ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА
2012. Т. 43. ВЫП. 5

КЛИНОВЫЕ ДИСЛОКАЦИИ, ТРЕХМЕРНАЯ ГРАВИТАЦИЯ И ПРОБЛЕМА РИМАНА–ГИЛЬБЕРТА

М. О. Катанаев [*], *И. Г. Маннанов* [**]

Математический институт им. В. А. Стеклова, Москва

Предложено выражение для свободной энергии произвольного статического распределения клиновых дислокаций в твердом теле. Оно представляет собой евклидову версию $(1+2)$-мерной гравитации, взаимодействующей с произвольным числом точечных частиц. Показано, что решение уравнений равновесия приводит к задаче Коши для эффективных уравнений, определяющих форму дислокаций, а задача о нахождении метрики — к проблеме Римана–Гильберта для репера с $\mathbb{O}(3)$-представлением монодромии.

The expression for the free energy of arbitrary static distribution of wedge dislocations is proposed. It is the sum of the Euclidean action for $(1+2)$-dimensional gravity interacting with arbitrary number of point particles. We show that solution of the equilibrium equations reduces to the Cauchy problem for the effective equations defining the form of the dislocations, and the problem of finding the metric reduces to the Riemann–Hilbert problem for the triad with the $\mathbb{O}(3)$ representation of the monodromy.

PACS: 04.20.Cv

ВВЕДЕНИЕ

Клиновые дислокации являются простейшими линейными дислокациями в твердом теле. Вместе с тем их описание очень важно, так как многие дислокации, встречающиеся в природе, представляют собой суперпозицию клиновых дислокаций. Например, краевая дислокация — это диполь из двух клиновых дислокаций с углами дефицита противоположного знака.

В настоящее время фундаментальная теория дислокаций отсутствует. Одним из перспективных подходов к этой проблеме является геометрическая теория дефектов [1–4]. В этой модели наличие дефектов приводит к возникновению нетривиальной геометрии Римана–Картана, которая определяется нетривиальной метрикой и кручением в среде, рассматриваемой как топологически тривиальное многообразие. В статическом случае при отсутствии

[*] E-mail: katanaev@mi.ras.ru
[**] E-mail: iskmannanov@mail.ru

дисклинаций $\mathbb{SO}(3)$-связность равна нулю и уравнения равновесия сводятся к трехмерным евклидовым уравнениям Эйнштейна.

В последние годы в $(1+2)$-мерной гравитации, взаимодействующей с точечными частицами, произошло существенное продвижение в анализе уравнений движения. Поскольку в трехмерном случае гравитационные волны отсутствуют, то при заданном положении и скоростях частиц в фиксированный момент времени можно определить метрику, что позволяет, в принципе, исключить компоненты метрики и написать эффективные уравнения движения только для координат частиц. Соответствующий анализ уравнений движения проделан в лагранжевом [5, 6] и гамильтоновом [7] формализмах. При этом случай произвольного движения двух частиц решается явно. Было также показано, что уравнения движения $(1 + 2)$-мерной гравитации с точечными частицами сводятся к проблеме Римана–Гильберта [8]. При этом положения частиц в фиксированный момент времени определяют регулярные особенности фуксова уравнения, а их массы — характер ветвления (локальные показатели).

Для описания клиновых дислокаций предложено выражение для свободной энергии, которое равно сумме длин дислокаций. Это евклидова версия трехмерного действия точечных частиц в гравитации. Поскольку в трехмерном случае полный тензор кривизны определяется своим тензором Риччи, в силу уравнений равновесия он равен нулю вне дислокаций (отсутствие гравитационных волн). Если среду с дислокациями представить в виде трехмерного многообразия, которое слоится двумерными поверхностями, пересекающими линии дислокаций один раз, то задача о статическом распределении дислокаций сводится к эффективной задаче Коши для линий дислокаций, которая не содержит компонент метрики. Компоненты метрики определяются фуксовым уравнением на поверхности, которое соответствует решению проблемы Римана–Гильберта с заданным распределением особых точек (точки пересечения поверхности линиями дислокаций) и заданным представлением монодромии.

1. УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ

В геометрической теории дефектов [1–4] упругая среда с дислокациями представляет собой топологически тривиальное многообразие $\mathbb{M} \approx \mathbb{R}^3$, на котором задана геометрия Римана–Картана, т. е. нетривиальная метрика и кручение. Если дисклинации в среде отсутствуют, то кривизна равна нулю, а кручение имеет смысл поверхностной плотности вектора Бюргерса для дислокаций. В этом случае кручение определяется репером, который удовлетворяет трехмерным евклидовым уравнениям Эйнштейна.

Наличию дислокаций соответствует репер $e^a_\alpha(x)$, который, в свою очередь, определяет нетривиальную метрику. Поэтому декартовы координаты на $\mathbb{M}$ в общем случае отсутствуют. Индексы координат в среде с дислокациями будем обозначать греческими буквами x^α, $\alpha = 1, 2, 3$. В дальнейшем третья координата x^3 будет выделена, поэтому обозначим первые две координаты индексами из середины греческого алфавита: $\{x^\alpha\} = \{x^\mu, x^3\}$, где $\mu = 1, 2$.

Клиновая дислокация [2] представляет собой линейный дефект в среде, который описывается некоторой дифференцируемой кривой, осью дислокации, $\{q^\alpha(\tau)\} \in \mathbb{M}$, где $\tau \in \mathbb{R}$ — параметр вдоль кривой. Дислокация называется клиновой, если каждое сечение $\mathbb{M}$ двумерной поверхностью, перпендикулярной оси, имеет коническую сингулярность, расположенную в месте пересечения поверхности с осью. Случай прямолинейных параллельных клиновых дислокаций был рассмотрен в [1]. В общем случае дислокации могут быть искривлены и описываться системой евклидовых уравнений Эйнштейна и экстремалей. Мы предполагаем, что дислокации не пересекаются и расположены таким образом, что существует система координат, в которой вдоль всех дислокаций $\dot{q}^3 := dq^3/d\tau \neq 0$.

Каждый репер $e^a_\alpha(x)$ определяет на $\mathbb{M}$ метрику $g_{\alpha\beta} := e^a_\alpha e^b_\beta \delta_{ab}$, которая, в свою очередь, задает некоторую риманову геометрию. Действие (свободная энергия) для произвольного распределения клиновых дислокаций, по определению, представляет собой сумму евклидова действия Гильберта–Эйнштейна и длин каждой дислокации:

$$S = S_{\mathrm{HE}} + \sum_{\mathrm{I}=1}^{N} S_{\mathrm{I}} = \int d^3x\sqrt{g}R - \sum_{\mathrm{I}} m_{\mathrm{I}} \int d\tau \sqrt{\dot{q}^\alpha_{\mathrm{I}} \dot{q}^\beta_{\mathrm{I}} g_{\alpha\beta}}, \tag{1}$$

где $g := \det g_{\alpha\beta}$, R — трехмерная скалярная кривизна, построенная по метрике $g_{\alpha\beta}$, и $\dot{q}^\alpha_{\mathrm{I}} := dq^\alpha_{\mathrm{I}}/d\tau$. Индекс $\mathrm{I} = 1, \ldots, N$ нумерует дислокации. Каждая постоянная $m_{\mathrm{I}} := 4\pi\theta_{\mathrm{I}}$ характеризует дислокацию и пропорциональна углу дефицита $2\pi\theta_{\mathrm{I}}$ соответствующей конической сингулярности. В $(1 + 2)$-мерной гравитации это масса точечной частицы. Для клиновой дислокации знак m_{I} может быть произвольным: при $-1 < \theta_{\mathrm{I}} < 0$ клин вырезается, а при $\theta_{\mathrm{I}} > 0$ — вставляется.

