa}}{2} f_{\mu\nu} \delta(y). \end{aligned} \quad (101)$$

Это уравнение может быть решено точно. Для этого рассмотрим преобразование Фурье поля $v_{\mu\nu}$ по отношению к координатам x :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} e^{2\sigma} (-p^2) \tilde{v}_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \tilde{v}_{\mu\nu} - 2k^2 \tilde{v}_{\mu\nu} + \\ + 2k \tilde{v}_{\mu\nu} (\delta(y) - \delta(y - L)) = -\frac{\hat{\kappa}}{2} \tilde{f}_{\mu\nu} \delta(y), \end{aligned} \quad (102)$$

где $p^2 = -p_0^2 + \vec{p}^2$.

Сначала решим это уравнение при $y \neq 0, y \neq L$ (см. [15, 34]). В этом случае решение уравнения (102) имеет вид

$$\tilde{v}_{\mu\nu} = C_{\mu\nu} J_2 \left(\frac{\sqrt{|p^2|}}{k} e^{k|y|} \right) + D_{\mu\nu} N_2 \left(\frac{\sqrt{|p^2|}}{k} e^{k|y|} \right), \quad p^2 < 0, \quad (103)$$

$$\tilde{v}_{\mu\nu} = C_{\mu\nu} I_2 \left(\frac{\sqrt{|p^2|}}{k} e^{k|y|} \right) + D_{\mu\nu} K_2 \left(\frac{\sqrt{|p^2|}}{k} e^{k|y|} \right), \quad p^2 > 0. \quad (104)$$

Подставляя его обратно в уравнение (102) и приравнявая граничные члены с δ -функциями, получим значения тензоров $C_{\mu\nu}$ и $D_{\mu\nu}$. В результате мы получили решение уравнения для $\mu\nu$ -компонент флуктуаций метрики в случае наличия материи на бране с положительным натяжением (в точке $y = 0$):

1) при $p^2 < 0$

$$\begin{aligned} \tilde{v}_{\mu\nu} = \left[\tilde{t}_{\mu\nu} - \frac{1}{3} \left(\eta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right) \tilde{t} \right] \frac{\hat{\kappa}}{2\sqrt{-p^2}} \times \\ \times \frac{N_2 \left(\frac{\sqrt{-p^2}}{k} e^{k|y|} \right) J_1 \left(\frac{\sqrt{-p^2}}{k} e^{kL} \right) - J_2 \left(\frac{\sqrt{-p^2}}{k} e^{k|y|} \right) N_1 \left(\frac{\sqrt{-p^2}}{k} e^{kL} \right)}{J_1 \left(\frac{\sqrt{-p^2}}{k} \right) N_1 \left(\frac{\sqrt{-p^2}}{k} e^{kL} \right) - N_1 \left(\frac{\sqrt{-p^2}}{k} \right) J_1 \left(\frac{\sqrt{-p^2}}{k} e^{kL} \right)}, \end{aligned} \quad (105)$$

2) при $p^2 > 0$

$$\begin{aligned} \tilde{v}_{\mu\nu} = & - \left[\tilde{t}_{\mu\nu} - \frac{1}{3} \left(\eta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right) \tilde{t} \right] \frac{\hat{\kappa}}{2\sqrt{p^2}} \times \\ & \times \frac{K_2 \left(\frac{\sqrt{p^2}}{k} e^{k|y|} \right) I_1 \left(\frac{\sqrt{p^2}}{k} e^{kL} \right) + I_2 \left(\frac{\sqrt{p^2}}{k} e^{k|y|} \right) K_1 \left(\frac{\sqrt{p^2}}{k} e^{kL} \right)}{I_1 \left(\frac{\sqrt{p^2}}{k} \right) K_1 \left(\frac{\sqrt{p^2}}{k} e^{kL} \right) - I_1 \left(\frac{\sqrt{p^2}}{k} e^{kL} \right) K_1 \left(\frac{\sqrt{p^2}}{k} \right)}. \end{aligned} \quad (106)$$

Когда материя расположена на бране 2 (в точке $y = L$), т.е. тензор энергии-импульса имеет вид $T_{\mu\nu} = t_{\mu\nu}(x)\delta(y-L)$, все рассуждения такие же, как и представленные выше. Полная подстановка в координатах, галилеевых на этой бране, имеет вид

$$\begin{aligned} h_{\mu\nu} = & u_{\mu\nu} - \gamma_{\mu\nu}(y)(k|y| + s)\phi + \frac{1}{2k^2} \left(\frac{1}{2} - k|y| \right) \partial_\mu \partial_\nu \phi, \\ u_{\mu\nu} = & v_{\mu\nu} + \frac{\hat{\kappa}k}{6(e^{2kL} - 1)} e^{-2\sigma} \square^{-1} \left(\eta_{\mu\nu} + 2 \frac{\partial_\mu \partial_\nu}{\square} \right) t \end{aligned} \quad (107)$$

с такими же калибровочными условиями. Уравнения движения для поля ϕ и решение для поля $v_{\mu\nu}$ в случае наличия материи на бране 2 могут быть получены аналогичным образом и имеют вид

$$\square \phi = \frac{\hat{\kappa}}{6L} t, \quad (108)$$

1) при $p^2 < 0$

$$\begin{aligned} \tilde{v}_{\mu\nu} = & \left[\tilde{t}_{\mu\nu} - \frac{1}{3} \left(\eta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right) \tilde{t} \right] \frac{\hat{\kappa} e^{kL}}{2\sqrt{-p^2}} \left[N_2 \left(\frac{\sqrt{-p^2}}{k} e^{k|y|-kL} \right) \times \right. \\ & \times \left. J_1 \left(\frac{\sqrt{-p^2}}{k} e^{-kL} \right) - J_2 \left(\frac{\sqrt{-p^2}}{k} e^{k|y|-kL} \right) N_1 \left(\frac{\sqrt{-p^2}}{k} e^{-kL} \right) \right] \times \\ & \times \left[J_1 \left(\frac{\sqrt{-p^2}}{k} e^{-kL} \right) N_1 \left(\frac{\sqrt{-p^2}}{k} \right) - N_1 \left(\frac{\sqrt{-p^2}}{k} e^{-kL} \right) J_1 \left(\frac{\sqrt{-p^2}}{k} \right) \right]^{-1}, \end{aligned} \quad (109)$$

2) при $p^2 > 0$

$$\begin{aligned} \tilde{v}_{\mu\nu} = & - \left[\tilde{t}_{\mu\nu} - \frac{1}{3} \left(\eta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right) \tilde{t} \right] \frac{\hat{k} e^{kL}}{2\sqrt{p^2}} \times \\ & \times \frac{K_2 \left(\frac{\sqrt{p^2}}{k} e^{k|y|-kL} \right) I_1 \left(\frac{\sqrt{p^2}}{k} e^{-kL} \right) + I_2 \left(\frac{\sqrt{p^2}}{k} e^{k|y|-kL} \right) K_1 \left(\frac{\sqrt{p^2}}{k} e^{-kL} \right)}{I_1 \left(\frac{\sqrt{p^2}}{k} e^{-kL} \right) K_1 \left(\frac{\sqrt{p^2}}{k} \right) - K_1 \left(\frac{\sqrt{p^2}}{k} e^{-kL} \right) I_1 \left(\frac{\sqrt{p^2}}{k} \right)}. \end{aligned} \quad (110)$$

Очевидно, что когда материя расположена на обеих бранах, решение для флуктуаций метрики является просто суммой решений для каждой браны в отдельности, что следует из линейности уравнений.

С помощью формул (105), (106), (109), (110) можно найти гравитационное поле любого источника, расположенного на бранах, и оценить поправки к закону Ньютона, возникающие благодаря массивным модам пятимерного гравитационного поля [43]. Характерной особенностью этих поправок является наличие членов $1/r^2$, которые и следовало ожидать в пятимерном пространстве. Однако вследствие того, что моды имеют массы порядка ТэВ, такие поправки к закону Ньютона возникают на очень малых расстояниях $r < L$, на которых взаимодействие частиц уже необходимо описывать в рамках квантовой, а не классической теории.

Если же рассматривать гравитационное взаимодействие в этой модели на больших расстояниях, где вклады массивных мод «вымирают», оказывается более удобным рассматривать все уравнения модели в приближении нулевых мод, в котором они сильно упрощаются.

Очевидно, что поле $u_{\mu\nu}$, определенное в (86), в отсутствие материи совпадает с полем $b_{\mu\nu}$ (48) и поэтому является комбинацией нулевой и массивных мод, чьи собственные функции ортогональны в соответствии с (69). Нетрудно понять, что это справедливо и при наличии материи на бранах [44]. В частности, нулевая мода может быть представлена в виде $u_{\mu\nu}^0(x, y) = e^{-2\sigma(y)} \alpha_{\mu\nu}(x)$, где $\alpha_{\mu\nu}$ зависит только от координат x . Легко увидеть, что остаточные калибровочные преобразования вида $\xi_\mu = e^{-2\sigma} \epsilon_\mu(x)$ (30) позволяют нам наложить калибровку де Дондера на нулевую моду флуктуаций метрики:

$$\partial^\nu \left(\alpha_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \alpha \right) = 0. \quad (111)$$

После наложения этой калибровки у нас в наличии имеются остаточные калибровочные преобразования (95).

Рассмотрим теперь уравнение (84). Подставляя (86) при условии (90) и переходя к калибровке (111), получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \square \left(\alpha_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \alpha \right) + \frac{1}{2} e^{2\sigma} \square u_{\mu\nu}^m + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} u_{\mu\nu}^m - \\ & \quad - 2k^2 u_{\mu\nu}^m + 2k u_{\mu\nu}^m (\delta(y) - \delta(y-L)) = \\ & = -\frac{\hat{\kappa}}{2} t_{\mu\nu} \delta(y) + \frac{\hat{\kappa} k e^{2kL}}{6(e^{2kL} - 1)} \left(\frac{\partial_\mu \partial_\nu}{\square} - \eta_{\mu\nu} \right) t - \frac{\hat{\kappa}}{6} \left(\frac{\partial_\mu \partial_\nu}{\square} - \eta_{\mu\nu} \right) t \delta(y). \end{aligned} \quad (112)$$

Так как мы собираемся вычислить ньютоновский предел в приближении нулевых мод, нам нужно найти уравнение для поля $\alpha_{\mu\nu}$. Если умножить уравнение (107) на $e^{-2\sigma}$, проинтегрировать по y и воспользоваться условием ортонормированности волновых функций разных мод, можно получить

$$\square \left(\alpha_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \alpha \right) = -\frac{\hat{\kappa} k}{(1 - e^{-2kL})} t_{\mu\nu}. \quad (113)$$

Когда материя расположена на бране 2 (в точке $y = L$), все рассуждения такие же, как и представленные выше. Подстановка имеет вид (107). Калибровочные условия те же, что и в случае, когда материя расположена на бране 1. Уравнения движения для полей $\alpha_{\mu\nu}$, ϕ в присутствии материи на бране 2 могут быть получены аналогичным образом и имеют вид

$$\square \left(\alpha_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \alpha \right) = -\frac{\hat{\kappa} k}{(e^{2kL} - 1)} t_{\mu\nu}, \quad (114)$$

$$\square \phi = \frac{\hat{\kappa}}{6L} t. \quad (115)$$

Еще раз отметим, что эти уравнения записаны в координатах x , которые являются *галилеевыми на бране 2*.

Теперь мы готовы к нахождению ньютоновского предела теории на бранах. Сначала сделаем это для браны 1. Подстановка (86) в приближении нулевых мод имеет вид

$$h_{\mu\nu}^0 = e^{-2\sigma} \alpha_{\mu\nu} - \frac{kL}{e^{2kL} - 1} \eta_{\mu\nu} \phi + \frac{L}{2k} \partial_\mu \partial_\nu \phi + \frac{1}{4k^2} \partial_\mu \partial_\nu \phi, \quad (116)$$

а соответствующее уравнение для поля $h_{\mu\nu}$ на бране 1 в приближении нулевых мод выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} \square h_{\mu\nu}^0 = & -\frac{\hat{\kappa} k e^{2kL}}{e^{2kL} - 1} \left(t_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} t \right) - \\ & - \frac{\hat{\kappa} k}{6(e^{2kL} - 1)} \eta_{\mu\nu} t + \frac{\hat{\kappa}}{12k^2 L} \left(kL + \frac{1}{2} \right) \partial_\mu \partial_\nu t. \end{aligned} \quad (117)$$

Рассмотрим статическую точечную массу с тензором энергии-импульса $t_{00} = m\delta(\mathbf{x})$, $t_{0k} = t_{ij} = 0$, где m , как и ранее, обозначает инертную массу. Тогда мы можем найти решение уравнения (117) для h_{00} -компоненты поля

$$h_{00} = \frac{\hat{\kappa}k(e^{2kL} + 1/3)m}{8\pi(e^{2kL} - 1)r}, \quad (118)$$

где $r = \sqrt{\mathbf{x}^2}$.

Таким образом,

$$V = -\hat{G}k \frac{(e^{2kL} + 1/3)m}{(e^{2kL} - 1)r} = -G_1 \left(1 + \frac{1}{3}e^{-2kL}\right) \frac{m}{r}. \quad (119)$$

Теперь покажем, что модель Рэндалл–Сундрума в приближении нулевых мод эквивалентна линеаризованной теории Бранса–Дикке (по-видимому, впервые это было отмечено в работе [44]). Уравнения для флуктуаций метрики в линеаризованной теории Бранса–Дикке имеют вид [45]

$$\square \left(h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h \right) = -\frac{16\pi G}{\kappa} \left(t_{\mu\nu} - \frac{1}{2\omega + 3} \left(\eta_{\mu\nu} - \frac{\partial_\mu \partial_\nu}{\square} \right) t \right), \quad (120)$$

где $\kappa = \sqrt{16\pi G}$, а ω есть параметр Бранса–Дикке. Необычный вид коэффициента перед правой частью нужен для того, чтобы установить соответствие с аналогичным уравнением модели Рэндалл–Сундрума, и будет объяснен ниже. Легко увидеть, что поле $h_{\mu\nu}$ удовлетворяет калибровочным условиям де Дондера $\partial^\nu (h_{\mu\nu} - (1/2)\eta_{\mu\nu}h) = 0$.

Рассмотрим сначала эффективную четырехмерную теорию на бране 1. Видно, что поле $h_{\mu\nu}^0$ (116) не удовлетворяет калибровочному условию де Дондера на бране 1. Однако с помощью калибровочных функций вида

$$\epsilon_\mu = \frac{1}{2} \left(\frac{L}{2k} + \frac{1}{4k^2} \right) \partial_\mu \phi + \frac{kL}{e^{2kL} - 1} \frac{\partial_\mu}{\square} \phi \quad (121)$$

мы можем наложить калибровку де Дондера на поле $h_{\mu\nu}^0$ на бране 1.

В этой калибровке уравнение (117) принимает вид

$$\square \left(h_{\mu\nu}^0 - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h^0 \right) = -\frac{16\pi G_1}{\hat{\kappa}} \left(t_{\mu\nu} - \frac{e^{-2kL}}{3} \left(\eta_{\mu\nu} - \frac{\partial_\mu \partial_\nu}{\square} \right) t \right). \quad (122)$$

Вид коэффициента перед правой частью отличается от вида соответствующего коэффициента в формуле (120) вследствие того, что в последней формуле используется не четырехмерная, как в (120), а пятимерная параметризация метрики (15). Если в формулах (120) и (122) перейти к безразмерным флуктуациям метрики $\kappa h_{\mu\nu}$ и $\hat{\kappa} h_{\mu\nu}^0$ соответственно, то они будут иметь одинаковый вид.

Сравнивая (122) с (120), получаем $\omega = (3/2)(e^{2kL} - 1)$, т. е. очень большое и поэтому феноменологически допустимое значение параметра Бранса–Дикке.

В дальнейшем мы опускаем надстрочный индекс 0, обозначающий приближение нулевых мод. Для оставшихся случаев непосредственные вычисления приводят к следующим результатам (все формулы даны в галилеевых координатах на бране наблюдателя).

1) Мы живем на бране 1, масса расположена на бране 2 («теневая» материя):

$$\square \left(h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h \right) = -\frac{16\pi G_1}{\hat{\kappa}} e^{-kL} \left(t_{\mu\nu} - \frac{1}{3} \left(\eta_{\mu\nu} - \frac{\partial_\mu \partial_\nu}{\square} \right) t \right). \quad (123)$$

Ньютоновский потенциал имеет вид

$$V = -\frac{4}{3} G_1 e^{-kL} \frac{m}{r} = -\left(1 + \frac{1}{3} \right) G_1 e^{-kL} \frac{m}{r}. \quad (124)$$

Второй член в формуле (124) соответствует вкладу радиона. Видно, что вклад радиона того же порядка, что и вклад безмассового гравитона, но вклад «теневой» материи в e^{kL} раз слабее вклада обычной материи (ср. с (119)). Вместе с большой величиной параметра Бранса–Дикке это означает, что эффективная теория на бране 1 феноменологически приемлема, но неинтересна (см. [34]).

2) Мы живем на бране 2, масса расположена на той же бране:

$$\square \left(h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h \right) = -\frac{16\pi G_2}{\hat{\kappa}} \left(t_{\mu\nu} - \frac{e^{2kL}}{3} \left(\eta_{\mu\nu} - \frac{\partial_\mu \partial_\nu}{\square} \right) t \right). \quad (125)$$

Для этого случая мы получаем $\omega = (3/2)(e^{-2kL} - 1)$, т. е. феноменологически неприемлемое значение параметра Бранса–Дикке.

Ньютоновский потенциал имеет вид

$$V = -G_2 \left(1 + \frac{e^{2kL}}{3} \right) \frac{m}{r}. \quad (126)$$

Второй член в формуле (126) соответствует вкладу радиона. Теперь вклад радиона в e^{2kL} раз сильнее, чем вклад безмассового гравитона. Это означает, что в случае безмассового радиона на бране 2 реализуется скалярная гравитация, что феноменологически совершенно неприемлемо.

