

ЭКЗОТИЧЕСКИЕ СОСТОЯНИЯ  
И РЕДКИЕ РАСПАДЫ  $B_s$ -МЕЗОНА  
В КОВАРИАНТНОЙ КВАРКОВОЙ МОДЕЛИ

*М. Динейхан*<sup>1</sup>, *М. А. Иванов*<sup>2</sup>, *Г. Г. Сайдуллаева*<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан

<sup>2</sup> Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

ВВЕДЕНИЕ	1452
КОВАРИАНТНАЯ МОДЕЛЬ КВАРКОВ	1459
Лагранжиан и условие связности	1459
Инфракрасный конфайнмент	1466
ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ С ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫМ ПОЛЕМ	1470
Введение электромагнитного взаимодействия	1470
Лагранжиан адрон-фотон-кваркового взаимодействия, линейный по электромагнитному полю	1471
Калибровочная инвариантность матричного элемента $V \rightarrow \gamma$ -перехода	1473
ПАРАМЕТРЫ МОДЕЛИ	1476
СИЛЬНЫЕ И РАДИАЦИОННЫЕ РАСПАДЫ	
$X(3872)$ -МЕЗОНА	1479
Сильные распады $X \rightarrow J/\psi + 2\pi(3\pi)$ и $X \rightarrow D + \bar{D} + \pi$	1479
Влияние $X$ -мезона на поведение сечения диссоциации $J/\psi$ -мезона	1483
Однофотонный распад $X \rightarrow \gamma + J/\psi$	1486
ФОРМФАКТОРЫ ДЛЯ ПОЛУЛЕПТОННЫХ, НЕЛЕПТОННЫХ И РЕДКИХ РАСПАДОВ $B(B_s)$ -МЕЗОНА	1491
Переходные формфакторы	1491
Нелептонные распады $B_s$ -мезона	1497
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	1501
Приложение	
СПИРАЛЬНЫЕ И МУЛЬТИПОЛЬНЫЕ АМПЛИТУДЫ В РАСПАДЕ $X(3872) \rightarrow \gamma + J/\psi(\rightarrow \ell^+\ell^-)$	1502
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	1505

## ЭКЗОТИЧЕСКИЕ СОСТОЯНИЯ И РЕДКИЕ РАСПАДЫ $B_s$ -МЕЗОНА В КОВАРИАНТНОЙ КВАРКОВОЙ МОДЕЛИ

*М. Динейхан<sup>1</sup>, М. А. Иванов<sup>2</sup>, Г. Г. Сайдуллаева<sup>1</sup>*

<sup>1</sup> Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан

<sup>2</sup> Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Исследована возможность интерпретации подобного чармонию  $X(3872)$ -мезона как связанного состояния четырех кварков — тетракварка. Для описания его свойств использована ковариантная кварковая модель с инфракрасным конфинментом. Вычислены ширины сильных распадов  $X(3872)$ -мезона:  $X \rightarrow J/\psi + 2\pi(3\pi)$  и  $X \rightarrow \bar{D}^0 + D^0 + \pi^0$ , которые в основном идут через промежуточные  $\rho(\omega)$ - и  $D^*$ -состояния, лежащие вне массовой поверхности. Для разумных значений параметра  $\Lambda_X$ , характеризующего размер  $X(3872)$ -мезона, найдено согласие с экспериментальными данными. Обсуждено возможное влияние  $X(3872)$  на поведение полного сечения реакции диссоциации  $J/\psi$ -мезона легкими частицами.

В рамках данного подхода введено взаимодействие с электромагнитным полем с помощью  $P$ -экспоненты Мандельштама. Вычислен матричный элемент однофотонного перехода  $X \rightarrow \gamma + J/\psi$ , доказана его калибровочная инвариантность. Показано, что данный матричный элемент описывается двумя независимыми лоренц-структурами, являющимися амплитудами  $E1$ - и  $M1$ -переходов. Вычислены ширина распада  $X \rightarrow \gamma + J/\psi$  и продольные/поперечные составляющие  $J/\psi$ -мезона в этом распаде. Найдено согласие с имеющимися экспериментальными данными. Также вычислены спиральные и мультипольные амплитуды данного процесса и получена их связь с ковариантными амплитудами с помощью метода ковариантных проекций.

В свете интереса к  $CP$ -нарушению в системе  $B_s - \bar{B}_s$ , которое наблюдается экспериментально, а также к связанным с этой проблемой нелептонным распадам  $B_s$ -мезона в  $D - \bar{D}$ -пары и подавленному по цвету распаду  $B_s \rightarrow J/\psi\phi$ , изучены свойства  $B_s$ -мезона в развитом подходе. Во-первых, с использованием экспериментальных данных по двухчастичным радиационным распадам псевдоскалярных и векторных мезонов, а также экспериментальных данных и результатов решеточных вычислений для констант лептонных распадов выполнен глобальный фит и определены параметры модели. Затем вычислены формфакторы переходов  $B(B_s) \rightarrow P(V)$  во всей кинематической области квадрата переданного импульса. Полученные результаты использованы для вычисления ширин нелептонных распадов  $B_s$ -мезона в  $D_s^- D_s^+$ ,  $D_s^{*-} D_s^+$  и  $D_s^{*-} D_s^{*+}$ . Подробно проанализирован распад  $B_s \rightarrow J/\psi\phi$ . Хотя данная мода подавлена по цвету, этот распад весьма важен для поиска возможных проявлений новой физики, приводящих к  $CP$ -нарушению в  $B_s - \bar{B}_s$ -системе.

We explore the consequences of treating the  $X(3872)$  meson as a tetraquark bound state. As dynamical framework we employ a covariant quark model which includes infrared confinement in an effective way. We calculate the decay widths of the observed channels  $X \rightarrow J/\psi + 2\pi(3\pi)$  and  $X \rightarrow \bar{D}^0 + D^0 + \pi^0$  via the intermediate off-shell states  $X \rightarrow J/\psi + \rho(\omega)$  and  $X \rightarrow \bar{D} + D^*$ . For reasonable values of the size parameter  $\Lambda_X$  of the  $X(3872)$ , we find consistency with the available experimental data. We also discuss the possible impact of the  $X(3872)$  in an  $s$ -channel dominance description of the  $J/\psi$  dissociation cross section.

We further analyze its one-photon decay  $X \rightarrow \gamma + J/\psi$ . To introduce the electromagnetic interactions we gauge a nonlocal effective Lagrangian describing the interaction of the  $X(3872)$  meson with its four constituent quarks by using the  $P$ -exponential path-independent formalism. We calculate the matrix element of the transition  $X \rightarrow \gamma + J/\psi$  and prove its gauge invariance. We evaluate the  $X \rightarrow \gamma + J/\psi$  decay width and the longitudinal/transverse composition of the  $J/\psi$  in this decay. For a reasonable value of the size parameter of the  $X(3872)$  meson, we find consistency with the available experimental data. We also calculate the helicity and multipole amplitudes of the process, and describe how they can be obtained from the covariant transition amplitude by covariant projection.

In the wake of the great interest to the problem of  $CP$  violation in the  $B_s - \bar{B}_s$  system which was recently observed, the decays of  $B_s$  into  $D - \bar{D}$  and color suppressed decay  $B_s \rightarrow J/\psi \phi$  have attracted much attention from both theorists and experimentalists. We provide new values for the model parameters of the covariant quark model (with built-in infrared confinement) in the meson sector by a fit to the leptonic decay constants and a number of electromagnetic decays. We then evaluate, in a parameter-free way, the form factors of the  $B(B_s) \rightarrow P(V)$  transitions in the full kinematical region of momentum transfer. As an application of our results, we calculate the widths of the nonleptonic  $B_s$ -decays into  $D_s^- D_s^+$ ,  $D_s^{*-} D_s^+$  +  $D_s^- D_s^{*+}$  and  $D_s^{*-} D_s^{*+}$ . These modes give the largest contribution to  $\Delta\Gamma$  for the  $B_s - \bar{B}_s$  system. We also treat the nonleptonic decay  $B_s \rightarrow J/\psi \phi$ . Although this mode is color-suppressed, this decay has important implications for the search for possible  $CP$ -violating new physics effects in  $B_s - \bar{B}_s$  mixing.

PACS: 12.39.Ki; 13.25.Ft; 13.25.Jx; 14.40.Rt; 13.20.He

## ВВЕДЕНИЕ

Спектр чармония может быть вычислен в рамках нерелятивистской кварковой модели. Все предсказанные состояния чармония ниже порога рождения частиц с открытым чармом установлены экспериментально. Выше порога найдено только пять состояний: одно из них, названное  $X(3872)$ -мезоном, достаточно хорошо установлено и наблюдалось в нескольких различных реакциях несколькими независимыми коллаборациями. Новые состояния, в частности  $X(3872)$ -мезон, являются очень узкими, а их массы близки к порогам рождения мезонов  $D - \bar{D}^*$ . Данные факты не согласуются с предсказаниями кварковой модели. Наиболее вероятными кандидатами могли бы быть  $1D$ - или  $2P$ -состояния чармония. Однако  $1D$ -состояние лежит существенно ниже 3872 МэВ, а  $2P$ -состояние — несколько выше. Поэтому в литературе интенсивно обсуждаются интерпретации  $X(3872)$ -мезона либо как адронной молекулы, либо как тетракварка.

Узкий резонанс  $X(3872)$ , схожий по свойствам с чармонием, был открыт в 2003 г. коллаборацией Belle [1] в реакции  $B^\pm \rightarrow K^\pm \pi^+ \pi^- J/\psi$ . Данный резонанс распадается на  $\pi^+ \pi^- J/\psi$  и имеет массу  $m_X = (3872,0 \pm 0,6 \text{ (стат.)} \pm 0,5 \text{ (сист.)})$  МэВ, которая близка к порогу рождения  $D$ - и  $D^*$ -мезонов:  $M_{D^0} + M_{D^{*0}} = (3871,81 \pm 0,25)$  МэВ [2]. Было найдено, что его ширина меньше 2,3 МэВ на 90%-м уровне достоверности. Это состояние вскоре было подтверждено коллаборацией BaBar [3] и в  $p\bar{p}$ -столкновениях в Национальной ускорительной лаборатории им. Э. Ферми на тэватроне в экспериментах CDF [4] и D0 [5].

Наиболее точное измерение массы, сделанное до настоящего времени, есть  $M_X = (3871,61 \pm 0,16 \pm 0,19)$  МэВ [6] и [7]. Усредненное значение массы, приведенное в работе [4], равно

$$M_X = (3871,51 \pm 0,22) \text{ МэВ.} \quad (1)$$

Из наблюдений распада  $X(3872) \rightarrow J/\psi\gamma$ , сделанного коллаборациями Belle [8] и BaBar [9], а также из углового анализа, выполненного коллаборацией CDF [10], было показано, что квантовыми числами  $X(3872)$  могут быть либо  $J^{PC} = 1^{++}$ , либо  $2^{-+}$ . Однако наблюдение распадов  $X \rightarrow D^0 \bar{D}^0 \pi^0$  коллаборациями Belle и BaBar [11, 12] свидетельствует более в пользу выбора  $1^{++}$ , поскольку данная мода, проходящая вблизи порога, должна быть сильно подавлена для  $J = 2$ . В [13] был представлен анализ всех данных распада  $\Upsilon(4S)$  и получено доказательство существования каскадного распада  $X(3872) \rightarrow J/\psi\omega (\rightarrow 3\pi)$ . Сравнение наблюдаемого распределения по эффективной массе  $m_{3\pi}$  с результатами моделирования по Монте-Карло привело к заключению, что добавление одной единицы орбитального момента в систему  $J/\psi\omega$  значительно улучшает описание данных. Это подразумевает отрицательную  $P$ -четность для  $X$ -мезона  $2^{-+}$ . В [14] на основе анализа угловых корреляций конечных продуктов распада  $X(3872) \rightarrow J/\psi\pi^+\pi^-$  было найдено хорошее согласие между экспериментальными данными и результатами моделирования по Монте-Карло без свободных параметров в случае  $1^{++}$ . Гипотеза о квантовых числах  $2^{-+}$  потребовала введения дополнительного комплексного параметра. При определенном значении данного параметра удалось также найти согласие между данными и результатами моделирования.

Коллаборация Belle сообщила о наблюдении моды распада  $X \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0 J/\psi$  [8] с ярко выраженным пиком в системе трех пионов в районе 750–775 МэВ, что означает доминирование подпорогового процесса  $X \rightarrow \omega J/\psi$  в данном распаде. Было найдено, что брэнчинг этой моды почти такой же, как и брэнчинг моды  $X \rightarrow \pi^+\pi^- J/\psi$ :

$$\frac{\mathcal{B}(X \rightarrow J/\psi\pi^+\pi^-\pi^0)}{\mathcal{B}(X \rightarrow J/\psi\pi^+\pi^-)} = 1,0 \pm 0,4 \text{ (стат.)} \pm 0,3 \text{ (сист.).} \quad (2)$$

Это означает сильное нарушение изоспина, поскольку трехпионный распад идет в основном через промежуточный  $\omega$ -мезон с изоспином 0, в то время как двухпионный распад идет в основном через промежуточный  $\rho$ -мезон с изоспином 1. Кроме того, поскольку двухпионный распад идет в основном через промежуточный  $\rho$ -мезон, то весьма трудно это объяснить, используя интерпретацию  $X(3872)$  как простого  $c\bar{c}$ -состояния чармония с изоспином 0. В этой же работе были опубликованы данные об электромагнитном распаде

$X(3872) \rightarrow \gamma + J/\psi$ :

$$\mathcal{B}(B \rightarrow XK) \cdot \mathcal{B}(X \rightarrow \gamma + J/\psi) = (1,8 \pm 0,6 \text{ (стат.)} \pm 0,1 \text{ (сист.)}) \cdot 10^{-6},$$

$$\frac{\Gamma(X \rightarrow \gamma + J/\psi)}{\Gamma(X \rightarrow \pi^+\pi^- J/\psi)} = 0,14 \pm 0,05. \quad (3)$$

При анализе распадов  $B^+ \rightarrow J/\psi \gamma K^+$  коллаборация ВаВар [9] нашла доказательство распада  $X(3872) \rightarrow \gamma + J/\psi$  на уровне  $3,4\sigma$  статистической погрешности. Были опубликованы следующие численные значения для произведения брэнчингов:

$$\mathcal{B}(B^+ \rightarrow XK^+) \cdot \mathcal{B}(X \rightarrow \gamma + J/\psi) = (3,3 \pm 1,0 \text{ (стат.)} \pm 0,3 \text{ (сист.)}) \cdot 10^{-6}. \quad (4)$$

Коллаборация Belle [11] впервые сообщила о наблюдении околопорогового пика в системе  $D^0 \bar{D}^0 \pi^0$ , получившейся в результате распада  $B \rightarrow D^0 \bar{D}^0 \pi^0 K$ . Положение пика соответствовало массе  $M = (3875,2 \pm 0,7_{-1,6}^{+0,3} \pm 0,8)$  МэВ, и брэнчинг для событий в пике был равен

$$\mathcal{B}(B \rightarrow D^0 \bar{D}^0 \pi^0 K) = (1,22 \pm 0,31_{-0,30}^{+0,23}) \cdot 10^{-4}. \quad (5)$$

Все имеющиеся до 2007 г. данные были проанализированы в [15], где, в частности, было найдено, что

$$\mathcal{B}(B^+ \rightarrow XK^+) = 1,30_{-0,34}^{+0,20} \cdot 10^{-4},$$

$$\frac{\Gamma(X \rightarrow \gamma + J/\psi)}{\Gamma(X \rightarrow \pi^+\pi^- J/\psi)} = 0,22 \pm 0,06. \quad (6)$$

Коллаборация ВаВар [16] опубликовала следующие данные о распадах  $X \rightarrow \gamma + J/\psi$  и  $X \rightarrow \gamma + \psi(2S)$ , которые были получены при анализе распадов  $B \rightarrow c\bar{c} \gamma K$ :

$$\mathcal{B}(B^\pm \rightarrow XK^\pm) \cdot \mathcal{B}(X \rightarrow \gamma + J/\psi) = (2,8 \pm 0,8 \text{ (стат.)} \pm 0,1 \text{ (сист.)}) \cdot 10^{-6},$$

$$\mathcal{B}(B^\pm \rightarrow XK^\pm) \cdot \mathcal{B}(X \rightarrow \gamma + \psi(2S)) = (9,5 \pm 2,7 \text{ (стат.)} \pm 0,6 \text{ (сист.)}) \cdot 10^{-6}. \quad (7)$$

Полный обзор экспериментальных данных по  $X(3872)$ -мезону, имеющих к настоящему времени, может быть найден в [17] и [18].

К настоящему времени в литературе имеется несколько различных интерпретаций  $X(3872)$ :

- молекула, состоящая из  $D^0 \bar{D}^{*0}$  с малой энергией связи [19–45];
- тетракварк, являющийся связанным состоянием цветных дикварков [46–54];

- проявление порогового эффекта [55];
- гибрид кварков и глюонов [56] и [57];
- глобол [58].

Подробное описание теории и эксперимента для новых состояний чармония можно найти в [59–64].

Наиболее интригующим в настоящее время является вопрос интерпретации  $X(3872)$ -мезона либо как сильносвязанной молекулы с энергией связи  $M_X - (M_{D^{*0}} + M_{D^0}) = -(0,30 \pm 0,40)$  МэВ, либо как тетракварка, являющегося связанным состоянием цветных дикварков. Молекулярная природа  $X(3872)$ -мезона интенсивно обсуждается в последнее время в литературе. В [65] на основе предположения о том, что  $X(3872)$  является  $D^0\bar{D}^{*0}$ -молекулой, было оценено сечение его рождения на тэватроне в Национальной ускорительной лаборатории им. Э. Ферми. Полученный верхний предел для сечения рождения оказался почти в 30 раз меньше наблюдаемого в эксперименте. На основе этого был сделан вывод, что маловероятно образование сильносвязанной  $D^0\bar{D}^{*0}$ -молекулы при  $S$ -волновом резонансном рассеянии при высоких энергиях адронов. Однако авторы [66] указывали на необходимость учета перерассеяния очарованных мезонов при анализе, проведенном в [65]. В этом случае теоретическая верхняя оценка может возрасти на несколько порядков и стать сравнимой с экспериментальной величиной. Такое заключение позднее критиковалось в [67]. Во-первых, было указано, что, используя результаты работы [66], можно предсказать новое молекулярное состояние  $X_s(4080)$ , состоящее из  $D_s\bar{D}_s^*$ -пары. Однако такое состояние не было найдено на тэватроне. Во-вторых, авторы [67] высказывали вполне обоснованное сомнение о применимости теоремы Ватсона для учета конечных состояний в вычислениях, проделанных в [66].

Интерпретация  $X(3872)$  как тетракварка была впервые предложена и применена для описания имеющихся экспериментальных данных в [46]. С использованием эффективных лагранжианов для трехчастичных взаимодействий с константами связи, полученными по аналогии со случаем легких мезонов, были вычислены ширины сильных распадов  $X \rightarrow J/\psi\pi^+\pi^-$  и  $X \rightarrow J/\psi\pi^+\pi^-\pi^0$ . Было найдено, что ширина распада  $X$ -мезона составляет около 1,6 МэВ в соответствии с экспериментальной границей.

Напротив, ширина распада, вычисленная в [51] с применением правил сумм КХД для 4-кваркового тока, оказалась значительно больше — около 50 МэВ.

В серии работ [68–70] мы проделали независимый анализ свойств  $X$ -мезона в предположении, что данное состояние является тетракварком и ему соответствует интерполирующий 4-кварковый ток, предложенный в [46].

В [68, 69] были вычислены ширины распадов  $X \rightarrow J/\psi + 2\pi(3\pi)$  и  $X \rightarrow D^0 + \bar{D}^0 + \pi^0$ , идущие через промежуточные состояния  $\rho(\omega)$  и  $D^*$ . Для разумных значений параметра  $\Lambda_X$ , который характеризует размер  $X(3872)$ -

мезона, было найдено согласие с экспериментальными данными. Было также обсуждено возможное влияние  $X(3872)$ -мезона на поведение полного сечения диссоциации  $J/\psi$ -мезона легкими частицами.

В [70] был изучен радиационный распад  $X \rightarrow J/\psi + \gamma$ , вычислен матричный элемент данного перехода и доказана его калибровочная инвариантность. Затем была вычислена ширина данного распада и найдено согласие с экспериментальными данными, а также вычислены спиральные и мультипольные амплитуды и показан способ их получения из ковариантной амплитуды, основанной на ковариантной проекции.

Данный анализ был проведен в рамках релятивистской модели конституэнтных кварков с учетом их конфайнмента [71]. В дальнейшем мы будем использовать более короткое название для этого подхода — ковариантная кварковая модель, которое больше отражает ее суть, поскольку данная модель построена на основе квантовой теории поля с рождением частиц. Часто термин «релятивистская кварковая модель» используется для потенциальных моделей, учитывающих тем или иным образом релятивистские эффекты. Ковариантная кварковая модель [71] является успешным развитием модели конституэнтных кварков, которая была построена в наших более ранних работах и применена к описанию свойств легких мезонов [72–74] и легких барионов [75, 76] при низких энергиях. В серии работ [77–86] в рамках данного подхода были изучены распады тяжелых барионов. В частности, было показано, что в пределе, когда масса тяжелого кварка стремится к бесконечности, воспроизводятся все результаты эффективной теории тяжелых кварков. Слабые распады  $B_c$ -мезона были исследованы в [87–93]. В [94] вычислено сечение диссоциации  $J/\psi$ -мезона легкими частицами, что представляет интерес в связи с поисками кварк-глюонной плазмы. Обзор упомянутых результатов можно найти в [95] и [96–98].

Ковариантная модель кварков является эффективным квантово-полевым подходом к адронным взаимодействиям, основанным на лагранжиане взаимодействия адронов с их составляющими кварками. Знание соответствующего интерполирующего кваркового тока позволяет вычислять самосогласованным образом матричные элементы физических процессов. Отличительной особенностью данного подхода является то, что многокварковые состояния, такие как барионы (три кварка), тетракварки (четыре кварка) и т. п., могут быть рассмотрены и описаны на том же уровне строгости, как и простейшие кварк-антикварковые системы (мезоны). Константа связи адронов с их интерполирующими кварковыми токами определяется из условия связности  $Z_H = 0$ , предложенного в [99, 100] и в дальнейшем используемого во многих разделах физики частиц (для обзора см. [101]). Здесь  $Z_H$  есть константа перенормировки волновой функции адрона. Матричные элементы физических процессов определяются набором кварковых диаграмм, которые строятся в соответствии с  $1/N_c$ -разложением. В ковариантной модели квар-

ков эффективным образом вводится инфракрасное обрезание в пространстве параметров Фока–Швингера, по которым проводится интегрирование в выражениях для матричных элементов. Такая процедура позволяет устранить все пороговые сингулярности, соответствующие рождению кварков, и тем самым гарантировать конфайнмент кварков. В модели отсутствуют ультрафиолетовые расходимости благодаря вершинным адрон-кварковым формфакторам, которые описывают нелокальную структуру адронов. Ковариантная модель кварков содержит несколько свободных параметров: массы конститuentных кварков, параметр инфракрасного обрезания, который характеризует область конфайнмента, и параметры, которые описывают эффективный размер адронов.