Вариация действия (1) по метрике $g_{\alpha\beta}$ и координатам осей клиновых дислокаций $q^\alpha_{\mathrm{I}}(\tau)$ приводит с системе уравнений Эйнштейна и экстремалей

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R = -\frac{1}{2} T_{\alpha\beta}, \tag{2}$$

$$\ddot{q}^\alpha_{\mathrm{I}} = -\Gamma_{\beta\gamma}{}^\alpha \dot{q}^\beta_{\mathrm{I}} \dot{q}^\gamma_{\mathrm{I}}, \tag{3}$$

где

$$T_{\alpha\beta} = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{\mathrm{I}} \frac{m_{\mathrm{I}} \dot{q}_{\mathrm{I}\alpha} \dot{q}_{\mathrm{I}\beta}}{\dot{q}^3_{\mathrm{I}}} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{q}_{\mathrm{I}}) \tag{4}$$

— тензор напряжений для клиновых дислокаций, $\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}$ — символы Кристоффеля для метрики $g_{\alpha\beta}$, $\dot{q}_{\mathrm{I}\alpha} := \dot{q}_{\mathrm{I}}^{\beta} g_{\beta\alpha}$ и

$$\delta(\mathbf{x} - \mathbf{q}_{\mathrm{I}}) := \delta(x^1 - q_{\mathrm{I}}^1)\delta(x^2 - q_{\mathrm{I}}^2).$$

Как было отмечено выше, предполагаем, что дислокации в твердом теле расположены так, что $\dot{q}_{\mathrm{I}}^3 \neq 0$.

Вместо того чтобы явно решать уравнения равновесия (2), (3), поступим следующим образом. Представим трехмерное многообразие (упругую среду) в виде слоения двумерными поверхностями, каждая из которых пересекает линии дислокаций один раз. Допустим, что линии дислокаций произвольны и заданы. Тогда уравнения Эйнштейна (2) определяют все компоненты метрики на каждой из поверхностей. Будет показано, что эта задача сводится к решению фуксова уравнения соответствующей проблемы Римана–Гильберта с особыми точками в местах пересечения поверхностей с линиями дислокаций и $\mathbb{O}(3)$-группой монодромии. После решения этой задачи можно исключить компоненты метрики из рассмотрения, подставив их в выражение для свободной энергии. В результате возникнут эффективные уравнения равновесия для линий дислокаций, для которых можно поставить задачу Коши.

2. ПРОБЛЕМА РИМАНА–ГИЛЬБЕРТА

Рассмотрим уравнения Эйнштейна (2) для репера $e_{\alpha}^{a}(x)$, $a = 1, 2, 3$, который определяется обычным образом:

$$g_{\alpha\beta} = e_{\alpha}^{a} e_{\beta}^{b} \delta_{ab}, \tag{5}$$

где $\delta_{ab} = \mathrm{diag}\,(+\,+\,+)$ — евклидова метрика. При заданной метрике это соотношение определяет репер с точностью до локальных $\mathbb{O}(3)$-вращений.

В тех областях пространства, где тензор напряжений среды равен нулю, $T_{\alpha\beta} = 0$, равен нулю также тензор Риччи: $R_{\alpha\beta} = 0$. Поскольку в трехмерном пространстве полный тензор кривизны взаимно однозначно определяется своим тензором Риччи

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta\epsilon}\varepsilon_{\gamma\delta\zeta}R^{\epsilon\zeta},$$