3) Мы живем на бране 2, масса расположена на бране 1 (опять случай «теневой» материи):

$$\square \left(h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h \right) = -\frac{16\pi G_2}{\hat{\kappa}} e^{kL} \left(t_{\mu\nu} - \frac{1}{3} \left(\eta_{\mu\nu} - \frac{\partial_\mu \partial_\nu}{\square} \right) t \right). \quad (127)$$

Ньютоновский потенциал имеет вид

$$V = - \left(1 + \frac{1}{3} \right) G_2 e^{kL} \frac{m}{r} = - \frac{4}{3} G_1 e^{-kL} \frac{m}{r}. \quad (128)$$

Как и раньше, второй член в формуле (128) соответствует вкладу радиона. Видно, что вклад радиона того же порядка, что и вклад безмассового гравитона, а из-за взаимодействия с безмассовым радионом (ср. с (126)) вклад «теневого» материи в ньютоновский предел в e^{kL} раз слабее, чем вклад обычной материи.

Следует отметить, что, используя стандартные формулы теории Бранса–Дикке [45], можно рассчитать углы отклонения света точечной массой в модели Рэндалл–Сундрума при различном расположении гравитирующей массы и наблюдателя. Соответствующие формулы можно найти в работах [43, 44].

Итак, на основании формул (125), (126) мы приходим к заключению, что теория на бране 2, на которой может быть решена проблема иерархии гравитационного взаимодействия, физически неприемлема из-за того, что сильно взаимодействующее с материей на этой бране поле радиона является безмассовым.

Последнее объясняется тем, что решение (9) не фиксирует расстояние между бранами, т. е. оно может быть получено для произвольного значения этого расстояния. Поэтому изменение расстояния между бранами не меняет энергию системы, что проявляется в линеаризованной теории как присутствие безмассового скалярного поля. Таким образом, для того, чтобы модель стала феноменологически приемлемой, необходимо стабилизировать расстояние между бранами, что эквивалентно появлению массы у радиона. Механизмы стабилизации модели Рэндалл–Сундрума мы обсудим в следующем разделе.

4. СТАБИЛИЗИРОВАННАЯ МОДЕЛЬ РЭНДАЛЛ–СУНДРУМА

В работе [46] было показано, что стабилизация размера дополнительного измерения может быть достигнута путем введения пятимерного свободного скалярного поля ϕ с дополнительными потенциалами $\lambda_{1,2}(\phi)$ на бранах. А именно, добавим в модель Рэндалл–Сундрума скалярное поле, имеющее действие вида

$$S_f = - \frac{1}{2} \int_E d^5 x \sqrt{-g} (\partial_M \phi \partial^M \phi + m^2 \phi^2) - \lambda_1 \int_E d^5 x \sqrt{-\tilde{g}} (\phi^2 - v_1^2)^2 \delta(y) - \lambda_2 \int_E d^5 x \sqrt{-\tilde{g}} (\phi^2 - v_2^2)^2 \delta(y - L), \quad (129)$$

где $\tilde{g}_{\mu\nu}$ — индуцированная метрика на бранах. Вакуумное решение, не зависящее от четырехмерных координат x^μ , имеет вид

$$\phi(y) = e^{2\sigma} (A e^{\nu\sigma} + B e^{-\nu\sigma}), \quad \nu = \sqrt{4 + \frac{m^2}{k^2}}. \quad (130)$$

Здесь значения параметров A и B определяются граничными условиями в точках расположения бран. Таким образом, вакуумная конфигурация скалярного поля имеет ненулевую плотность энергии, которая, будучи усредненной по координате дополнительного измерения y , оказывается зависящей от размера дополнительного измерения L . Если значения параметров λ_1 и λ_2 очень большие, что эквивалентно фиксации граничных значений скалярного поля, то вакуумная плотность энергии имеет минимум при

$$L = \frac{4}{\pi} \frac{k}{m^2} \ln \left(\frac{v_1}{v_2} \right). \quad (131)$$

Полагая, что величины $\hat{G}v_1^2$ и $\hat{G}v_2^2$ малы, тензором энергии-импульса поля ϕ можно пренебречь по сравнению с пятимерной космологической постоянной Λ . Таким образом, фоновое решение Рэндалл–Сундрума для метрики в присутствии скалярного поля не меняется, т. е. в этом подходе не учитывается влияние скалярного поля на фоновую метрику решения. Однако именно благодаря воздействию скалярного поля на метрику генерируется масса радиона. Поэтому для нахождения или, по крайней мере, для оценки массы радиона необходимо учесть влияние скалярного поля на фоновую метрику.

Этот недостаток преодолен в работе [47], где найдены точные решения уравнений движения для всех полей. В результате стабилизация размера дополнительного измерения достигается благодаря граничным условиям для скалярного поля на бранах, а масса радиона определяется величиной отклонения фоновой метрики от решения Рэндалл–Сундрума.

Однако почти во всех работах по феноменологии модели Рэндалл–Сундрума по-прежнему рассматривается нестабилизированная модель, в которую масса радиона вводится «руками». Ниже мы покажем, что такой подход представляется непоследовательным, так как в стабилизированной модели масса радиона, а также константы связи с материей на бранах выражаются через фундаментальные параметры модели, т. е. не являются независимыми.

Для анализа влияния поля массивного радиона на физические процессы на бране необходимо изучить линеаризованную гравитацию в этой модели. В частности, найти массы и константы взаимодействия с полями материи для скалярных возмущений. Ниже будет показано, что при построении самосогласованной теории эти величины определяются параметрами модели, и вводить их «руками» представляется непоследовательным. При этом сначала мы изучим общие свойства стабилизированных моделей, вводя, в отличие

от работы [46], для скалярного поля потенциал общего вида $V(\phi)$ во всем многомерном пространстве.

Итак, как и ранее, рассмотрим пятимерное пространство-время $E = M_4 \times S^1/Z_2$. Гравитация теперь взаимодействует с мембранами и со скалярным полем ϕ , обладающим потенциалами как во всем пространстве, так и на бранах. Аналогично тому, как метрика g_{MN} удовлетворяет условию симметрии орбифлекса (1), этой же симметрией обладает и скалярное поле ϕ :

$$\phi(x, -y) = \phi(x, y). \quad (132)$$

Действие модели запишем в виде

$$S = S_1 + S_2, \quad (133)$$

где гравитационное действие S_1 дается формулой

$$S_1 = \frac{1}{16\pi\tilde{G}} \int R\sqrt{-g} d^5x, \quad (134)$$

а действие скалярного поля и мембран есть

$$S_2 = - \int \left(\frac{1}{2} \partial_M \phi \partial^M \phi + V(\phi) \right) \sqrt{-g} d^5x - \int (\lambda_1(\phi)\delta(y) + \lambda_2(\phi)\delta(y-L)) \sqrt{-\tilde{g}} d^5x. \quad (135)$$

Здесь $\tilde{g} = \det \tilde{g}_{\mu\nu}$, $\tilde{g}_{\mu\nu}$ обозначает индуцированную на мембранах метрику. Структуру потенциала скалярного поля $V(\phi)$ и потенциалов на бранах $\lambda_{1,2}(\phi)$ мы обсудим позже.

Решение для метрики будем искать в виде

$$ds^2 = \gamma_{MN} dx^M dx^N = e^{-2A(y)} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dy^2, \quad (136)$$

аналогичном (5) и сохраняющем пуанкаре-инвариантность в четырехмерном пространстве-времени. Здесь $\eta_{\mu\nu}$ есть метрика Минковского, а функции $A(y)$, $\phi(y)$ определяются из уравнений движения

$$\begin{aligned} \frac{dV}{d\phi} + \frac{d\lambda_1}{d\phi} \delta(y) + \frac{d\lambda_2}{d\phi} \delta(y-L) &= -4A' \phi' + \phi'', \\ \frac{6}{\hat{\kappa}^2} (A')^2 + \frac{1}{2} (V - \frac{1}{2} (\phi')^2) &= 0, \\ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} (\phi')^2 + V + \lambda_1 \delta(y) + \lambda_2 \delta(y-L) \right) &= -\frac{1}{\hat{\kappa}^2} (-3A'' + 6(A')^2). \end{aligned} \quad (137)$$

Как видим, получившаяся система уравнений намного сложнее системы (8) в нестабилизированном случае.

Предположим, что у нас есть такое решение этой системы $A(y), \phi(y)$, что при некотором выборе параметров потенциалов расстояние между бранами стабилизировано и равно L . В дальнейшем мы построим такие решения в явном виде. Пока же будем считать, что такое решение существует, и будем рассматривать линеаризованную теорию на его фоне.

Для изучения флуктуаций параметризуем метрику и поле как

$$\begin{aligned} g_{MN}(x, y) &= \gamma_{MN}(y) + \hat{\kappa} h_{MN}(x, y), \\ \phi(x, y) &= \phi(y) + \hat{\kappa} f(x, y). \end{aligned} \quad (138)$$

Подставим (138) в действие (133) и сохраним члены второго порядка по возмущениям. В результате получим так называемый лагранжиан второй вариации для модели Рэндалл–Сундрума со скалярным полем [48, 49]

$$\begin{aligned} \frac{L_g}{\sqrt{-\gamma}} &= -\frac{1}{4}(\nabla_S h_{MN} \nabla^S h^{MN} + 2\nabla_N h \nabla_M h^{MN} - \\ &\quad - 2\nabla_M h^{MN} \nabla^S h_{SN} - \nabla_S h \nabla^S h) + (A')^2 \left[\frac{7}{2} h_{MN} h^{MN} - hh \right] - \\ &\quad - A'' \left[h_{MN} h^{MN} - \frac{1}{2} \tilde{h} \tilde{h} + \frac{1}{2} h_{M\nu} h^{M\nu} \right] + \frac{\hat{\kappa}^2}{2} \left[\frac{V}{2} \left(h_{MN} h^{MN} - \frac{1}{2} hh \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \left(h_{\mu\nu} h^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \tilde{h} \tilde{h} \right) [\lambda_1 \delta(y) + \lambda_2 \delta(y - L)] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} (\phi')^2 \left(-\frac{1}{4} hh + \frac{1}{2} h_{MN} h^{MN} + hh_{44} - 2h_{4M} h^{4M} \right) - \right. \\ &\quad \left. - f \left(h \frac{dV}{d\phi} + \tilde{h} \left[\frac{d\lambda_1}{d\phi} \delta(y) + \frac{d\lambda_2}{d\phi} \delta(y - L) \right] \right) - f' \phi' h + 2\partial_M f \phi' h^{M4} - \right. \\ &\quad \left. - \partial^M f \partial_M f - f^2 \left(\frac{d^2 V}{d\phi^2} + \frac{d^2 \lambda_1}{d\phi^2} \delta(y) + \frac{d^2 \lambda_2}{d\phi^2} \delta(y - L) \right) \right]. \quad (139) \end{aligned}$$

Здесь $h = \gamma_{MN} h^{MN}$, $\tilde{h} = \gamma_{\mu\nu} h^{\mu\nu}$, а ∇_M обозначает ковариантную производную в смысле метрики γ_{MN} . Несложно заметить, что этот лагранжиан частично совпадает с лагранжианом нестабилизированной модели (20). Отличия обусловлены наличием скалярного поля. Однако если положить в нем $\phi = \text{const}$ и учесть уравнения для фоновых полей (137), то лагранжианы полностью совпадут.

Варьируя действие, соответствующее лагранжиану (139), и используя уравнения для фоновых полей, можно получить следующие уравнения движения для флуктуаций [48, 49]:

1) $\mu\nu$ -компонента

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(\partial_\sigma \partial^\sigma h_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial^\sigma h_{\sigma\nu} - \partial_\nu \partial^\sigma h_{\sigma\mu} + \partial_4 \partial_4 h_{\mu\nu}) + \frac{1}{2} \partial_\mu \partial_\nu h_{44} + \\ & + \frac{1}{2} \partial_\mu \partial_\nu \tilde{h} - \frac{1}{2} \partial_4 (\partial_\mu h_{4\nu} + \partial_\nu h_{4\mu}) + A' (\partial_\mu h_{4\nu} + \partial_\nu h_{4\mu}) + \\ & + \frac{1}{2} \gamma_{\mu\nu} \left(-\partial_4 \partial_4 \tilde{h} - \partial_\sigma \partial^\sigma h_{44} - \partial_\sigma \partial^\sigma \tilde{h} + 4A' \partial_4 \tilde{h} - 3A' \partial_4 h_{44} + \right. \\ & \left. + \partial_\sigma \partial_\tau h^{\sigma\tau} + 2\partial^\sigma \partial_4 h_{\sigma 4} - 4A' \partial^\sigma h_{4\sigma} \right) - h_{\mu\nu} (2A'^2 - A'') + \\ & + \frac{3}{2} h_{44} \gamma_{\mu\nu} (4A'^2 - A'') - \frac{\hat{\kappa}^2}{2} \left(\gamma_{\mu\nu} f' \phi' + f \gamma_{\mu\nu} (-4A' \phi' + \phi'') \right) = 0, \quad (140) \end{aligned}$$

2) $\mu 4$ -компонента

$$\partial_4 (\partial_\mu \tilde{h} - \partial^\nu h_{\mu\nu}) + \partial^\nu (\partial_\nu h_{\mu 4} - \partial_\mu h_{\nu 4}) + 3A' \partial_\mu h_{44} + \hat{\kappa}^2 \partial_\mu f \phi' = 0, \quad (141)$$

3) 44 -компонента

$$\begin{aligned} & \partial^\mu (\partial^\nu h_{\mu\nu} - \partial_\mu \tilde{h}) - 6A' \partial^\mu h_{\mu 4} + 3A' \partial_4 \tilde{h} + \\ & + \hat{\kappa}^2 \left(-h_{44} V - f \frac{dV}{d\phi} + f' \phi' \right) = 0, \quad (142) \end{aligned}$$

4) уравнение для поля f

$$\begin{aligned} & h_{44} \left(\frac{d\lambda_1}{d\phi} \delta(y) + \frac{d\lambda_2}{d\phi} \delta(y-L) \right) - 2h_{44} (-4A' \phi' + \phi'') + \\ & + \phi' \partial_4 \tilde{h} - \phi' \partial_4 h_{44} - 8A' \partial_4 f - 2\phi' \partial^\mu h_{\mu 4} + 2\partial_M \partial^M f - \\ & - 2f \left(\frac{d^2 V}{d\phi^2} + \frac{d^2 \lambda_1}{d\phi^2} \delta(y) + \frac{d^2 \lambda_2}{d\phi^2} \delta(y-L) \right) = 0, \quad (143) \end{aligned}$$

где $\partial_4 \equiv \partial/\partial y$. Мы будем также использовать следующее вспомогательное уравнение, получающееся сверткой индексов в $\mu\nu$ -уравнении:

$$\begin{aligned} & \partial^\mu \partial^\nu h_{\mu\nu} - \partial^\mu \partial_\mu \left(\tilde{h} + \frac{3}{2} h_{44} \right) - 6A' \partial_4 (h_{44} - \tilde{h}) - \frac{3}{2} \partial_4 \partial_4 \tilde{h} - \\ & - 6A' \partial^\mu h_{\mu 4} + 3\partial^\mu \partial_4 h_{\mu 4} + 6h_{44} (4A'^2 - A'') - \\ & - 2\hat{\kappa}^2 (f' \phi' + f (-4A' \phi' + \phi'')) = 0. \quad (144) \end{aligned}$$

Мы видим, что полученные уравнения намного сложнее, чем соответствующие уравнения нестабилизированной модели. Также понятно, что унитарная

калибровка (29) и подстановка (48), расцепляющие уравнения нестабилизированной модели, в данном случае не работают. Поэтому нашей следующей задачей будет исследование калибровочной инвариантности этих уравнений и поиск удобной калибровки.

Нетрудно проверить, что, аналогично случаю нестабилизированной модели, отвечающее лагранжиану (139) действие инвариантно относительно калибровочных преобразований (21) тензорного поля, дополненных следующими преобразованиями скалярного поля:

$$f^{(')}(\hat{x}) = f(\hat{x}) - \partial_4 \phi \xi_4. \quad (145)$$

Для метрики рассматриваемого типа эти калибровочные преобразования могут быть найдены явно; они аналогичны преобразованиям (23) и имеют вид

$$h_{\mu\nu}^{(')} (x, y) = h_{\mu\nu}(x, y) - (\partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu - 2\gamma_{\mu\nu} \partial_4 A \xi_4), \quad (146)$$

$$h_{\mu 4}^{(')} (x, y) = h_{\mu 4}(x, y) - (\partial_\mu \xi_4 + \partial_4 \xi_\mu + 2\partial_4 A \xi_\mu),$$

$$h_{44}^{(')} (x, y) = h_{44}(x, y) - 2\partial_4 \xi_4, \quad (147)$$

$$f^{(')} (x, y) = f(x, y) - \partial_4 \phi \xi_4.$$

Мы будем использовать их для выделения физических степеней свободы полей h_{MN} и f .

Найдем калибровку, которая позволяет упростить уравнения движения. Для этого покажем, что на поля можно наложить условие

$$(e^{-2A} h_{44})' - \frac{2}{3} \hat{\kappa}^2 e^{-2A} \phi' f = 0. \quad (148)$$

Отметим, что в отсутствие скалярного поля, т. е. когда действие теории переходит в действие оригинальной модели Рэндалл–Сундрума (2), эта калибровка соответствует волновой функции радиона в дополнительном измерении, описанной в работе [50] (см. также [51]).

Из (147) следует, что уравнение для функции ξ_4 , переводящей произвольную полевую конфигурацию в конфигурацию, удовлетворяющую (148), имеет вид

$$\partial_4 \partial_4 \xi_4 - 2A' \partial_4 \xi_4 - \frac{1}{3} \hat{\kappa}^2 (\phi')^2 \xi_4 = -\frac{1}{2} \left(\partial_4 h_{44} - 2A' h_{44} - \frac{2}{3} \hat{\kappa}^2 \phi' f \right).$$

Стандартная теория решения дифференциальных уравнений предполагает непрерывность коэффициента перед $\partial_4 \xi_4$. Однако в нашем случае он имеет

разрыв. Для устранения этого недостатка перепишем уравнение в следующем виде:

$$\begin{aligned} \partial_4 \partial_4 (\xi_4 e^{-A}) + \xi_4 e^{-A} \left(A'' - (A')^2 - \frac{1}{3} \hat{\kappa}^2 (\phi')^2 \right) = \\ = -\frac{1}{2} e^{-A} (\partial_4 h_{44} - 2A' h_{44} - \frac{2}{3} \hat{\kappa}^2 \phi' f) \equiv w(x, y). \end{aligned} \quad (149)$$

Функции $(A')^2$ и $(\phi')^2$ являются гладкими функциями y . Хотя функция A'' имеет сингулярности в точках $y = 0, y = L$, сингулярные члены выпадают из уравнения вследствие того, что ξ_4 обращается в этих точках в нуль. Таким образом, множитель перед $\xi_4 e^{-A}$ можно считать гладкой функцией, и это уравнение можно решать стандартными методами относительно функции $\xi_4 e^{-A}$ на отрезке $[0, L]$.