Вторая половина данного обзора посвящена изучению свойств  $B$ - и  $B_s$ -мезонов в рамках ковариантной кварковой модели.

Изучение физики тяжелых кварков дает уникальную возможность определить элементы матрицы Кабиббо–Кобаяши–Маскавы (ККМ). Такие исследования также позволяют продвинуться в понимании происхождения ароматов кварков и механизмов нарушения  $CP$ -симметрии. Кроме того, одна из основных целей экспериментов в физике тяжелых кварков — поиск проявлений новой физики за пределами стандартной модели (см. недавний обзор [102]). Предметом изучения являются тяжелые адроны, которые состоят из  $b$ - или  $c$ -кварков, и их слабые распады. Следует отметить, что последний наиболее тяжелый кварк  $t$  распадается слишком быстро, чтобы участвовать в формировании достаточно стабильных адронов. Последнее время стали возможны измерения нарушения  $CP$ -симметрии в системе  $B_s - \bar{B}_s$  в зависимости от времени. Благодаря этим измерениям большое внимание как со стороны теоретиков, так и экспериментаторов привлек распад  $B_s \rightarrow J/\psi \phi$  (см., например, [103, 104]).

Основной идеей теоретических исследований в области тяжелых кварков является отделение вклада малых расстояний, описание которых возможно в рамках пертурбативной квантовой хромодинамики (КХД), от вкладов больших расстояний, для описания которых необходимо привлечь непертурбативные методы. Наиболее популярным и простым методом является так называемая *наивная* факторизация, основанная на выводе эффективных слабых гамильтонианов, которые описывают слабые переходы кварков и лептонов. Эффективные слабые гамильтонианы представляют собой набор локальных кварк-кварковых и кварк-лептонных операторов, умноженных на так называемые коэффициенты Вильсона (см. обзор [105]). Коэффициенты Вильсона характеризуют динамику малых расстояний и могут быть оценены пертурбативными методами с помощью операторных разложений. При вычислении матричных элементов локальных операторов между начальными и конечными состояниями требуется использовать непертурбативные методы. При этом необходимо знать, каким образом адроны построены из кварков. Технически



любой матричный элемент локального оператора может быть выражен через набор лоренцевских структур, умноженных на скалярные функции, которые зависят от кинематических переменных. Данные скалярные функции называются формфакторами.

Помимо наивной факторизации существуют более продвинутые методы отделения вкладов малых и больших расстояний. Это так называемая КХД-факторизация и эффективная теория SCET (Soft-Collinear Effective Theory). Эти подходы выводят теоремы факторизации, которые позволяют дать систематическое описание того или иного процесса в терминах «мягких» и «жестких» матричных элементов. Мы отсылаем интересующегося читателя к работам [106–109], в которых можно найти дополнительные ссылки.

Существует достаточно много теоретических подходов для вычисления необходимых адронных формфакторов. Упомянем некоторые из них. Считается, что наиболее модельно-независимым подходом является подход правил сумм КХД на световом конусе (см., например, [110] и [111]). В рамках подхода правил сумм на световом конусе можно вычислить формфакторы лишь в области достаточно малых переданных импульсов (или больших отдач). Вычисленные формфакторы затем экстраполируются в область больших переданных импульсов (или малых отдач) с помощью полюсных аппроксимаций. В [112] был разработан систематический подход для описания редких распадов  $B \rightarrow K^* \ell^+ \ell^-$  в области малых отдач с помощью эффективной теории тяжелых кварков. Подробный анализ распадов с малой отдачей с использованием данного подхода позднее был проделан в [113, 114].

Приведем несколько модельных подходов для вычисления формфакторов, основанных на иных принципах, нежели подход правил сумм на световом конусе. Это

- уравнения Дайсона–Швингера в КХД [115];
- модель конституэнтных кварков с использованием дисперсионных соотношений [116, 117];
- релятивистская кварковая модель с использованием потенциалов [118];
- релятивистская потенциальная модель КХД [119, 120];
- правила сумм КХД [121, 122].

Следует подчеркнуть, что в рамках развиваемой нами ковариантной кварковой модели адронные формфакторы могут быть вычислены во всей кинематической области импульсных переменных.

В [123] в рамках ковариантной кварковой модели с инфракрасным конформным вычислены формфакторы переходов  $B(B_s) \rightarrow P(V)$  во всей кинематической области квадрата переданного импульса. В качестве применения полученных результатов вычислены ширины нелептонных распадов  $B_s \rightarrow D_s^- D_s^+, D_s^{*-} D_s^+ + D_s^- D_s^{*+}$  и  $B_s \rightarrow D_s^{*-} D_s^{*+}$ . Эти моды дают основной вклад в величину  $\Delta\Gamma$  в  $B_s-\bar{B}_s$ -системе. Был также проанализирован распад  $B_s \rightarrow J/\psi\phi$ , который подавлен по цвету. Однако данный распад важен для

поиска возможных проявлений новой физики, приводящих к  $CP$ -нарушению в  $B_s-\bar{B}_s$ -системе.

Наша работа построена следующим образом. В разд. 1 мы даем краткий обзор теоретических положений, лежащих в основе ковариантной кварковой модели. Обсуждаем ковариантные лагранжианы, описывающие эффективное взаимодействие адронов с составляющими их кварками. Даем определение условия связности, являющегося эффективным инструментом для описания связанных состояний в рамках квантовой теории поля. Наконец, вводим понятие инфракрасного конфайнмента, обеспечивающего отсутствие любых пороговых сингулярностей, соответствующих рождению кварков, в амплитудах физических процессов.

В разд. 2 мы подробно обсуждаем введение электромагнитного взаимодействия в развиваемом подходе. Эта задача является нетривиальной ввиду нелокальности адрон-кваркового взаимодействия. Мы решаем ее путем использования известного метода  $P$ -экспоненты и определения ее производной путenezависимым образом. Мы строим явные представления для лагранжиана, описывающего адрон-фотон-кварковое взаимодействие, линейное по электромагнитному полю. Демонстрируем выполнение калибровочной инвариантности на примере вычисления матричного элемента перехода  $V \rightarrow \gamma$ .

В разд. 3 мы определяем численные значения свободных параметров модели путем фита методом наименьших квадратов величин лептонных констант распадов и ширин основных радиационных распадов к их экспериментальным значениям.

В разд. 4 изучены сильные и однофотонные распады  $X(3872)$ -мезона, рассматриваемого как связанное состояние из четырех кварков — тетракварка. Вычисление амплитуд процессов в рамках нашего подхода требует значительных усилий, поскольку приходится вычислять трехпетлевые фейнмановские диаграммы.

В разд. 5 вычислены различные переходные формфакторы  $B(B_s)$ -мезонов. В качестве приложения данные формфакторы используются для вычисления матричных элементов и ширин двухчастичных нелептонных распадов  $B_s$ -мезона.

В заключении обсуждаются полученные результаты. В приложении дана сводка полезных формул, позволяющих связать лоренцевские, спиральные и мультипольные амплитуды для каскадного распада  $X(3872) \rightarrow \gamma + J/\psi (\rightarrow \ell^+ \ell^-)$ .

## 1. КОВАРИАНТНАЯ МОДЕЛЬ КВАРКОВ

**1.1. Лагранжиан и условие связности.** В этом разделе мы дадим краткое описание теоретических предпосылок, лежащих в основе ковариантной кварковой модели. Отправной точкой является релятивистски-инвариантный

лагранжиан, описывающий взаимодействие некоторого адрона с составляющими его кварками. При этом адронное состояние описывается полем  $H(x)$ , удовлетворяющим соответствующему свободному уравнению движения, а кварковая часть представляет собой интерполирующий кварковый ток  $J_H(x)$  с квантовыми числами данного адрона

$$\mathcal{L}_{\text{int}}(x) = g_H H(x) J_H(x) + \text{h. c.} \quad (8)$$

Отметим, что в случае тождественных частиц, т. е. когда античастица совпадает с частицей ( $\pi^0$ -мезон,  $\phi$ -мезон и т. п.), эрмитово-сопряженная часть совпадает с первоначальным лагранжианом и поэтому ее нужно опустить. В случае простейших кварк-антикварковых состояний (мезонов) интерполирующий кварковый ток записывается в виде

$$J_M(x) = \int dx_1 \int dx_2 F_M(x; x_1, x_2) \bar{q}_2(x_2) \Gamma_M q_1(x_1). \quad (9)$$

Здесь  $\Gamma_M$  — матрица Дирака, обеспечивающая нужные квантовые числа для мезона:  $I$  — скаляр,  $i\gamma^5$  — псевдоскаляр,  $\gamma^\mu$  — вектор,  $\gamma^\mu\gamma^5$  — аксиал,  $\sigma^{\mu\nu} = (i/2)(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu)$  — тензор. Вершинная функция  $F_M$  эффективно описывает распределение кварков внутри мезона. В принципе, она может быть связана с амплитудой Бете–Солпитера, но на данном этапе мы будем считать ее феноменологической функцией. Из требования трансляционной инвариантности следует, что эта функция должна удовлетворять соотношению  $F_M(x+a; x_1+a, x_2+a) = F_M(x; x_1, x_2)$ , где  $a$  — произвольный 4-вектор. Мы выбираем следующую форму для функции  $F_M$ , удовлетворяющую данному условию:

$$F_M(x, x_1, x_2) = \delta(x - w_1 x_1 - w_2 x_2) \Phi_M((x_1 - x_2)^2), \quad (10)$$

где  $w_i = m_{q_i}/(m_{q_1} + m_{q_2})$ . Данный выбор соответствует выделению системы центра масс двух кварков и умножению на функцию  $\Phi_M$ , зависящую лишь от квадрата относительной координаты. От функции  $\Phi_M$  требуется достаточно быстрое убывание ее фурье-образа в евклидовой области.

Ковариантная модель кварков позволяет на единой основе описывать как простейшие  $q\bar{q}$ -мезоны, так и более сложные многокварковые состояния. В качестве примера приведем интерполирующий 3-кварковый ток с квантовыми числами протона:

$$\begin{aligned} J_p(x) &= \int dx_1 \int dx_2 \int dx_3 F_N(x; x_1, x_2, x_3) J_{3q}^{(p)}(x_1, x_2, x_3), \\ J_{3q}^{(p)}(x_1, x_2, x_3) &= \Gamma^A \gamma^5 d_{a_1}(x_1) [\epsilon_{a_1 a_2 a_3} u_{a_2}(x_2) C \Gamma_A u_{a_3}(x_3)], \\ \bar{J}_p(x) &= \int dx_1 \int dx_2 \int dx_3 F_N(x; x_1, x_2, x_3) \bar{J}_{3q}^{(p)}(x_1, x_2, x_3), \\ \bar{J}_{3q}^{(p)}(x_1, x_2, x_3) &= [\epsilon_{a_1 a_2 a_3} \bar{u}_{a_3}(x_3) \Gamma_A C \bar{u}_{a_2}(x_2)] \bar{d}_{a_1}(x_1) \gamma^5 \Gamma^A, \end{aligned} \quad (11)$$

где матрица  $C = \gamma^0 \gamma^2$  связана с матрицей зарядового сопряжения для фермионов  $i \gamma^0 \gamma^2$ . Для удобства вычислений мы опускаем « $i$ ». Матрица  $C$  обладает следующими свойствами:

$$C = C^\dagger = C^{-1} = -C^T, \quad CTC^{-1} = \pm \Gamma \quad (\langle + \rangle \rightarrow S, P, A \langle - \rangle \rightarrow V, T). \quad (12)$$

Индексы  $a_i, i = 1, 2, 3$ , являются индексами цветной группы  $SU_c(3)$ . Для протона имеются два независимых тока:  $\Gamma^A \otimes \Gamma_A = \gamma^\alpha \otimes \gamma_\alpha$  (векторный ток) и  $\Gamma^A \otimes \Gamma_A = \sigma^{\alpha\beta} \otimes \sigma_{\alpha\beta}$  (тензорный ток). Вершинная функция  $F_N$  выбирается в форме, аналогичной случаю мезонов:

$$F_N(x; x_1, x_2, x_3) = \delta^{(4)} \left( x - \sum_{i=1}^3 w_i x_i \right) \Phi_N \left( \sum_{i<j} (x_i - x_j)^2 \right), \quad (13)$$

где  $w_i = m_i / (m_1 + m_2 + m_3)$  так, что  $\sum_{i=1}^3 w_i = 1$ . Физика как легких нуклонов, так и тяжелых барионов была подробно исследована в [75–86].

Для исследований свойств  $X(3872)$  как тетракварка с квантовыми числами  $J^{PC} = 1^{++}$  мы воспользуемся выбором тока, предложенного в [46]:  $[cq]_{S=0} [\bar{c}\bar{q}]_{S=1} + [cq]_{S=1} [\bar{c}\bar{q}]_{S=0}$  ( $q = u, d$ ). Нелокальная версия этого 4-кваркового интерполирующего тока выглядит следующим образом:

$$J_{X_q}^\mu(x) = \int dx_1 \dots \int dx_4 \delta \left( x - \sum_{i=1}^4 w_i x_i \right) \Phi_X \left( \sum_{i<j} (x_i - x_j)^2 \right) \times \\ \times \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon_{abc} \varepsilon_{dec} \left\{ [q_a(x_4) C \gamma^5 c_b(x_1)] [\bar{q}_d(x_3) \gamma^\mu C \bar{c}_e(x_2)] + \right. \\ \left. + [q_a(x_4) C \gamma^\mu c_b(x_1)] [\bar{q}_d(x_3) \gamma^5 C \bar{c}_e(x_2)] \right\}, \quad (14)$$

$$w_1 = w_2 = w_c = \frac{m_c}{2(m_q + m_c)}, \quad w_3 = w_4 = w_q = \frac{m_q}{2(m_q + m_c)}.$$

Нумерация координат  $x_i$  выбрана таким образом, чтобы получить удобную расстановку пропагаторов и вершин в диаграммах Фейнмана.

Эффективный лагранжиан, описывающий связь  $X_q$ -мезона с его конститuentами, имеет вид

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = g_X X_{q\mu}(x) J_{X_q}^\mu(x) \quad (q = u, d). \quad (15)$$

Состояние  $X_u$  нарушает изоспиновую симметрию максимальным образом:

$$X_u = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \underbrace{\frac{X_u + X_d}{\sqrt{2}}}_{I=0} + \underbrace{\frac{X_u - X_d}{\sqrt{2}}}_{I=1} \right\}. \quad (16)$$

Следуя предложению авторов [46], будем считать физическими состояниями суперпозицию  $X_u$ - и  $X_d$ -состояний:

$$\begin{aligned} X_l &\equiv X_{\text{low}} = X_u \cos \theta + X_d \sin \theta, \\ X_h &\equiv X_{\text{high}} = -X_u \sin \theta + X_d \cos \theta. \end{aligned} \quad (17)$$

Угол смешивания  $\theta$  может быть определен из фита брэнчингов в уравнении (2).

Константы связи  $g_H$  в уравнениях (8) и (15) определяются из условия связности  $Z_H = 0$ , предложенного в [99, 100] и в дальнейшем используемого во многих разделах физики частиц (для обзора см. [101]). Здесь  $Z_H$  есть константа перенормировки волновой функции адрона. Условие связности означает, что константа перенормировки адронного поля  $Z_H$ , появившаяся в результате взаимодействия с его конститuentами, должна быть положена равной

нулю:  $Z_H = 0$ . В случае простейшего скалярного (псевдоскалярного) бесспинового поля данное условие записывается в виде

$$Z_M = 1 - g_M^2 \Pi'_M(m_M^2) = 0, \quad (18)$$

где  $\Pi'_M(m_M^2)$  есть производная массового оператора, соответствующего в лидирующем по  $1/N_c$ -разложении собственно энергетической диаграмме на рис. 1.

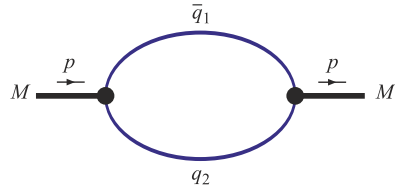


Рис. 1. Собственно энергетическая диаграмма адрона, состоящего из кварка и антикварка

Чтобы пояснить физический смысл условия связности, мы напомним читателю, что константа перенормировки  $Z_M$  также имеет смысл величины квадрата матричного элемента между физическим («одетым») и соответствующим затравочным («голым») состоянием. Если  $Z_M = 0$ , то это означает, что физическое состояние не содержится в «голом» и поэтому является связанным состоянием из его конститuentов. Другими словами, в исходном лагранжиане содержатся как конститuentы (кварки), так и адронные состояния, все рассматриваемые как элементарные частицы. В результате их взаимодействия, описываемого соответствующим лагранжианом взаимодействия (8), происходит процесс «одевания» голых адронных состояний, из-за чего перенормируются их массы и волновые функции. Условие  $Z_M = 0$  означает, что, во-первых, адронные состояния предстают как связанные состояния, и, во-вторых, кварковые степени свободы исключаются из пространства физических состояний, что гарантирует отсутствие двойного счета. Конститuentы (кварки) могут находиться только в виртуальном состоянии. Одним из важных следствий условия связности является отсутствие прямого взаимодействия одетых заряженных частиц с электромагнитным полем. Начальный лагранжиан допускает

взаимодействие как кварков, так и элементарных адронных состояний с электромагнитным полем, которое вводится на основе стандартной минимальной замены. С учетом сильного и электромагнитного взаимодействий электромагнитный формфактор заряженной частицы описывается набором трех диаграмм: 1) диаграмма-дерево, описывающая непосредственное взаимодействие адронного состояния с электромагнитным полем, 2) та же диаграмма, но с учетом сильных собственно энергетических вставок (см. рис. 1) во внешние концы диаграммы, 3) треугольная диаграмма, в которой фотон взаимодействует с виртуальным кварком. Сумма двух первых диаграмм равна вкладу диаграммы-дерева, помноженному на фактор  $Z_M$ , т. е. исчезает в силу условия связности. Кроме того, вклад оставшейся треугольной диаграммы равен в точности единице при нулевом значении 4-импульса фотона, что соответствует правильной нормировке формфактора заряженной частицы.

В случае частиц со спином 1 (векторные и аксиальные мезоны) массовый оператор имеет две независимые лоренц-структуры:

$$\Pi_{S=1}^{\mu\nu}(p) = g^{\mu\nu}\Pi_{S=1}(p^2) + p^\mu p^\nu \Pi_{S=1}^{(1)}(p^2). \quad (19)$$

Второе слагаемое не играет роли, если частица находится на массовой поверхности. Поэтому роль массового оператора в условии связности играет скалярная часть  $\Pi_{S=1}(p^2)$ , которая с помощью проекционного оператора может быть получена из  $\Pi_{S=1}^{\mu\nu}(p)$ :

$$\Pi_{S=1}(p^2) = \frac{1}{3} \left( g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right) \Pi_{S=1}^{\mu\nu}(p). \quad (20)$$

В данном обзоре мы будем в основном рассматривать псевдоскалярные и векторные мезоны. В этом случае производные соответствующих массовых операторов могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} \Pi'_P(p^2) &= \frac{1}{2p^2} p^\alpha \frac{d}{dp^\alpha} N_c \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^{4i}} \tilde{\Phi}_P^2(-k^2) \times \\ &\times \text{tr} [\gamma^5 S_1(k + w_1 p) \gamma^5 S_2(k - w_2 p)] = \frac{1}{2p^2} N_c \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^{4i}} \tilde{\Phi}_P^2(-k^2) \times \\ &\times \left\{ w_1 \text{tr} [\gamma^5 S_1(k + w_1 p) \not{p} S_1(k + w_1 p) \gamma^5 S_2(k - w_2 p)] - \right. \\ &\quad \left. - w_2 \text{tr} [\gamma^5 S_1(k + w_1 p) \gamma^5 S_2(k - w_2 p) \not{p} S_2(k - w_2 p)] \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pi'_V(p^2) &= \frac{1}{3} \left( g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right) \frac{1}{2p^2} p^\alpha \frac{d}{dp^\alpha} N_c \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^{4i}} \tilde{\Phi}_V^2(-k^2) \times \\ &\quad \times \text{tr} [\gamma^\mu S_1(k + w_1 p) \gamma^\nu S_2(k - w_2 p)] = \\ &= \frac{1}{3} \left( g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right) \frac{1}{2p^2} N_c \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^{4i}} \tilde{\Phi}_V^2(-k^2) \times \\ &\quad \times \left\{ w_1 \text{tr} [\gamma^\mu S_1(k + w_1 p) \not{p} S_1(k + w_1 p) \gamma^\nu S_2(k - w_2 p)] - \right. \\ &\quad \left. - w_2 \text{tr} [\gamma^\mu S_1(k + w_1 p) \gamma^\nu S_2(k - w_2 p) \not{p} S_2(k - w_2 p)] \right\}, \quad (21) \end{aligned}$$

где  $\tilde{\Phi}_H(-k^2)$  является фурье-образом вершинной функции  $\Phi_H((x_1 - x_2)^2)$ ,  $S_i(k)$  есть свободный пропагатор конституэнтного кварка с массой  $m_i$ :

$$S_i(k) = \frac{1}{m_i - \not{k}}. \quad (22)$$

При выводе формулы (21) мы воспользовались равенствами

$$p^\mu \frac{d}{dp^\mu} f(p^2) = 2p^2 \frac{d}{dp^2} f(p^2) \quad (23)$$

и

$$\frac{d}{dp^\mu} \frac{1}{m - \not{k} - \not{p}} = \frac{1}{m - \not{k} - \not{p}} \gamma_\mu \frac{1}{m - \not{k} - \not{p}}. \quad (24)$$

Для упрощения вычислений будем использовать гауссову форму для вершинной функции  $\tilde{\Phi}_H(-k^2)$ :

$$\tilde{\Phi}_H(-k^2) = \exp(k^2 / \Lambda_H^2), \quad (25)$$

где параметр  $\Lambda_H$  характеризует размер соответствующего связанного состояния  $H$ . Поскольку  $k^2$  переходит в  $-k_E^2$  в евклидовом пространстве, функция в уравнении (25) быстро убывает при  $k_E^2 \rightarrow \infty$ , обеспечивая ультрафиолетовую сходимость фейнмановских диаграмм.