где $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$ — полностью антисимметричный тензор третьего ранга, то он также обращается в нуль. Следовательно, пространство с дислокациями является плоским вне источников, т. е. в тех областях, где тензор Риччи равен нулю. Поэтому локально существуют три функции $y^a(x):\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, такие, что

$$e_{\alpha}^{a} = \partial_{\alpha} y^{a}. \tag{6}$$

Если дислокации отсутствуют, то отображение

$$\mathbb{R}^3 \ni x \mapsto y(x) \in \mathbb{R}^3$$

является биективным и функции y^a определяют глобальную декартову систему координат в $\mathbb{R}^3$. Если же дислокации присутствуют, то функции $y^a(x)$ определены только локально для тех регулярных точек, которые не лежат на линиях дислокаций. Для каждой регулярной точки функции y^a определены в односвязных областях, которые получаются из $\mathbb{R}^3$ после удаления некоторых разрезов по полуплоскостям, для которых оси дислокаций являются краями. Мы выбираем разрезы таким образом, чтобы они нигде не пересекались.

Функции y^a определены неоднозначно. Чтобы их фиксировать, зададим калибровочные условия следующим образом. Рассмотрим двумерную поверхность $\mathbb{S}$, вложенную в трехмерное евклидово пространство. Вложение $\mathbb{S} \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ определяется тремя функциями $y^a(u)$, где $u = \{u^\mu\}$, $\mu = 1, 2,$ — координаты на поверхности. Вложение определяет на $\mathbb{S}$ индуцированную метрику

$$g_{\mu\nu} := \partial_\mu y^a \partial_\nu y^b \delta_{ab}.$$

Предположим, что поверхность $\mathbb{S}$ имеет минимальную площадь, т. е. функции y^a минимизируют функционал

$$S = \int d^2u \sqrt{\det g_{\mu\nu}}. \tag{7}$$

В теории струн хорошо известно, что уравнения Эйлера–Лагранжа для данного функционала эквивалентны уравнениям Эйлера–Лагранжа для функционала

$$S_{\mathrm{P}} = \int d^2u \sqrt{h}\, h^{\mu\nu} \partial_\mu y^a \partial_\nu y^b \delta_{ab}, \tag{8}$$

где $h_{\mu\nu}(u)$ — новая дополнительная метрика на $\mathbb{S}$, которая рассматривается как независимое поле, по которому проводится варьирование, и $h := \det(h_{\mu\nu})$. Варьирование действия (8) по $h_{\mu\nu}$ приводит к равенству $h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$ (после преобразования Вейля), а варьирование по y^a — к следующей системе уравнений:

$$\partial_\mu (\sqrt{g} g^{\mu\nu} \partial_\nu y^a) = 0. \tag{9}$$

Теперь зафиксируем конформно плоскую калибровку. А именно, будем считать, что индуцированная двумерная метрика на поверхности $\mathbb{S}$ является конформно плоской:

$$g_{\mu\nu} = \mathrm{e}^{2\phi} \delta_{\mu\nu}, \quad \phi = \phi(u), \tag{10}$$

где $\mathrm{e}^{2\phi}$ — неизвестный конформный множитель и $\delta_{\mu\nu}$ — евклидова метрика.

В конформно плоской калибровке (10) и в комплексных координатах $z = u^1 + iu^2$ уравнение (9) сводится к уравнению Лапласа

$$\Delta y^a = 4\partial_{\bar z}\partial_z y^a = 0, \tag{11}$$

т. е. функции y^a являются гармоническими:

$$y^a(z, \bar z, x^3) = F^a(z, x^3) + G^a(\bar z, x^3) + H^a(x^3), \tag{12}$$

где $F^a(z)$ и $G^a(\bar z)$ — голоморфные и антиголоморфные функции для всех значений x^3. Функции $H^a(x^3)$ — произвольные достаточно гладкие вещественные функции от координаты x^3, которая рассматривается как параметр. Вещественность функций y^a влечет за собой ограничение на вид произвольных функций в решении (12):

$$G^a(\bar z) = \overline{F^a(z)} = \overline{F}^a(\bar z).$$

Предположим, что многообразие $\mathbb{M}$ представляет собой слоение семейством минимальных поверхностей $\mathbb{S}$, которое параметризуется параметром x^3. Выберем в качестве координат в некоторой окрестности регулярной точки координаты $(x^1, x^2, x^3) := (u^1, u^2, x^3)$. Поскольку мы уже использовали конформную калибровку при решении уравнения (9), то функции F^a и G^a не могут быть совершенно произвольными. На них необходимо наложить некоторые условия, которые будут приведены ниже.