В соответствии с общей теорией однородное уравнение, соответствующее (149), на отрезке $[0, L]$ имеет два независимых решения, которые мы обозначаем χ_1 и χ_2 . Для нахождения ξ_4 воспользуемся методом функций Грина. В результате имеем:

$$\begin{aligned} \xi_4(x, y) = e^A \int_0^L \frac{\chi_1(y)\chi_2(z) - \chi_2(y)\chi_1(z)}{W(\chi_1(z)\chi_2(z))} \theta(y-z) w(x, z) dz - \\ - e^A \frac{\chi_1(y)\chi_2(0) - \chi_2(y)\chi_1(0)}{\chi_1(L)\chi_2(0) - \chi_2(L)\chi_1(0)} \int_0^L \frac{\chi_1(L)\chi_2(z) - \chi_2(L)\chi_1(z)}{W(\chi_1(z)\chi_2(z))} w(x, z) dz. \end{aligned} \quad (150)$$

Здесь $W(\chi_1(z)\chi_2(z))$ обозначает вронскиан решений $\chi_1(y)$ и $\chi_2(y)$, который для уравнения (149) есть просто константа.

Нетрудно проверить, что найденная функция ξ_4 обращается в нуль на концах отрезка и, вследствие этого, может быть продолжена до нечетной функции на интервале $(-L, L)$.

Таким образом, для любого фонового решения калибровка (148) действительно существует. Отметим еще, что соотношение (148) было получено ранее в работе [52] как уравнение (141), в котором сохранены только скалярные степени свободы. Точно так же, как в нестабилизированной RS1-модели, выбором калибровки можно обратить в нуль поле $h_{\mu 4}$ [34], при этом уравнение (141) становится уравнением связи.

После этого остаются еще калибровочные преобразования, удовлетворяющие условию

$$\partial_4 (e^{2A} \xi_\mu) = 0. \quad (151)$$

Итак, в рассматриваемой модели существует калибровка

$$(e^{-2A} h_{44})' - \frac{2}{3} \tilde{\kappa}^2 e^{-2A} \phi' f = 0, \quad h_{\mu 4} = 0. \quad (152)$$

Для явного выделения физических степеней свободы данной модели представим гравитационное поле в виде

$$h_{\mu\nu} = b_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \gamma_{\mu\nu} h_{44}. \quad (153)$$

В дальнейшем мы увидим, что поле $b_{\mu\nu}(x, y)$ описывает безмассовый гравитон и массивные тензорные поля Калуцы–Клейна. Подставляя калибровочные условия (152) и подстановку (153) в $\mu 4$ -уравнение и в свернутое $\mu\nu$ -уравнение (144), получим:

$$\begin{aligned} \partial_4(\partial^\nu b_{\mu\nu} - \partial_\mu \tilde{b}) &= 0, \\ \partial^\mu \partial^\nu b_{\mu\nu} - \partial^\mu \partial_\mu \tilde{b} - \frac{3}{2} \tilde{b}'' + 6A' \tilde{b}' &= 0. \end{aligned} \quad (154)$$

Напомним, что в нашем распоряжении остались калибровочные преобразования, удовлетворяющие условию (151), которое также можно представить в виде

$$\xi_\mu = e^{-2A} \epsilon_\mu(x).$$

Теперь покажем, что с помощью этих преобразований можно наложить калибровку, в которой поле $b_{\mu\nu}$ является поперечно-бесследовым, т. е. $\tilde{b} \equiv \gamma^{\mu\nu} b_{\mu\nu} = 0$, $\partial^\mu b_{\mu\nu} = 0$. Сначала рассмотрим закон преобразования для \tilde{b} :

$$\tilde{b}^{(\prime)} = \tilde{b} - 2e^{-2A} \partial^\mu \epsilon_\mu.$$

Отсюда следует, что существует калибровка $\tilde{b} = 0$, при этом остаются калибровочные преобразования, имеющие вид $\xi_\mu = e^{-2A} \epsilon_\mu$, где $\epsilon_\mu(x)$ удовлетворяет уравнению $\partial^\nu \epsilon_\nu = 0$. В этой калибровке (154) будут иметь вид

$$\partial_4(\partial^\nu b_{\mu\nu}) = 0, \quad \partial^\mu \partial^\nu b_{\mu\nu} = 0. \quad (155)$$

Далее, дивергенция поля $b_{\mu\nu}$ преобразуется как

$$\partial^\mu b_{\mu\nu}^{(\prime)} = \partial^\mu b_{\mu\nu} - e^{-2A} \partial^\mu \partial_\mu \epsilon_\nu.$$

При соответствующем выборе ϵ_ν и с учетом (155) получаем $\partial^\mu b_{\mu\nu} = 0$, а остаточные калибровочные преобразования должны удовлетворять условию $\square \epsilon_\nu = 0$.

Следовательно, в поперечно-бесследовой калибровке с учетом подстановки (153) $\mu 4$ -уравнение и свернутое $\mu\nu$ -уравнение выполняются тождественно. Более того, ниже будет показано, что оставшиеся уравнения расцепляются, а лагранжиан второй вариации приобретает диагональный вид.

Итак, в рассматриваемой стабилизированной модели существует калибровка

$$(e^{-2A} h_{44})' - \frac{2}{3} \hat{\kappa}^2 e^{-2A} \phi' f = 0, \quad (156)$$

$$h_{\mu 4} = 0, \quad \tilde{b} = \gamma_{\mu\nu} b^{\mu\nu} = 0, \quad \partial^\nu b_{\mu\nu} = 0,$$

после наложения которой остаются калибровочные преобразования, удовлетворяющие условиям

$$\xi_\mu = e^{-2A} \epsilon_\mu(x), \quad \partial^\nu \epsilon_\nu(x) = 0, \quad \square \epsilon_\nu = 0 \quad (157)$$

и обеспечивающие правильное число физических степеней свободы безмассового гравитона.

Вернемся к рассмотрению уравнений движения. Уравнение для $\mu\nu$ -компонент в калибровке (156) после подстановки (153) сводится к уравнению для поперечно-бесследового поля $b_{\mu\nu}$:

$$\frac{1}{2} \left(e^{2A} \square b_{\mu\nu} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} b_{\mu\nu} \right) - b_{\mu\nu} (2(A')^2 - A'') = 0. \quad (158)$$

Отметим, что в это уравнение не входит фоновое скалярное поле ϕ и оно по своей структуре совершенно аналогично соответствующему уравнению нестабилизированной модели (59).

Для того, чтобы найти уравнения движения для h_{44} , нужно разрешить калибровочное условие (156) относительно функции f и подставить последнюю в уравнения (142), (143). Это можно сделать либо вводя естественную регуляризацию $(\text{sign}(y))^2 = 1$, либо ограничивая уравнения на интервал $(0, L)$ и учитывая отсутствующие в них сингулярные члены с помощью граничных условий. Последний метод оказывается технически более простым, и именно его мы будем использовать.

Уравнение для 44-компоненты (142) заметно упрощается, если его переписать на интервале $(0, L)$, вводя новую функцию $g = e^{-2A(y)} h_{44}(x, y)$, а также используя связь потенциала V с A и ϕ (137):

$$g'' + 2g' \left(A' - \frac{\phi''}{\phi'} \right) - \frac{\hat{\kappa}^2 (\phi')^2}{3} g + \partial_\mu \partial^\mu g = 0. \quad (159)$$

Отметим, что в терминах g подстановка (153) и калибровочное условие (156), расцепляющие уравнения движения, принимают вид

$$h_{\mu\nu} = b_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} g, \quad h_{44} = e^{2A(y)} g, \quad (160)$$

$$g' - \frac{2}{3} \hat{\kappa}^2 e^{-2A} \phi' f = 0, \quad (161)$$

$$h_{\mu 4} = 0, \quad \tilde{b} = \gamma_{\mu\nu} b^{\mu\nu} = 0, \quad \partial^\nu b_{\mu\nu} = 0. \quad (162)$$

Калибровочное условие (161), разрешенное относительно f на интервале $(0, L)$, переписывается так:

$$f = \frac{3}{2\hat{\kappa}^2} \frac{e^{2A}}{\phi'} g'.$$

Подстановка этого выражения для f в уравнение (143) приводит к уравнению, получающемуся дифференцированием уравнения (159) по y и граничным условиям на бранах:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2} \frac{d^2 \lambda_1}{d\phi^2} - \frac{\phi''}{\phi'} \right) g' + \partial_\mu \partial^\mu g \Big|_{y=+0} &= 0, \\ \left(\frac{1}{2} \frac{d^2 \lambda_2}{d\phi^2} + \frac{\phi''}{\phi'} \right) g' - \partial_\mu \partial^\mu g \Big|_{y=L-0} &= 0. \end{aligned} \quad (163)$$

Итак, наш выбор калибровки и соответствующая подстановка позволили расцепить уравнения движения. Таким образом, флуктуации метрики и скалярного поля на фоне обобщенного решения Рэндалл–Сундрума описываются поперечно-бесследовым тензорным полем $b_{\mu\nu}$ и скалярным полем g . Их классические уравнения движения даются формулами (158) и (159), (163) соответственно.

Рассмотрим сначала моды тензорного поля $b_{\mu\nu}$, которое удовлетворяет уравнению (158). Подставляя в это уравнение

$$b_{\mu\nu}(x, y) = c_{\mu\nu} e^{ipx} \psi_n(y), \quad c_{\mu\nu} = \text{const}, \quad p^2 = -m_n^2,$$

ограничивая его на интервал $(0, L)$ и заменяя сингулярные члены граничными условиями, мы получим:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \psi_n}{dy^2} - 2(2(A')^2 - A'') \psi_n &= -m_n^2 e^{2A} \psi_n, \\ \psi_n' + 2A' \psi_n \Big|_{y=+0} &= \psi_n' + 2A' \psi_n \Big|_{y=L-0} = 0. \end{aligned} \quad (164)$$

Граничные условия подсказывают подстановку $\psi_n = \exp(-2A) \omega_n$, которая превращает это уравнение в

$$\begin{aligned} \frac{d}{dy} (e^{-4A} \omega_n') &= -m_n^2 e^{-2A} \omega_n, \\ \omega_n' \Big|_{y=+0} &= \omega_n' \Big|_{y=L-0} = 0. \end{aligned} \quad (165)$$

Отсюда видно, что собственные функции ω_n являются решениями задачи Штурма–Лиувилля с граничными условиями Неймана. В соответствии с общей теорией [53], у этой задачи нет отрицательных собственных значений при любой функции A , только одно нулевое собственное значение, отвечающее собственной функции $\omega_0 = \text{const}$, и бесконечное число положительных собственных значений, асимптотически определяемых формулой

$$m_n^2 = \frac{\pi^2 n^2}{l^2}, \quad l = \int_0^L e^{A(y)} dy. \quad (166)$$

Эту формулу нужно конкретизировать для нахождения спектра масс возбуждений на разных бранах. А именно, массы возбуждений на каждой бране нужно вычислять в координатах, галилеевых на этой бране [10, 34], т. е. для которых функция $A(y)$ обращается в нуль на соответствующей бране. Поэтому последняя формула может быть явно адаптирована для вычисления масс на бранах следующим образом:

$$l = \int_0^L e^{(A(y)-A(0))} dy \quad \text{для браны в } y = 0, \quad (167)$$

$$l = \int_0^L e^{(A(y)-A(L))} dy \quad \text{для браны в } y = L. \quad (168)$$

Это справедливо для любой функции $A(y)$, удовлетворяющей уравнениям (137), потому что они определяют ее с точностью до аддитивной константы.

Собственные функции $\{\psi_n(y)\}$ задачи на собственные значения (164) образуют полную ортонормированную систему, при этом собственная функция нулевой моды имеет вид

$$\psi_0(y) = N e^{-2A(y)}. \quad (169)$$

Разлагая $b_{\mu\nu}$ по этой системе:

$$b_{\mu\nu} = \sum_{n=0}^{\infty} b_{\mu\nu}^n(x) \psi_n(y), \quad (170)$$

мы находим четырехмерные тензорные поля $b_{\mu\nu}^n(x)$ с определенными массами. Важным моментом является то, что благодаря виду решения для нулевой моды (169) остаточные калибровочные преобразования (157) действуют только на безмассовое поле $b_{\mu\nu}^0(x)$ и обеспечивают правильное число степеней свободы безмассового гравитона [34].

Для того, чтобы найти спектр масс скалярных частиц, описываемых уравнением (159), подставим в это уравнение

$$g(x, y) = e^{ipx} g_n(y), \quad p^2 = -\mu_n^2.$$

В результате уравнение движения и граничные условия для $g_n(y)$ примут вид:

$$g_n'' + 2A'g_n' - 2\frac{\phi''}{\phi'}g_n' - \frac{\hat{\kappa}^2(\phi')^2}{3}g_n = -\mu_n^2 e^{2A} g_n, \quad (171)$$

$$\left(\frac{1}{2}\frac{d^2\lambda_1}{d\phi^2} - \frac{\phi''}{\phi'}\right)g_n' + \mu_n^2 e^{2A} g_n|_{y=+0} = 0, \quad (172)$$

$$\left(\frac{1}{2}\frac{d^2\lambda_2}{d\phi^2} + \frac{\phi''}{\phi'}\right)g_n' - \mu_n^2 e^{2A} g_n|_{y=L-0} = 0. \quad (173)$$

Перепишем уравнение (171) в форме Штурма–Лиувилля:

$$\frac{d}{dy} \left(\frac{e^{2A}}{(\phi')^2} g_n' \right) - \frac{\hat{\kappa}^2 e^{2A}}{3} g_n = -\mu_n^2 g_n \frac{e^{4A}}{(\phi')^2}. \quad (174)$$

Легко видеть, что оператор в задаче на собственные значения для этого уравнения с граничными условиями (172), (173) несамосопряженный. Тем не менее эти граничные условия очень похожи на обычные граничные условия Штурма–Лиувилля и приводят к ряду общих утверждений о спектре масс и собственных функциях рассматриваемой задачи.

Умножая уравнение (174) на \bar{g}_n , интегрируя его по интервалу $(0, L)$ и затем интегрируя по частям член с производными, мы получаем:

$$\begin{aligned} \mu_n^2 \left(\int_0^L \frac{e^{4A}}{(\phi')^2} |g_n|^2 dy + \left(\frac{1}{2} \frac{d^2\lambda_1}{d\phi^2} - \frac{\phi''}{\phi'} \right)^{-1} \frac{e^{4A}}{(\phi')^2} |g_n|^2 \Big|_{y=+0} + \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{2} \frac{d^2\lambda_2}{d\phi^2} + \frac{\phi''}{\phi'} \right)^{-1} \frac{e^{4A}}{(\phi')^2} |g_n|^2 \Big|_{y=L-0} \right) = \\ = \frac{\hat{\kappa}^2}{3} \int_0^L e^{2A} |g_n|^2 dy + \int_0^L \frac{e^{2A}}{(\phi')^2} |g_n'|^2 dy. \quad (175) \end{aligned}$$

Это означает, что если

$$\left(\frac{1}{2} \frac{d^2\lambda_1}{d\phi^2} - \frac{\phi''}{\phi'} \right) \Big|_{y=+0} > 0, \quad \left(\frac{1}{2} \frac{d^2\lambda_2}{d\phi^2} + \frac{\phi''}{\phi'} \right) \Big|_{y=L-0} > 0, \quad (176)$$

то все собственные значения μ_n^2 рассматриваемой задачи действительные и положительные. Стандартный прием доказательства ортогональности собственных функций в этом случае дает для $m \neq n$

$$\begin{aligned}
 - \int_0^L \frac{e^{4A}}{(\phi')^2} \bar{g}_m g_n dy = & \left(\frac{1}{2} \frac{d^2 \lambda_1}{d\phi^2} - \frac{\phi''}{\phi'} \right)^{-1} \frac{e^{4A}}{(\phi')^2} \bar{g}_m g_n \Big|_{y=+0} + \\
 & + \left(\frac{1}{2} \frac{d^2 \lambda_2}{d\phi^2} + \frac{\phi''}{\phi'} \right)^{-1} \frac{e^{4A}}{(\phi')^2} \bar{g}_m g_n \Big|_{y=L-0}. \quad (177)
 \end{aligned}$$

Таким образом, собственные функции этой задачи, отвечающие разным собственным значениям, не ортогональны с весом, определяемым из уравнения (174).

Строгое доказательство полноты этой системы функций представляет собой достаточно трудную проблему, и нам не удалось решить ее полностью. Математически строгое рассмотрение аналогичных краевых задач с граничными условиями, одно из которых содержит собственное значение, можно найти в работе [54] и в цитируемой в ней литературе. Однако мы можем привести ряд аргументов в пользу того, что благодаря особому виду граничных условий (172), (173) эта система функций полна.

Физические соображения подсказывают, что эта система функций полна, поскольку она содержит бесконечное число элементов, и, как будет показано ниже, разложение пятимерного скалярного поля по этой системе диагонализует соответствующую часть лагранжиана второй вариации. Кроме того, если параметры потенциалов скалярного поля на бранах стремятся к бесконечности: $(1/2)(d^2 \lambda_{1,2}/d\phi^2) \rightarrow \infty$, то собственные значения в граничных условиях пропадают, и оператор в уравнении становится самосопряженным (это приближение рассматривалось в работах [52, 55]). Поэтому при $(1/2)(d^2 \lambda_{1,2}/d\phi^2) \rightarrow \infty$ собственные функции рассматриваемой задачи переходят в собственные функции задачи Штурма–Лиувилля с самосопряженным оператором, которые образуют полную ортогональную систему. Ортогональность собственных функций при $(1/2)(d^2 \lambda_{1,2}/d\phi^2) \rightarrow \infty$ можно увидеть также из уравнения (177). Таким образом, мы предполагаем, что собственные функции $\{g_n(y)\}$ задачи (171)–(173) образуют полную счетную неортогональную систему. Отметим также, что при $\mu_n^2 \rightarrow \infty$ граничные условия (172), (173) переходят в $g_n(0) = g_n(L) = 0$, и поэтому для больших m или n интеграл в (177) близок к нулю. Такую систему функций можно назвать асимптотически ортогональной.