В случае 4-кваркового состояния массовый оператор определяется трехпетлевой диаграммой, изображенной на рис. 2.

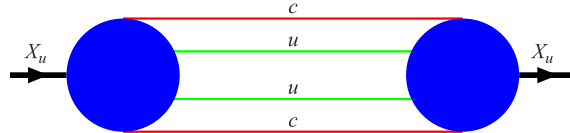


Рис. 2. Собственно энергетическая диаграмма  $X_u$ -мезона

При вычислении нам понадобится фурье-образ вершинной функции  $X$ -мезона  $\Phi_X \left( \sum_{i<j} (x_i - x_j)^2 \right)$  в уравнении (14). Удобнее всего найти фурье-образ с помощью введения координат Якоби в системе из четырех кварков:

$$\begin{aligned} x_1 &= x + \frac{2w_2 + w_3 + w_4}{2\sqrt{2}}\rho_1 - \frac{w_3 - w_4}{2\sqrt{2}}\rho_2 + \frac{w_3 + w_4}{2}\rho_3 \equiv x + \sum_{j=1}^3 c_{1j}\rho_j, \\ x_2 &= x - \frac{2w_1 + w_3 + w_4}{2\sqrt{2}}\rho_1 - \frac{w_3 - w_4}{2\sqrt{2}}\rho_2 + \frac{w_3 + w_4}{2}\rho_3 \equiv x + \sum_{j=1}^3 c_{2j}\rho_j, \\ x_3 &= x - \frac{w_1 - w_2}{2\sqrt{2}}\rho_1 + \frac{w_1 + w_2 + 2w_4}{2\sqrt{2}}\rho_2 - \frac{w_1 + w_2}{2}\rho_3 \equiv x + \sum_{j=1}^3 c_{3j}\rho_j, \\ x_4 &= x - \frac{w_1 - w_2}{2\sqrt{2}}\rho_1 - \frac{w_1 + w_2 + 2w_3}{2\sqrt{2}}\rho_2 - \frac{w_1 + w_2}{2}\rho_3 \equiv x + \sum_{j=1}^3 c_{4j}\rho_j. \end{aligned} \quad (26)$$

Здесь  $x = \sum_{i=1}^4 x_i w_i$  и  $\sum_{1 \leq i < j \leq 4} (x_i - x_j)^2 = \sum_{i=1}^3 \rho_i^2$ .

Тогда

$$\begin{aligned} \Phi_X \left( \sum_{i<j} (x_i - x_j)^2 \right) &= \prod_{i=1}^4 \int \frac{dp_i}{(2\pi)^4} \exp \left( -i \sum_{i=1}^4 p_i x_i \right) \tilde{\Phi}_X(p_1, \dots, p_4), \\ \tilde{\Phi}_X(p_1, \dots, p_4) &= (2\pi)^4 \delta \left( \sum_{i=1}^4 p_i \right) \bar{\Phi}_X(-\Omega^2), \\ \bar{\Phi}_X(-\Omega^2) &= \frac{1}{4} \prod_{i=1}^3 \int d\rho_i \exp \left( i \sum_{i=1}^3 \omega_i \rho_i \right) \Phi_X(R^2), \end{aligned} \quad (27)$$

где  $\Omega^2 = \sum_{i=1}^3 \omega_i^2$  и  $R^2 = \sum_{i=1}^3 \rho_i^2$ . Координаты Якоби в импульсном пространстве имеют вид

$$\omega_1 = \frac{p_1 - p_2}{2\sqrt{2}}, \quad \omega_2 = \frac{p_1 + p_2 + 2p_3}{2\sqrt{2}}, \quad \omega_3 = \frac{p_1 + p_2}{2}. \quad (28)$$

Как и в случае обычных 2-кварковых мезонов, мы будем использовать гауссову экспоненту для вершинной функции тетракварка:

$$\bar{\Phi}_X(-\Omega^2) = \exp \left( \frac{\Omega^2}{\Lambda_X^2} \right), \quad (29)$$

где параметр  $\Lambda_X$  характеризует размер  $X$ -мезона.



С учетом того, что квантовые числа  $X$ -мезона есть  $J^{PC} = 1^{++}$ , производная скалярной части массового оператора записывается в виде

$$\begin{aligned} \Pi'_X(p^2) &= \frac{1}{2p^2} p^\alpha \frac{\partial}{\partial p^\alpha} \Pi_X(p^2) = \\ &= \frac{2}{3p^2} \left( g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right) \prod_{i=1}^3 \int \frac{d^4 k_i}{(2\pi)^{4i}} \bar{\Phi}_X^2(-K^2) \times \\ &\times \left\{ -w_c \operatorname{tr} \left[ S_c^{[12]} \not{p} S_c^{[12]} \gamma^5 S_q^{[2]} \gamma^5 \right] \operatorname{tr} \left[ S_c^{[3]} \gamma^\mu S_q^{[13]} \gamma^\nu \right] + \right. \\ &+ w_q \operatorname{tr} \left[ S_c^{[12]} \gamma^5 S_q^{[2]} \not{p} S_q^{[2]} \gamma^5 \right] \operatorname{tr} \left[ S_c^{[3]} \gamma^\mu S_q^{[13]} \gamma^\nu \right] - \\ &- w_c \operatorname{tr} \left[ S_c^{[12]} \gamma^5 S_q^{[2]} \gamma^5 \right] \operatorname{tr} \left[ S_c^{[3]} \not{p} S_c^{[3]} \gamma^\mu S_q^{[13]} \gamma^\nu \right] + \\ &\left. + w_q \operatorname{tr} \left[ S_c^{[12]} \gamma^5 S_q^{[2]} \gamma^5 \right] \operatorname{tr} \left[ S_c^{[3]} \gamma^\mu S_q^{[13]} \not{p} S_q^{[13]} \gamma^\nu \right] \right\}, \quad (30) \end{aligned}$$

где мы использовали сокращенные обозначения

$$\begin{aligned} S_c^{[12]} &= S_c(k_1 + k_2 - w_c p), & S_c^{[3]} &= S_c(k_3 - w_c p), \\ S_q^{[2]} &= S_q(k_2 + w_q p), & S_q^{[13]} &= S_q(k_1 + k_3 + w_q p), \\ K^2 &= \frac{1}{8}(k_1 + 2k_2)^2 + \frac{1}{8}(k_1 + 2k_3)^2 + \frac{1}{4}k_1^2. \end{aligned}$$

**1.2. Инфракрасный конфайнмент.** В этом пункте мы изложим способ введения конфайнмента в развиваемую модель, т. е. способ устранения пороговых сингулярностей, соответствующих рождению кварков. Пороговые сингулярности возникают вследствие того, что мы используем свободные пропагаторы кварков при построении фейнмановских диаграмм, описывающих те или иные матричные элементы физических процессов.

Рассмотрим произвольную фейнмановскую диаграмму, состоящую из  $n$  кварковых пропагаторов  $S$ ,  $\ell$  петель с импульсными переменными интегрирования  $k$ ,  $m$  вершин с гауссовыми вершинными функциями  $\Phi$ . В пространстве Минковского данная диаграмма может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} \Pi(p_1, \dots, p_m) \int [d^4 k]^\ell \prod_{i_1=1}^m \Phi_{i_1+n}(-K_{i_1+n}^2) \prod_{i_3=1}^n S_{i_3}(\tilde{k}_{i_3} + v_{i_3}), \\ K_{i_1+n}^2 = \sum_{i_2} \left( \tilde{k}_{i_1+n}^{(i_2)} + v_{i_1+n}^{(i_2)} \right)^2, \end{aligned} \quad (31)$$

где 4-векторы  $\tilde{k}_i$  являются линейными комбинациями петлевых переменных интегрирования  $k_i$ , а векторы  $v_i$  — линейными комбинациями внешних им-

пульсов. Мы опустили возможные произведения матриц Дирака, поскольку они не зависят от импульсных переменных. Для простоты все внешние импульсы выбраны входящими в вершины так, что  $\sum_{i=1}^m p_i = 0$ .

Далее мы используем представление Фока–Швингера для свободного пропагатора кварка

$$S(k) = (m + \not{k}) \int_0^{\infty} d\beta e^{-\beta(m^2 - k^2)}. \quad (32)$$

Без ограничения общности выбираем вершинные функции в виде гауссовых экспонент:

$$\Phi_{i+n}(-K^2) = \exp[\beta_{i+n} K^2], \quad i = 1, \dots, m, \quad (33)$$

где параметры  $\beta_{i+n} = s_i = 1/\Lambda_i^2$  характеризуют размеры адрона. В результате подынтегральное выражение в уравнении (31) приобретает вид гауссовой экспоненты, умноженной на полином степени  $n$  по переменным интегрирования, полученный из произведения числителей кварковых пропагаторов. Показатель экспоненты имеет форму  $ka\bar{k} + 2kr + R$ , где  $a$  есть  $\ell \times \ell$ -матрица, составленная из произведения параметров  $\beta_i$  так, что  $a^T = a$ , вектор  $r$  размерности  $\ell$  составлен из внешних импульсов, а  $R$  является квадратичной формой из внешних импульсов. Тензорные интегралы по петлевым переменным вычисляются с помощью операции дифференцирования

$$k_i^\mu e^{2kr} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r_{i\mu}} e^{2kr}. \quad (34)$$

Представление (34) позволяет выполнить интегрирование по всем петлевым переменным с помощью перехода к евклидову пространству  $k^0 \rightarrow ik_4$ ,  $k^2 \rightarrow -k_E^2$ :

$$\int \left[ \frac{d^4 k}{\pi^2 i} \right]^\ell \exp\{ka\bar{k} + 2kr + R\} = \frac{1}{|a|^2} \exp\{-ra^{-1}r + R\}, \quad (35)$$

где  $|a| = \det a$ ,  $a^{-1}$  — обратная матрица. Получившаяся гауссова экспонента может быть «пронесена» через операцию дифференцирования с помощью формулы

$$\frac{\partial}{\partial r_{i\mu}} e^{-ra^{-1}r} = e^{-ra^{-1}r} \left( -2(a^{-1}r)_i^\mu + \frac{\partial}{\partial r_{i\mu}} \right). \quad (36)$$

Окончательно дифференцирование может быть выполнено с помощью многократного использования коммутационного соотношения

$$\left[ \frac{\partial}{\partial r_{i\mu}}, r_j^\nu \right] = \delta_{ij} g^{\mu\nu}. \quad (37)$$

Последняя операция может быть алгоритмически реализована в программе, написанной на FORM [124].

После интегрирования по петлевым импульсным переменным и выполнения вышеописанной операции дифференцирования выражение для фейнмановской диаграммы в уравнении (31) записывается в виде

$$\Pi = \int_0^{\infty} d^n \beta F(\beta_1, \dots, \beta_n), \quad (38)$$

где  $F$  есть получившееся подынтегральное выражение. Удобно перейти к интегрированию по симплексу с помощью «вставки» единицы в подынтегральное выражение

$$1 = \int_0^{\infty} dt \delta \left( t - \sum_{i=1}^n \beta_i \right) \quad (39)$$

и последующей замены переменных  $\beta_i = t\alpha_i$

$$\Pi = \int_0^{\infty} dt t^{n-1} \int_0^1 d^n \alpha \delta \left( 1 - \sum_{i=1}^n \alpha_i \right) F(t\alpha_1, \dots, t\alpha_n). \quad (40)$$

В итоге имеется  $n$  интегрирований:  $(n-1)$  по безразмерным параметрам  $\alpha$ , пробегающим симплекс, и одно интегрирование по параметру  $t$ , имеющему размерность квадрата обратной массы и лежащему в пределах от нуля до бесконечности. Если кинематические переменные, соответствующие данной диаграмме, таковы, что появляется пороговая точка ветвления, то интеграл (40) начинает расходиться при  $t \rightarrow \infty$ . Однако, если обрезать интегрирование на верхнем пределе, то это обеспечит отсутствие любых пороговых сингулярностей в данной диаграмме, поскольку полученный интеграл абсолютно сходится для любого набора кинематических переменных:

$$\Pi^c = \int_0^{1/\lambda^2} dt t^{n-1} \int_0^1 d^n \alpha \delta \left( 1 - \sum_{i=1}^n \alpha_i \right) F(t\alpha_1, \dots, t\alpha_n). \quad (41)$$

Параметр обрезания  $\lambda$  называется параметром инфракрасного обрезания. Отметим, что область малых значений переменной интегрирования  $t \sim 0$  соответствует области больших значений петлевых импульсных переменных и поэтому называется ультрафиолетовой областью. Следует отметить, что в ковариантной модели кварков ультрафиолетовые расходимости отсутствуют благодаря вершинным функциям, быстро убывающим в евклидовой области. Таким образом, инфракрасное обрезание удаляет все возможные пороговые

сингулярности, которые в нашем случае связаны с рождением кварков. Это означает, что инфракрасное обрезание эффективно обеспечивает конфаинмент кварков. Механизм инфракрасного обрезания для обеспечения конфаинмента кварков также применялся в моделях Намбу–Йона-Лазинио [125, 126], однако он использовался лишь для простейших однопетлевых кварковых диаграмм. Метод, который используется в ковариантной кварковой модели, является общим и может быть применен к кварковой диаграмме с любым количеством пропагаторов и петель. Параметр инфракрасного обрезания  $\lambda$  является единым для всех физических процессов.

В качестве иллюстрации рассмотрим однопетлевую собственно энергетическую диаграмму и для простоты опустим все спинорные величины. Имеем

$$\Pi_2(p^2) = \frac{d^4 k_E}{\pi^2} \frac{e^{-s k_E^2}}{\left[ m^2 + \left( k_E + \frac{1}{2} p_E \right)^2 \right] \left[ m^2 + \left( k_E - \frac{1}{2} p_E \right)^2 \right]},$$

где с самого начала все импульсные переменные находятся в евклидовой области. Используя преобразования, описанные выше, приходим к следующему представлению:

$$\begin{aligned} \Pi_2(p^2) &= \int_0^\infty dt \frac{t}{(s+t)^2} \int_0^1 d\alpha \exp \left[ -t z_{\text{loc}} + \frac{st}{s+t} z_1 \right], \\ z_{\text{loc}} &= m^2 - \alpha(1-\alpha)p^2, \quad z_1 = \left( \alpha - \frac{1}{2} \right)^2 p^2. \end{aligned} \quad (42)$$

Как и в локальном случае  $s = 0$ , интеграл  $\Pi_2(p^2)$  имеет точку ветвления при  $p^2 = 4m^2$ , поскольку в этом случае величина  $z_{\text{loc}}$  в показателе экспоненты становится равной нулю при  $\alpha = 1/2$  и интеграл по переменной  $t$  начинает расходиться на бесконечности. Для аналитического продолжения в область  $p^2 > 4m^2$ , где появляется мнимая часть, необходимо использовать иные представления. Однако введение инфракрасного обрезания

$$\Pi_2^c(p^2) = \int_0^{1/\lambda^2} dt \frac{t}{(s+t)^2} \int_0^1 d\alpha \exp \left[ -t z_{\text{loc}} + \frac{st}{s+t} z_1 \right] \quad (43)$$

обеспечивает абсолютную сходимость интеграла и отсутствие каких-либо сингулярностей при любых значениях  $p^2$ .

## 2. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ С ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫМ ПОЛЕМ

**2.1. Введение электромагнитного взаимодействия.** Введение взаимодействия с электромагнитным полем таким образом, чтобы обеспечить калибровочную инвариантность, не является простой задачей ввиду нелокальности лагранжиана взаимодействия (8). Для различных частей полного лагранжиана взаимодействие с электромагнитным полем вводится двумя способами. В свободный лагранжиан заряженных полей кварков и мезонов данное взаимодействие вводится стандартным образом с помощью минимальной замены:

$$\partial^\mu M^\pm \rightarrow (\partial^\mu \mp ieA^\mu)M^\pm, \quad \partial^\mu q \rightarrow (\partial^\mu - ie_q A^\mu)q, \quad \partial^\mu \bar{q} \rightarrow (\partial^\mu + ie_q A^\mu)\bar{q}, \quad (44)$$

где  $e$  является зарядом позитрона (или протона),  $e_q$  — заряд кварка ( $e_u = 2/3 e$ ,  $e_d = -1/3 e$  и т. д.). Минимальная замена дает первую часть лагранжиана электромагнитных взаимодействий:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{int}}^{\text{em}(1)}(x) &= \sum_q e_q A_\mu(x) J_q^\mu(x) + e A_\mu(x) J_M^\mu(x) + e^2 A^2(x) M^-(x) M^+(x), \\ J_q^\mu(x) &= \bar{q}(x) \gamma^\mu q(x), \quad J_M^\mu(x) = i(M^-(x) \partial^\mu M^+(x) - M^+(x) \partial^\mu M^-(x)). \end{aligned} \quad (45)$$

Как отмечалось ранее, взаимодействие элементарных адронных полей с фотонами отсутствует в матричных элементах физических процессов благодаря условию связности  $Z_M = 0$ .

Введение электромагнитного взаимодействия в нелокальный лагранжиан адрон-кваркового взаимодействия (8) происходит с помощью метода  $P$ -экспоненты, предложенного в [127, 128]. Данный метод активно использовался в нелокальной киральной кварковой модели [129].

Для того чтобы гарантировать выполнение калибровочной инвариантности, каждое кварковое поле в соответствующем токе умножается на калибровочную экспоненту:

$$q(x_i) \rightarrow e^{-ie_q I(x_i, x, P)} q(x_i), \quad \bar{q}(x_i) \rightarrow e^{ie_q I(x_i, x, P)} \bar{q}(x_i), \quad (46)$$

$$I(x_i, x, P) = \int_x^{x_i} dz_\mu A^\mu(z),$$

где  $P$  обозначает путь, соединяющий точки  $x$  и  $x_i$ . Тогда легко видеть, что полный лагранжиан инвариантен относительно локальных калибровочных преобразований:

$$\bar{q}(x_i) \rightarrow e^{-ie_q f(x_i)} \bar{q}(x_i), \quad q(x_i) \rightarrow e^{ie_q f(x_i)} q(x_i), \quad A^\mu(z) \rightarrow A^\mu(z) + \partial^\mu f(z). \quad (47)$$

При этом

$$I(x_i, x, P) \rightarrow I(x_i, x, P) + f(x_i) - f(x). \quad (48)$$

При расчетах по теории возмущений нужно раскладывать калибровочную экспоненту по степеням  $A_\mu$  до необходимого порядка. На первый взгляд результат будет зависеть от пути  $P$ , который соединяет концевые точки. Однако нам нужны только производные интеграла по пути, взятые по концевой точке. Поэтому удобно использовать формализм, разработанный в [128], который основан на путенезависимом определении производной интеграла  $I(x, y, P)$ :

$$\lim_{dx^\mu \rightarrow 0} dx^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} I(x, y, P) = \lim_{dx^\mu \rightarrow 0} [I(x + dx, y, P') - I(x, y, P)], \quad (49)$$

где путь  $P'$  получен из пути  $P$  с помощью сдвига конечной точки  $x$  на величину  $dx$ . Используя определение (49), приходим к ключевому правилу:

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} I(x, y, P) = A_\mu(x), \quad (50)$$

которое означает, что производная интеграла  $I(x, y, P)$  теперь не зависит от пути  $P$ .

**2.2. Лагранжиан адрон-фотон-кваркового взаимодействия, линейный по электромагнитному полю.** Продемонстрируем построение лагранжиана электромагнитного взаимодействия на примере  $J/\psi$ -мезона, являющегося кварк-антикварковым состоянием, и  $X(3872)$ -мезона, рассматриваемого как тетракварк со спином 1.

Разлагая лагранжиан взаимодействия по полю  $A^\mu$  до первого порядка, получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{int}}^{\text{em}(2)}(x) &= g_X X_{q\mu}(x) J_{Xq-\text{em}}^\mu(x) + g_{J/\psi} J/\psi_\mu(x) J_{J/\psi-\text{em}}^\mu(x) \quad (q = u, d), \\ J_{Xq-\text{em}}^\mu &= \int d\rho \Phi_X(\rho^2) J_{4q}^\mu(x_1, \dots, x_4) \{ie_q [I_x^{x_3} - I_x^{x_4}] + ie_c [I_x^{x_2} - I_x^{x_1}]\}, \end{aligned} \quad (51)$$

$$J_{J/\psi-\text{em}}^\mu = \int d\rho \Phi_{J/\psi}(\rho^2) J_{2q}^\mu(x_1, x_2) ie_c [I_x^{x_1} - I_x^{x_2}], \quad I_x^{x_i} \equiv I(x_i, x, P).$$

Для того чтобы использовать ключевое правило (50), перейдем к фурье-образам для вершинных функций  $\Phi$  и кварковых полей  $q$ . Имеем

$$\begin{aligned} \Phi_X(\rho^2) &= \int \frac{d^4\omega}{(2\pi)^4} \tilde{\Phi}_X(-\omega^2) e^{-i\rho\omega} = \tilde{\Phi}_X(\partial_\rho^2) \delta^{(4)}(\rho), \\ \Phi_{J/\psi}(\rho^2) &= \int \frac{d^4\omega}{(2\pi)^4} \tilde{\Phi}_{J/\psi}(-\omega^2) e^{-i\rho\omega} = \tilde{\Phi}_{J/\psi}(\partial_\rho^2) \delta^{(4)}(\rho), \end{aligned}$$

$$q(x_i) = \int \frac{d^4 p_i}{(2\pi)^4} e^{-ip_i x_i} \tilde{q}(p_i),$$

$$\bar{q}(x_i) = \int \frac{d^4 p_i}{(2\pi)^4} e^{ip_i x_i} \tilde{q}(p_i).$$
(52)

С помощью интегрирования по частям приходим к следующим выражениям:

$$J_{X_q-\text{em}}^\mu = \prod_{i=1}^4 \int \frac{d^4 p_i}{(2\pi)^4} \tilde{J}_{4q}^\mu(p_1, \dots, p_4) \int d\rho \delta^{(4)}(\rho) \times$$

$$\times \tilde{\Phi}_X(\partial_\rho^2) e^{-i(p_1 x_1 - p_2 x_2 - p_3 x_3 + p_4 x_4)} \{ie_q [I_x^{x_3} - I_x^{x_4}] + ie_c [I_x^{x_2} - I_x^{x_1}]\} =$$

$$= \prod_{i=1}^4 \int \frac{d^4 p_i}{(2\pi)^4} \tilde{J}_{4q}^\mu(p_1, \dots, p_4) e^{-i(p_1 - p_2 - p_3 + p_4)x} \int d\rho \delta^{(4)}(\rho) e^{-i\rho\omega} \times$$

$$\times \tilde{\Phi}_X(\mathbf{D}_\rho^2) \{ie_q [I_x^{x_3} - I_x^{x_4}] + ie_c [I_x^{x_2} - I_x^{x_1}]\},$$
(53)

$$J_{J/\psi-\text{em}}^\mu = \prod_{i=1}^2 \int \frac{d^4 p_i}{(2\pi)^4} \tilde{J}_{2q}^\mu(p_1, p_2) \times$$

$$\times \int d\rho \delta^{(4)}(\rho) \tilde{\Phi}_{J/\psi}(\partial_\rho^2) e^{i(p_1 x_1 - p_2 x_2)} ie_c [I_x^{x_1} - I_x^{x_2}] =$$

$$= \prod_{i=1}^2 \int \frac{d^4 p_i}{(2\pi)^4} \tilde{J}_{2q}^\mu(p_1, p_2) e^{i(p_1 - p_2)x} \int d\rho \delta^{(4)}(\rho) e^{ip\rho} \tilde{\Phi}_{J/\psi}(D_\rho^2) ie_c [I_x^{x_1} - I_x^{x_2}],$$

$$D_{\rho_i}^\mu = \partial_{\rho_i}^\mu - i\omega_i^\mu, \quad D_\rho^\mu = \partial_\rho^\mu + ip^\mu,$$

где

$$\omega_1 = c_{11}p_1 - c_{21}p_2 - c_{31}p_3 + c_{41}p_4,$$

$$\omega_2 = c_{12}p_1 - c_{22}p_2 - c_{32}p_3 + c_{42}p_4,$$

$$\omega_3 = c_{13}p_1 - c_{23}p_2 - c_{33}p_3 + c_{43}p_4,$$

$$p = \frac{1}{2}(p_1 + p_2).$$
(54)

Коэффициенты  $c_{ij}$  определены уравнением (26).