Из выражений (12) следует, что z-компоненты репера являются, соответственно, голоморфными и антиголоморфными функциями:

$$e_z^a := \partial_z y^a = e_z^a(z, x^3) \text{ — голоморфные,}$$
$$e_{\bar z}^a := \partial_{\bar z} y^a = e_{\bar z}^a(\bar z, x^3) \text{ — антиголоморфные.}$$

Заметим, что в комплексных координатах вместо шести вещественных компонент репера e_1^a и e_2^a вводится три комплексных компоненты:

$$e_z^a = \frac{1}{2}e_1^a + \frac{1}{2i}e_2^a, \quad e_{\bar z}^a = \frac{1}{2}e_1^a - \frac{1}{2i}e_2^a.$$

Откуда следует равенство

$$e_{\bar z}^a = \overline{e_z^a}. \tag{13}$$

Метрика $g_{\mu\nu} = e_\mu^a e_\nu^b \delta_{ab}$ на сечениях $x^3 = \mathrm{const}$, по предположению, является конформно плоской (10). Это означает, что на функции F^a накладываются ограничения

$$\partial_z y^a \partial_z y^b \delta_{ab} = 0 \Leftrightarrow \partial_{\bar z} y^a \partial_{\bar z} y^b \delta_{ab} = 0. \tag{14}$$

Из этих равенств не следует, что вектор $\partial_z y^a$ равен нулю, так как его компоненты комплексны.

Таким образом, в качестве независимых переменных в уравнениях Эйнштейна достаточно выбрать e^a_z. Тогда компоненты $e^a_{\bar z}$ получаются из e^a_z комплексным сопряжением, а из уравнения (12) можно определить оставшиеся компоненты:

$$e^a_3 = C^a(x^3) + \partial_3 \int dz\, e^a_z + \partial_3 \int d\bar z\, e^a_{\bar z},$$

где интегрирование проводится вдоль произвольной кривой, не пересекающей линии дислокаций, и $C^a(x^3) := \partial_3 H^a$ — произвольные функции, которые фиксируются граничными условиями [8].

В геометрической теории дефектов предполагаем, что функции $e^a_z(z)$ аналитичны на всех сечениях $x^3 = \mathrm{const}$ за исключением изолированных регулярных особых точек $z_{\mathrm{I}}(x^3)$, в которых линии дислокаций пересекают поверхности $x^3 = \mathrm{const}$. В регулярных особых точках компоненты репера e^a_z ветвятся. В дальнейшем рассматриваем все сечения $x^3 = \mathrm{const}$ как сферы Римана $\overline{\mathbb{C}}$. Зафиксируем какую-нибудь неособую точку $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ и выберем в ней трехмерный вектор $e^a_z(z_0)$. Если аналитически продолжить этот вектор вдоль замкнутой кривой γ, которая стягивается в точку, то он не изменится в силу голоморфности. Если же петля γ_{I} охватывает одну из особых точек z_{I}, то вектор повернется на некоторый угол (угол дефицита соответствующей клиновой дислокации). Таким образом возникает представление фундаментальной группы (см., например, [9, 10]):

$$\pi\left(\overline{\mathbb{C}} \setminus \{z_1, \dots, z_N\}, z_0\right) \ni [\gamma] \mapsto S \in \mathbb{O}(3) \subset \mathbb{GL}(3, \mathbb{C}), \tag{15}$$

где $[\gamma]$ — класс гомотопически эквивалентных путей. Образующими фундаментальной группы являются классы гомотопически эквивалентных путей $[\gamma_{\mathrm{I}}]$, охватывающих одну особую точку z_{I}. Соответствующая матрица S_{I} является матрицей монодромии в точке z_{I}.