Эти предположения можно дополнительно оправдать, формально переписав уравнение (171) и граничные условия (172), (173) как задачу Штурма–

Лиувилля на окружности S^1 с периодическими граничными условиями:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{e^{2A}}{(\phi')^2} g'_n \right)' - \frac{\hat{\kappa}^2 e^{2A}}{3} g_n = -\mu_n^2 \frac{e^{4A}}{(\phi')^2} \times \\ & \times \left(1 + \left(\frac{1}{2} \frac{d^2 \lambda_1}{d\phi^2} - \frac{\phi''}{\phi'} \right)^{-1} \delta(y) + \left(\frac{1}{2} \frac{d^2 \lambda_2}{d\phi^2} + \frac{\phi''}{\phi'} \right)^{-1} \delta(y-L) \right) g_n. \end{aligned} \quad (178)$$

При таком преобразовании задача на собственные значения формально становится самосопряженной, и ее отличие от стандартной задачи Штурма–Лиувилля на окружности состоит лишь в том, что весовая функция является обобщенной функцией. В этом случае соотношение (177) представляет собой обобщенное условие ортогональности с весовой функцией, определяемой правой частью уравнения (178).

Нетрудно понять, что функции $g_n(y)$ могут быть выбраны действительными. Тогда пятимерное скалярное поле $g(x, y)$ можно разложить по этой системе:

$$g(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x) g_n(y), \quad (179)$$

где четырехмерные действительные скалярные поля $\varphi_n(x)$ обладают массой μ_n^2 .

Теперь мы можем найти эффективное четырехмерное действие для рассматриваемой модели. Подставляя (153), (160)–(162) в лагранжиан (139), мы увидим, что лагранжианы тензорных и скалярных полей расцепляются. Подставляя затем в эти лагранжианы разложения (170), (179), используя уравнения (164), (171), полагая при этом, что собственные функции $\{\psi_n\}$ и $\{g_n\}$ правильно нормированы, и интегрируя по координате дополнительного измерения, мы найдем, что редуцированный лагранжиан тензорного поля представляет собой сумму стандартных четырехмерных лагранжианов тензорных полей с массами m_n , в то время как для лагранжиана скалярного поля мы получаем

$$\mathcal{L}_{\text{scalar}} = -\frac{3}{4} \sum_{nk} [\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi_n \partial_\nu \varphi_k + \mu_k^2 \varphi_n \varphi_k] \int_0^L dy e^{2A} \left(g_n g_k + \frac{3}{\hat{\kappa}^2 (\phi')^2} g'_n g'_k \right).$$

Рассмотрим теперь интеграл по dy . Интегрируя по частям член с производными, используя уравнение (174) и граничные условия (172), (173), мы приходим к результату

$$\begin{aligned} & \frac{3\mu_n^2}{\hat{\kappa}^2} \left(\int_0^L \frac{e^{4A}}{(\phi')^2} g_n g_k dy + \left(\frac{1}{2} \frac{d^2 \lambda_1}{d\phi^2} - \frac{\phi''}{\phi'} \right)^{-1} \frac{e^{4A}}{(\phi')^2} g_n g_k \Big|_{y=+0} + \right. \\ & \left. + \left(\frac{1}{2} \frac{d^2 \lambda_2}{d\phi^2} + \frac{\phi''}{\phi'} \right)^{-1} \frac{e^{4A}}{(\phi')^2} g_n g_k \Big|_{y=L-0} \right), \end{aligned}$$

совпадающему с обобщенным условием ортогональности (177). Поэтому для действительных $g_n(y)$ уравнение (177) означает, что это выражение обращается в нуль для $n \neq k$. Полагая, что собственные функции $\{g_n\}$ должным образом нормированы, а именно

$$\frac{9\mu_n^2}{2\hat{\kappa}^2} \left(\int_0^L dy \frac{e^{4A}}{(\phi')^2} g_n g_k + \frac{2}{\beta_1^2} \frac{e^{4A}}{(\phi')^2} g_n g_k \Big|_{y=0} + \frac{2}{\beta_2^2} \frac{e^{4A}}{(\phi')^2} g_n g_k \Big|_{y=L} \right) = \delta_{nk}, \quad (180)$$

мы найдем, что редуцированный лагранжиан скалярных полей также имеет стандартный вид, и полное редуцированное четырехмерное действие есть

$$S_{\text{eff}} = -\frac{1}{4} \sum_k \int dx (\partial^\sigma b^{k,\mu\nu} \partial_\sigma b_{\mu\nu}^k + m_k^2 b^{k,\mu\nu} b_{\mu\nu}^k) - \quad (181)$$

$$-\frac{1}{2} \sum_k \int dx (\partial_\nu \varphi_k \partial^\nu \varphi_k + \mu_k^2 \varphi_k \varphi_k). \quad (182)$$

Мы видим, что эффективный лагранжиан тензорных полей совпадает с соответствующим лагранжианом нестабилизированной модели [34], в то время как эффективный лагранжиан скалярных полей совпадает с найденным в работе [55] для случая $d^2 \lambda_{1,2}/d\phi^2 \rightarrow \infty$. Отметим, что из формулы (180) следует, что в стабилизированной модели отсутствует безмассовая мода скалярного поля, что соответствует наличию массы у радиона.

Итак, результаты этого раздела позволяют нам найти общую структуру моделей мира на бране, стабилизированных с помощью скалярного поля. Однако для того, чтобы найти спектр масс тензорных и скалярных возмущений и их константы связи с материей на бранах, нам необходимо выбрать конкретные потенциалы скалярного поля и определенное вакуумное решение системы (137).

Для того, чтобы найти аналитическое решение системы (137), мы воспользуемся результатами работ [47, 56]. Рассмотрим особый класс потенциалов, представимых в виде

$$V(\phi) = \frac{1}{8} \left(\frac{dW}{d\phi} \right)^2 - \frac{\hat{\kappa}^2}{12} W^2(\phi).$$

Нетрудно проверить, что если положить

$$\phi'(y) = \text{sign}(y) \frac{1}{2} \frac{dW}{d\phi}, \quad A'(y) = \text{sign}(y) \frac{\hat{\kappa}^2}{12} W(\phi), \quad (183)$$

где $' \equiv d/dy$, то уравнения движения справедливы всюду, за исключением бран. Для того, чтобы уравнения выполнялись и на бранах, необходим согласованный выбор потенциала $V(\phi)$ и потенциалов на бранах $\lambda_{1,2}(\phi)$.

Выберем $W(\phi)$ в виде

$$W = 12 \frac{k}{\hat{\kappa}^2} - \phi^2 u, \quad (184)$$

так что $V(\phi)$ представляет собой полином четвертой степени:

$$V(\phi) = -\frac{\hat{\kappa}^2 u^2}{12} \left(\phi^2 - \frac{12k + 3u}{\hat{\kappa}^2 u} \right)^2 + \frac{24ku + 3u^2}{4\hat{\kappa}^2}. \quad (185)$$

Согласованные с ним потенциалы на бранах можно выбрать равными

$$\lambda_1 = W(\phi) + \beta_1^2 (\phi - \phi_1)^2, \quad (186)$$

$$\lambda_2 = -W(\phi) + \beta_2^2 (\phi - \phi_2)^2. \quad (187)$$

Параметры потенциалов $k, u, \phi_{1,2}, \beta_{1,2}$, безразмерные фундаментальным пятимерным масштабом теории $M = \hat{\kappa}^{-2/3}$, следует считать положительными величинами порядка $O(1)$, т. е. в параметрах модели не должно содержаться иерархического различия масштабов.

Такой выбор потенциалов на бранах (186), (187) в рассматриваемом случае обеспечивает однозначность решения системы уравнений движения, которое в явном виде задается выражениями [47]

$$\phi(y) = \phi_1 e^{-u|y|}, \quad (188)$$

$$A(y) = k|y| + b e^{-2u|y|} + C_1, \quad b = \frac{\hat{\kappa}^2 \phi_1^2}{24}, \quad (189)$$

где C_1 — константа. Данное решение является стабилизированным обобщением решения Рэндалл–Сундрума, что объясняет выбор суперпотенциала в виде (184). Расстояние между бранами связано с граничными условиями для поля ϕ и выражается через параметры потенциала соотношением

$$L = \frac{1}{u} \ln \left(\frac{\phi_1}{\phi_2} \right). \quad (190)$$

Таким образом, мы видим, что расстояние между бранами, в отличие от модели Рэндалл–Сундрума без скалярного поля, фиксировано. Отметим, что это достигается благодаря зависимости решения для скалярного поля от координаты дополнительного измерения. Вопрос единственности фонового решения (188), (189) при таком выборе потенциалов подробно обсуждается в работе [47].

Далее мы будем рассматривать стабилизированную модель Рэндалл–Сундрума с фоновым решением (188), (189). Для этого фонового решения можно явно провести все вычисления, связанные с построением линеаризованной

теории. Например, можно в явном виде найти независимые решения уравнения (149), использующиеся для нахождения калибровочной функции в (150). А именно,

$$\begin{aligned}\chi_1 &= e^{(ky+b e^{-2uy})}, \\ \chi_2 &= e^{(ky+b e^{-2uy})} \int_0^{2b e^{-2uy}} z^{2s-1} e^{-z} dz = e^{(ky+b e^{-2uy})} \gamma(2s, 2b e^{-2uy}),\end{aligned}$$

где $b = \hat{\kappa}^2 \phi_1^2 / 24$, $s = k/2u$, а γ — неполная гамма-функция (в работе [48] функции χ_1 , χ_2 представлены не в явном виде, а выражены через гипергеометрические функции).

Начнем с рассмотрения взаимодействия безмассовых гравитонов с полями на бранах, потому что константа взаимодействия этих полей с материей на бране наблюдателя должна совпадать с ньютоновской гравитационной постоянной. Получив выражение для этой константы через параметры модели, мы сможем получить ограничения на значения этих параметров, а тем самым и на константы взаимодействия с полями на бранах и других мод. Поскольку среди параметров модели есть фундаментальный пятимерный энергетический масштаб, а постоянная Планка представляет собой четырехмерный энергетический масштаб, мы получаем связь пятимерного и четырехмерного энергетических масштабов. При этом мы будем использовать метод, предложенный в работе [57] и уже примененный при обсуждении нестабилизированной модели.

Аналогично (31), метрика, которая включает только безмассовую тензорную моду, имеет вид

$$ds^2 = e^{-2A(y)} \bar{g}_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu + dy^2, \quad (191)$$

согласующийся с решением (169) для нулевой тензорной моды. Подставляя эту метрику и фоновое поле $\phi(y) = \phi_1 e^{-u|y|}$ в действие (133), получаем следующее выражение:

$$S = \frac{1}{16\pi\hat{G}} \int_{-L}^L e^{-2A(y)} dy \int d^4x R_4(\bar{g}) \sqrt{-\bar{g}}. \quad (192)$$

Интегрируя последнее выражение по y , находим эффективное четырехмерное действие

$$S_{\text{eff}} = \frac{1}{16\pi G_i} \int d^4x R_4(\bar{g}) \sqrt{-\bar{g}}, \quad (193)$$

где $i = 1, 2$ в зависимости от того, на какой бране выбраны галилеевы координаты. Сравнивая (193) со стандартным четырехмерным гравитационным

действием, приходим к выводу, что поле $\bar{g}_{\mu\nu}(x)$ есть четырехмерное гравитационное поле, а связь энергетических масштабов определяется интегралом

$$M_i^2 = M^3 e^{-2C_1} \int_{-L}^L dy e^{-2k|y| - 2b e^{-2u|y|}}, \quad (194)$$

который можно представить в следующем виде:

$$M_i^2 = \frac{M^3}{u} e^{-2C_1} (2b)^{-k/u} \left\{ \gamma\left(\frac{k}{u}, 2b\right) - \gamma\left(\frac{k}{u}, 2b e^{-2uL}\right) \right\}. \quad (195)$$

Фигурирующий здесь параметр b определен в формуле (189), а γ — неполная гамма-функция.

Энергетический масштаб M_1 на бране с положительным натяжением определяется выражением (195), в котором $C_1 = -b$, а энергетический масштаб M_2 на бране с отрицательным натяжением определяется тем же выражением с $C_1 = -kL - b e^{-2uL}$. При таком выборе константы C_1 координаты будут галилеевы на первой или второй бране соответственно. Используя стандартное выражение для неполной гамма-функции, несложно показать, что в пределе $b \rightarrow 0$ или $u/k \rightarrow \infty$ выражение (195), в зависимости от выбора константы C_1 , переходит в (36) и (39) соответственно. Можно провести анализ выражения (195) в случае физически разумных значений входящих туда параметров, но более удобным оказывается использовать интегральное представление (194), чем явный вид в терминах неполной гамма-функции.

Рассмотрим сначала связь пятимерного и четырехмерного масштабов в приближении малых u , т. е. полагая $uL \ll 1$ и считая b произвольным [48]. Раскладывая функцию $A(y)$ (189) в экспоненте подынтегрального выражения (194) до первого порядка по uL , получим

$$A(y) \simeq (k - 2bu)|y| + C_1 = \tilde{k}|y| + C_1, \quad \tilde{k} = (k - 2bu). \quad (196)$$

Выбирая в этом приближении константу $C_1 = 0$ так, что координаты $\{x^\mu\}$ в формуле (191) галилеевы на бране в $y = 0$, из (194) получим связь пятимерной фундаментальной массы M и массы Планка на бране 1 в следующем виде:

$$M_1^2 = M^3 \frac{1 - e^{-2\tilde{k}L}}{\tilde{k}}. \quad (197)$$

Выбирая $C_1 = -\tilde{k}L$, из (194) аналогично (197) получим связь пятимерной фундаментальной массы M и массы Планка M_N на бране в $y = L$ в следующем виде:

$$M_1^2 = M^3 \frac{e^{2\tilde{k}L} - 1}{\tilde{k}}. \quad (198)$$

Очевидно, что в рассматриваемом приближении мы фактически получили формулы (36), (39) для нестабилизированной модели с заменой $k \rightarrow \tilde{k}$. Поэтому в данном случае для того, чтобы получить правильное значение гравитационной постоянной на бране с отрицательным натяжением, можно взять те же значения параметров, которые используются в нестабилизированной модели, т. е. $M \sim \tilde{k} \sim 1$ ТэВ, $\tilde{k}L \sim 35$ [34]. Тогда параметр u может быть порядка десятков ГэВ, а масса радиона, как будет показано ниже, может быть порядка сотен ГэВ.

Для выяснения физического смысла этого приближения заметим, что если в определении суперпотенциала $W(\phi)$ (184) положить $u = 0$, то из (183) найдем, что $\phi = \text{const}$, $A(y) = k|y| + c$, т. е. для метрики получается решение Рэндалл–Сундрума. При этом для существования решения необходимо, чтобы $\phi_1 = \phi_2$, а из (186) мы получим, что $\lambda_1 = -\lambda_2 = 12k/\tilde{\kappa}^2$. Потенциал $V(\phi)$ в этом случае превращается в космологическую постоянную нестабилизированной модели, т. е. $\tilde{\kappa}^2 V(\phi) = -12k^2 = \Lambda$. Другими словами, мы получаем решение уравнений (8) нестабилизированной модели с условиями (11). Кроме того, благодаря тому, что $\phi = \text{const}$, в линеаризованной теории отсутствует взаимодействие флуктуации скалярного поля с флуктуациями гравитационного поля. Таким образом, при $u \rightarrow 0$ стабилизированная модель переходит в нестабилизированную. Поэтому приближение малых u будет приближением малого отклонения от нестабилизированной модели Рэндалл–Сундрума.

Теперь, следуя работе [57], рассмотрим другие возможные приближения. Как мы уже отмечали, из общей формулы для связи энергетических масштабов (195) видно, что можно также использовать приближение $b = \tilde{\kappa}^2 \phi_1^2/24 \ll 1$, означающее, что воздействие скалярного поля на метрику Рэндалл–Сундрума мало. Это приближение было изучено в [52]. Авторы этой работы пренебрегают вторым членом, пропорциональным b , в выражении для $A(y)$ (189) всюду, кроме уравнения (159) для скалярного поля. Поскольку граничные условия для скалярного поля достаточно сложные, авторы работы [52] используют предел $d^2\lambda_{1,2}/d\phi^2 \rightarrow \infty$. При этом граничные условия (163) превращаются в

$$g'|_{y=0} = g'|_{y=L} = 0, \quad (199)$$

т. е. сильно упрощаются.

Связь между пятимерными и четырехмерными энергетическими масштабами на бранах в $y = 0$ и в $y = L$ в этом приближении по-прежнему дается выражениями (36) и (39) соответственно. Это утверждение не вызывает сомнений, так как тензорный сектор рассматриваемой модели в данном приближении в точности совпадает с соответствующим сектором нестабилизированной модели Рэндалл–Сундрума. Масса радиона, т. е. масса низшего скалярного возбуждения, для наблюдателя на бране с отрицательным натяжением в дан-

ном приближении может быть оценена как [52]

$$\mu_1^2 = 16bu^2 e^{-2uL} = \frac{2}{3} \hat{\kappa}^2 \phi_1^2 u^2 e^{-2uL}. \quad (200)$$

Необходимо отметить, что в обсуждаемой работе [52] для браны с отрицательным натяжением фундаментальный пятимерный масштаб считался планковским, т. е. использовалось несправедливое на этой бране соотношение (36). Соответственно, и остальные параметры модели считались величинами того же порядка. В результате при определенных соотношениях между ними формула (200), в принципе, может давать массу радиона порядка сотен ГэВ. Если же использовать правильное соотношение (39) для энергетических масштабов, то все параметры модели следует считать величинами порядка ТэВ. В этом случае при $u \sim k$ формула (200) дает очень маленькое значение массы радиона. Чтобы это значение массы было физически приемлемым, необходимо предположить, что $uL \ll 1$, т. е. используемое в настоящей работе приближение представляется физически более обоснованным.