Наконец, используем следующее тождество, доказательство которого можно найти в [75]:

$$F(D_{\rho_j}^2)I_x^{x_i} = \int_0^1 d\tau F'(\tau D_{\rho_j}^2 - (1-\tau)\omega_j^2) c_{ij} \left( \partial_{\rho_j}^\nu A_\nu(x_i) - \right.$$

$$\left. - 2i\omega_j^\nu A_\nu(x_i) \right) + F(-\omega_j^2)I_x^{x_i}. \quad (55)$$

Это тождество верно для любых функций  $F(z)$ , аналитичных в окрестности  $z = 0$ .

Окончательно получаем

$$\begin{aligned}
 J_{X_q-\text{em}}^\mu(x) &= \prod_{i=1}^4 \int d^4 x_i \int d^4 y J_{4q}^\mu(x_1, \dots, x_4) A_\rho(y) E_X^\rho(x; x_1, \dots, x_4, y), \\
 E_X^\rho(x; x_1, \dots, x_4, y) &= \prod_{i=1}^4 \int \frac{d^4 p_i}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 r}{(2\pi)^4} \times \\
 &\times e^{-ip_1(x-x_1)+ip_2(x-x_2)+ip_3(x-x_3)-ip_4(x-x_4)-ir(x-y)} \tilde{E}_X^\rho(p_1, \dots, p_4, r), \\
 \tilde{E}_X^\rho(p_1, \dots, p_4, r) &= \int_0^1 d\tau \sum_{j=1}^3 \left\{ e_c \left[ -\tilde{\Phi}'_X(-z_{1j}) l_{1j}^\rho + \tilde{\Phi}'_X(-z_{2j}) l_{2j}^\rho \right] + \right. \\
 &\quad \left. + e_q \left[ -\tilde{\Phi}'_X(-z_{4j}) l_{4j}^\rho + \tilde{\Phi}'_X(-z_{3j}) l_{3j}^\rho \right] \right\}, \tag{56}
 \end{aligned}$$

$$l_{ij} = c_{ij} (c_{ij} r + 2\omega_j) \quad (i = 1, \dots, 4; \quad j = 1, \dots, 3),$$

$$z_{i1} = \tau (c_{i1} r + \omega_1)^2 + (1 - \tau) \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2,$$

$$z_{i2} = (c_{i1} r + \omega_1)^2 + \tau (c_{i2} r + \omega_2)^2 + (1 - \tau) \omega_2^2 + \omega_3^2,$$

$$z_{i3} = (c_{i1} r + \omega_1)^2 + (c_{i2} r + \omega_2)^2 + \tau (c_{i3} r + \omega_3)^2 + (1 - \tau) \omega_3^2;$$

$$J_{J/\psi-\text{em}}^\nu(y) = \int d^4 y_1 \int d^4 y_2 \int d^4 z J_{2q}^\nu(y_1, y_2) A_\rho(z) E_{J/\psi}^\rho(y; y_1, y_2, z),$$

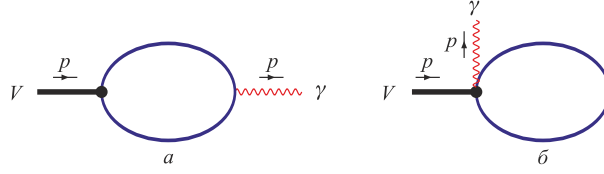
$$\begin{aligned}
 E_{J/\psi}^\rho(y; y_1, y_2, z) &= \int \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 p_2}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \times \\
 &\times e^{-ip_1(y_1-y)+ip_2(y_2-y)+iq(z-y)} \tilde{E}_{J/\psi}^\rho(p_1, p_2, q), \tag{57}
 \end{aligned}$$

$$\tilde{E}_{J/\psi}^\rho(p_1, p_2, q) = e_c \int_0^1 d\tau \left\{ -\tilde{\Phi}'_{J/\psi}(-z_-) l_-^\rho - \tilde{\Phi}'_{J/\psi}(-z_+) l_+^\rho \right\},$$

$$z_\mp = \tau \left( p \mp \frac{1}{2} q \right) - (1 - \tau) p^2, \quad l_\mp = p \mp \frac{1}{4} q, \quad p = \frac{1}{2} (p_1 + p_2).$$

**2.3. Калибровочная инвариантность матричного элемента  $V \rightarrow \gamma$ -перехода.** Продемонстрируем выполнение калибровочной инвариантности на примере вычисления матричного элемента перехода  $V \rightarrow \gamma$ , где  $V$  есть векторный мезон. Соответствующие диаграммы показаны на рис. 3. Для вычислений понадобятся следующие вершины: сильная  $V\bar{q}q$ -вершина, задаваемая лагранжианом (8) и током (9) с  $H = M = V$  и  $\gamma_M = \gamma^\mu$ ; электромагнит-



Рис. 3. Диаграммы, описывающие переход  $V \rightarrow \gamma$ 

ная  $\gamma\bar{q}q$ -вершина, задаваемая лагранжианом (45), и сложная электромагнитная  $V\gamma\bar{q}q$ -вершина, задаваемая лагранжианом (51) и током (57).

Матричный элемент перехода  $V \rightarrow \gamma$ , вычисленный вне массовой поверхности, должен удовлетворять условию калибровочной инвариантности  $p_\nu M_V^{\mu\nu}(p) = 0$ . Каждая по отдельности диаграмма рис. 3 не является калибровочно-инвариантной. Лишь в сумме происходит сокращение калибровочно-неинвариантных частей и восстанавливается калибровочная инвариантность. После взятия  $T$ -произведений и перехода к импульсному пространству вклад от диаграммы  $a$  записывается в виде

$$M_c^{\mu\nu}(p) = \int \frac{d^4 k}{4\pi^2 i} \Phi_\rho(-k^2) \text{tr} \left( \gamma^\mu S \left( k + \frac{1}{2} p \right) \gamma^\nu S \left( k - \frac{1}{2} p \right) \right) = \\ = g^{\mu\nu} [I_c^{(1)}(p^2) + I_c^{(2)}(p^2)] + (g^{\mu\nu} p^2 - p^\mu p^\nu) I_c^\perp(p^2). \quad (58)$$

Калибровочно-неинвариантные части записываются в виде

$$I_c^{(1)}(p^2) = \int_0^\infty \frac{dt}{(s+t)^2} e^{-z_1}, \quad z_1 = tm^2 - \frac{st}{s+t} \frac{p^2}{4}, \\ I_c^{(2)}(p^2) = \int_0^\infty \frac{dt t}{(s+t)^2} \int_0^1 d\alpha e^{-z_2} \left[ -\frac{1}{s+t} + \frac{2t^2}{(s+t)^2} \left( \alpha - \frac{1}{2} \right)^2 p^2 \right], \quad (59) \\ z_2 = t(m^2 - \alpha(1-\alpha)p^2) - \frac{st}{s+t} \left( \alpha - \frac{1}{2} \right)^2 p^2,$$

в то время как калибровочно-инвариантная часть имеет вид

$$I_c^\perp(p^2) = \int_0^\infty \frac{dt t}{(s+t)^2} \int_0^1 d\alpha e^{-z_2} \left[ \frac{1}{2} - \frac{2t^2}{(s+t)^2} \left( \alpha - \frac{1}{2} \right)^2 \right]. \quad (60)$$

Для диаграммы  $b$  аналогичные вклады имеют вид

$$\begin{aligned}
 M_d^{\mu\nu}(p) &= - \int \frac{d^4k}{4\pi^2 i} \left(2k + \frac{1}{2}p\right)^\mu \times \\
 &\quad \times \int_0^1 d\alpha \Phi'_\pi \left( -\alpha \left(k + \frac{1}{2}p\right)^2 - (1-\alpha)k^2 \right) \text{tr}(\gamma^\nu S(k)) = \\
 &\quad = g^{\mu\nu} I_d^{(3)}(p^2) + (g^{\mu\nu} p^2 - p^\mu p^\nu) I_d^\perp(p^2), \\
 I_d^{(3)}(p^2) &= \int_0^\infty \frac{dt s}{(s+t)^2} \int_0^1 d\alpha e^{-z_3} \left[ -\frac{1}{s+t} - \left(1 - \frac{2s\alpha}{s+t}\right) \frac{s\alpha}{s+t} \frac{p^2}{4} \right], \quad (61) \\
 I_d^\perp(p^2) &= \int_0^\infty \frac{dt s}{(s+t)^2} \int_0^1 d\alpha e^{-z_3} \frac{1}{4} \left(1 - \frac{2s\alpha}{s+t}\right) \frac{s\alpha}{s+t}, \\
 z_3 &= tm^2 - \left(1 - \frac{s\alpha}{s+t}\right) \frac{s\alpha}{4} p^2.
 \end{aligned}$$

Здесь  $s = 1/\Lambda_V^2$ . Как мы сейчас покажем, калибровочно-неинвариантные части  $I_c^{(1,2)}$  и  $I_d^{(3)}$  в сумме сокращаются. Во-первых, можно выразить подынтегральные выражения в интегралах  $I_c^{(2)}$  и  $I_d^{(3)}$  через производные от показателей экспоненты  $z_2$  и  $z_3$  соответственно:

$$\begin{aligned}
 I_c^{(2)}(p^2) &\longrightarrow -\frac{1}{s+t} + \frac{2t^2}{(s+t)^2} \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)^2 p^2 = -\frac{1}{s+t} \left[1 - \left(\alpha - \frac{1}{2}\right) \frac{\partial z_2}{\partial \alpha}\right], \\
 I_d^{(3)}(p^2) &\longrightarrow -\frac{1}{s+t} - \frac{p^2}{4} \left(1 - \frac{2\alpha s}{s+t}\right) \frac{\alpha s}{s+t} = -\frac{1}{s+t} \left[1 - \alpha \frac{\partial z_3}{\partial \alpha}\right].
 \end{aligned}$$

Далее можно выполнить интегрирование по  $\alpha$  с учетом граничных условий  $z_2(\alpha=1) = z_2(\alpha=0) = z_3(\alpha=1) = z_3(\alpha=0) = z_1$ . Имеем

$$\begin{aligned}
 I_c^{(2)}(p^2) &= - \int_0^\infty \frac{dt t}{(s+t)^3} \int_0^1 d\alpha \left[ \left(\alpha - \frac{1}{2}\right) e^{-z_2} \right] = - \int_0^\infty \frac{dt t}{(s+t)^3} e^{-z_1}, \\
 I_d^{(3)}(p^2) &= - \int_0^\infty \frac{dt s}{(s+t)^3} \int_0^1 d\alpha [\alpha e^{-z_3}] = - \int_0^\infty \frac{dt}{(s+t)^3} e^{-z_1}.
 \end{aligned}$$

Окончательно, складывая все калибровочно-неинвариантные части, получаем

$$I_c^{(1)}(p^2) + I_c^{(2)}(p^2) + I_d^{(3)}(p^2) = \int_0^\infty \frac{dt}{(s+t)^2} e^{-z_1} \left[1 - \frac{t}{s+t} - \frac{s}{s+t}\right] \equiv 0. \quad (62)$$

Окончательное калибровочно-инвариантное выражение для матричного элемента перехода  $V \rightarrow \gamma$  имеет вид

$$M_{V \rightarrow \gamma}^{\mu\nu}(p) = (g^{\mu\nu} p^2 - p^\mu p^\nu) M_{V \rightarrow \gamma}(p^2),$$

$$M_{V \rightarrow \gamma}(p^2) = \int_0^{1/\lambda^2} \frac{dt t}{(s+t)^2} \int_0^1 d\alpha e^{-z_2} \left[ \frac{1}{2} - \frac{2t^2}{(s+t)^2} \left( \alpha - \frac{1}{2} \right)^2 \right] +$$

$$+ \int_0^{1/\lambda^2} \frac{dt s}{(s+t)^2} \int_0^1 d\alpha e^{-z_3} \frac{1}{4} \left( 1 - \frac{2s\alpha}{s+t} \right) \frac{s\alpha}{s+t}. \quad (63)$$

Здесь мы ввели инфракрасное обрезание, гарантирующее конфайнмент кварков.

### 3. ПАРАМЕТРЫ МОДЕЛИ

Вначале определим число свободных параметров в ковариантной кварковой модели в случае мезонов, рассматриваемых как кварк-антикварковые состояния. Для данного мезона  $H_i$  имеется константа связи  $g_{H_i}$ , параметр  $\Lambda_{H_i}$ , две из четырех возможных величин конститuentных масс кварков  $m_{q_j}$  ( $m_u = m_d, m_s, m_c, m_b$ ) и универсальный параметр инфракрасного обрезания (конфайнмента)  $\lambda$ . Легко посчитать, что в случае  $n_H$  мезонов имеется  $2n_H + 5$  свободных параметров. Условие связности накладывает  $n_H$  ограничений на число модельных параметров, что символически можно записать как

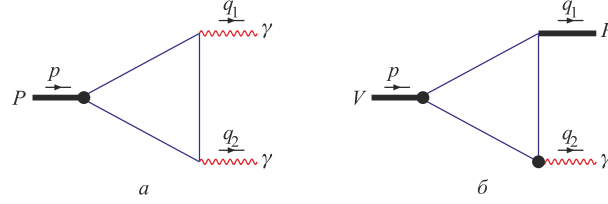
$$f_{H_i}(g_{H_i}, \Lambda_{H_i}, m_{q_i}, \lambda) = 1. \quad (64)$$

Данное условие может быть использовано, чтобы исключить константу связи  $g_H$  из числа свободных параметров. Остальные  $n_H + 5$  параметров определяются с помощью фитирования по экспериментальным данным. Прежде всего мы включаем в число величин для фитирования лептонные константы распадов псевдоскалярных и векторных мезонов. Соответствующие выражения в ковариантной кварковой модели записываются в виде

$$N_c g_P \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4 i} \tilde{\Phi}_P(-k^2) \text{tr} [O^\mu S_1(k + w_1 p) \gamma^5 S_2(k - w_2 p)] = f_P p^\mu,$$

$$N_c g_V \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4 i} \tilde{\Phi}_V(-k^2) \text{tr} [O^\mu S_1(k + w_1 p) \not{\epsilon}_V S_2(k - w_2 p)] = m_V f_V \epsilon_V^\mu,$$
(65)

где  $N_c = 3$  есть число цветов и  $O^\mu = \gamma^\mu (I - \gamma^5)$  есть матрица Дирака для слабых взаимодействий.


 Рис. 4. Диаграммы, описывающие распады  $P \rightarrow \gamma\gamma$  (а) и  $V \rightarrow P\gamma$  (б)

Кроме того, мы включили в фит восемь хорошо установленных шириин радиационных распадов:  $P \rightarrow \gamma\gamma$  и  $V \rightarrow P\gamma$  (см. табл. 2). Соответствующие диаграммы изображены на рис. 4. Мы приводим выражения для матричных элементов распадов  $V \rightarrow P\gamma$  лишь для случая нейтральных мезонов. В случае заряженных мезонов они получаются аналогичным образом, но имеют более громоздкий вид, поскольку имеются два различных кварка и фотон присоединяется к каждому из них:

$$C_{P\gamma\gamma} g_P N_c \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^{4i}} \Phi_P(-k^2) \times \\ \times \text{tr} \left[ i\gamma^5 S \left( k + \frac{1}{2} p \right) \gamma^\mu S \left( k - \frac{1}{2} p \right) \gamma^\nu S \left( k + \frac{1}{2} p - q_1 \right) \right] = g_{P\gamma\gamma} \epsilon^{\mu\nu q_1 q_2}, \quad (66)$$

$$C_{VP\gamma} g_V g_P N_c \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^{4i}} \Phi_V(-k^2) \Phi_P \left( - \left( k + \frac{1}{2} q_2 \right)^2 \right) \times \\ \times \text{tr} \left[ i\gamma^5 S \left( k + \frac{1}{2} p \right) \gamma^\mu S \left( k - \frac{1}{2} p \right) \gamma^\nu S \left( k + \frac{1}{2} p - q_1 \right) \right] = g_{P\pi\gamma} \epsilon^{\mu\nu q_1 q_2}, \quad (67)$$

где  $SU(3)$ -факторы равны

$$C_{\pi^0\gamma\gamma} = \frac{\sqrt{2}}{3}, \quad C_{\eta_c\gamma\gamma} = \frac{8}{9}, \quad C_{\omega\pi^0\gamma} = 1, \quad C_{J/\psi\eta_c\gamma} = \frac{4}{3}.$$

Ширини распадов вычисляются по следующим кинематическим формулам:

$$\Gamma(P \rightarrow \gamma\gamma) = \frac{\pi\alpha^2}{4} m_P^3 g_{P\gamma\gamma}^2, \quad \Gamma(V \rightarrow P\gamma) = \frac{\alpha}{24} m_V^3 \left( 1 - \frac{m_P^2}{m_V^2} \right)^3 g_{VP\gamma}^2. \quad (68)$$

Техника вычислений матричных элементов была изложена в предыдущих пунктах. Экспериментальные значения для констант лептонных распадов псевдоскалярных мезонов мы берем из [2], а в случае их отсутствия — из вычислений на решетке [131–133]. В качестве экспериментальных значений

для констант лептонных распадов нейтральных векторных мезонов мы берем величины, полученные из соответствующих радиационных распадов с использованием  $u-d$ -симметрии. Наконец, экспериментальную величину для  $f_{K^*}$  извлекаем из измеренной ширины распада  $\tau \rightarrow K^* \nu_\tau$ . Результаты фита наименьших квадратов даны в табл. 1 и 2. Как видно, согласие фитируемых величин с их экспериментальными значениями является вполне удовлетворительным.

Таблица 1. Результаты фита для лептонных констант  $f_H$  (МэВ)

Наблю- даемая	Модель	Эксперимент	Ссылка	Наблю- даемая	Модель	Эксперимент	Ссылка
$f_\pi$	128,7	$130,4 \pm 0,2$	[2, 130]	$f_\omega$	198,5	$198 \pm 2$	[2]
$f_K$	156,1	$156,1 \pm 0,8$	[2, 130]	$f_\phi$	228,2	$227 \pm 2$	[2]
$f_D$	205,9	$206,7 \pm 8,9$	[2, 130]	$f_{J/\psi}$	415,0	$415 \pm 7$	[2]
$f_{D_s}$	257,5	$257,5 \pm 6,1$	[2, 130]	$f_{K^*}$	213,7	$217 \pm 7$	[2]
$f_B$	191,1	$192,8 \pm 9,9$	[131]	$f_{D^*}$	243,3	$245 \pm 20$	[133]
$f_{B_s}$	234,9	$238,8 \pm 9,5$	[131]	$f_{D_s^*}$	272,0	$272 \pm 26$	[133]
$f_{B_c}$	489,0	$489 \pm 5$	[132]	$f_{B^*}$	196,0	$196 \pm 44$	[133]
$f_\rho$	221,1	$221 \pm 1$	[2]	$f_{B_s^*}$	229,0	$229 \pm 46$	[133]

Таблица 2. Результаты фита для ширин основных радиационных распадов (в единицах кэВ)

Процесс	Модель	Эксперимент [2]
$\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$	$5,06 \cdot 10^{-3}$	$(7,7 \pm 0,4) \cdot 10^{-3}$
$\eta_c \rightarrow \gamma\gamma$	1,61	$1,8 \pm 0,8$
$\rho^\pm \rightarrow \pi^\pm \gamma$	76,0	$67 \pm 7$
$\omega \rightarrow \pi^0 \gamma$	672	$703 \pm 25$
$K^{*\pm} \rightarrow K^\pm \gamma$	55,1	$50 \pm 5$
$K^{*0} \rightarrow K^0 \gamma$	116	$116 \pm 10$
$D^{*\pm} \rightarrow D^\pm \gamma$	1,22	$1,5 \pm 0,5$
$J/\psi \rightarrow \eta_c \gamma$	1,43	$1,58 \pm 0,37$

Результаты наилучшего фита были достигнуты при значениях свободных параметров модели, приведенных в уравнениях (69), (70) и (71) (в ГэВ):

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} m_u & m_s & m_c & m_b & \lambda \\ \hline 0,235 & 0,424 & 2,16 & 5,09 & 0,181 \end{array}, \quad (69)$$

$$\frac{\Lambda_\pi}{0,87} \mid \frac{\Lambda_K}{1,04} \mid \frac{\Lambda_D}{1,47} \mid \frac{\Lambda_{D_s}}{1,57} \mid \frac{\Lambda_B}{1,88} \mid \frac{\Lambda_{B_s}}{1,95} \mid \frac{\Lambda_{B_c}}{2,42} \mid \frac{\Lambda_\rho}{0,61}, \quad (70)$$

$$\frac{\Lambda_\omega}{0,47} \mid \frac{\Lambda_\phi}{0,88} \mid \frac{\Lambda_{J/\psi}}{1,48} \mid \frac{\Lambda_{K^*}}{0,72} \mid \frac{\Lambda_{D^*}}{1,16} \mid \frac{\Lambda_{D_s^*}}{1,17} \mid \frac{\Lambda_{B^*}}{1,72} \mid \frac{\Lambda_{B_s^*}}{1,71}. \quad (71)$$

#### 4. СИЛЬНЫЕ И РАДИАЦИОННЫЕ РАСПАДЫ $X(3872)$ -МЕЗОНА

В этом разделе вычислим ширины сильных и радиационных распадов  $X(3872)$ -мезона в рамках развиваемого подхода. Подробное описание  $X$ -мезона как тетракварка, построение соответствующего лагранжиана и вычисление эффективной константы связи было дано в разд. 1. Введение электромагнитного взаимодействия с помощью  $P$ -экспоненты и построение лагранжиана взаимодействия, линейного по электромагнитному взаимодействию, было выполнено в разд. 2.