Допустим, что при каждом значении x^3 мы знаем расположение всех особых точек $z_{\mathrm{I}}(x^3)$ и их углы наклона $p_{\mathrm{I}}(x^3)$ к сечению $x^3 = \mathrm{const}$. Тогда поворот вектора e^a_z при обходе особой точки один раз против часовой стрелки однозначно определен (см. ниже). Тем самым определено представление образующих фундаментальной группы, т. е. матрицы монодромии в особых точках z_{I}. Таким образом, для определения компонент репера и, следовательно, метрики при заданных клиновых дислокациях возникает проблема Римана–Гильберта (см., например, [9, 10]): по заданному представлению монодромии построить фуксову систему из трех дифференциальных уравнений первого порядка (или одно фуксово дифференциальное уравнение третьего порядка) с заданным представлением монодромии. После построения данной системы ее необходимо решить и тем самым найти все компоненты репера для произвольного распределения дислокаций. Затем данное решение следует подставить в уравнения, определяющие дислокации. Таким образом, возникают эффективные уравнения для определения формы дислокаций в твердом теле, которые вообще не содержат компонент метрики.

Рассматриваемая ситуация такая же, как и в механике Ньютона. Движение частиц, взаимодействующих посредством гравитационного поля, определяется системой обыкновенных дифференциальных уравнений, которые не содержат гравитационный потенциал. После нахождения траекторий частиц в каждый момент времени возможно определение гравитационного потенциала путем решения уравнения Пуассона с заданными источниками. В рассматриваемом случае после определения формы дислокаций возникает проблема Римана–Гильберта для репера, который соответствует гравитационному потенциалу.

Теперь определим матрицу монодромии в особой точке z_{I}. При создании клиновой дислокации обход по замкнутому контуру вокруг линии дислокации z_{I} приводит к повороту репера e_z^a на соответствующий угол:

$$\tilde{e}_z^a = e_z^b S_{\mathrm{I}b}^a, \tag{16}$$

где

$$S_{\mathrm{I}b}^a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\pi\theta_{\mathrm{I}} & \sin 2\pi\theta_{\mathrm{I}} \\ 0 & -\sin 2\pi\theta_{\mathrm{I}} & \cos 2\pi\theta_{\mathrm{I}} \end{pmatrix} \tag{17}$$

и θ_{I} — угол дефицита I-й клиновой дислокации. Отсюда следует, что матрица вращений $S_{\mathrm{I}a}^b$ является матрицей монодромии для вектора e_z^a в точке z_{I}, если начальная точка лежит вблизи данной особой точки. Знание матрицы монодромии позволяет определить локальные показатели асимптотик $\beta_{a\mathrm{I}}$ по формуле [10]

$$\beta_{a\mathrm{I}} = \frac{1}{2\pi i}\ln\lambda_{a\mathrm{I}},$$

где $\lambda_{a\mathrm{I}}$, $a = 1, 2, 3$, — три собственных числа матрицы монодромии (17). Собственные числа матрицы монодромии нетрудно вычислить: $\{\lambda_{a\mathrm{I}}\} = \{1, \exp(2\pi i\theta_{\mathrm{I}}), \exp(-2\pi i\theta_{\mathrm{I}})\}$. Поскольку все собственные числа различны и не отличаются на натуральное число, то рассматриваемый случай нерезонансный. Отсюда находятся локальные показатели асимптотик:

$$\{\beta_{a\mathrm{I}}\} = \{0, \theta_{\mathrm{I}}, -\theta_{\mathrm{I}}\}. \tag{18}$$

Асимптотика компонент репера e_z^a вблизи особой точки z_{I} определяется локальными показателями

$$e_z^a\big|_{z\to z_{\mathrm{I}}} \simeq (z - z_{\mathrm{I}})^{\beta_{a\mathrm{I}}} B^a(z),$$