Рассмотренные сценарии очень похожи на нестабилизированную RS1-модель, где четырехмерный мир на разных бранах имеет иерархические различия энергетических масштабов. Однако для некоторых значений параметров стабилизированной модели может сложиться ситуация, при которой некоторый единый четырехмерный энергетический масштаб будет справедлив для обеих бран. Эта ситуация описывается уравнением

$$A(0) = A(L), \quad (201)$$

из которого следует следующее значение параметра b :

$$b = \frac{kL}{1 - e^{-2uL}}. \quad (202)$$

При этом функция $A(y)$ (189) принимает вид

$$A(y) = kL f(\xi), \quad f(\xi) = \left\{ \xi - \frac{1 - e^{-2w\xi}}{1 - e^{-2w}} \right\}, \quad (203)$$

где $\xi = y/L$, $w = uL$. Мы выбираем константу C_1 в этом уравнении так, чтобы $A(0) = A(L) = 0$. При этом координаты галилеевы на обеих бранах одновременно, что следует из выражения (203). С этой точки зрения рассматриваемый случай может условно называться «симметричным», хотя функция $A(y)$ (рис. 1) не является симметричной относительно точки $y/L = 0,5$.

Функция $A(y)$ (203) имеет достаточно сложный вид, и точно решить уравнения для скалярного и тензорного полей не представляется возможным.

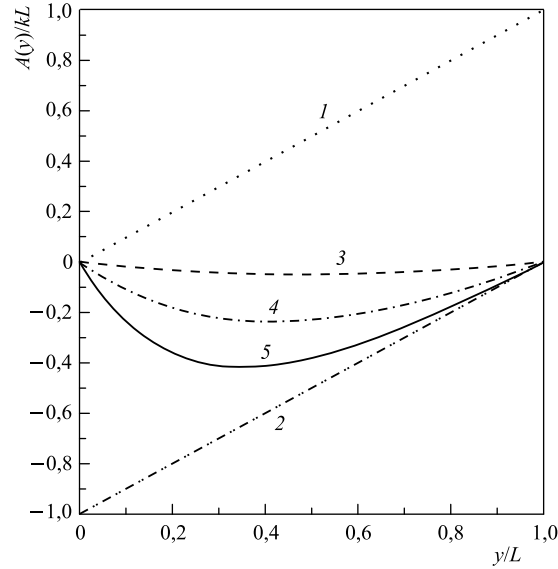


Рис. 1. Зависимость $A(y)/kL$ для различных случаев при некоторых значениях константы $w \equiv uL$: 1 — RS1-модель (наблюдатель на бране с положительным натяжением); 2 — RS1-модель (наблюдатель на бране с отрицательным натяжением); 3 — «симметричный» случай с $w = 0,2$; 4 — «симметричный» случай с $w = 1$; 5 — «симметричный» случай с $w = 2$

Поэтому мы опять воспользуемся приближением $uL \ll 1$. Разложим экспоненту в $A(y)$ до второго порядка по $2u|y| < 2uL \ll 1$:

$$A(y) = \tilde{k}|y| + 2b(uy)^2. \quad (204)$$

Уравнение (201) в этом приближении дает связь параметров модели

$$uL = -\frac{\tilde{k}}{2bu}. \quad (205)$$

Следует отметить, что в этом случае координаты $\{x^\mu\}$ в (136) являются галилеевыми на обеих бранах. При этом b не является малой величиной, а связь пятимерного и четырехмерного энергетических масштабов может быть оценена следующим образом:

$$\int_{-L}^L e^{-2A(y)} dy \simeq \sqrt{\frac{\pi}{b}} \frac{e^{(uL)^2 b}}{u}. \quad (206)$$

Масса радиона дается выражением (200). Связь энергетических масштабов в терминах массы радиона и расстояния между бранами имеет вид

$$M_{P1}^2 = 4\sqrt{2\pi} \frac{M^3}{\mu_1} \exp\left(\frac{\mu_1^2 L^2}{16}\right). \quad (207)$$

Если положить массу радиона $\mu_1 \sim 100$ ГэВ, то экспонента в (207) будет порядка единицы, при этом для того, чтобы получить $M_{P1} \sim 10^{19}$ ГэВ, нужно взять $M \sim 10^{12}-10^{13}$ ГэВ. Этот энергетический масштаб появляется, например, в модели великого объединения с группой $SO(10)$, нарушенной до $SU(4) \times SU(2) \times SU(2)$, как промежуточный масштаб, при котором нарушается кварк-лептонная симметрия $SU(4)$ [58].

Конечно, в этом сценарии можно положить фундаментальный пятимерный энергетический масштаб примерно равным 10 ТэВ, но в этом случае радион должен быть очень тяжелым, хотя низшие возбуждения тензорного поля остаются в пределах энергии 1 ТэВ.

Таким образом, когда в стабилизированной модели мира на бране многомерная гравитация рассматривается с точки зрения наблюдателя на нашей бране (с отрицательным натяжением), размер дополнительного измерения порядка $L \sim 1$ ТэВ⁻¹ получается естественным образом. Легчайшая скалярная мода — радион — в большинстве стабилизированных сценариев может иметь массу порядка или больше 100 ГэВ, при этом его КК-моды, так же как КК-моды гравитона, обычно имеют массы порядка 1 ТэВ. В большинстве сценариев фундаментальный многомерный гравитационный масштаб имеет порядок ТэВ. Однако в случае «симметричного» сценария этот масштаб может быть значительно больше и принимать значения в пределах $10^{12}-10^{13}$ ГэВ.

В дальнейшем в этой работе мы будем использовать приближение $uL \ll 1$ (ниже мы приведем аргументы в пользу того, что следует взять $uL \sim 0,1$), которое представляется достаточно общим и физически интересным [57].

Вследствие (196) в этом приближении уравнение (158) для тензорного поля фактически совпадает с уравнением (59) нестабилизированной модели при замене $k \rightarrow \tilde{k}$, и его можно решить аналитически. Решение уравнения (59) и соответствующие формулы для собственных значений и функций нулевых и ненулевых мод определяются выражениями (70) и (71) (см. также [34]). Таким образом, для получения решения в стабилизированном случае необходимо в формулах (70), (71) заменить k на \tilde{k} . В частности, в рассмотренном приближении нормированные функции ψ_0 , отвечающие нулевой массе $m_0 = 0$, имеют вид (см. также (169))

$$\psi_0(y) = N_0 e^{-2\tilde{k}|y|}, \quad N_0 = \frac{\tilde{k}^{1/2}}{(1 - e^{-2\tilde{k}L})^{1/2}} \quad (208)$$

в координатах, галилеевых на бране в $y = 0$, и

$$\psi_0(y) = N_0 e^{-2\tilde{k}|y|+2\tilde{k}L}, \quad N_0 = \frac{\tilde{k}^{1/2}}{(e^{2\tilde{k}L} - 1)^{1/2}} \quad (209)$$

в координатах, галилеевых на бране в $y = L$ (напомним, что координаты называются галилеевыми, если $g_{\mu\nu} = (-1, 1, 1, 1)$ [35]). Массы тензорных мод в (181) определяются из уравнения (66) при соответствующей замене k на \tilde{k} .

Рассмотрим теперь уравнение (171) для скалярного поля с граничными условиями (172), (173). С учетом (186) и (187) уравнение и граничные условия для $g_n(y)$ примут вид

$$g_n'' + 2A'g_n' - 2\frac{\phi''}{\phi'}g_n' - \frac{\hat{\kappa}^2(\phi')^2}{3}g_n = -\mu_n^2 e^{2A}g_n, \quad (210)$$

$$\beta_1^2 g_n' + \mu_n^2 e^{2A}g_n|_{y=+0} = 0, \quad (211)$$

$$\beta_2^2 g_n' - \mu_n^2 e^{2A}g_n|_{y=L-0} = 0. \quad (212)$$

Для явного нахождения собственных функций и собственных значений мы будем использовать приближение $uL \ll 1$, которое использовалось при решении уравнения для тензорного поля. Тогда имеем

$$uy = uL \frac{y}{L} < uL \ll 1.$$

Учитывая явный вид A и ϕ , уравнение (210) можно привести к виду

$$g_n'' + 2A'g_n' + 2ug_n' - \frac{\hat{\kappa}^2\phi_1^2}{3}u^2g_n + \mu_n^2 e^{2A}g_n = 0. \quad (213)$$

Будем решать это уравнение в координатах, галилеевых на бране в L . В этом случае $A(y)$ выражается через \tilde{k} (196) так:

$$A(y) = \tilde{k}(y - L).$$

Как мы уже установили, все собственные значения рассматриваемой задачи больше нуля. Поэтому введем новую переменную соотношением

$$z = \frac{\mu_n}{\tilde{k}} e^{\tilde{k}y - \tilde{k}L}, \quad \frac{\mu_n}{\tilde{k}} e^{-\tilde{k}L} \leq z \leq \frac{\mu_n}{\tilde{k}}.$$

В этой переменной уравнение переписется так:

$$\frac{d^2 g_n}{dz^2} + \left(3 + \frac{2u}{\tilde{k}}\right) \frac{1}{z} \frac{dg_n}{dz} + \left(1 - \frac{b^2}{z^2}\right) g_n = 0, \quad b^2 = \frac{\hat{\kappa}^2\phi_1^2 u^2}{3 \tilde{k}^2}. \quad (214)$$

Будем искать g_n в виде $g_n(z) = z^a t_n(z)$. Для t_n получим уравнение

$$\frac{d^2 t_n}{dz^2} + \left(2a + 3 + \frac{2u}{\tilde{k}}\right) \frac{1}{z} \frac{dt_n}{dz} + \frac{a(a + 2 + 2u/\tilde{k})}{z^2} t_n + \left(1 - \frac{b^2}{z^2}\right) t_n = 0. \quad (215)$$

Для того, чтобы привести это уравнение к виду уравнения Бесселя, нужно положить $a = -(1 + u/\tilde{k})$. В результате получим

$$\frac{d^2 t_n}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{dt_n}{dz} + \left(1 - \frac{\alpha^2}{z^2}\right) t_n = 0, \quad \alpha^2 = a^2 + b^2. \quad (216)$$

Общее решение этого уравнения есть

$$t_n(z) = AJ_\alpha(z) + BJ_{-\alpha}(z), \quad \alpha = \sqrt{a^2 + b^2},$$

причем функция $J_\alpha(z)$ регулярна в нуле, а функция $J_{-\alpha}(z)$ сингулярна. Соответственно,

$$g_n(z) = z^{-(1+u/\tilde{k})} (AJ_\alpha(z) + BJ_{-\alpha}(z)). \quad (217)$$

Граничные условия в терминах z перепишутся так:

$$\begin{aligned} \tilde{k}z^2 g_n + \beta_1^2 z \frac{dg_n}{dz} \Big|_{z_1 = (\mu_n/\tilde{k}) e^{-\tilde{k}L}} &= 0, \\ \tilde{k}z^2 g_n - \beta_2^2 z \frac{dg_n}{dz} \Big|_{z_2 = \mu_n/\tilde{k}} &= 0. \end{aligned} \quad (218)$$

Как мы уже обсуждали в случае нестабилизированной модели, для воспроизведения ньютоновской гравитации на бране в L при сильной пятимерной гравитации нужно взять $\tilde{k}L \sim 35$. В этом случае с большой точностью можно считать $z_1 = (\mu_n/\tilde{k}) e^{-\tilde{k}L} \approx 0$, и граничное условие в нуле позволяет опустить сингулярный член в $g_n(z)$, так как $B/A \sim e^{-2\tilde{k}L}$, и возникающие поправки пренебрежимо малы.

Итак, $g_n(z)$ с точностью до нормировки можно представить в виде

$$g_n(z) = z^{-(1+u/\tilde{k})} J_\alpha(z).$$

Второе граничное условие при $z_2 = \mu_n/\tilde{k}$ дает уравнение для спектра масс скалярных частиц:

$$\left(1 + \alpha + \frac{u}{\tilde{k}} + \frac{\tilde{k}z_2^2}{\beta_2^2}\right) J_\alpha(z_2) - z_2 J_{\alpha-1}(z_2) = 0. \quad (219)$$

Разлагая функции Бесселя при малых z_2 до второго члена и удерживая в уравнении члены порядка z_2^2 , для массы низшего возбуждения получим:

$$\mu_1^2/\tilde{k}^2 = \frac{4(-1 + \alpha - u/\tilde{k})(1 + \alpha)\beta_2^2}{4\tilde{k}(1 + \alpha) + (1 + \alpha - u/\tilde{k})\beta_2^2}. \quad (220)$$

В приближении малых u/\tilde{k} это сводится к

$$\mu_1^2 = \frac{2}{3}\tilde{k}^2\phi_1^2u^2\frac{\beta_2^2}{\beta_2^2 + 4\tilde{k}}, \quad (221)$$

что при $\beta_2^2 \rightarrow \infty$ совпадает с результатами работ [52, 57] в рассматриваемом приближении (см. (200)).

Следующие корни уравнения (219) имеют порядок \tilde{k}^2 , а асимптотическая формула общей теории [53] для больших n дает $\mu_n^2 = \pi^2\tilde{k}^2n^2$.

Нормированные функции $g_n(y)$ имеют вид

$$g_n(y) = A_n \left(\frac{\mu_n}{\tilde{k}} e^{\tilde{k}y - \tilde{k}L} \right)^{-(1+u/\tilde{k})} J_\alpha \left(\frac{\mu_n}{\tilde{k}} e^{\tilde{k}y - \tilde{k}L} \right), \quad (222)$$

$$A_n = \frac{\sqrt{2}\tilde{k}u\phi_1(\mu_n/\tilde{k})^{1+u/\tilde{k}} e^{-uL}}{3\mu_n J_\alpha(\mu_n/\tilde{k})} \times \left[\frac{1}{2\tilde{k}} \left[\left(\frac{\tilde{k} + u}{\mu_n} + \frac{\mu_n}{\beta_2^2} \right)^2 + \left(1 - \frac{\tilde{k}^2\alpha^2}{\mu_n^2} \right) \right] + \frac{1}{\beta_2^2} \right]^{-1/2}. \quad (223)$$

В условии нормировки опущены граничные члены в $y = 0$, которыми можно пренебречь в используемом нами приближении.

Итак, полное эффективное четырехмерное действие теории (181) содержит только физические четырехмерные поля и представляет собой сумму стандартных четырехмерных действий тензорных и скалярных полей. Для исследования эффектов, порождаемых этими четырехмерными полями, необходимо найти их взаимодействие с полями материи на бранах. Теперь, зная энергетические масштабы модели и волновые функции мод в дополнительном измерении, мы можем найти их константы связи с материей на бранах. Взаимодействие четырехмерных полей $b_{\mu\nu}^n(x)$ и $\varphi_n(x)$ с полями на бранах по-прежнему определяется взаимодействием флуктуаций пятимерного гравитационного поля $h_{\mu\nu}$ с материей на бранах, которое имеет вид (77).

Напомним, что в соответствии с (79), (80) в нестабилизированной модели взаимодействие с материей массивных тензорных мод и радиона на бране 1

экспоненциально подавлено по сравнению с гравитационным, и в рассматриваемом нами случае малого отклонения стабилизированной модели от нестабилизированной эта ситуация не может принципиально измениться. Поэтому мы не будем рассматривать теорию на бране 1, а сразу обратимся к бране 2, которую будем считать «нашей» браной.

Взаимодействие тензорных и скалярных полей на бране 2 в галилеевых координатах имеет вид, аналогичный (82):

$$S_{\text{int}} = \frac{\hat{k}}{2} \int_{B_2} \left(\psi_0(L) b_{\mu\nu}^0(x) T^{\mu\nu} + \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(L) b_{\mu\nu}^n(x) T^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} g_n(L) \varphi_n(x) T_{\mu}^{\mu} \right) dx. \quad (224)$$

Волновая функция нулевой моды (209), естественно, опять дает нам связь (198) между четырехмерным и пятимерным энергетическими масштабами. Константы связи массивных тензорных полей с материей остаются такими же, как и в нестабилизированной модели, т. е. порядка 1 ТэВ^{-1} . Что касается скалярных полей, то, как видно из (224), константа взаимодействия n -й моды скалярного поля с материей определяется значением волновой функции моды на бране и задается выражением

$$\epsilon_n = -\frac{A_n}{\sqrt{32M^3}} J_{\alpha} \left(\frac{\mu_n}{\tilde{k}} \right) \left(\frac{\mu_n}{\tilde{k}} \right)^{-(1+u/\tilde{k})}.$$

Для радиона эта константа взаимодействия принимает вид

$$\epsilon_1 \simeq -\sqrt{\frac{\tilde{k}}{24M^3}} \quad (225)$$

и при определенных выше значениях параметров оказывается порядка $|\epsilon_1|^{-1} \sim 5 \text{ ТэВ}$.

Взаимодействие поля радиона с материей, так же как и в нестабилизированной модели, оказывается намного сильнее гравитационного, однако благодаря наличию у радиона массы следует ожидать, что оно не скажется на законе Ньютона на больших расстояниях. Действительно, расчет гравитационного взаимодействия в ньютоновском приближении, аналогичный проведенному ранее для нестабилизированной модели, дает для ньютоновского потенциала точечного тела массой m (в приближении нулевых мод для тензорных гравитонов, т. е. для $r \gg L$) следующее выражение [59]:

$$V \approx -G_2 \left(1 + \frac{e^{2\tilde{k}L}}{3} e^{-\mu_1 r} \right) \frac{m}{r}, \quad (226)$$

которое заменяет формулу (126) в случае массивного радиона.

5. ФЕНОМЕНОЛОГИЯ МОДЕЛИ РЭНДАЛЛ–СУНДРУМА

Наиболее общим феноменологическим следствием стабилизированной модели Рэндалл–Сундрума является существование бесконечных башен калуца-клейновских (КК) тензорных и скалярных частиц, обладающих нулевыми квантовыми числами Стандартной модели и универсально взаимодействующих со всеми полями этой модели с константами связи порядка нескольких ТэВ^{-1} . Такие частицы могли бы рождаться с заметным сечением в $p\bar{p}$ -столкновениях на Тэватроне. В настоящее время на этом коллайдере проводятся поиски таких частиц, и найденное ограничение на массу первого КК-гравитона составляет от 560 до 1050 ГэВ в зависимости от величины отношения параметров \tilde{k}/M [60]. Если энергия Тэватрона находится ниже порога рождения даже низшего КК-возбуждения, то взаимодействия, порождаемые обменом виртуальными КК-возбуждениями, с большой точностью будут сводиться к контактным взаимодействиям полей СМ. В этом случае экспериментальная ситуация может напоминать ситуацию со слабыми взаимодействиями в то время, когда достижимые на ускорителях энергии были намного ниже порога рождения промежуточных векторных бозонов и слабые взаимодействия описывались четырехфермионным взаимодействием Ферми.