**4.1. Сильные распады  $X \rightarrow J/\psi + 2\pi(3\pi)$  и  $X \rightarrow D + \bar{D} + \pi$ .** Вначале вычислим матричные элементы переходов  $X \rightarrow J/\psi + \rho(\omega)$  и  $X \rightarrow D + \bar{D}^*$ . Соответствующие диаграммы Фейнмана изображены на рис. 5.

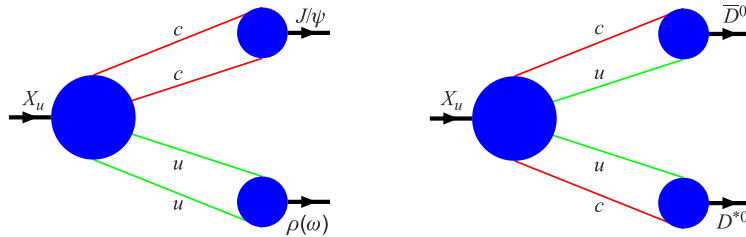


Рис. 5. Диаграммы Фейнмана, описывающие переходы  $X \rightarrow J/\psi + \rho(\omega)$  и  $X \rightarrow D + \bar{D}^*$

Поскольку в обоих случаях масса  $X(3872)$  находится очень близко к соответствующим кинематическим порогам

$$m_X - (m_{J/\psi} + m_\rho) = (-0,90 \pm 0,41) \text{ МэВ},$$

$$m_X - (m_{D^0} + m_{D^{*0}}) = (-0,30 \pm 0,34) \text{ МэВ},$$

векторные мезоны  $\rho$ ,  $\omega$  и  $D^*$  должны рассматриваться вне их массовой поверхности. Тогда матричный элемент перехода  $X_u \rightarrow J/\psi + \rho(\omega)$  запи-

сывается в виде

$$\begin{aligned}
M^{\mu\nu\rho}(X_u(p, \mu) \rightarrow J/\psi(q_1, \nu) + v^0(q_2, \rho)) &= \\
&= 6g_X g_{J/\psi} g_{v^0} \int \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4 i} \int \frac{d^4 k_2}{(2\pi)^4 i} \bar{\Phi}_X(-K_1^2) \Phi_{J/\psi} \times \\
&\quad \times \left( - \left( k_1 + \frac{1}{2} q_1 \right)^2 \right) \Phi_{v^0} \left( - \left( k_2 + \frac{1}{2} q_2 \right)^2 \right) \times \\
&\quad \times \text{tr} \left[ i \gamma^5 S_c(k_1) \gamma^\nu S_c(k_1 + q_1) \gamma^\mu S_u(k_2) \gamma^\rho S_u(k_2 + q_2) \right] = \\
&= \varepsilon^{q_1 q_2 \mu\nu} q_1^\rho M_{XJv}^{(1)} + \varepsilon^{q_1 q_2 \mu\nu} q_2^\rho M_{XJv}^{(2)} + \varepsilon^{q_1 q_2 \mu\rho} q_2^\nu M_{XJv}^{(3)} + \varepsilon^{q_1 q_2 \nu\rho} q_1^\mu M_{XJv}^{(4)} + \\
&\quad + \varepsilon^{q_1 \mu\nu\rho} M_{XJv}^{(5)} + \varepsilon^{q_2 \mu\nu\rho} M_{XJv}^{(6)} + \varepsilon^{q_1 q_2 \mu\rho} q_1^\nu M_{XJv}^{(7)} + \varepsilon^{q_1 q_2 \nu\rho} q_2^\mu M_{XJv}^{(8)}, \quad (72) \\
K_1^2 &= \frac{1}{2} \left( k_1 + \frac{1}{2} q_1 \right)^2 + \frac{1}{2} \left( k_2 + \frac{1}{2} q_2 \right)^2 + \frac{1}{4} (w_u q_1 - w_c q_2)^2,
\end{aligned}$$

где  $v^0 = \rho, \omega$ . Отметим, что в случае, когда  $X$  и  $J/\psi$  находятся на массовой поверхности, т. е.  $\epsilon_\mu(q_1^\mu + q_2^\mu) = 0$  и  $\epsilon_\nu q_1^\nu = 0$ , число независимых лоренцевских структур уменьшается до шести. Далее, используя очевидные соотношения

$$\begin{aligned}
M(X_d \rightarrow J/\psi + \rho) &= -M(X_u \rightarrow J/\psi + \rho), \\
M(X_d \rightarrow J/\psi + \omega) &= M(X_u \rightarrow J/\psi + \omega),
\end{aligned}$$

можно выразить амплитуды распадов физических состояний, определенных уравнением (17), через амплитуды распадов чистого  $X_u$ -состояния:

$$\begin{aligned}
M(X_l \rightarrow J/\psi + \omega) &= (\cos \theta + \sin \theta) M(X_u \rightarrow J/\psi + \omega), \\
M(X_h \rightarrow J/\psi + \omega) &= (\cos \theta - \sin \theta) M(X_u \rightarrow J/\psi + \omega), \\
M(X_l \rightarrow J/\psi + \rho) &= (\cos \theta - \sin \theta) M(X_u \rightarrow J/\psi + \rho), \\
M(X_h \rightarrow J/\psi + \rho) &= -(\cos \theta + \sin \theta) M(X_u \rightarrow J/\psi + \rho).
\end{aligned}$$

В случае распада  $X \rightarrow \bar{D} + D^*$  соответствующий матричный элемент записывается в следующем виде:

$$\begin{aligned}
M^{\mu\nu}(X_q(p, \mu) \rightarrow \bar{D}(q_1) + D^*(q_2, \nu)) &= \\
&= 3\sqrt{2} g_X g_D g_{D^*} \int \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4 i} \int \frac{d^4 k_2}{(2\pi)^4 i} \bar{\Phi}_X(-K_2^2) \Phi_D(-(k_1 + w_c q_1)^2) \times \\
&\quad \times \Phi_{D^*}(-(k_2 + w_c q_2)^2) \text{tr} \left[ \gamma^5 S_c(k_1) \gamma^5 S_q(k_1 + q_1) \gamma^\mu S_c(k_2) \gamma^\nu S_q(k_2 + q_2) \right] + \\
&\quad + (m_q \leftrightarrow m_c, w_q \leftrightarrow w_c) = g^{\mu\nu} M_{XDD^*}^{(1)} + q_1^\mu q_1^\nu M_{XDD^*}^{(2)} + \\
&\quad + q_1^\mu q_2^\nu M_{XDD^*}^{(3)} + q_2^\mu q_1^\nu M_{XDD^*}^{(4)} + q_2^\mu q_2^\nu M_{XDD^*}^{(5)}, \quad (73)
\end{aligned}$$

$$K_2^2 = \frac{1}{8}(k_1 - k_2)^2 + \frac{1}{8}(k_1 - k_2 + q_1 - q_2)^2 + \frac{1}{4}(k_1 + k_2 + w_{cp})^2.$$

Имеется несколько полезных соотношений между различными амплитудами:

$$\begin{aligned} M(X_u \rightarrow \bar{D}^0 + D^{*0}) &= M(X_u \rightarrow D^0 + \bar{D}^{*0}), \\ M(X_d \rightarrow D^+ + D^{*-}) &= M(X_d \rightarrow D^- + \bar{D}^{*+}). \end{aligned} \quad (74)$$

Следует отметить, что распад  $X$ -мезона в пару  $D\bar{D}$  запрещен по квантовым числам.

Используя матричные элементы (72) для распада  $X \rightarrow J/\psi + \rho(\omega)$ , можно вычислить ширины распадов  $X \rightarrow J/\psi + 2\pi(3\pi)$  в предположении, что они идут через промежуточные  $\rho(\omega)$ -резонансы. Мы будем использовать приближение узких резонансов, которое достаточно оправданно в данном случае, поскольку ширины  $\rho(\omega)$ -резонансов значительно меньше их масс. Подробное обсуждение приближения узких резонансов можно найти в недавнем обзоре [134], где имеются ссылки на более ранние работы.

В этом приближении дифференциальное сечение реакции  $X \rightarrow J/\psi + n\pi$  записывается в виде

$$\begin{aligned} \frac{d\Gamma(X \rightarrow J/\psi + n\pi)}{dq^2} &= \frac{1}{8m_X^2\pi} \frac{1}{3} |M_{XJv}|^2 \frac{\Gamma_{v^0} m_{v^0}}{\pi} \frac{p^*(q^2) \mathcal{B}(v^0 \rightarrow n\pi)}{(m_{v^0}^2 - q^2)^2 + \Gamma_{v^0}^2 m_{v^0}^2}, \\ &\frac{1}{3} |M_{XJv}|^2 = \frac{1}{3} \sum_{\text{pol}} |\varepsilon_X^\mu \varepsilon_{J/\psi}^\nu \varepsilon_{v^0}^\rho M_{\mu\nu\rho}|^2. \end{aligned} \quad (75)$$

Здесь  $p^*(q^2) = \lambda^{1/2}(m_X^2, m_{J/\psi}^2, q^2)/2m_X$  является импульсом  $J/\psi$  (или  $(n\pi)$ -системы) в системе центра масс. Квадрат переданного импульса меняется в следующей кинематической области:  $(n m_\pi)^2 \leq q^2 \leq (m_X - m_{J/\psi})^2$ .

Существенным моментом при выводе формулы (75) является пренебрежение корреляционными поляризациями. Как было показано в [134], их учет не дает никаких эффектов, если промежуточные состояния находятся на массовой поверхности. Отметим, что в наших расчетах мы сохраняем зависимость от  $q^2$  в матричных элементах, которая определяется уравнением (72). Мы берем массы и ширины  $\rho(\omega)$ -мезонов из [2] (все размерные величины даны в единицах МэВ):  $m_\rho = 775,49$ ,  $\Gamma_\rho = 146,2$ ,  $\mathcal{B}(\rho \rightarrow 2\pi) = 1$ ,  $m_\omega = 782,65$ ,  $\Gamma_\omega = 8,49$ ,  $\mathcal{B}(\omega \rightarrow 3\pi) = 0,892$ . При численных расчетах мы используем значения свободных параметров модели, которые были определены с помощью фита наименьших квадратов в разд. 3.

Имеются два новых свободных параметра: угол смешивания  $\theta$  в уравнении (17) и параметр  $\Lambda_X$ , характеризующий размер  $X$ -мезона. Мы изменяли



параметр  $\Lambda_X$  в достаточно широком интервале  $2,5 \leq \Lambda_X \leq 4$  ГэВ и нашли, что отношение

$$\frac{\Gamma(X_u \rightarrow J/\psi + 3\pi)}{\Gamma(X_u \rightarrow J/\psi + 2\pi)} \approx 0,25 \quad (76)$$

очень устойчиво при вариации  $\Lambda_X$ . Тогда, используя данный результат и среднее значение, полученное из экспериментальных данных, приведенных в уравнении (2), можно найти

$$\frac{\Gamma(X_{l,h} \rightarrow J/\psi + 3\pi)}{\Gamma(X_{l,h} \rightarrow J/\psi + 2\pi)} \approx 0,25 \left( \frac{1 \pm \operatorname{tg} \theta}{1 \mp \operatorname{tg} \theta} \right)^2 \approx 1, \quad (77)$$

что дает  $\theta \approx \pm 18,4^\circ$  для  $X_l \rightarrow \langle + \rangle$  и  $X_h \rightarrow \langle - \rangle$  соответственно. Эти результаты согласуются с результатами, полученными в [46]:  $\theta \approx \pm 20^\circ$  и [51]:  $\theta \approx \pm 23,5^\circ$ . Ширина распада является достаточно чувствительной к изменению параметра  $\Lambda_X$ , как это показано на рис. 6. В данном интервале абсолютное значение ширины распада  $\Gamma(X \rightarrow J/\psi + n\pi)$  меньше 0,30 МэВ, что соответствует экспериментальному ограничению  $\Gamma(X(3872)) \leq 2,3$  МэВ.

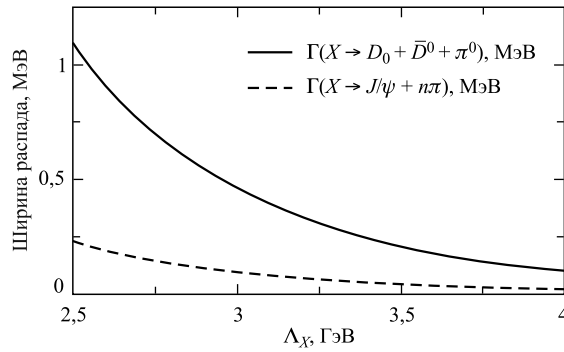


Рис. 6. Зависимость ширин распадов  $\Gamma(X_l \rightarrow \bar{D}^0 D^0 \pi^0)$  и  $\Gamma(X \rightarrow J/\psi + n\pi)$  от параметра  $\Lambda_X$

Аналогичным образом вычисляется ширина распада  $X \rightarrow D^0 \bar{D}^0 \pi^0$ . В приближении узких резонансов дифференциальное сечение данной реакции записывается в виде

$$\frac{d\Gamma(X_u \rightarrow \bar{D}^0 D^0 \pi^0)}{dq^2} = \frac{1}{2m_X^2 \pi} \times \times \frac{1}{3} |M_{XDD^*}|^2 \frac{\Gamma_{D^{*0}} m_{D^{*0}}}{\pi} \frac{p^*(q^2) \mathcal{B}(D^{*0} \rightarrow D^0 \pi^0)}{(m_{D^{*0}}^2 - q^2)^2 + \Gamma_{D^{*0}}^2 m_{D^{*0}}^2}, \quad (78)$$

$$\frac{1}{3}|M_{XDD^*}|^2 = \frac{1}{3} \sum_{\text{pol}} |\varepsilon_X^\mu \varepsilon_{D^{*0}}^\nu M_{\mu\nu}|^2, \quad p^*(q^2) = \frac{\lambda^{1/2}(m_X^2, m_{D^0}^2, q^2)}{2m_X},$$

где  $M_{\mu\nu}$  — матричный элемент, определенный уравнением (73). Кинематическая область задается неравенствами

$$(m_{D^0} + m_{\pi^0})^2 \leq q^2 \leq (m_X - m_{D^0})^2$$

и является очень узкой:  $3,99928 \leq q^2 \leq 4,02672$  ГэВ<sup>2</sup>. Отметим то, что мы учли оба канала с промежуточными  $D^{*0}$ - и  $\bar{D}^{*0}$ -мезонами. Мы брали массы и ширины  $D^{*+}$ - и  $D^{*0}$ -мезонов из данных [2, 25, 48] (все размерные величины в единицах МэВ):

$$\begin{aligned} m_{D^{*+}} &= 2010,27, & \Gamma_{D^{*+}} &= 0,096, \\ m_{D^{*0}} &= 2006,97, & \mathcal{B}(D^{*+} \rightarrow D^+ \pi^0) &= 0,307, \\ \Gamma_{D^{*0}} &= 0,070, & \mathcal{B}(D^{*0} \rightarrow D^0 \pi^0) &= 0,619. \end{aligned}$$

Зная эти значения, ширину распада можно вычислить по формуле

$$\Gamma(X_l \rightarrow \bar{D}^0 D^0 \pi^0) = \cos^2 \theta^2 \Gamma(X_u \rightarrow \bar{D}^0 D^0 \pi^0).$$

Зависимость ширины от параметра  $\Lambda_X$  показана на том же рис. 6. Используя результаты [2]

$$\begin{aligned} 10^5 \mathcal{B}(B^\pm \rightarrow K^\pm X) \mathcal{B}(X \rightarrow J/\psi \pi^+ \pi^-) &= 0,95 \pm 0,19, \\ 10^5 \mathcal{B}(B^\pm \rightarrow K^\pm X) \mathcal{B}(X \rightarrow D^0 \bar{D}^0 \pi^0) &= 10,0 \pm 4,0, \end{aligned}$$

можно определить отношение

$$\frac{\Gamma(X \rightarrow D^0 \bar{D}^0 \pi^0)}{\Gamma(X \rightarrow J/\psi \pi^+ \pi^-)} = 10,5 \pm 4,7. \quad (79)$$

Теоретическое значение, полученное из отношений ширин распадов, показанных на рис. 6, равно

$$\left. \frac{\Gamma(X \rightarrow D^0 \bar{D}^0 \pi^0)}{\Gamma(X \rightarrow J/\psi \pi^+ \pi^-)} \right|_{\text{theor}} = 4,5 \pm 0,2. \quad (80)$$

#### 4.2. Влияние $X$ -мезона на поведение сечения диссоциации $J/\psi$ -мезона.

$X$ -мезон, рассматриваемый как 4-кварковое состояние  $\bar{c}c\bar{q}q$ , может оказать влияние на поведение сечения диссоциации  $J/\psi$ -мезона легкими мезонами. Например, в реакции  $J/\psi + \pi \rightarrow D + \bar{D}$   $X$ -мезон может появиться в  $s$ -канале в промежуточном состоянии. Прежде чем переходить к количественным оценкам, мы хотели бы отметить, что данная реакция диссоциации  $J/\psi$ -мезона была рассмотрена в рамках ранней версии нашей модели — релятивистской

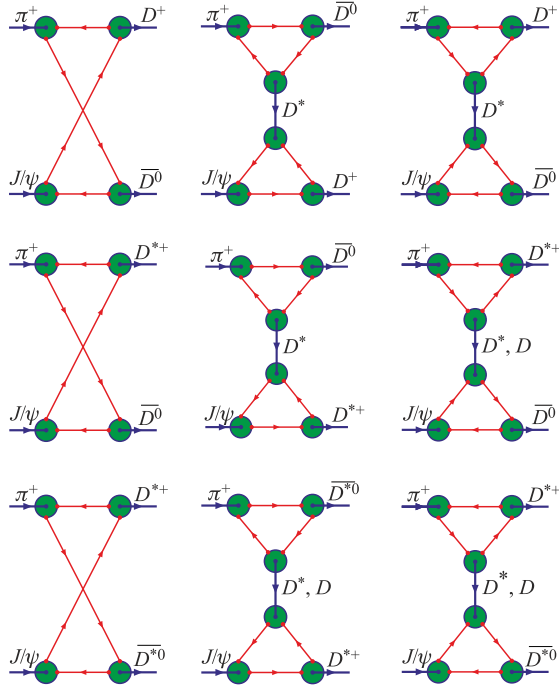


Рис. 7. Диаграммы, описывающие реакцию диссоциации  $J/\psi$ -мезона в [94]

модели конститuentных кварков в работе [94]. Для полноты картины мы приводим здесь соответствующие диаграммы Фейнмана (рис. 7).

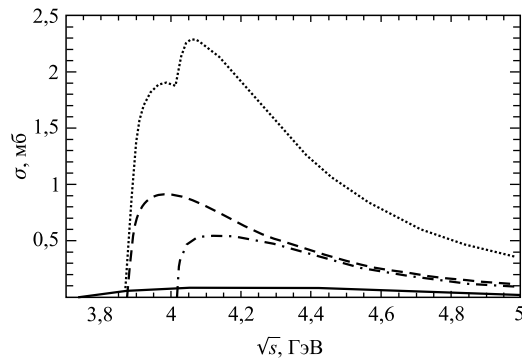


Рис. 8. Полное сечение реакции диссоциации  $J/\psi$ -мезона, вычисленное в [94]

Поведение сечений каждой отдельной моды  $J/\psi + \pi \rightarrow D + \bar{D}$ ,  $J/\psi + \pi \rightarrow D^* + \bar{D}$ ,  $J/\psi + \pi \rightarrow D^* + \bar{D}^*$ , так же как и поведение суммарного сечения, показаны на рис. 8.

Если мы учтем влияние  $X$ -мезона, то это приведет к появлению дополнительной  $s$ -канальной диаграммы, показанной на рис. 9. Соответствующий вклад в сечение записывается в виде

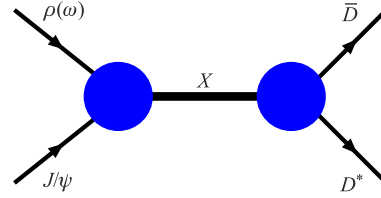


Рис. 9. Диаграмма, описывающая вклад  $X$ -резонанса в процесс  $J/\psi$ -диссоциации

$$\begin{aligned} \sigma(J/\psi + v^0 \rightarrow D + \bar{D}^*) + \sigma(J/\psi + v^0 \rightarrow \bar{D} + D^*) = \\ = 2(\cos \theta \mp \sin \theta)^2 \sigma(J/\psi + v^0 \rightarrow X_u \rightarrow \bar{D} + D^*), \\ \sigma(J/\psi + v^0 \rightarrow X_u \rightarrow \bar{D} + D^*) = \\ = \frac{1}{16\pi s} \frac{\lambda^{1/2}(s, m_D^2, m_{D^*}^2)}{\lambda^{1/2}(s, m_{J/\psi}^2, m_{v^0}^2)} \frac{1}{9} \sum_{\text{pol}} \frac{|A|^2}{(s - m_X^2)^2 + \Gamma_X^2 m_X^2}, \quad (81) \\ A = \varepsilon_{J/\psi}^\nu \varepsilon_{v^0}^\rho M_{\mu\nu\rho} \left( -g^{\mu\alpha} + \frac{p^\mu p^\alpha}{m_X^2} \right) \varepsilon_{D^*}^\beta M_{\alpha\beta}, \end{aligned}$$

где  $p = p_1 + p_2 = q_1 + q_2$ . Если  $v^0 = \rho$ , то берем знак «минус», если  $\omega$  — знак «плюс». Мы также пренебрегаем эффектами, нарушающими сохранение изотопического спина. Отметим, что для заряженных  $D$ -мезонов в конечном состоянии  $E = \sqrt{s} \geq m_{D^+} + m_{D^{*+}}$ , в то время как для нейтральных  $D$ -мезонов в конечном состоянии  $E \geq m_{J/\psi} + m_{v^0}$ . В первом случае сечение обращается в нуль на пороге реакции  $E = m_{D^+} + m_{D^{*+}}$ . В последнем случае сечение «взрывается» при  $E = m_{J/\psi} + m_{v^0}$ , потому что канал  $J/\psi + v^0 \rightarrow D^0 + \bar{D}^{*0}$  экзотермичен и кинематическая функция  $\lambda^{1/2}(s, m_{J/\psi}^2, m_{v^0}^2)$  в знаменателе обращается в нуль. Для численных оценок мы полагаем

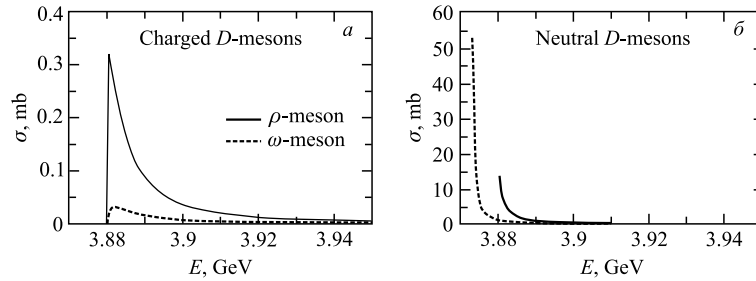


Рис. 10. Сечение реакции  $J/\psi + v^0 \rightarrow X \rightarrow D + D^*$ : а) заряженные  $D$ -мезоны; б) нейтральные  $D$ -мезоны

$\Gamma_X = 1$  МэВ. Поведение сечения (81) показано на рис. 10. В случае заряженных  $D$ -мезонов (рис. *a*) максимальное значение сечения составляет около 0,32 мб при  $E = 3,88$  ГэВ. Этот результат сравним с результатом сечения  $\sigma(J/\psi + \pi \rightarrow D + \bar{D}^*) \approx 0,9$  мб при  $E = 4,0$  ГэВ (см. рис. 8). Таким образом,  $X$ -резонанс дает значительный вклад в сечение  $J/\psi$ -диссоциации.