где B^a — некоторая голоморфная функция, такая, что $B^a(z_{\mathrm{I}}) \neq 0$. Вектор Бюргерса b_{I} клиновой дислокации в точке z_{I} определяется интегралом по замкнутому контуру, охватывающему соответствующую особую точку. Интеграл по бесконечно малой окружности радиуса r вокруг z_{I} легко оценить:

$$b_{\mathrm{I}}^a := \oint\limits_{z_{\mathrm{I}}} dz\, e_z^a \sim \frac{1}{\beta_{a\mathrm{I}}+1} r^{2\pi(\beta_{a\mathrm{I}}+1)}.$$

Поскольку для клиновой дислокации при отрицательных углах дефицита $\lim\limits_{z\to z_{\mathrm{I}}} b_{\mathrm{I}}^a = 0$, отсюда вытекает ограничение на возможный угол дефицита: $\theta_{\mathrm{I}} > -1$. Это ограничение носит простой геометрический смысл: из плоскости нельзя вырезать угол, превышающий 2π.

Для компонент репера $e_z^a(z)$ при заданном представлении монодромии можно записать фуксову систему из трех дифференциальных уравнений (или одно уравнение третьего порядка) [9, 10], которую необходимо решить. Эта задача сложна, и мы оставим ее для будущего анализа. Решения фуксовой системы определяют репер при произвольном расположении дислокаций. После этого данное решение можно подставить в уравнения (3). Решение соответствующей задачи Коши позволяет найти форму дислокаций.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей статье предложено выражение для свободной энергии произвольно расположенных клиновых дислокаций. Показано, что компоненты метрики можно полностью исключить из рассмотрения, решив уравнения равновесия. При каждом значении координаты x^3, которая рассматривается в качестве параметра эволюции, задача нахождения компонент репера сводится к решению фуксова уравнения.

Заметим, что задача о произвольном распределении клиновых дислокаций, насколько известно авторам, не ставится в рамках обычной теории упругости. Если задать форму дислокаций, то в простейших случаях можно определить тензор деформации (компоненты метрики), решив уравнения теории упругости с соответствующими граничными условиями. Однако не ясно, как при этом поставить задачу для определения формы самих дислокаций. В рамках геометрической теории дефектов задача одновременного нахождения формы дислокаций и тензора деформаций ставится естественным образом. Эта задача сложна, в настоящее время не решена и требует дальнейшего исследования.

Авторы выражают искреннюю благодарность И. В. Воловичу за обсуждение статьи и полезные замечания. Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (гранты 11-01-00828-а и 11-01-12114-офи_м), программы поддержки ведущих научных школ (грант НШ-2928.2012.1) и программы «Современные проблемы теоретической математики» Российской академии наук.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Katanaev M. O., Volovich I. V.* // Ann. Phys. 1992. V. 216. P. 1–28.
2. *Катанаев М. О.* // ТМФ. 2003. Т. 135. С. 338–352.
3. *Катанаев М. О.* // ТМФ. 2004. Т. 138. С. 193–208.
4. *Катанаев М. О.* // УФН. 2005. Т. 175. С. 705–733.
5. *Bellini A., Ciafaloni M., Valtancoli P.* // Phys. Lett. B. 1996. V. 357. P. 532–538.
6. *Bellini A., Ciafaloni M., Valtancoli P.* // Nucl. Phys. B. 1996. V. 454. P. 449–463.
7. *Menotti P., Seminara D.* // Ann. Phys. 2000. V. 279. P. 282–310.
8. *Welling M.* // Class. Quant. Grav. 1996. V. 13. P. 653–679.
9. *Голубев В. В.* Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. 2-е изд. М.; Л.: Гос. изд-во техн.-теор. лит., 1950.
10. *Болибрух А. А.* Фуксовы дифференциальные уравнения и голоморфные расслоения. М.: МЦНМО, 2000.