Использование контактных взаимодействий или эффективных операторов высших размерностей является хорошо известным модельно-независимым способом параметризации возможных отклонений от СМ [61–64]. Такие операторы вводятся руками в феноменологических расширениях СМ, при этом единственным ограничением на их вид обычно выступает требование сохранения симметрий последней. Присутствие вклада от таких операторов может быть проверено в различных процессах на адронных и лептонных коллайдерах с целью получения указаний на проявление физики за рамками СМ или ограничений на параметры эффективных лагранжианов (см., например, [65–68]). Однако при этом возникает большое число допустимых эффективных операторов, каждый из которых имеет собственную константу связи, что приводит к сложной задаче извлечения большого количества параметров из экспериментальных данных.

В то же время модели с дополнительными измерениями, рассматриваемые в области энергий ниже порога рождения КК-возбуждений, приводят к очень четким предсказаниям о структуре операторов, входящих в эффективный лагранжиан. В частности, возникающие в таких моделях контактные взаимодействия универсальны в том смысле, что они характеризуются только одной размерной константой. Экспериментальное наблюдение таких контактных взаимодействий могло бы быть сильным аргументом в пользу моделей с дополнительными измерениями.

Этот подход уже в какой-то мере обсуждался в связи с АДД-сценарием и с нестабилизированной моделью Рэндалл–Сундрума, а также в связи с плос-

кими универсальными дополнительными измерениями [69–71]. Мы будем использовать этот подход в рамках более реалистической стабилизированной модели Рэндалл–Сундрума, которая позволяет учесть также скалярную компоненту многомерной гравитации.

Для этого рассмотрим теорию с действием

$$S = S_{\text{eff}} + S_{\text{int}} + S_{\text{SM}}, \quad (227)$$

где S_{eff} определено в (181), S_{int} определено в (224), S_{SM} обозначает действие Стандартной модели, причем $T^{\mu\nu}$ в (224) есть ее тензор энергии-импульса. Нетрудно понять, что эта теория фактически представляет собой линейное приближение для модели Рэндалл–Сундрума, в котором также пренебрегается взаимодействием КК-мод между собой, которое считается более слабым, чем их взаимодействие с полями СМ.

Свободные поля в такой теории могут быть проквантованы стандартным способом, при этом пропагаторы КК-мод имеют вид

$$\begin{aligned} D_{\mu\nu,\rho\sigma}^k(p) &= -\frac{B_{\mu\nu,\rho\sigma}^k(p)}{p^2 + m_k^2 - i\epsilon}, \\ B_{\mu\nu,\rho\sigma}^k(p) &= \left(\eta_{\mu\rho} + \frac{p_\mu p_\rho}{m_k^2}\right) \left(\eta_{\nu\sigma} + \frac{p_\nu p_\sigma}{m_k^2}\right) + \\ &+ \left(\eta_{\mu\sigma} + \frac{p_\mu p_\sigma}{m_k^2}\right) \left(\eta_{\nu\rho} + \frac{p_\nu p_\rho}{m_k^2}\right) - \frac{2}{3} \left(\eta_{\mu\nu} + \frac{p_\mu p_\nu}{m_k^2}\right) \left(\eta_{\rho\sigma} + \frac{p_\rho p_\sigma}{m_k^2}\right), \\ D^k(p) &= -\frac{1}{p^2 + \mu_k^2 - i\epsilon}. \end{aligned} \quad (228)$$

$$(229)$$

Если мы рассматриваем теорию с действием (227) в области энергий или передач импульса намного меньших, чем массы калуца-клейновских возбуждений $b_{\mu\nu}^{(n)}$, $\varphi^{(n)}$, $n > 0$, то мы можем перейти к эффективной «низкоэнергетической» теории, которая может быть получена стандартной процедурой. А именно, мы можем опустить в пропагаторах тяжелых мод зависимость от импульса и проинтегрировать по этим модам в функциональном интеграле, построенном с действием (227). В результате мы получим лагранжианы контактных взаимодействий, порожденные тензорными степенями свободы:

$$L_T = \frac{1}{8M^3} \left(\sum_{n>0} \frac{\psi_n^2(L)}{m_n^2} \right) T^{\mu\nu} \Delta_{\mu\nu,\rho\sigma} T^{\rho\sigma}, \quad (230)$$

$$\Delta_{\mu\nu,\rho\sigma} = \frac{1}{2} B_{\mu\nu,\rho\sigma}^k(p)|_{p=0} = \frac{1}{2} \eta_{\mu\rho} \eta_{\nu\sigma} + \frac{1}{2} \eta_{\mu\sigma} \eta_{\nu\rho} - \frac{1}{3} \eta_{\mu\nu} \eta_{\rho\sigma}, \quad (231)$$

где $M^3 = 1/(2\hat{\kappa}^2)$, и скалярными степенями свободы:

$$L_S = \frac{1}{64M^3} \left(\sum_n \frac{g_n^2(L)}{\mu_n^2} \right) T_\mu^\mu T_\nu^\nu. \quad (232)$$

Эффективные константы связи $1/(8M^3) (\sum \psi_n^2(L)/m_n^2)$ и $1/(64M^3) \times (\sum g_n^2(L)/\mu_n^2)$ в этой модели могут быть примерно оценены следующим образом. В работе [48] было показано, что в стабилизированной модели Рэндалл–Сундрума удобнее использовать параметры $b = \hat{\kappa}^2 \phi_1^2/24$, $\tilde{k} = k - 2bu$ и L вместо $\phi_{1,2}$ и k . Также было показано, что при $uL \ll 1$ метрика стабилизированной модели аналогична метрике нестабилизированной модели с обратным антидеситтеровским радиусом \tilde{k} вместо k , и можно найти аналитические решения для волновых функций тензорных и скалярных мод и их спектры масс (фактически, когда $u \rightarrow 0$, фоновое скалярное поле становится константой, его флуктуации отщепляются от флуктуаций гравитационного поля и модель переходит в нестабилизированную модель Рэндалл–Сундрума).

В этой области значений параметров модели спектр тензорных возбуждений достаточно точно определяется уравнением $J_1(m_n/\tilde{k}) = 0$, и в приближении бесконечно жесткого потенциала на бране λ_2 получается $\psi_n|_{y=L} \sim \sqrt{\tilde{k}}$ (см. [48, 72]). В частности, сумма по тензорным модам в (230) может быть оценена как

$$\frac{1}{8M^3} \sum_{n>0} \frac{\psi_n^2(L)}{m_n^2} \approx \frac{1,82}{\Lambda_\pi^2 m_1^2},$$

где мы ввели константу связи первого КК-резонанса Λ_π и его массу m_1 :

$$\frac{1}{\Lambda_\pi} = -\frac{\psi_1(L)}{\sqrt{8M^3}}, \quad m_1 = 3,83\tilde{k}.$$

Следует заметить, что вклад первого КК-резонанса в эту сумму в точности равен $1/\Lambda_\pi^2 m_1^2$, а число 1,82 определяется нефакторизуемой геометрией пятимерного пространства-времени модели Рэндалл–Сундрума (например, для факторизуемой геометрии с пространством дополнительного измерения S^1 вместо него получилось бы $\sum_1^\infty 1/n^2 \equiv \zeta(2) = \pi^2/6$). Также нетрудно убедиться, что $-\psi_n(L)/\sqrt{8M^3} \approx 1/\Lambda_\pi$ для достаточно малых n .

В этой параметризации, которая часто используется в модели RS1, эффективный лагранжиан принимает вид

$$L_{\text{eff}} = L_T + L_S = \frac{1,82}{\Lambda_\pi^2 m_1^2} T^{\mu\nu} \tilde{\Delta}_{\mu\nu,\rho\sigma} T^{\rho\sigma}, \quad (233)$$

$$\tilde{\Delta}_{\mu\nu,\rho\sigma} = \frac{1}{2} \eta_{\mu\rho} \eta_{\nu\sigma} + \frac{1}{2} \eta_{\mu\sigma} \eta_{\nu\rho} - \left(\frac{1}{3} - \frac{\delta}{2} \right) \eta_{\mu\nu} \eta_{\rho\sigma}, \quad (234)$$

где константа δ учитывает вклад скалярных мод и будет вычислена ниже.

Для скалярного сектора спектр в этом приближении найден в [48] (где мы подставили m_1 вместо \tilde{k}):

$$\left(1 + \alpha + \frac{3,83u}{m_1}\right) J_\alpha\left(\frac{3,83\mu_n}{m_1}\right) - \frac{3,83\mu_n}{m_1} J_{\alpha-1}\left(\frac{3,83\mu_n}{m_1}\right) = 0,$$

где $\alpha = \sqrt{(1 + 3,83u/m_1)^2 + 8(3,83^2 bu^2/m_1^2)} \approx 1,8$, а волновая функция дается выражением

$$g_n|_{y=L} = 4\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\sqrt{bu^2 m_1}}{\sqrt{3,83\mu_n} \sqrt{1 - 8bu^2/\mu_n^2}}.$$

Следует отметить, что при заданных параметрах m_1 , Λ_π и L , описывающих тензорный сектор модели (и $\tilde{k}L \approx 35$, что необходимо для решения проблемы иерархии), спектр скалярных мод и их константы связи с материей также зависят от параметров u и b . Интересным свойством массивных мод (и тензорных, и скалярных) является то, что их массы и константы связи не зависят от размера дополнительного измерения L , по крайней мере, для достаточно малых n .

Для того, чтобы оценить сумму по скалярным модам в (232), мы должны конкретизировать параметры модели. Предположим, что масса низшей скалярной моды, радиона, порядка 2 ТэВ. Такая ситуация может иметь место, если $\Lambda_\pi \simeq 8$ ТэВ, $m_1 \simeq 3,83$ ТэВ (соответственно, $M \simeq 2$ ТэВ, $\tilde{k} \sim 1$ ТэВ), $u \simeq 0,003$ ТэВ, $bu^2 \simeq 0,28$ ТэВ². В этом случае сумма по скалярным модам в (232) оказывается равной

$$\sum_n \frac{g_n^2(L)}{\mu_n^2} \approx \frac{3,83}{m_1} (0,341 + 0,002) \approx \frac{1,314}{m_1},$$

где первый член описывает вклад радиона. Соответственно, мы получим $\delta \approx 0,7$.

Как мы уже отмечали, этот лагранжиан взаимодействия порождает вполне определенные процессы с полями СМ, которые определяются структурой ее тензора энергии-импульса $T^{\mu\nu}$. Последний представляет собой сумму тензоров энергии-импульса свободных полей СМ и членов с взаимодействием, которые пропорциональны константам связи СМ. Тензоры энергии-импульса свободных полей СМ квадратичны по полям и в явном виде приведены в работе [79].

Для свободных безмассовых полей след тензора энергии-импульса равен нулю и скалярные степени свободы не дают вклада в эффективное взаимодействие. Они могут давать вклад в это взаимодействие, только если учесть конформную аномалию безмассовых полей. Аномальная часть тензора энергии-

импульса оказывается равной

$$\Delta T_{\mu\nu} = \frac{\beta(g)}{6g} \left(\eta_{\mu\nu} - \frac{\partial_\mu \partial_\nu}{\square} \right) F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma},$$

что приводит к хорошо известному выражению для аномального следа этого тензора

$$\Delta T_{\mu}^{\mu} = \frac{\beta(g)}{2g} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma},$$

где $\beta(g)$ есть бета-функция. Структура этого аномального вклада в тензор энергии-импульса такова, что взаимодействие вследствие обмена тензорными частицами в (230) исчезает и остается только взаимодействие вследствие обмена скалярными частицами (232).

Однако это взаимодействие оказывается подавленным по сравнению с взаимодействием вследствие обмена тензорными частицами, потому что след тензора энергии-импульса пропорционален массе частицы, которая значительно меньше m_1 , и Λ_π . И наблюдение скалярной компоненты эффективного взаимодействия, скорее всего, возможно только вследствие смешивания полей Хиггса и радиона [74, 75].

Таким образом, в низшем неисчезающем порядке по константам связи СМ эффективный лагранжиан (233) представляет собой сумму четырехчастичных эффективных операторов (не только четырехфермионных, но и 2 фермиона и 2 векторные частицы, 4 векторные частицы и т.д.). Экспериментальное наблюдение процессов рождения, следующих из эффективного лагранжиана (233), или ограничений на их сечения позволяет оценить многомерный масштаб энергии M , если удастся получить теоретические оценки для произведения параметров m_1 и Λ_π в (233). Их отношение можно оценить исходя из того факта, что ширина первого КК-резонанса должна быть меньше его массы.

6. ДВУХЧАСТИЧНЫЕ ПРОЦЕССЫ С КАЛУЦА-КЛЕЙНОВСКИМИ ГРАВИТОНАМИ

Как мы уже выяснили, в низшем порядке по константам связи СМ эффективный лагранжиан включает в себя сумму различных четырехчастичных эффективных операторов (не только четырехфермионных, но и двухфермионно-двухбозонных и четырехбозонных), которые инвариантны относительно калибровочной группы СМ и приводят к хорошо определенной феноменологии. Этот лагранжиан содержит только три свободных параметра: Λ_π , m_1 и δ , причем Λ_π и m_1 параметризуют общую константу связи, а δ характеризует относительный вклад скалярного поля радиона (или набора скалярных полей,

как это имеет место в стабилизированной модели RS). Отметим некоторые интересные аспекты.

Прежде всего, в низшем порядке присутствуют нейтральные токи частиц только из одного и того же поколения СМ. Эти новые взаимодействия не приводят к дополнительным модам распада. Новые возможные распады частиц СМ, вытекающие из этого эффективного лагранжиана, могут возникнуть только в следующем порядке по константам связи СМ, когда в тензоре энергии-импульса появятся заряженные токи. Новые эффективные четырехчастичные операторы, получающиеся из тензора энергии-импульса, также не приводят к меняющимся ароматам нейтральным токам. В древесном приближении эффективный лагранжиан приводит к ряду процессов, которые появляются в СМ только на петлевом уровне: $gg \rightarrow l^+l^-$, $gg \rightarrow ZZ(W^+W^-)$, $e^+e^- \rightarrow gg$, $\gamma\gamma \rightarrow gg$ и т. д. В работе [79] приведены аналитические выражения для дифференциальных сечений этих процессов, учитывающие ненулевые массы частиц в конечном состоянии. В случае безмассовых фермионов эти формулы для полных и дифференциальных сечений процессов Дрелла–Яна $gg \rightarrow l^+l^-$ и $q\bar{q} \rightarrow l^+l^-$ находятся в полном согласии с формулами работ [76–78]. В этой работе также впервые получены аналитические формулы для процессов $gg \rightarrow ZZ$ и $q\bar{q} \rightarrow ZZ$, которые учитывают скалярные моды, массивные конечные состояния и интерференцию с полями СМ.

В случаях, когда сталкивающиеся глюоны рожают массивные конечные частицы, присутствует также вклад скалярного радиона, который пропорционален параметру δ^2 порядка 1 и коэффициенту аномального следа $(b(g_s)/2g_s)^2$. Мы приводим этот вклад в формулах, хотя численно он примерно в 100 раз меньше, чем вклад от тензорных мод.

Ниже, следуя работе [79], мы приведем результаты численных расчетов процессов Дрелла–Яна, потому что этот канал наиболее чувствителен к новой физике. Эти аналитические и численные расчеты, в том числе и моделирование фона СМ в мысленном эксперименте для ЛНС, были проведены с помощью версии пакета CompHEP [80], реализованного на основе пакета программ для символьных вычислений FORM [81]. В эту версию пакета CompHEP были встроены правила Фейнмана, получающиеся из найденного эффективного лагранжиана. Это позволяет использовать код для генерации событий и в дальнейшем для анализа данных в условиях реальных экспериментов.

С феноменологической точки зрения ситуация качественно напоминает ту, что получалась в АДД-сценарии и была рассмотрена в работе [76]. Соответствие между параметрами нашего исследования и работы [76] устанавливается следующим образом:

$$\frac{\Lambda_\pi^2 m_1^2}{0,91} = \frac{1}{4} \frac{M_s^4}{\lambda}.$$

В работе [82] было показано, что в модели RS1 обмен башней калуцклейновских гравитонов в области энергий ниже порога их рождения, аналогично случаю АДД-сценария, приводит к поднятию хвоста в распределении по инвариантной массе рожденных частиц. Для процессов Дрелла-Яна это продемонстрировано на рис. 2, 3. Подпроцесс $gg \rightarrow l^+l^-$ тоже дает вклад в процесс Дрелла-Яна, и он был учтен в наших численных расчетах. Как показано на рис. 6, этот вклад очень важен для LHC.

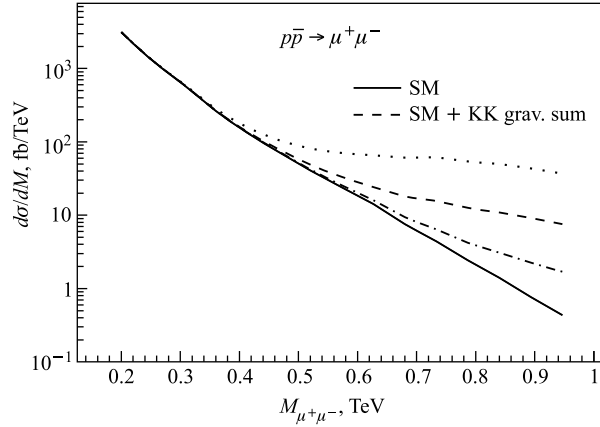


Рис. 2. Распределение по инвариантной массе дилептонов для значений параметра $0,91/\Lambda_\pi^2 m_\pi^2 \times 1 \text{ ТэВ}^4 = 0,66$ (штрихпунктирная линия), 1,82 (штриховая), 4 (пунктирная) для ускорителя Тэватрон

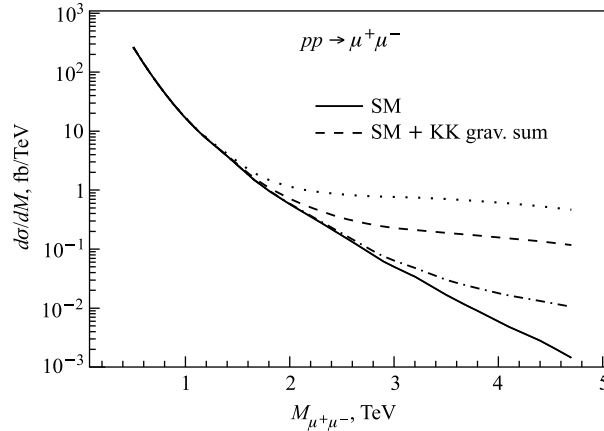


Рис. 3. Распределение по инвариантной массе дилептонов для значений параметра $0,91/\Lambda_\pi^2 m_\pi^2 \times 1 \text{ ТэВ}^4 = 0,0014$ (штрихпунктирная линия), 0,0046 (штриховая), 0,01 (пунктирная) для ускорителя LHC

Как будет показано ниже, даже в том случае, когда первый КК-резонанс лежит в доступной для детектирования области энергий, вклад от всех остальных (ненаблюдаемых) КК-состояний все равно должен учитываться.