**4.3. Однофотонный распад  $X \rightarrow \gamma + J/\psi$ .** Однофотонный распад  $X \rightarrow \gamma + J/\psi$  описывается набором диаграмм Фейнмана, изображенных на рис. 11.

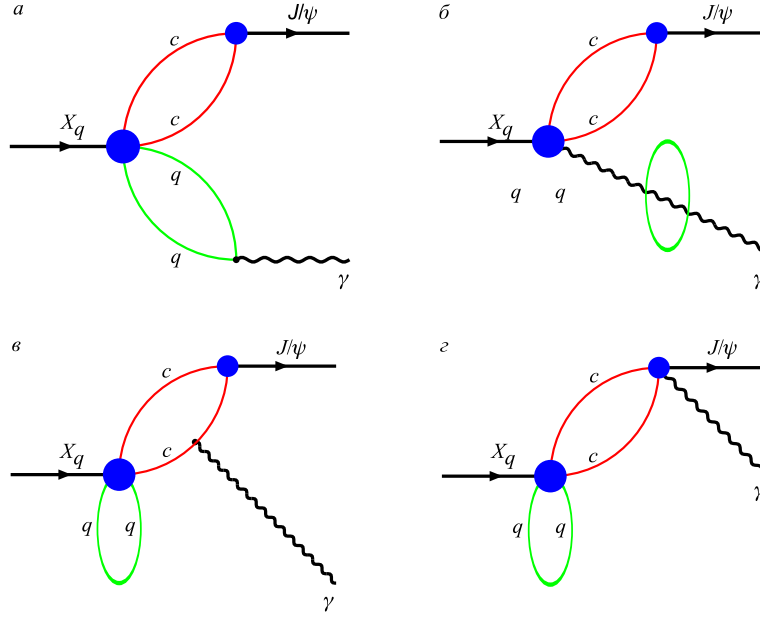


Рис. 11. Диаграммы Фейнмана для распада  $X \rightarrow \gamma + J/\psi$

Инвариантный матричный элемент записывается в виде

$$M(X_q(p) \rightarrow J/\psi(q_1) \gamma(q_2)) = i(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p - q_1 - q_2) \varepsilon_X^\mu \varepsilon_\gamma^\rho \varepsilon_{J/\psi}^\nu T_{\mu\rho\nu}(q_1, q_2), \quad (82)$$

где

$$T_{\mu\rho\nu}(q_1, q_2) = \sum_{i=a,b,c,d} T_{\mu\rho\nu}^{(i)}(q_1, q_2),$$

$$T_{\mu\rho\nu}^{(a)} = 6\sqrt{2} g_X g_{J/\psi} e_q \times$$

$$\times \int \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4 i} \int \frac{d^4 k_2}{(2\pi)^4 i} \tilde{\Phi}_X(-K_a^2) \tilde{\Phi}_{J/\psi} \left( - \left( k_1 + \frac{1}{2} q_1 \right)^2 \right) \times$$

$$\times \frac{1}{2} \text{tr} [\gamma_5 S_c(k_1) \gamma_\nu S_c(k_1 + q_1) \gamma_\mu S_q(k_2) \gamma_\rho S_q(k_2 + q_2) - (\gamma_5 \leftrightarrow \gamma_\mu)],$$

$$K_a^2 = \frac{1}{2} \left( k_1 + \frac{1}{2} q_1 \right)^2 + \frac{1}{2} \left( k_2 + \frac{1}{2} q_2 \right)^2 + \frac{1}{4} (w_q q_1 - w_c q_2)^2,$$

$$T_{\mu\rho\nu}^{(b)} = 6\sqrt{2} g_X g_{J/\psi} \int \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^{4i}} \int \frac{d^4 k_2}{(2\pi)^{4i}} \tilde{\Phi}_{J/\psi} \left( - \left( k_2 + \frac{1}{2} q_1 \right)^2 \right) \times \\ \times \tilde{E}_{X\rho}(p_1, \dots, p_4, r) \frac{1}{2} \text{tr} [\gamma_5 S_q(k_1) \gamma_\mu S_c(k_2) \gamma_\nu S_c(k_2 + q_1) - (\gamma_5 \leftrightarrow \gamma_\mu)],$$

$$p_1 = k_2, \quad p_2 = k_2 + q_1, \quad p_3 = p_4 = -k_1, \quad r = -q_2,$$

$$T_{\mu\rho\nu}^{(c)} = 6\sqrt{2} g_X g_{J/\psi} e_c \times \\ \times \int \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^{4i}} \int \frac{d^4 k_2}{(2\pi)^{4i}} \tilde{\Phi}_X(-K_c^2) \tilde{\Phi}_{J/\psi} \left( - \left( k_2 + q_2 + \frac{1}{2} q_1 \right)^2 \right) \times \\ \times \frac{1}{2} \text{tr} [\gamma_5 S_q(k_1) \gamma_\mu S_c(k_2) \gamma_\rho S_c(k_2 + q_2) \gamma_\nu S_c(k_2 + p) - (\gamma_5 \leftrightarrow \gamma_\mu)],$$

$$K_c^2 = \frac{1}{2} k_1^2 + \frac{1}{2} \left( k_2 + \frac{1}{2} p \right)^2 + \frac{1}{4} w_q^2 p^2,$$

$$T_{\mu\rho\nu}^{(d)} = 6\sqrt{2} g_X g_{J/\psi} e_c \int \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^{4i}} \int \frac{d^4 k_2}{(2\pi)^{4i}} \tilde{\Phi}_X(-K_c^2) \tilde{E}_{J/\psi\rho}(p_1, p_2, q) \times \\ \times \frac{1}{2} \text{tr} [\gamma_\mu S_q(k_1) \gamma_5 S_c(k_2) \gamma_\nu S_c(k_2 + p) - (\gamma_5 \leftrightarrow \gamma_\mu)],$$

$$p_1 = -k_2 - p, \quad p_2 = -k_2, \quad q = -q_2.$$

Мы проверили аналитически до выполнения интегрирования по петлевым переменным, что данный матричный элемент удовлетворяет условию калибровочной инвариантности  $q_2^\rho T_{\mu\rho\nu}(q_1, q_2) = 0$ . Для проверки достаточно использовать тождества

$$S(k_2) \not{q}_2 S(k_2 + q_2) = S(k_2 + q_2) - S(k_2),$$

$$\int_0^1 d\tau \tilde{\Phi}'(-\tau a - (1-\tau)b)(a-b) = \tilde{\Phi}(-b) - \tilde{\Phi}(-a).$$

Вычисление петлевых интегралов в уравнении (82) происходит с использованием методов, описанных в разд. 1. Поскольку все частицы находятся на массовой поверхности, выполняются условия

$$\varepsilon_X^\mu p_\mu = 0, \quad \varepsilon_{J/\psi}^\nu q_{1\nu} = 0, \quad \varepsilon_\gamma^\rho q_{2\rho} = 0. \quad (83)$$

Данные условия уменьшают число независимых лоренцевских структур до пяти:

$$T_{\mu\rho\nu}(q_1, q_2) = \varepsilon_{q_2\mu\nu\rho}(q_1 \cdot q_2)W_1 + \varepsilon_{q_1q_2\nu\rho}q_{1\mu}W_2 + \varepsilon_{q_1q_2\mu\rho}q_{2\nu}W_3 + \varepsilon_{q_1q_2\mu\nu}q_{1\rho}W_4 + \varepsilon_{q_1\mu\nu\rho}(q_1 \cdot q_2)W_5. \quad (84)$$

Далее, используя условие калибровочной инвариантности

$$q_2^\rho T_{\mu\rho\nu} = (q_1 \cdot q_2)\varepsilon_{q_1q_2\mu\nu}(W_4 + W_5) = 0, \quad (85)$$

получаем  $W_4 = -W_5$ , что уменьшает число независимых инвариантов до четырех:

$$T_{\mu\rho\nu}(q_1, q_2) = (q_1 \cdot q_2)\varepsilon_{q_2\mu\nu\rho}W_1 + \varepsilon_{q_1q_2\nu\rho}q_{1\mu}W_2 + \varepsilon_{q_1q_2\mu\rho}q_{2\nu}W_3 + (\varepsilon_{q_1q_2\mu\nu}q_{1\rho} - (q_1 \cdot q_2)\varepsilon_{q_1\mu\nu\rho})W_4. \quad (86)$$

Условие калибровочной инвариантности, записанное в виде  $W_4 = -W_5$ , проверяется численно с высокой точностью вычислений.

Однако существуют еще два нетривиальных соотношения между оставшимися четырьмя структурами, которые могут быть выведены из условия того [135], что абсолютно антисимметричный тензор 5-го ранга вида

$$T_{\mu[\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4\nu_5]} = g_{\mu\nu_1}\varepsilon_{\nu_2\nu_3\nu_4\nu_5} + \text{cycl.}(\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4\nu_5) \quad (87)$$

тождественно равен нулю в четырех измерениях. Последовательно сворачивая данный тензор с произведением 4-векторов  $q_1^\mu q_1^{\nu_1} q_2^{\nu_2}$  и  $q_2^\mu q_1^{\nu_1} q_2^{\nu_2}$ , находим два тождества

$$q_1^2\varepsilon_{q_2\mu\nu\rho} + \varepsilon_{q_1q_2\nu\rho}q_{1\mu} + (\varepsilon_{q_1q_2\mu\nu}q_{1\rho} - (q_1 \cdot q_2)\varepsilon_{q_1\mu\nu\rho}) = 0, \quad (88)$$

$$(q_1 \cdot q_2)\varepsilon_{q_2\mu\nu\rho} - \varepsilon_{q_1q_2\nu\rho}q_{1\mu} - \varepsilon_{q_1q_2\mu\rho}q_{2\nu} = 0. \quad (89)$$

Эти два условия уменьшают набор независимых структур до двух, что соответствует числу независимых инвариантов в реакции с однофотонным обменом: так называемые  $E1$ - и  $M2$ -переходы.

Используя тождества (88) и (89) в уравнении (86), получаем

$$T_{\mu\rho\nu} = \left( W_1 + W_3 - \frac{m_{J/\psi}^2}{(q_1 \cdot q_2)} W_4 \right) \varepsilon_{q_1q_2\mu\rho}q_{2\nu} + \left( W_1 + W_2 - \left( 1 + \frac{m_{J/\psi}^2}{(q_1 \cdot q_2)} \right) W_4 \right) \varepsilon_{q_1q_2\nu\rho}q_{1\mu}. \quad (90)$$

Сравнивая данное выражение с соответствующими амплитудами в приложении, находим, что первый и второй члены в (90) описывают соответственно переходы с продольными и поперечными компонентами  $J/\psi$ -мезона.

Величины  $W_i$  представляют собой четырехкратные интегралы вида

$$W_i = \int_0^\infty dt \int_0^1 d^3\beta F_i(t, \beta_1, \beta_2, \beta_3), \quad (91)$$

где мы для простоты опустили дополнительную зависимость подынтегральной функции  $F_i$  от переменных  $p^2, q_1^2, q_2^2; m_q, m_c, s_X, s_{J/\psi}$  с  $s_X = 1/\Lambda_X^2$  и  $s_{J/\psi} = 1/\Lambda_{J/\psi}^2$ . Интеграл в формуле (91) имеет точки ветвления при  $p^2 = 4(m_q + m_c)^2$  (диаграмма на рис. 11, *a*) и при  $p^2 = 4m_c^2$  (диаграммы на рис. 11, *b–г*). В этих точках интегралы начинают расходиться в обычном смысле, когда  $t \rightarrow \infty$ . Поэтому для проверки калибровочной инвариантности амплитуды  $T_{\mu\rho\nu}(q_1, q_2)$  будем предполагать, что квадрат импульса  $X$ -мезона меньше унитарного порога, т. е.  $p^2 < 4m_c^2$ . В этом случае мы проверили численно с высокой точностью, что для  $m_X = 3,1$  ГэВ и  $m_{J/\psi} = 2,9$  ГэВ выполняется калибровочное условие  $W_4 = -W_5$ . Отметим, что данное калибровочное условие не зависит от констант связи  $g_X$  и  $g_{J/\psi}$ , и поэтому мы опустили их при численных расчетах.

Следующим шагом является введение инфракрасного обрезания  $1/\lambda^2$  на верхнем пределе при интегрировании по  $t$  в уравнении (91). При этом устраняются все возможные пороговые сингулярности, что соответствует введению конфайнмента кварков. Численное значение параметра инфракрасного обрезания было найдено в разд. 3 с помощью фитирования по экспериментальным данным:  $\lambda = 181$  МэВ. Однако для такого значения  $\lambda$  вклады от диаграмм на рис. 11, *b–г* имеют нефизический рост при  $p^2 = m_X^2$  по сравнению с вкладом из диаграммы на рис. 11, *a*. Поскольку роль диаграмм на рис. 11, *b–г* состоит в основном в обеспечении калибровочной инвариантности матричного элемента, на конечном этапе после построения калибровочно-инвариантной амплитуды мы будем рассматривать вклады лишь от диаграммы на рис. 11, *a*.

Далее оказывается удобным представить ширину распада через спиральные и мультипольные амплитуды. Проекция лоренцевских амплитуд в спиральные дана в приложении. Имеем

$$\Gamma(X \rightarrow \gamma J/\psi) = \frac{1}{12\pi} \frac{|\mathbf{q}_2|}{m_X^2} (|H_L|^2 + |H_T|^2) = \frac{1}{12\pi} \frac{|\mathbf{q}_2|}{m_X^2} (|A_{E1}|^2 + |A_{M2}|^2), \quad (92)$$

где спиральные амплитуды  $H_L$  и  $H_T$  следующим образом выражаются через лоренцевские амплитуды:

$$H_L = i \frac{m_X^2}{m_{J/\psi}} |\mathbf{q}_2|^2 \left[ W_1 + W_3 - \frac{m_{J/\psi}^2}{m_X |\mathbf{q}_2|} W_4 \right],$$



$$H_T = -im_X |\mathbf{q}_2|^2 \left[ W_1 + W_2 - \left( 1 + \frac{m_{J/\psi}^2}{m_X |\mathbf{q}_2|} \right) W_4 \right],$$

$$|\mathbf{q}_2| = \frac{m_X^2 - m_{J/\psi}^2}{2m_X}. \quad (93)$$

Отметим, что мультипольные амплитуды  $E1$  и  $M2$  связаны со спиральными как  $A_{E1/M2} = (H_L \mp H_T)/\sqrt{2}$ . Если возьмем параметр  $\Lambda_X = 3,0$  ГэВ, то получаем  $A_{M2}/A_{E1} = 0,11$ , т. е. электрическая мультипольная амплитуда  $A_{E1}$  является доминирующей, как и ожидалось. Тем не менее наши предсказания для углового распределения  $W(\vartheta) \sim 1 - 0,52 \cos^2 \vartheta$  заметно отличаются от известной формулы  $W(\vartheta) \sim 1 - 0,333 \cos^2 \vartheta$  для  $E1$ -перехода. Было бы интересно проверить экспериментально данное следствие нашей модели для тетракварка.

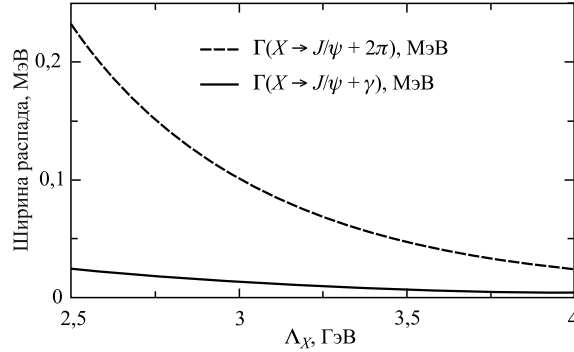


Рис. 12. Зависимость ширин распадов  $\Gamma(X_l \rightarrow \gamma + J/\psi)$  и  $\Gamma(X_l \rightarrow J/\psi + 2\pi)$  от параметра  $\Lambda_X$

На рис.12 показан график зависимости ширины распада  $\Gamma(X_l \rightarrow J/\psi + \gamma)$ , а также для сравнения ширины распада  $\Gamma(X_l \rightarrow J/\psi + 2\pi)$  от параметра  $\Lambda_X$ . Отметим, что радиационная ширина распада состояния  $X_h = -X_u \sin \theta + X_d \cos \theta$  почти на порядок меньше, чем для состояния  $X_l = X_u \cos \theta + X_d \sin \theta$ . Если взять  $\Lambda_X \in (3, 4)$  ГэВ со средним значением  $\Lambda_X = 3,5$  ГэВ, то наши предсказания для отношений ширин запишутся следующим образом:

$$\frac{\Gamma(X_l \rightarrow \gamma + J/\psi)}{\Gamma(X_l \rightarrow J/\psi + 2\pi)} \Big|_{\text{theor}} = 0,15 \pm 0,03, \quad (94)$$

что очень хорошо согласуется с экспериментальными данными, полученными коллаборацией Belle [8]:

$$\frac{\Gamma(X \rightarrow \gamma + J/\psi)}{\Gamma(X \rightarrow J/\psi 2\pi)} = \begin{cases} 0,14 \pm 0,05 & \text{Belle [8],} \\ 0,22 \pm 0,06 & \text{BABAR [15].} \end{cases} \quad (95)$$

## 5. ФОРМФАКТОРЫ ДЛЯ ПОЛУЛЕПТОННЫХ, НЕЛЕПТОННЫХ И РЕДКИХ РАСПАДОВ $B(B_s)$ -МЕЗОНА

**5.1. Переходные формфакторы.** Учитывая тот факт, что все модельные параметры зафиксированы, вычислим формфакторы, описывающие переходы тяжелых  $B(B_s)$ -мезонов в легкие мезоны, например,  $B, B_s \rightarrow \pi, K, \rho, K^*, \phi$ . Эти величины представляют большой интерес из-за необходимости их знания при описании полулептонных, нелептонных и редких распадов  $B$ - и  $B_s$ -мезонов. Как уже отмечалось во введении, они были вычислены, в частности, в рамках подхода правил сумм на световом конусе в области малых значений переданного импульса и затем экстраполированы во всю кинематическую область.

Прежде всего дадим определение формфакторов переходов псевдоскаляр–псевдоскаляр и псевдоскаляр–вектор:

$$\begin{aligned} \langle P'_{[\bar{q}_3 q_2]}(p_2) | \bar{q}_2 O^\mu q_1 | P_{[\bar{q}_3 q_1]}(p_1) \rangle &= \\ &= N_c g_P g_{P'} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4 i} \tilde{\Phi}_P(-(k+w_{13})^2) \tilde{\Phi}_{P'}(-(k+w_{23})^2) \times \\ &\times \text{tr} [O^\mu S_1(k+p_1) \gamma^5 S_3(k) \gamma^5 S_2(k+p_2)] = F_+(q^2) P^\mu + F_-(q^2) q^\mu, \end{aligned} \quad (96)$$

$$\begin{aligned} \langle P'_{[\bar{q}_3 q_2]}(p_2) | \bar{q}_2 (\sigma^{\mu\nu} q_\nu) q_1 | P_{[\bar{q}_3 q_1]}(p_1) \rangle &= \\ &= N_c g_P g_{P'} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4 i} \tilde{\Phi}_P(-(k+w_{13})^2) \tilde{\Phi}_{P'}(-(k+w_{23})^2) \times \\ &\times \text{tr} [\sigma^{\mu\nu} q_\nu S_1(k+p_1), \gamma^5 S_3(k), \gamma^5 S_2(k+p_2)] = \\ &= \frac{i}{m_1 + m_2} (q^2 P^\mu - q \cdot P q^\mu) F_T(q^2), \end{aligned} \quad (97)$$

$$\begin{aligned} \langle V(p_2, \epsilon_2)_{[\bar{q}_3 q_2]} | \bar{q}_2 O^\mu q_1 | P_{[\bar{q}_3 q_1]}(p_1) \rangle &= \\ &= N_c g_P g_V \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4 i} \tilde{\Phi}_P(-(k+w_{13})^2) \tilde{\Phi}_V(-(k+w_{23})^2) \times \\ &\times \text{tr} [O^\mu S_1(k+p_1) \gamma^5 S_3(k) \not{\epsilon}_2^\dagger S_2(k+p_2)] = \frac{\epsilon_\nu^\dagger}{m_1 + m_2} (-g^{\mu\nu} P \cdot q A_0(q^2) + \\ &+ P^\mu P^\nu A_+(q^2) + q^\mu P^\nu A_-(q^2) + i \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} P_\alpha q_\beta V(q^2)), \end{aligned} \quad (98)$$

$$\begin{aligned}
& \langle V(p_2, \epsilon_2)_{[\bar{q}_3 q_2]} | \bar{q}_2 (\sigma^{\mu\nu} q_\nu (1 + \gamma^5)) q_1 | P_{[\bar{q}_3 q_1]}(p_1) \rangle = \\
& = N_c g_P g_V \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4 i} \tilde{\Phi}_P(-(k + w_{13})^2) \tilde{\Phi}_V(-(k + w_{23})^2) \times \\
& \times \text{tr} \left[ (\sigma^{\mu\nu} q_\nu (1 + \gamma^5)) S_1(k + p_1) \gamma^5 S_3(k) \not{\epsilon}_2^\dagger S_2(k + p_2) \right] = \\
& = \epsilon_\nu^\dagger (-g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu / q^2) P \cdot q a_0(q^2) + \\
& + (P^\mu P^\nu - q^\mu P^\nu P \cdot q / q^2) a_+(q^2) + i \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} P_\alpha q_\beta g(q^2). \quad (99)
\end{aligned}$$

Мы используем обозначения  $P = p_1 + p_2$  и  $q = p_1 - p_2$ . Для векторных мезонов на массовой поверхности  $\epsilon_2^\dagger \cdot p_2 = 0$ . И для всех мезонов  $p_i^2 = m_i^2$ . Поскольку имеются три вида кварков, участвующих в переходе, мы ввели два индекса  $w_{ij} = m_{q_j} / (m_{q_i} + m_{q_j})$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ), так что  $w_{ij} + w_{ji} = 1$ . Формфакторы в уравнении (99) удовлетворяют условию  $a_0(0) = a_+(0)$ , которое гарантирует, что кинематическая сингулярность не возникает в матричном элементе при  $q^2 = 0$ . Для полноты картины мы даем связь наших формфакторов с определениями, используемыми в ряде других работ (см., например, [111]). Эти соотношения имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
F_+ &= f_+, \quad F_- = -\frac{m_1^2 - m_2^2}{q^2} (f_+ - f_0), \quad F_T = f_T, \\
A_0 &= \frac{m_1 + m_2}{m_1 - m_2} A_1, \quad A_+ = A_2, \quad A_- = \frac{2m_2(m_1 + m_2)}{q^2} (A_3 - A_0), \quad V = V, \\
a_0 &= T_2, \quad g = T_1, \quad a_+ = T_2 + \frac{q^2}{m_1^2 - m_2^2} T_3.
\end{aligned} \quad (100)$$

Формфакторы (100) удовлетворяют следующим ограничениям:

$$A_0(0) = A_3(0), \quad 2m_2 A_3(q^2) = (m_1 + m_2) A_1(q^2) - (m_1 - m_2) A_2(q^2). \quad (101)$$

На рис. 13–16 мы приводим поведение формфакторов, вычисленных в рамках ковариантной кварковой модели во всей кинематической области  $0 \leq q^2 \leq q_{\text{max}}^2$ . Для сравнения приводятся также результаты анализа правил сумм на световом конусе [110]. В табл. 3 мы собрали наши результаты для формфакторов в точке максимальной отдачи  $q^2 = 0$  и сравнили с результатами, полученными в рамках других подходов.

Как было предложено в [113, 114], можно проверить, насколько хорошо формфакторы, вычисленные в ковариантной кварковой модели, удовлетворяют трем соотношениям при малой отдаче, полученным в [112] для трех пар формфакторов  $(T_1, V)$ ,  $(T_2, A_1)$  и  $(T_3, A_2)$ . На рис. 17 мы построили

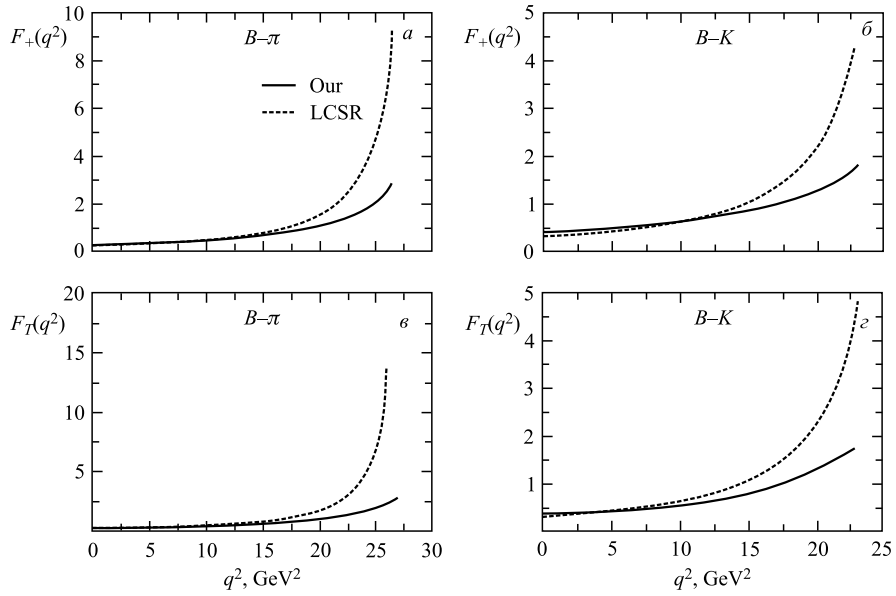


Рис. 13. Наши результаты для формфакторов, определенных уравнениями (96) и (97). Рис. а, в для  $B-\pi$ -перехода; рис. б, г для  $B-K$ -перехода. Для сравнения приведены кривые по правилам сумм на световом конусе из [110]

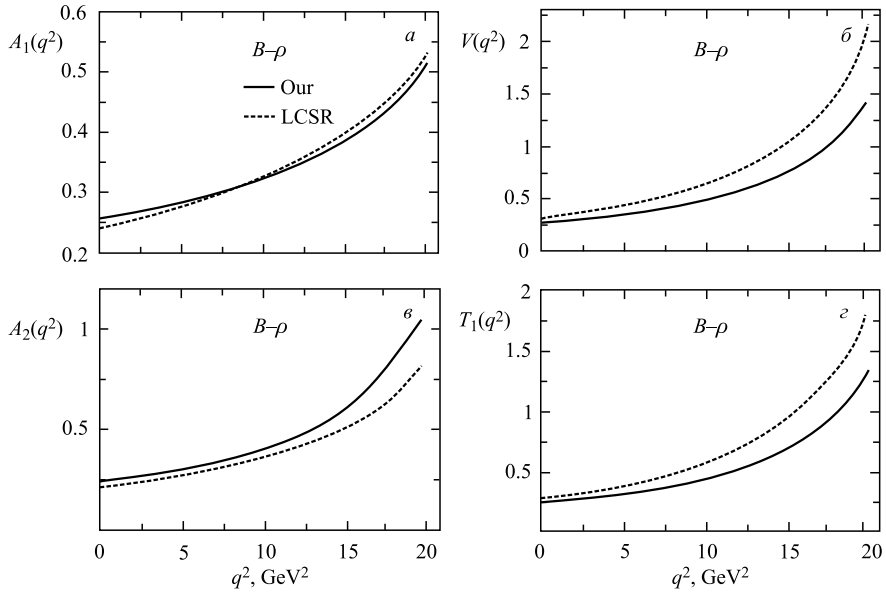


Рис. 14. Наши результаты для формфакторов, определенных в уравнениях (98) и (99) для  $B-\rho$ -перехода. Для сравнения приведены соответствующие кривые из [110]

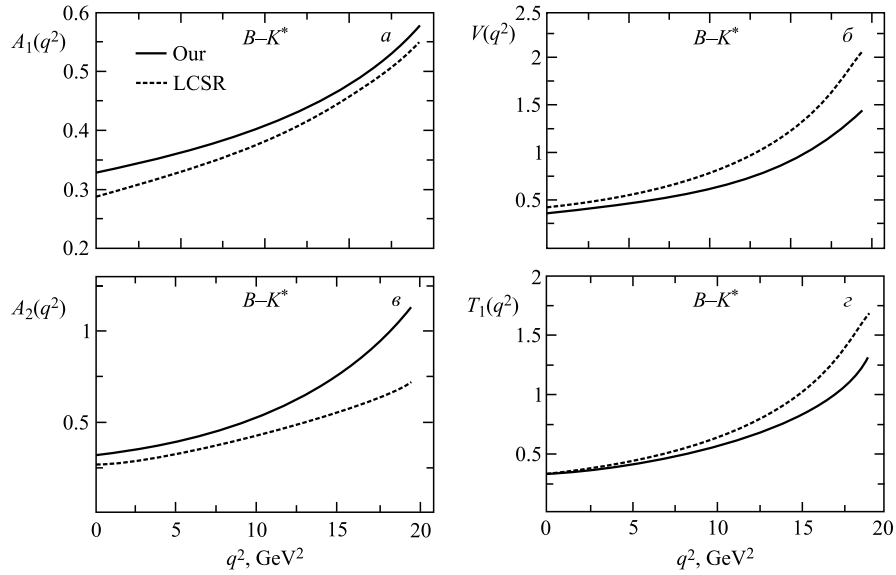


Рис. 15. Наши результаты для формфакторов, определенных в уравнениях (98) и (99) для  $B-K^*$ -перехода. Для сравнения приведены соответствующие кривые из [110]

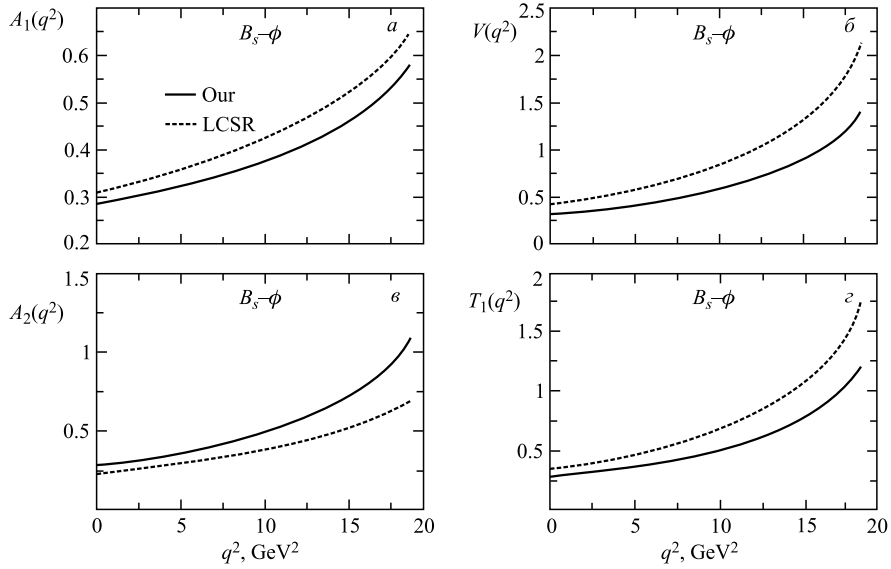


Рис. 16. Наши результаты для формфакторов, определенных в уравнениях (98) и (99) для  $B_s-\phi$ -перехода. Для сравнения приведены соответствующие кривые из [110]

Таблица 3. Формфакторы при  $q^2 = 0$ , вычисленные в различных подходах

Формфактор	Данная работа	[110]	[111]	[115]	[121]	[116, 117]	[118]	[90]
$F_+^{B\pi}(0)$	0,29	$0,258 \pm 0,031$	$0,25 \pm 0,05$	$0,24 \pm 0,05$	$0,24 \pm 0,03$	0,29	0,22	0,27
$F_+^{BK}(0)$	0,42	$0,335 \pm 0,042$	$0,31 \pm 0,04$	$0,30 \pm 0,06$	$0,25 \pm 0,03$	0,36	...	0,36
$F_T^{B\pi}(0)$	0,27	$0,253 \pm 0,028$	$0,21 \pm 0,04$	$0,25 \pm 0,05$	...	0,28	...	...
$F_T^{BK}(0)$	0,40	$0,359 \pm 0,038$	$0,27 \pm 0,04$	$0,32 \pm 0,06$	$0,14 \pm 0,03$	0,35	...	0,34
$V^{B\rho}(0)$	0,28	$0,324 \pm 0,029$	$0,32 \pm 0,10$	$0,31 \pm 0,06$	...	0,31	0,30	...
$V^{BK^*}(0)$	0,36	$0,412 \pm 0,045$	$0,39 \pm 0,11$	$0,37 \pm 0,07$	$0,47 \pm 0,03$	0,44	...	...
$V^{B_s\phi}(0)$	0,32	$0,434 \pm 0,035$	...	...	$0,434 \pm 0,035$	...	...	...
$A_1^{B\rho}(0)$	0,26	$0,240 \pm 0,024$	$0,24 \pm 0,08$	$0,24 \pm 0,05$	...	0,26	0,27	...
$A_1^{BK^*}(0)$	0,33	$0,290 \pm 0,036$	$0,30 \pm 0,08$	$0,29 \pm 0,06$	$0,37 \pm 0,03$	0,36	...	...
$A_1^{B_s\phi}(0)$	0,29	$0,311 \pm 0,029$	...	...	...	...	...	...
$A_2^{B\rho}(0)$	0,24	$0,221 \pm 0,023$	$0,21 \pm 0,09$	$0,25 \pm 0,05$	...	0,24	0,28	...
$A_2^{BK^*}(0)$	0,32	$0,258 \pm 0,035$	$0,26 \pm 0,08$	$0,30 \pm 0,06$	$0,40 \pm 0,03$	0,32	...	...
$A_2^{B_s\phi}(0)$	0,28	$0,234 \pm 0,028$	...	...	...	...	...	...
$T_1^{B\rho}(0)$	0,25	$0,268 \pm 0,021$	$0,28 \pm 0,09$	$0,26 \pm 0,05$	...	0,27	...	...
$T_1^{BK^*}(0)$	0,33	$0,332 \pm 0,037$	$0,33 \pm 0,10$	$0,30 \pm 0,06$	$0,19 \pm 0,03$	0,39	...	...
$T_1^{B_s\phi}(0)$	0,28	$0,349 \pm 0,033$	...	...	...	...	...	...

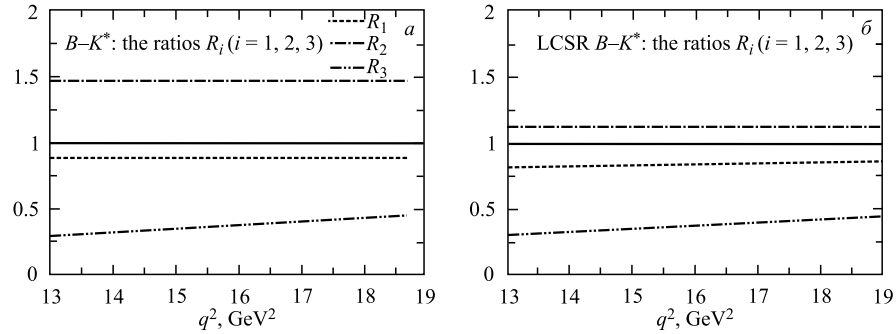


Рис. 17. Наши результаты для отношений формфакторов, определенных в уравнении (102) для  $B-K^*$ -перехода

соответствующие отношения

$$R_1 = \frac{T_1(q^2)}{V(q^2)}, \quad R_2 = \frac{T_2(q^2)}{A_1(q^2)}, \quad R_3 = \frac{q^2}{m_B^2} \frac{T_3(q^2)}{A_2(q^2)}. \quad (102)$$

Эти отношения в пределе симметрии тяжелых кварков и при малой отдаче все должны быть порядка  $1 - (2\alpha_s/(3\pi) \ln(\mu/m_b))$ , т. е. близко к 1. Из рис. 17 следует, что, так же как и экстраполированные формфакторы в правилах сумм на световом конусе, формфакторы, полученные в ковариантной кварковой модели, удовлетворяют этим соотношениям достаточно хорошо в случае  $R_1$  и  $R_2$ . Согласие не очень хорошее в случае отношения  $R_3$ .

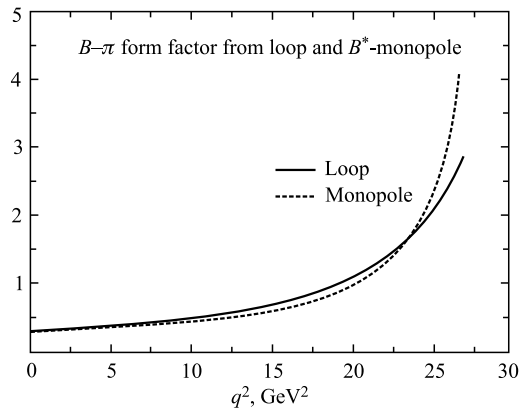


Рис. 18. Сравнение формфакторов  $B-\pi$ -перехода, полученных в ковариантной кварковой модели, с формфактором монополярного типа

Интересно сравнить поведение формфактора для  $B-\pi$ -переходов, вычисленного в нашей модели из трехточечной однопетлевой диаграммы, с поведением модели векторной доминантности (МВД). В случае обычного монополя имеем

$$F_{\text{VDM}}^{B\pi}(q^2) = \frac{F_+^{B\pi}(0)}{m_{B^*}^2 - q^2},$$

где масса полюса находится вблизи низколежащего состояния  $B^*$ . Соответствующие кривые приведены на рис.18. Видно, что имеется сильный рост формфактора модели векторной доминантности в области полюса. Аналогичное поведение имеет место и в случае формфактора, вычисленного в ковариантной кварковой модели.

**5.2. Нелептонные распады  $B_s$ -мезона.** В качестве приложения вычисленных формфакторов мы рассмотрим двухчастичные нелептонные распады  $B_s$ -мезона  $B_s \rightarrow D_s^{(*)-} D_s^{(*)+}$  и  $B_s \rightarrow J/\psi\phi$ , которые в последнее время привлекли большое внимание. Отметим, что моды с конечными состояниями  $D_s^- D_s^+$ ,  $D_s^{*-} D_s^+$  и  $D_s^- D_s^{*+}$  и  $D_s^{*-} D_s^{*+}$  дают наибольший вклад в величину  $\Delta\Gamma$  для  $B_s-\bar{B}_s$ -системы. Мода  $J/\psi\phi$  подавлена по цвету, но она весьма интересна для поиска возможных проявлений новой физики, приводящих к  $CP$ -нарушению в  $B_s-\bar{B}_s$ -системе.

Удобно выразить все физические наблюдаемые через спиральные амплитуды  $H_m$ . Это позволит представить результаты для ширин распадов в наиболее компактной форме. Кроме того, в случае распадов на два векторных мезона  $P \rightarrow VV$  спиральное представление очень удобно для получения спиральных фракций  $\Gamma_L, \Gamma_-, \Gamma_+$ .

Спиральные амплитуды  $H_m$  можно выразить через инвариантные формфакторы следующим образом [89, 92, 93]:

а) спин  $S = 0$ :

$$H_t = \frac{1}{\sqrt{q^2}} \{ (m_1^2 - m_2^2) F_+ + q^2 F_- \},$$

$$H_0 = \frac{2m_1 |\mathbf{p}_2|}{\sqrt{q^2}} F_+;$$

б) спин  $S = 1$ :

$$H_t = \frac{1}{m_1 + m_2} \frac{m_1 |\mathbf{p}_2|}{m_2 \sqrt{q^2}} \{ (m_1^2 - m_2^2) (A_+ - A_0) + q^2 A_- \},$$

$$H_{\pm} = \frac{1}{m_1 + m_2} \{ -(m_1^2 - m_2^2) A_0 \pm 2m_1 |\mathbf{p}_2| V \},$$

$$H_0 = \frac{1}{m_1 + m_2} \frac{1}{2m_2 \sqrt{q^2}} \{ -(m_1^2 - m_2^2) (m_1^2 - m_2^2 - q^2) A_0 + 4m_1^2 |\mathbf{p}_2|^2 A_+ \},$$



где  $|\mathbf{p}_2| = \lambda^{1/2}(m_1^2, m_2^2, q^2)/(2m_1)$  — импульс вылетающих частиц в системе покоя распадающейся частицы.

Эффективный гамильтониан, необходимый для описания нелептонных распадов  $B_s$ -мезона, записывается в стандартном виде (см. [105]):

$$\mathcal{H}_{\text{eff}} = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} V_{cb} V_{cs}^\dagger \sum_{i=1}^6 C_i Q_i,$$

$$Q_1 = (\bar{c}_{a_1} b_{a_2})_{V-A} (\bar{s}_{a_2} c_{a_1})_{V-A}, \quad Q_2 = (\bar{c}_{a_1} b_{a_1})_{V-A} (\bar{s}_{a_2} c_{a_2})_{V-A}, \quad (105)$$

$$Q_3 = (\bar{s}_{a_1} b_{a_1})_{V-A} (\bar{c}_{a_2} c_{a_2})_{V-A}, \quad Q_4 = (\bar{s}_{a_1} b_{a_2})_{V-A} (\bar{c}_{a_2} c_{a_1})_{V-A},$$

$$Q_5 = (\bar{s}_{a_1} b_{a_1})_{V-A} (\bar{c}_{a_2} c_{a_2})_{V+A}, \quad Q_6 = (\bar{s}_{a_1} b_{a_2})_{V-A} (\bar{c}_{a_2} c_{a_1})_{V+A},$$

где индекс  $V-A$  относится к левокиральному току  $O_-^\mu = \gamma^\mu(1-\gamma^5)$ , а индекс  $V+A$  — к правокиральному  $O_+^\mu = \gamma^\mu(1+\gamma^5)$ ;  $a_i$  — цветовой индекс.

Вычисление матричных элементов с использованием эффективного гамильтониана (105) естественным образом приводит к формулам, соответствующим *наивной* факторизации, но с величинами (формфакторы и лептонные константы распадов), вычисленными в рамках нашего подхода.