Необходимо отметить, что в АДД-сценарии, наряду с отклонениями от предсказаний СМ для процессов типа рождения лептонных пар, должны существовать процессы с излучением реальных КК-мод. Последние не могут иметь места в модели RS1.

Используя стандартный критерий χ^2 , в котором учитываются систематические ошибки (характерное разрешение детектора, неопределенности, связанные с масштабами факторизации/нормировки КХД и функций распределения PDF, ошибки измерения электрослабых параметров и светимости) и статистические неопределенности распределения дилептонов СМ по инвариантной массе (см. экспериментальные данные, полученные на Тэватроне [83], и моделирование Монте-Карло для LHC [84]), мы оцениваем экспериментальные ограничения на параметр константы связи с достоверностью 95 %, которые либо уже достигнуты на коллайдере Тэватрон, либо ожидаются на Тэватроне и LHC при различных значениях интегральной светимости и приведены в таблице. Для вычисления средних значений СМ в нашем мысленном эксперименте мы использовали пакет программ CompHEP.

Экспериментальные ограничения на константу связи при 95 %-м уровне достоверности, которые могут быть достигнуты на ускорителях Тэватрон и LHC с использованием процессов Дрелла–Яна для некоторых значений интегральной светимости L

Тэватрон ($\sqrt{s} = 1,96$ ТэВ)		LHC ($\sqrt{s} = 14$ ТэВ)	
L, fb^{-1}	$\frac{0,91}{\Lambda_\pi^2 m_1^2}, \text{ТэВ}^{-4}$	L, fb^{-1}	$\frac{0,91}{\Lambda_\pi^2 m_1^2}, \text{ТэВ}^{-4}$
1	1,185	10	$0,238 \cdot 10^{-2}$
2	0,995	20	$0,203 \cdot 10^{-2}$
3	0,900	30	$0,184 \cdot 10^{-2}$
5	0,790	50	$0,164 \cdot 10^{-2}$
10	0,664	100	$0,140 \cdot 10^{-2}$

Ограничение коллайдера Тэватрон при интегральной светимости 1fb^{-1} , выраженное в терминах параметра M_s^{GRW} , который был введен в работе [85],

$$M_s^{\text{GRW}} = \left(\frac{1}{2\pi} \frac{0,91}{\Lambda_\pi^2 m_1^2} \right)^{-1/4}$$

приводит к значению $M_s^{\text{GRW}} (1 \text{fb}^{-1}) = 1,52$ ТэВ, что находится в хорошем соответствии с ограничением из упомянутой экспериментальной работы [83].

В последней строке таблицы приведены ограничения, соответствующие наибольшим рассмотренным значениям светимости коллайдеров:

$$\begin{aligned} \text{Тэватрон (10 фб}^{-1}\text{): } & \frac{0,91}{\Lambda_\pi^2 m_1^2} \times 1 \text{ ТэВ}^4 < 0,66, \\ \text{ЛНС (100 фб}^{-1}\text{): } & \frac{0,91}{\Lambda_\pi^2 m_1^2} \times 1 \text{ ТэВ}^4 < 0,0014. \end{aligned} \quad (235)$$

Рис. 4 и 5 демонстрируют распределения, отвечающие граничным значениям из формулы (235). Эти ограничения можно использовать для оценки ниже-

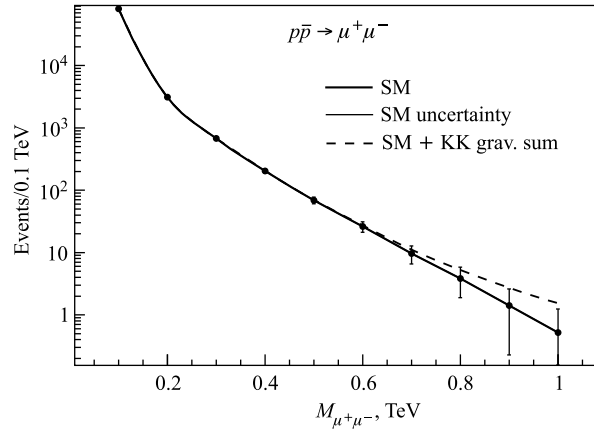


Рис. 4. Распределение по инвариантной массе дилептонов на уровне достоверности 95 % для параметра $0,91/\Lambda_\pi^2 m_1^2 \times 1 \text{ ТэВ}^4 = 0,66$ для ускорителя Тэватрон ($L=10 \text{ фб}^{-1}$)

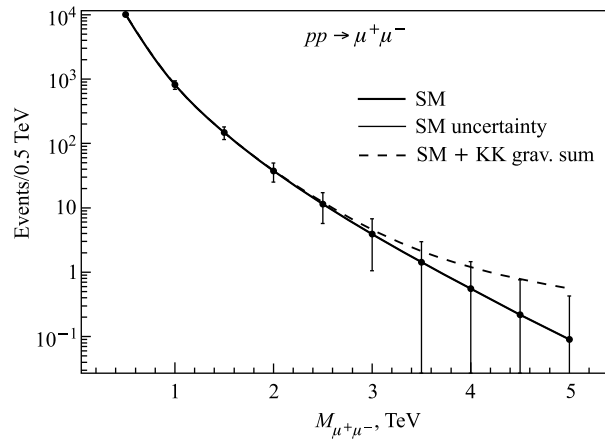


Рис. 5. Распределение по инвариантной массе дилептонов на уровне достоверности 95 % для параметра $0,91/\Lambda_\pi^2 m_1^2 \times 1 \text{ ТэВ}^4 = 0,0014$ для ускорителя ЛНС ($L=100 \text{ фб}^{-1}$)

го значения параметра Λ_π , исходя из требования, что ширина резонанса меньше его массы: $\Gamma_1 < m_1/\xi$, где ξ есть некоторое число, $\xi > 1$. Используя ограничения (235) и выражение для полной ширины гравитона [79], мы находим:

$$\frac{m_1^3}{\Lambda_\pi^2 \cdot 4\pi} \frac{97}{80} < \frac{m_1}{\xi},$$

что приводит к следующим ограничениям на параметр Λ_π :

$$\begin{aligned} \text{Тэватрон: } \Lambda_\pi &> 0,61 \cdot \xi^{1/4} \text{ ТэВ,} \\ \text{ЛНС: } \Lambda_\pi &> 2,82 \cdot \xi^{1/4} \text{ ТэВ, } \xi > 1. \end{aligned} \quad (236)$$

Особо подчеркнем характерную особенность при поисках КК-резонансов ниже порога рождения первой моды, которая состоит в заметном увеличении эффективной константы связи по сравнению с вкладом только первой моды, что является следствием суммирования вкладов КК-мод. Как было показано в предыдущем разделе, для рассмотренного случая стабилизированной модели получается следующий фактор усиления:

$$\sum_{n \neq 0} \frac{(\psi^{(n)}(L))^2}{m_n^2} \approx 1,82 \frac{(\psi^{(1)}(L))^2}{m_1^2}.$$

Это приводит к увеличению в $(1,82)^2 \approx 3,3$ раза сечений рождения (в случае одного плоского дополнительного измерения этот фактор равен $(1,64)^2 \rightarrow (\sum 1/n^2)^2 = (\pi^2/6)^2 \approx 2,7$, что по величине близко к случаю неплоского измерения).

Чтобы проиллюстрировать изменения в распределениях вследствие вкладов башен КК-гравитонов, мы провели моделирование для двух точек в пространстве параметров, таких, что для одной первый КК-резонанс находится в области прямого наблюдения, а для другой — вне ее.

Первая точка ($m_1 = 3,83$ ТэВ, $\Lambda_\pi = 8$ ТэВ, $\Gamma_1 = 0,08$ ТэВ) уже обсуждалась в разд. 5. Такой резонанс в модели RS1 (см. рис. 7) лежит близко к границе прямого наблюдения, ожидаемой для коллайдера ЛНС [82]. Для второй точки ($m_1 = 10$ ТэВ, $\Lambda_\pi = 14$ ТэВ, $\Gamma_1 = 0,5$ ТэВ) масса первого КК-резонанса близка к максимальной энергии коллайдера, и он непосредственно не наблюдаем. Для обеих точек мы можем использовать метод низкоэнергетических эффективных лагранжианов. Для этого мы должны просуммировать либо вклады всех КК-мод, либо всех мод, кроме первой, и таким образом учесть их влияние на хвост распределения. На рис. 8 и 9 видно, что дополнительная подложка от КК-башни увеличивает сечение рождения более чем в три раза в области инвариантных масс, меньших массы первого

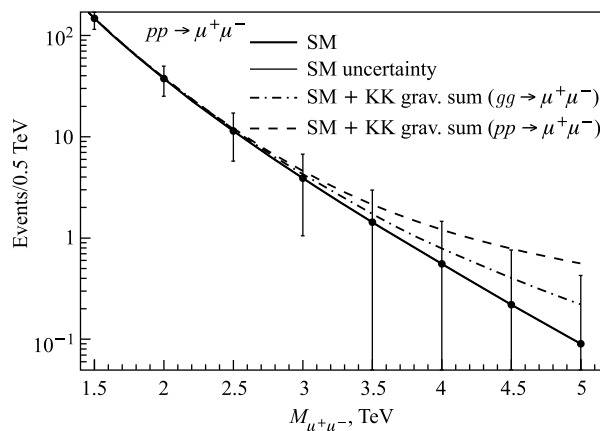


Рис. 6. Распределение по инвариантной массе дилептонов на уровне достоверности 95 % для ускорителя ЛНС. Штрихпунктирная линия отвечает сумме СМ + КК для процесса $gg \rightarrow \mu^+\mu^-$, штриховая — сумме СМ + КК для процесса $pp \rightarrow \mu^+\mu^-$

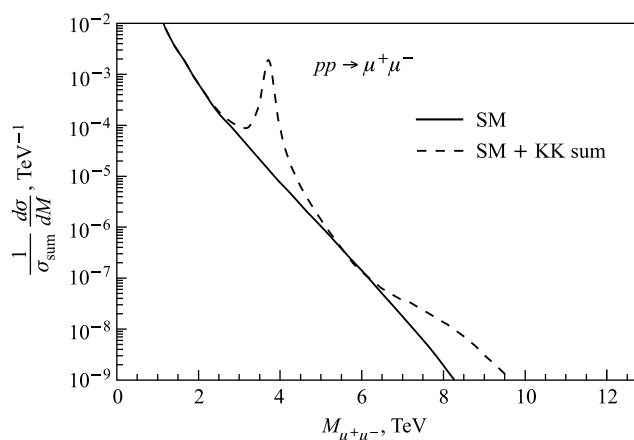


Рис. 7. Распределение по инвариантной массе дилептонов для СМ (сплошная линия) и для СМ плюс сумма КК-мод, включающая первый КК-резонанс с $M_{\text{res}} = 3,83$ ТэВ, $\Gamma_{\text{res}} = 0,08$ ТэВ, $\Lambda_{\pi} = 8$ ТэВ (штриховая линия) для ускорителя ЛНС

КК-резонанса. Ситуация совершенно меняется в области выше массы первого резонанса, где наряду с резонансным пиком появляется провал вследствие деструктивной интерференции между вкладом первого КК-резонанса и вкладом остальной КК-башни. Этот локальный минимум находится в точке $M_{\text{min}} \approx 1,5m_1$. Рост сечения после этого минимума сильно подавлен пар-

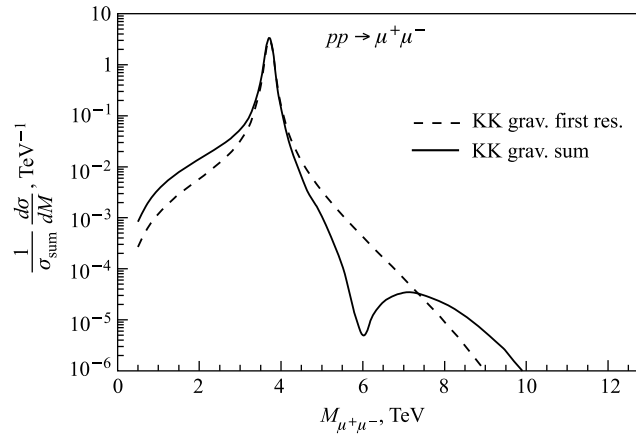


Рис. 8. Нормированное распределение по инвариантной массе дилептонов для первого КК-резонанса плюс сумма состояний КК-башни, начиная со второй моды (сплошная линия), и только для первого КК-резонанса (штриховая) при $M_{\text{res}} = 3,83$ ТэВ, $\Gamma_{\text{res}} = 0,08$ ТэВ, $\Lambda_{\pi} = 8$ ТэВ для ускорителя LHC

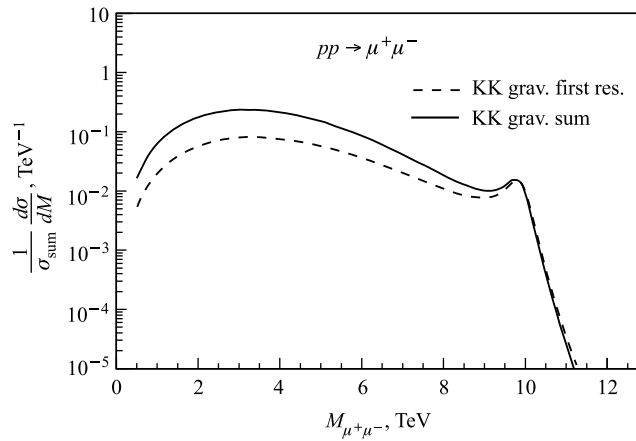


Рис. 9. Нормированное распределение по инвариантной массе дилептонов для суммы состояний КК-башни, начиная с первой моды (сплошная линия), и только для первого КК-резонанса (штриховая) при $M_{\text{res}} = 10$ ТэВ, $\Gamma_{\text{res}} = 0,5$ ТэВ, $\Lambda_{\pi} = 14$ ТэВ для ускорителя LHC

тонными структурными функциями, что приводит к дополнительному горбу в распределении по инвариантной массе. Но наблюдать этот горб экспериментально на фоне сечения СМ представляется маловероятным, как показано на рис. 7.

В заключение этого раздела подчеркнем еще раз, что для корректного поиска КК-резонансов при расчетах и моделировании сигнальных процессов необходимо не только учитывать интерференцию с амплитудой СМ (если она не исчезает) и вычислить NLO-поправки КХД [86], но и учесть вклад и интерференцию тех КК-мод, которые прямо не доступны для наблюдения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящем обзоре мы подробно рассмотрели все основные аспекты модели Рэндалл–Сундрума: геометрию искривленного пятимерного пространства анти-де Ситтера, физические степени свободы этой модели и ее энергетические масштабы, механизмы стабилизации размера дополнительного измерения и феноменологические следствия стабилизированной модели. Изложение результатов было построено на основе лагранжева описания линеаризованной гравитации, которое представляется наиболее последовательным подходом. Такое описание хорошо приспособлено для изучения калибровочной инвариантности линеаризованной теории, дает возможность выделить ее физические степени свободы, оказывается естественным образом связанным с наблюдателем на бране и поэтому позволяет легко найти канонически нормированные четырехмерные поля на каждой из бран, а также определить их константы связи с полями Стандартной модели. При этом очень важным является то, что для наблюдателей на разных бранах пятимерная гравитация выглядит поразному. Это, в частности, находит отражение в формулах (35), (38) для четырехмерных гравитационных постоянных на разных бранах и в сильном различии энергетических масштабов на них (36), (39). Следует особо отметить, что в очень многих работах формула (35), справедливая для браны с положительным натяжением, используется для браны с отрицательным натяжением, что приводит к ошибочному выводу о планковском энергетическом масштабе на этой бране.

Феноменологии нестабилизированной модели Рэндалл–Сундрума посвящено огромное число работ, причем в большинстве из них используется планковский энергетический масштаб на бране с отрицательным натяжением. Как мы подробно объяснили в разд. 3, физически адекватной может быть только стабилизированная модель Рэндалл–Сундрума, и только для такой модели имеет смысл рассматривать феноменологические следствия. Тем не менее в некоторых случаях феноменологические результаты, полученные в рамках нестабилизированной модели, могут иметь физический смысл. Это связано с тем, что, как мы показали в конце разд. 5, скалярные степени свободы не дают вклада во многие процессы, а в выражение для сечений входят массы тензорных резонансов и отношения констант связи, которые, хотя и опи-

связываются разными выражениями, численно оказываются теми же на обеих бранах.

Эти соображения относятся и к варианту стабилизированной модели Рэндалл–Сундрума, в которой, при сохранении всех констант модели неизменными, желаемая масса для поля радиона просто добавляется «руками». Такой вариант стабилизации представляется непоследовательным, поскольку он не учитывает существование бесконечной башни скалярных возбуждений, а произвольный выбор в его рамках констант связи и масс может оказаться противоречивым, так как они являются функциями параметров стабилизирующего скалярного поля.

На наш взгляд, единственной последовательной моделью Рэндалл–Сундрума является стабилизированная с помощью пятимерного скалярного поля модель с фундаментальным пятимерным масштабом порядка 1–10 ТэВ для наблюдателя на бране с отрицательным натяжением. И здесь мы рассмотрели феноменологические следствия именно такой стабилизированной модели, в которой пятимерный энергетический масштаб $M \sim 1$ ТэВ, а остальные параметры таковы, что метрика этой стабилизированной модели при массе радиона порядка 2 ТэВ близка к метрике нестабилизированной модели. Мы получили формулы для эффективного лагранжиана (233), причем для этого выбора параметров модели массы первого КК-гравитона и радиона оказываются вне непосредственно доступной области для Тэватрона и в этой области для ЛНС. Однако значение эффективной константы связи в (233) оказывается слишком маленьким для того, чтобы заметить отклонения от хвоста сечения СМ и исследовать массы КК-возбуждений ниже порога их рождения при энергиях коллайдера Тэватрон. Для ускорителя ЛНС массы первого КК-гравитона и радиона оказываются в области прямого наблюдения, и для того, чтобы правильно искать тензорные резонансы и моделировать хвосты распределений, необходимо суммировать вклады всех КК-мод и учитывать их интерференцию со вкладом резонансов. Следует отметить, что такое суммирование вкладов массивных тензорных мод также необходимо для моделирования фона при поисках легкого радиона, константа связи которого с полями СМ оказывается больше, чем в рассмотренном случае тяжелого радиона.

Благодарности. Авторы благодарны Ю. А. Кубышину и Ю. С. Михайлову, совместно с которыми был получен ряд представленных в обзоре результатов, а также Г. Ю. Богословскому, Ю. В. Грацу, А. Е. Пухову и В. А. Рубакову за полезные обсуждения затрагиваемых в обзоре проблем.

Работа была поддержана грантом НШ-4142.2010.2 по государственной поддержке ведущих научных школ Российской Федерации, государственным контрактом 02.740.11.0244 и грантами РФФИ 08-02-92499-НЦНИЛ_а, 08-02-91002-ЦЕРН_а. Работа М. С. была также поддержана грантом МК-3977.2011.2 Президента Российской Федерации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Nordström G.* Über die Möglichkeit, das elektromagnetische Feld und das Gravitationsfeld zu vereinigen // *Phys. Zeit.* 1914. V. 15. P. 504–506, e-Print: physics/0702221.
2. *Ravndal F.* Scalar Gravitation and Extra Dimensions. arXiv:gr-qc/0405030.
3. *Kaluza T.* Zum Unitätsproblem in der Physik // *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin. (Math. Phys.).* 1921. P. 966–972;
Калуца Т. К проблеме единства физики // Альберт Эйнштейн и теория гравитации: Сб. ст. М.: Мир, 1979. С. 529–534.
4. *Klein O.* Quantentheorie und fünfdimensionale Relativitätstheorie // *Zeit. Physik.* 1926. V. 37. P. 895–906.
5. *Rubakov V. A., Shaposhnikov M. E.* Extra Space-Time Dimensions: Towards a Solution to the Cosmological Constant Problem // *Phys. Lett. B.* 1983. V. 125. P. 139–143.
6. *Horava P., Witten E.* Heterotic and Type I String Dynamics from Eleven Dimensions // *Nucl. Phys. B.* 1996. V. 460. P. 506–524; hep-th/9510209.
7. *Lukas A. et al.* Universe as a Domain Wall // *Phys. Rev. D.* 1999. V. 59. P. 086001; hep-th/9803235.
8. *Arkani-Hamed N., Dimopoulos S., Dvali G.* The Hierarchy Problem and New Dimensions at a Millimeter // *Phys. Lett. B.* 1998. V. 429. P. 263–272.
9. *Randall L., Sundrum R.* Large Mass Hierarchy from a Small Extra Dimension // *Phys. Rev. Lett.* 1999. V. 83. P. 3370–3373.
10. *Рубаков В. А.* Большие и бесконечные дополнительные измерения // *УФН.* 2001. Т. 171, №9. С. 913–938;
Rubakov V. A. // *Phys. Usp.* 2001. V. 44. P. 871.
11. *Kubyshev Y. A.* Models with Extra Dimensions and Their Phenomenology. hep-ph/0111027.
12. *Arkani-Hamed N., Dimopoulos S., Dvali G.* Phenomenology, Astrophysics and Cosmology of Theories with Submillimeter Dimensions and TeV Scale Quantum Gravity // *Phys. Rev. D.* 1999. V. 59. P. 086004.
13. *Loren-Aguilar P. et al.* Time Variation of G and α within Models with Extra Dimensions // *Class. Quant. Grav.* 2003. V. 20. P. 3885–3896.
14. *Antoniadis I.* Physics with Large Extra Dimensions // *Eur. Phys. J. C.* 2004. V. 33. P. S914.
15. *Randall L., Sundrum R.* An Alternative to Compactification // *Phys. Rev. Lett.* 1999. V. 83. P. 4690–4693.
16. *Gherghetta T., Pomarol A.* Bulk Fields and Supersymmetry in a Slice of AdS // *Nucl. Phys. B.* 2000. V. 586. P. 141; arXiv:hep-ph/0003129.
17. *Appelquist T., Cheng H. C., Dobrescu B. A.* Bounds on Universal Extra Dimensions // *Phys. Rev. D.* 2001. V. 64. P. 035002.

18. *Rizzo T. G.* Probes of Universal Extra Dimensions at Colliders // *Phys. Rev. D.* 2001. V. 64. P. 095010.
19. *Macesanu C., McMullen C. D., Nandi S.* New Signal for Universal Extra Dimensions // *Phys. Lett. B.* 2002. V. 546. P. 253–260.
20. *Agashe K. et al.* LHC Signals from Warped Extra Dimensions // *Phys. Rev. D.* 2008. V. 77. P. 015003; arXiv:hep-ph/0612015.
21. *Agashe K., Perez G., Soni A.* Collider Signals of Top Quark Flavor Violation from a Warped Extra Dimension // *Phys. Rev. D.* 2007. V. 75. P. 015002; arXiv:hep-ph/0606293.
22. *Agashe K. et al.* Warped Gravitons at the LHC and Beyond // *Phys. Rev. D.* 2007. V. 76. P. 036006; arXiv:hep-ph/0701186.
23. *Fitzpatrick A. L. et al.* Searching for the Kaluza–Klein Graviton in Bulk RS Models // *JHEP.* 2007. V. 0709. P. 013; arXiv:hep-ph/0701150.
24. *Lillie B., Randall L., Wang L. T.* The Bulk RS KK-Gluon at the LHC // *JHEP.* 2007. V. 0709. P. 074; arXiv:hep-ph/0701166.
25. *Burdman G. et al.* A Strongly Coupled Fourth Generation at the LHC // *Phys. Rev. D.* 2009. V. 79. P. 075026; arXiv:0812.0368 [hep-ph].
26. *Dvali G. R., Gabadadze G., Senjanovic G.* Constraints on Extra Time Dimensions. arXiv:hep-ph/9910207.
27. *Chaichian M., Kobakhidze A. B.* Mass Hierarchy and Localization of Gravity in Extra Time // *Phys. Lett. B.* 2000. V. 488. P. 117–122.
28. *Li T. J.* Time-Like Extra Dimension and Cosmological Constant in Brane Models // *Phys. Lett. B.* 2001. V. 503. P. 163–172.
29. *Ellis G. F. R., Hawking S. W.* The Large Scale Structure of Space-Time. Cambridge Univ. Press, 1973. P. 131–134.
30. *Arkani-Hamed N., Porrati M., Randall L.* Holography and Phenomenology // *JHEP.* 2001. V. 0108. P. 017; arXiv:hep-th/0012148.
31. *Rattazzi R., Zaffaroni A.* Comments on the Holographic Picture of the Randall–Sundrum Model // *JHEP.* 2001. V. 0104. P. 021; arXiv:hep-th/0012248.
32. *Smolyakov M. N.* Submanifolds in Spacetime with Unphysical Extra Dimensions, Cosmology and Warped Brane World Models // *Class. Quant. Grav.* 2008. V. 25. P. 238003; Erratum // *Class. Quant. Grav.* 2010. V. 27. P. 109801.
33. *MacCallum M. A. H., Taub A. H.* The Averaged Lagrangian and High-Frequency Gravitational Waves // *Commun. Math. Phys.* 1973. V. 30. P. 153–169.
34. *Боос Э. Э. и др.* Эффективные лагранжианы модели Рэндалл–Сундрума // *ТМФ.* 2002. Т. 131, № 2. С. 216–230;
Boos E. E. et al. Effective Lagrangians of the Randall–Sundrum Model // *Theor. Math. Phys.* 2002. V. 131, No. 2. P. 629–640.
35. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теория поля. М.: Наука, 1988.

36. *Grishchuk L. P., Petrov A. N., Popova A. D.* Exact Theory of the (Einstein) Gravitational Field in an Arbitrary Background Space-Time // *Commun. Math. Phys.* 1984. V. 94. P. 379–396.
37. *Aref'eva I. Ya. et al.* Consistent Linearized Gravity in Brane Backgrounds // *Nucl. Phys. B.* 2000. V. 590. P. 273–286.
38. *Charmousis Ch., Gregory R., Rubakov V.* Wave Function of the Radion in a Brane World // *Phys. Rev. D.* 2000. V. 62. P. 067505.
39. *Csáki C. et al.* Cosmology of Brane Models with Radion Stabilization // *Ibid.* P. 045015.
40. *Davoudiasl H., Hewett J. H., Rizzo T. G.* Phenomenology of the Randall–Sundrum Gauge Hierarchy Model // *Phys. Rev. Lett.* 2000. V. 84. P. 2080–2083.
41. *Davoudiasl H., Hewett J. H., Rizzo T. G.* Experimental Probes of Localized Gravity: On and off the Wall // *Phys. Rev. D.* 2001. V. 63. P. 075004.
42. *Бейтмен Б., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. М.: Наука, 1974.
43. *Волобуев И. П., Смоляков М. Н.* Точные решения для линеаризованной гравитации в модели Рэндалл–Сундрума // *ТМФ.* 2004. Т. 139, № 1. С. 12–28;
Volobuev I. P., Smolyakov M. N. Exact Solutions for Linearized Gravity in the Randall–Sundrum Model // *Theor. Math. Phys.* 2004. V. 139, No. 1. P. 458–472.
44. *Garriga J., Tanaka T.* Gravity in the Brane World // *Phys. Rev. Lett.* 2000. V. 84. P. 2778–2781.
45. *Вейнберг С.* Гравитация и космология. Волгоград: Платон, 2000;
Weinberg S. Gravitation and Cosmology. John Wiley & Sons, 1972.
46. *Goldberger W. D., Wise M. B.* Modulus Stabilization with Bulk Fields // *Phys. Rev. Lett.* 1999. V. 83. P. 4922–4925.
47. *De Wolfe O. et al.* Modeling the Fifth-Dimension with Scalars and Gravity // *Phys. Rev. D.* 2000. V. 62. P. 046008.
48. *Boos E. E. et al.* Physical Degrees of Freedom in Stabilized Brane World Models // *Mod. Phys. Lett. A.* 2006. V. 21. P. 1431–1449.
49. *Боос Э. Э. и др.* Линеаризованная гравитация в модели Рэндалл–Сундрума со стабилизированным расстоянием между бранами // *ТМФ.* 2006. Т. 149, № 3. С. 339–353;
Boos E. E. et al. Linearized Gravity in the Randall–Sundrum Model with Stabilized Distance between Branes // *Theor. Math. Phys.* 2006. V. 149, No. 3. P. 1591–1603.
50. *Charmousis Ch., Gregory R., Rubakov V.* Wave Function of the Radion in a Brane World // *Phys. Rev. D.* 2000. V. 62. P. 067505.
51. *Toharia M.* The Radion and the Perturbative Metric in RS1 // *Mod. Phys. Lett. A.* 2004. V. 19. P. 37–48.
52. *Csaki C., Graesser M. L., Kribs G. D.* Radion Dynamics and Electroweak Physics // *Phys. Rev. D.* 2001. V. 63. P. 065002.

53. *Бабич В. М., Каплевич М. Б., Михлин С. Г.* Линейные уравнения математической физики. М.: Наука, 1964.
54. *Мухтаров О. Ш., Кадакал М.* Спектральные свойства одной задачи типа Штурма–Лиувилля с разрывным весом // Сиб. матем. журн. 2005. Т. 46, № 4. С. 860–875.
55. *Kofman L., Martin J., Peloso M.* Exact Identification of the Radion and Its Coupling to the Observable Sector // Phys. Rev. D. 2004. V. 70. P. 085015.
56. *Brandhuber A., Sfetsos K.* Nonstandard Compactifications with Mass Gaps and Newton’s Law // JHEP. 1999. V. 9910. P. 013.
57. *Boos E. E. et al.* Energy Scales in Stabilized Brane World Models // Nucl. Phys. B. 2005. V. 717. P. 19–33.
58. *Langacker P.* Grand Unified Theories and Proton Decay // Phys. Rep. 1981. V. 72. P. 185–385.
59. *Волобуев И. П., Михайлов Ю. С., Смоляков М. Н.* Ньютоновский предел в стабилизированной модели Рэндалл–Сундрума // ТМФ. 2008. Т. 156, № 2. С. 226–236; *Volobuev I. P., Mikhailov Yu. S., Smolyakov M. N.* Newtonian Limit in the Stabilized Randall–Sundrum Model // Theor. Math. Phys. 2008. V. 156, No. 2. P. 1159–1168.
60. *Abazov V. M. et al.* Search for Randall–Sundrum Gravitons in the Dielectron and Diphoton Final States with 5.4 fb^{-1} of Data from $p\bar{p}$ Collisions at $\sqrt{s} = 1.96 \text{ TeV}$ // Phys. Rev. Lett. 2010. V. 104. P. 241802.
61. *Weinberg S.* Phenomenological Lagrangians // Phys. A. 1979. V. 96. P. 327–340.
62. *Buchmuller W., Wyler D.* Effective Lagrangian Analysis of New Interactions and Flavor Conservation // Nucl. Phys. B. 1986. V. 268. P. 621–653.
63. *Burgess C. P., London D.* Uses and Abuses of Effective Lagrangians // Phys. Rev. D. 1993. V. 48. P. 4337–4351.
64. *Burgess C. P. et al.* Model Independent Global Constraints on New Physics // Phys. Rev. D. 1994. V. 49. P. 6115–6147.
65. *Whisnant K. et al.* Dimension-Six CP -Conserving Operators of the Third-Family Quarks and Their Effects on Collider Observables // Phys. Rev. D. 1997. V. 56. P. 467–478.
66. *Yang J. M., Young B. L.* Dimension-Six CP -Violating Operators of the Third-Family Quarks and Their Effects at Colliders // Ibid. P. 5907–5918.
67. *Boos E., Dudko L., Ohl T.* Complete Calculations of $Wb\bar{b}$ and $Wb\bar{b} + \text{Jet}$ Production at Tevatron and LHC: Probing Anomalous Wtb Couplings in Single Top Production // Eur. Phys. J. C. 1999. V. 11. P. 473–484.
68. *Ferreira P. M., Santos R.* Contributions from Dimension Six Strong Flavor Changing Operators to t anti- t , t Plus Gauge Boson, and t Plus Higgs Boson Production at the LHC // Phys. Rev. D. 2006. V. 74. P. 014006.
69. *Rizzo T. G.* Indirect Collider Tests for Large Extra Dimensions. hep-ph/9910255.
70. *Davoudiasl H., Hewett J. L., Rizzo T. G.* Bulk Gauge Fields in the Randall–Sundrum Model // Phys. Lett. B. 2000. V. 473. P. 43–49.

71. *Rizzo T. G.* Testing the Nature of Kaluza–Klein Excitations at Future Lepton Colliders // *Phys. Rev. D.* 2000. V. 61. P. 055005.
72. *Boos E. E. et al.* Effective Lagrangians for Physical Degrees of Freedom in the Randall–Sundrum Model // *Class. Quant. Grav.* 2002. V. 19. P. 4591–4606.
73. *Arnowitt R., Dent J.* Gravitational Forces in the Randall–Sundrum Model with a Scalar Stabilizing Field // *Phys. Rev. D.* 2007. V. 75. P. 064001.
74. *Giudice G. F., Rattazzi R., Wells J. D.* Gravitational Scalars from Higher-Dimensional Metrics and Curvature-Higgs Mixing // *Nucl. Phys. B.* 2001. V. 595. P. 250–276.
75. *Csaki C., Graesser M. L., Kribs G. D.* Radion Dynamics and Electroweak Physics // *Phys. Rev. D.* 2001. V. 63. P. 065002.
76. *Hewett J. L.* Indirect Collider Signals for Extra Dimensions // *Phys. Rev. Lett.* 1999. V. 82. P. 4765–4768.
77. *Gupta A. K., Mondal N. K., Raychaudhuri S.* Constraining Large Extra Dimensions Using Dilepton Data from the Tevatron Collider. hep-ph/9904234.
78. *Cheung K. M., Landsberg G. L.* Drell–Yan and Diphoton Production at Hadron Colliders and Low Scale Gravity Model // *Phys. Rev. D.* 2000. V. 62. P. 076003.
79. *Boos E. E. et al.* Testing Extra Dimensions below the Production Threshold of Kaluza–Klein Excitations // *Phys. Rev. D.* 2009. V. 79. P. 104013.
80. *Boos E. et al.* CompHEP 4.4 — Automatic Computations from Lagrangians to Events // *Nucl. Instr. Meth. A.* 2004. V. 534. P. 250–259.
81. *Vermaseren J. A. M.* Prospects of FORM // *Nucl. Instr. Meth. A.* 2006. V. 559. P. 1–5.
82. *Davoudiasl H., Hewett J. L., Rizzo T. G.* Phenomenology of the Randall–Sundrum Gauge Hierarchy Model // *Phys. Rev. Lett.* 2000. V. 84. P. 2080–2083.
83. *Abazov V. M. et al.* Search for Large Extra Spatial Dimensions in the Dielectron and Diphoton Channels in $p\bar{p}$ Collisions at $\sqrt{s} = 1.96$ TeV // *Phys. Rev. Lett.* 2009. V. 102. P. 051601.
84. *Bayatian G. L. et al.* CMS Technical Design Report. V. II: Physics Performance // *J. Phys. G.* 2007. V. 34. P. 995–1579.
85. *Giudice G. F., Rattazzi R., Wells J. D.* Quantum Gravity and Extra Dimensions at High-Energy Colliders // *Nucl. Phys. B.* 1999. V. 544. P. 3–38.
86. *Mathews P. et al.* Next-to-Leading Order QCD Corrections to the Drell–Yan Cross Section in Models of TeV-Scale Gravity // *Nucl. Phys. B.* 2005. V. 713. P. 333–377;
Mathews P., Ravindran V., Sridhar K. NLO-QCD Corrections to Dilepton Production in the Randall–Sundrum Model // *JHEP.* 2005. V. 0510. P. 031;
Mathews P., Ravindran V. Angular Distribution of Drell–Yan Process at Hadron Colliders to NLO-QCD in Models of TeV Scale Gravity // *Nucl. Phys. B.* 2006. V. 753. P. 1–15.