Как было указано выше, мы рассматриваем следующие нелептонные моды распадов  $B_s$ -мезона:

$$\begin{aligned} B_s(p) &\rightarrow D_s^-(q_1) D_s^+(q_2), \quad D_s^-(q_1) D_s^{*+}(q_2, \epsilon_2), \quad D_s^{*-}(q_1, \epsilon_1) D_s^+(q_2), \\ B_s(p) &\rightarrow D_s^{*-}(q_1, \epsilon_1) D_s^{*+}(q_2, \epsilon_2), \quad J/\psi(q_1, \epsilon_1) \phi(q_2, \epsilon_2). \end{aligned} \quad (106)$$

Ширины распадов выразим через спиральные амплитуды и константы лептонных распадов. В случае распадов, разрешенных по цвету, имеем

$$\begin{aligned} \Gamma(B_s \rightarrow D_s^- D_s^+) &= \frac{G_F}{16\pi} \frac{|\mathbf{q}_2|}{m_{B_s}^2} [\lambda_c^{(s)}]^2 (C_2^{\text{eff}} m_{D_s} f_{D_s} H_t^{B_s D_s}(m_{D_s}^2) + \\ &\quad + 2C_6^{\text{eff}} f_{D_s}^{PS} F_S^{B_s D_s}(m_{D_s}^2))^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Gamma(B_s \rightarrow D_s^- D_s^{*+}) &= \frac{G_F}{16\pi} \frac{|\mathbf{q}_2|}{m_{B_s}^2} [\lambda_c^{(s)}]^2 \times \\ &\times \left( C_2^{\text{eff}} m_{D_s} f_{D_s} H_t^{B_s D_s^*}(m_{D_s}^2) + 2C_6^{\text{eff}} \frac{m_{B_s} |\mathbf{q}_2|}{m_{D_s^*}} f_{D_s}^{PS} F_{PS}^{B_s D_s^*}(m_{D_s}^2) \right)^2, \end{aligned} \quad (107)$$

$$\Gamma(B_s \rightarrow D_s^{*-} D_s^+) = \frac{G_F}{16\pi} \frac{|\mathbf{q}_2|}{m_{B_s}^2} [\lambda_c^{(s)}]^2 (C_2^{\text{eff}} m_{D_s^*} f_{D_s^*} H_0^{B_s D_s}(m_{D_s^*}^2))^2,$$

$$\Gamma(B_s \rightarrow D_s^{*-} D_s^{*+}) = \frac{G_F}{16\pi} \frac{|\mathbf{q}_2|}{m_{B_s}^2} [\lambda_c^{(s)}]^2 (C_2^{\text{eff}} m_{D_s^*} f_{D_s^*})^2 \sum_{i=0, \pm} (H_i^{B_s D_s^*}(m_{D_s^*}^2))^2.$$

Здесь  $\lambda_c^{(s)} = G_F/\sqrt{2}|V_{cb}V_{cs}^\dagger|$ . Коэффициенты Вильсона появляются в комбинациях  $C_2^{\text{eff}} = C_2 + \xi C_1 + C_4 + \xi C_3$  и  $C_6^{\text{eff}} = C_6 + \xi C_5$ , где члены, умноженные на цветовой фактор  $\xi = 1/N_c$ , как обычно, будут отброшены при численных расчетах в соответствии с  $1/N_c$ -разложением. Также не учитываются аннигиляционные диаграммы в предположении, что они подавлены во времениподобной области за счет соответствующих формфакторов.

Ширина подавленного по цвету нелептонного распада  $B_s \rightarrow J/\psi\phi$  записывается в виде

$$\Gamma(B_s \rightarrow J/\psi\phi) = \frac{G_F}{16\pi} \frac{|\mathbf{q}_2|}{m_{B_s}^2} [\lambda_c^{(s)}]^2 (C_1^{\text{eff}} + C_5^{\text{eff}})^2 \times (m_{J/\psi} f_{J/\psi})^2 \sum_{i=0,\pm} (H_i^{B_s J/\psi}(m_{J/\psi}^2))^2, \quad (108)$$

где коэффициенты Вильсона равны  $C_1^{\text{eff}} = C_1 + \xi C_2 + C_3 + \xi C_4$  и  $C_5^{\text{eff}} = C_5 + \xi C_6$ .

Для матричных элементов матрицы Кабиббо–Кобаяши–Маскавы мы используем значения, взятые из [2]:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline |V_{ud}| & |V_{us}| & |V_{ub}| & |V_{cd}| & |V_{cs}| & |V_{cb}| \\ \hline 0,974 & 0,225 & 0,00389 & 0,230 & 0,975 & 0,0406 \\ \hline \end{array}. \quad (109)$$

Для коэффициентов Вильсона мы берем численные значения из [136]:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline C_1 & C_2 & C_3 & C_4 & C_5 & C_6 \\ \hline -0,257 & 1,009 & -0,005 & -0,078 & 0,000 & 0,001 \\ \hline \end{array}, \quad (110)$$

полученные в приближении NNL (next-to-next-to leading) в  $\overline{MS}$ -ренормализационной схеме с масштабом  $\mu = 4,8$  ГэВ [137]. При вычислениях нужны значения формфактора  $B_s$ - $\phi$ -перехода при  $q^2 = m_{J/\psi}^2$ . Они приведены в табл. 4, где мы сравнили наши результаты с результатами [104]. Как видно, согласие в случае формфакторов  $A_1(m_{J/\psi}^2)$  и  $A_2(m_{J/\psi}^2)$  является весьма удовлетворительным, в то время как наше значение для формфактора  $V(m_{J/\psi}^2)$  несколько меньше, чем в [104].

**Таблица 4. Формфакторы  $B_s$ - $\phi$ -перехода при  $q^2 = m_{J/\psi}^2$ , вычисленные в рамках нашего подхода. Для сравнения приводим результаты [104]**

Формфактор	Данная работа	[104]
$A_1(m_{J/\psi}^2)$	0,37	$0,42 \pm 0,06$
$A_2(m_{J/\psi}^2)$	0,48	$0,38 \pm 0,06$
$V(m_{J/\psi}^2)$	0,56	$0,82 \pm 0,12$

Таблица 5. Брэнчинги (%) для нелептонных распадов  $B_s$ -мезона, вычисленные в нашем подходе

Процесс	Данная работа	Эксперимент [2]
$B_s \rightarrow D_s^- D_s^+$	1,65	$1,04_{-0,26}^{+0,29}$
$B_s \rightarrow D_s^- D_s^{*+} + D_s^{*-} D_s^+$	2,40	$2,8 \pm 1,0$
$B_s \rightarrow D_s^{*-} D_s^{*+}$	3,18	$3,1 \pm 1,4$
$B_s \rightarrow J/\psi\phi$	0,16	$0,14 \pm 0,05$

В табл. 5 приведены полученные результаты для брэнчингов.

Наконец, мы приводим наши результаты для спиральных фракций в случае двух распадов  $B_s \rightarrow D_s^{*-} D_s^{*+}$  и  $B_s \rightarrow J/\psi\phi$ . Спиральные фракции для нелептонного распада  $B_s \rightarrow VV$  определяются как

$$\begin{aligned}\hat{\Gamma}_L &= \frac{|H_0|^2}{|H_0|^2 + |H_+|^2 + |H_-|^2}, \\ \hat{\Gamma}_\pm &= \frac{|H_\pm|^2}{|H_0|^2 + |H_+|^2 + |H_-|^2}, \\ \hat{\Gamma}_\perp &= \frac{1}{2} \frac{|H_+ - H_-|^2}{|H_0|^2 + |H_+|^2 + |H_-|^2}.\end{aligned}\quad (111)$$

Отметим, что мы нормировали спиральные фракции к полной ширине, так что  $(\hat{\Gamma}_L + \hat{\Gamma}_- + \hat{\Gamma}_+) = 1$ . Для распада  $B_s \rightarrow D_s^{*-} D_s^{*+}$  находим  $(\hat{\Gamma}_L, \hat{\Gamma}_-, \hat{\Gamma}_+) = (0,549, 0,366, 0,0847)$ , а для распада  $B_s \rightarrow J/\psi\phi$   $(0,420, 0,552, 0,0272)$ . Видно, что в случае распада  $B_s \rightarrow D_s^{*-} D_s^{*+}$  имеет место следующая иерархия  $\hat{\Gamma}_L > \hat{\Gamma}_- > \hat{\Gamma}_+$ , что находится в соответствии с представлениями простейшей кварковой модели, рассматривающей нелептонные распады на древесном уровне. Подобные оценки проводятся следующим образом: в лидирующем порядке по  $m_1 = m_{B_s}$  фракция  $\Gamma_-$  является подавленной по спиральности фактором  $4q^2/m_1^2$ , где  $q^2 = m_{D_s^{*+}}^2$ . Кроме подавления по спиральности фракция  $\Gamma_+$  подавлена еще и по киральности фактором  $m_2^2/m_1^2$  с  $m_2 = m_{D_s^{*+}}$  [138–140]. Используя количественные оценки для подавляющих факторов, можно найти следующие численные значения для спиральных фракций в распаде  $B_s \rightarrow D_s^{*-} D_s^{*+}$ :  $(0,583, 0,361, 0,056)$ , что согласуется с результатами наших вычислений. Для процесса  $B_s \rightarrow J/\psi\phi$  с большим значением  $q^2 = m_{J/\psi}^2$  подавление по спиральности уже не действует, так как в данном случае  $4q^2/m_1^2 = 1,332$ . Оценки, проведенные для данного распада, дают  $(0,420, 0,560, 0,020)$ , что также достаточно близко к результатам полного расчета в нашем подходе.

Интересно, что в случае распада  $B_s \rightarrow J/\psi\phi$  имеет место обратная иерархия:  $\hat{\Gamma}_L < \hat{\Gamma}_\perp$ . Экспериментальные данные для спиральных фракций существуют только для распада  $B_s \rightarrow J/\psi\phi$ :  $\hat{\Gamma}_L = 0,541 \pm 0,017$  и  $\hat{\Gamma}_\perp = 0,241 \pm 0,023$  [2]. Видно, что для продольной фракции наш результат  $\hat{\Gamma}_L = 0,420$  отличается на несколько стандартных отклонений от экспериментального значения. Для вычисления поперечной фракции мы используем соотношение  $\Gamma_\perp \propto |A_\perp|^2 = |H_+ - H_-|^2/2$ . Для распада  $B_s \rightarrow D_s^* D_s^{*+}$  находим  $\hat{\Gamma}_\perp = 0,0493$ , а для распада  $B_s \rightarrow J/\psi\phi$  —  $\hat{\Gamma}_\perp = 0,167$ . Опять наш результат в случае распада  $B_s \rightarrow J/\psi\phi$  отличается на несколько стандартных отклонений от экспериментального значения.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Дан краткий обзор теоретических положений, лежащих в основе ковариантной кварковой модели. Обсуждены ковариантные лагранжианы, описывающие эффективное взаимодействие адронов с их составляющими кварками. Дано определение условия связности, являющегося эффективным инструментом для описания связанных состояний в рамках квантовой теории поля. Введено понятие инфракрасного конфайнмента, обеспечивающего отсутствие любых пороговых сингулярностей, соответствующих рождению кварков, в амплитудах физических процессов.

Обсуждено введение электромагнитного взаимодействия в развиваемом подходе. Эта задача является нетривиальной ввиду нелокальности адрон-кваркового взаимодействия. Данная задача решена путем использования известного метода  $P$ -экспоненты и определения ее производной путenezависимым образом. Построены явные представления для лагранжиана, описывающего адрон-фотон-кварковое взаимодействие, линейное по электромагнитному полю. Продемонстрировано выполнение калибровочной инвариантности на примере вычисления матричного элемента перехода  $V \rightarrow \gamma$ .

Определены численные значения свободных параметров модели путем фита методом наименьших квадратов величин лептонных констант распадов и ширин основных радиационных распадов к их экспериментальным значениям.

Изучены сильные и однофотонные распады  $X(3872)$ -мезона, рассматриваемого как связанное состояние из четырех кварков — тетракварка с квантовыми числами  $J^{PC} = 1^{++}$ . Вычисление амплитуд процессов в рамках нашего подхода требует значительных усилий, поскольку приходится вычислять трехпетлевые фейнмановские диаграммы. Показано, что для разумных значений параметра  $\Lambda_X$ , характеризующего размер  $X$ -мезона, теоретические значения для ширин распадов находятся в согласии с экспериментальными данными.

Вычислены различные переходные формфакторы  $B(B_s)$ -мезонов во всей кинематической области квадрата переданного импульса. В качестве приложения данные формфакторы использованы для вычисления матричных элементов и ширин двухчастичных нелептонных распадов  $B_s$ -мезона.

**Благодарности.** В заключение мы благодарим всех наших соавторов А. З. Дубничкову, С. Дубничку, Ю. Г. Кернера, С. Г. Коваленко, В. Е. Любвицкого, П. Санторелли по совместным работам, с которыми был сделан данный обзор. М. А. Иванов выражает благодарность за поддержку Российскому фонду фундаментальных исследований (грант № 10-02-00368-а) и программе Гейзенберг–Ландау.

### Приложение СПИРАЛЬНЫЕ И МУЛЬТИПОЛЬНЫЕ АМПЛИТУДЫ В РАСПАДЕ $X(3872) \rightarrow \gamma + J/\psi (\rightarrow \ell^+ \ell^-)$

Материалы, представленные в этом приложении, взяты из аналогичного материала, имеющегося в [141] в несколько ином виде. Имеются две независимые спиральные амплитуды  $H_{\lambda_X; \lambda_\gamma \lambda_{J/\psi}}$ , которые мы обозначим  $H_i$  ( $i = L, T$ ) согласно спиральности конечного состояния мезона  $J/\psi$ . Значения  $\lambda_{J/\psi} = 0$  и  $\lambda_{J/\psi} = \pm 1$  приняты для продольной и поперечной спиральности  $J/\psi$ -мезона. Из четности следует, что  $H_{+; -0} = -H_{-; +0} = H_L$  и  $H_{0; ++} = -H_{0; --} = H_T$ .

Мы ищем ковариантное представление для проекторов  $\mathbb{P}_{L,T}^{\mu\rho\nu}$  на продольные и поперечные составляющие, при действии которых на лоренцевскую амплитуду  $T_{\mu\rho\nu}$  получаются спиральные амплитуды  $H_{L,T}$ :

$$H_i = \mathbb{P}_i^{\mu\rho\nu} T_{\mu\rho\nu} \quad (i = L, T). \quad (112)$$

Легко проверить, что следующие представления для проекторов удовлетворяют требуемым условиям:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_L^{\mu\rho\nu} &= \frac{1}{2} (\varepsilon_X^\mu(+) \bar{\varepsilon}_\gamma^{\dagger\rho}(-) - \varepsilon_X^\mu(-) \bar{\varepsilon}_\gamma^{\dagger\rho}(+) ) \varepsilon_{J/\psi}^{\dagger\nu}(0), \\ \mathbb{P}_T^{\mu\rho\nu} &= \frac{1}{2} \varepsilon_X^\mu(0) (\bar{\varepsilon}_\gamma^{\dagger\rho}(+) \varepsilon_{J/\psi}^{\dagger\nu}(+) - \bar{\varepsilon}_\gamma^{\dagger\rho}(-) \varepsilon_{J/\psi}^{\dagger\nu}(-)), \end{aligned} \quad (113)$$

где приняты обозначения Якоби–Вика для 4-векторов поляризации [142]. Предполагается, что ось  $z$  направлена по импульсу  $J/\psi$ -мезона. Черта над векторами поляризации фотонов  $\bar{\varepsilon}_\gamma^\rho(\lambda_\gamma)$  указывает на то, что спиральности фотона определены относительно отрицательного направления оси  $z$ . В данном контексте важно учитывать обе конфигурации четности, связанные с отражением спиральности, как это дано в уравнении (113). Явный вид векторов

поляризации в системе покоя  $X$ -мезона приведен ниже:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{X\mu}(\pm) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(0; \pm 1, i, 0), \quad p^\alpha = (m_X; 0, 0, 0), \\
 \varepsilon_{X\mu}(0) &= (0; 0, 0, -1), \\
 \varepsilon_{J/\psi\nu}^\dagger(\pm) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(0; \pm 1, -i, 0), \quad q_1^\alpha = \left( \frac{m_X^2 + m_{J/\psi}^2}{2m_X}; 0, 0, |\mathbf{q}_2| \right), \\
 \varepsilon_{J/\psi\nu}^\dagger(0) &= \frac{1}{m_{J/\psi}} \left( |\mathbf{q}_2|; 0, 0, -\frac{m_X^2 + m_{J/\psi}^2}{2m_X} \right), \\
 \varepsilon_{\gamma\rho}^\dagger(\pm) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(0; \mp 1, -i, 0), \quad q_2^\alpha = |\mathbf{q}_2|(1; 0, 0, -1).
 \end{aligned} \tag{114}$$

Удобное ковариантное представление для проекторов на спиральные амплитуды имеет вид

$$\mathbb{P}_i^{\mu\rho\nu} = h_i^{\mu'\rho'\nu'} S_X^{(1)\mu}{}_{\mu'}(p)(-g^{\rho\rho'}) S_{J/\psi\nu'}^{(1)\nu}(q_1), \tag{115}$$

где

$$\begin{aligned}
 h_L^{\mu\rho\nu} &= \frac{i}{2} \frac{m_{J/\psi}}{(q_1 \cdot q_2)^2} \varepsilon^{\mu\rho q_1 q_2} q_2^\nu, \\
 h_T^{\mu\rho\nu} &= -\frac{i}{2} \frac{m_X}{(q_1 \cdot q_2)^2} q_2^\mu \varepsilon^{\rho\nu q_1 q_2},
 \end{aligned} \tag{116}$$

и где пропагаторы массивных векторных полей ( $V = X, J/\psi$ ) выбираются в виде

$$S_V^{(1)\alpha}{}_{\alpha'}(pV) = -g^{\alpha\alpha'} + \frac{p_V^\alpha p_{V\alpha'}}{m_V^2}. \tag{117}$$

Пропагаторы массивных векторных полей в уравнении (115) выполняют роль проекторов на соответствующие трехмерные подпространства в системе покоя векторной частицы. Для фотонов числитель пропагатора имеет вид  $(-g^{\rho\rho'})$ . Проектирующие операторы ортонормированны в смысле, что  $\mathbb{P}_i^{\mu\rho\nu} \mathbb{P}_{j\mu\rho\nu}^\dagger = -(1/2)\delta_{ij}$ .

Угловое распределение в распаде  $X(3872) \rightarrow \gamma + J/\psi (\rightarrow \ell^+ \ell^-)$  определяется как

$$\begin{aligned}
 \frac{d\Gamma}{d\cos\vartheta} &= BR(J/\psi \rightarrow \ell^+ \ell^-) \frac{1}{4\pi} \frac{1}{2S_X + 1} \frac{|\mathbf{q}_2|}{m_X^2} \times \\
 &\times \left( \frac{3}{4} \sin^2 \vartheta |H_L|^2 + \frac{3}{8} (1 + \cos^2 \vartheta) |H_T|^2 \right), \tag{118}
 \end{aligned}$$

Таблица 6. Спиральные и мультиполиные проекции основных тензоров  $K_{\mu\nu\rho\sigma}^{(i)}$ :  $K_{\mu\nu\rho\sigma}^{(1)} = \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ ,  $K_{\mu\nu\rho\sigma}^{(2)} = q_{1\mu}\varepsilon_{\rho\nu q_1 q_2}$ ,  $K_{\mu\nu\rho\sigma}^{(3)} = q_{1\rho}\varepsilon_{\mu\nu q_1 q_2}$ ,  $K_{\mu\nu\rho\sigma}^{(4)} = q_{2\nu}\varepsilon_{\mu\rho q_1 q_2}$ ,  $K_{\mu\nu\rho\sigma}^{(5)} = \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ ,  $K_{\mu\nu\rho\sigma}^{(6)} = K_{\mu\nu\rho\sigma}^{(3)} - (q_1 q_2) K_{\mu\nu\rho\sigma}^{(1)}$  ( $i = 2, 4, 5, 6$ ) являются калибровочно-инвариантными и удовлетворяют условию  $q_2^\rho K_{\mu\rho\nu\sigma}^{(i)} = 0$

$i$	$H_L^{(i)} = \mathbb{P}_{L}^{\mu\rho\nu} K_{\mu\rho\nu}^{(i)}$	$H_T^{(i)} = \mathbb{P}_T^{\mu\rho\nu} K_{\mu\rho\nu}^{(i)}$	$A_{E1}^{(i)} = \mathbb{P}_{E1}^{\mu\rho\nu} K_{\mu\rho\nu}^{(i)}$	$A_{M2}^{(i)} = \mathbb{P}_{M2}^{\mu\rho\nu} K_{\mu\rho\nu}^{(i)}$
1	$i m_{J/\psi}$	$-i \frac{m_X^2 + m_{J/\psi}^2}{2m_X}$	$\frac{i}{\sqrt{2}} \frac{(m_X + m_{J/\psi})^2}{2m_X}$	$-\frac{i}{\sqrt{2}} \frac{2m_X}{(m_X + m_{J/\psi})^2}  \mathbf{q}_2 ^2$
2	0	$i m_X  \mathbf{q}_2 ^2$	$-\frac{i}{\sqrt{2}} m_X  \mathbf{q}_2 ^2$	$\frac{i}{\sqrt{2}} m_X  \mathbf{q}_2 ^2$
3	0	0	0	0
4	$i \frac{m_X^2}{m_{J/\psi}}  \mathbf{q}_2 ^2$	0	$\frac{i}{\sqrt{2}} \frac{m_X^2}{m_{J/\psi}}  \mathbf{q}_2 ^2$	$\frac{i}{\sqrt{2}} \frac{m_X^2}{m_{J/\psi}}  \mathbf{q}_2 ^2$
5	$i \frac{m_X}{m_{J/\psi}}  \mathbf{q}_2 $	$-i  \mathbf{q}_2 $	$\frac{i}{\sqrt{2}} \frac{m_X + m_{J/\psi}}{m_{J/\psi}}  \mathbf{q}_2 $	$\frac{i}{\sqrt{2}} \frac{2m_X}{m_{J/\psi}(m_X + m_{J/\psi})}  \mathbf{q}_2 ^2$
6	$-i m_X m_{J/\psi}  \mathbf{q}_2 $	$i \frac{m_X^2 + m_{J/\psi}^2}{2}  \mathbf{q}_2 $	$-\frac{i}{\sqrt{2}} \frac{(m_X + m_{J/\psi})^2}{2}  \mathbf{q}_2 $	$\frac{i}{\sqrt{2}} \frac{2m_X^2}{(m_X + m_{J/\psi})^2}  \mathbf{q}_2 ^3$

где  $\vartheta$  — полярный угол между направлением лептонов  $\ell^\pm$  и первоначальным направлением вылета  $J/\psi$ . При этом мы работаем в системе покоя  $J/\psi$ -мезона.

Вместо спиральных амплитуд можно использовать мультипольные амплитуды  $A_{E1}$  и  $A_{M2}$ . Связь между ними дается формулами [143]

$$A_{E1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(H_L - H_T), \quad A_{M2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(H_L + H_T). \quad (119)$$

Соответствующие проекторы на мультипольные амплитуды записываются в виде

$$\mathbb{P}_{E1}^{\mu\rho\nu} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbb{P}_L^{\mu\rho\nu} - \mathbb{P}_T^{\mu\rho\nu}), \quad \mathbb{P}_{M2}^{\mu\rho\nu} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbb{P}_L^{\mu\rho\nu} + \mathbb{P}_T^{\mu\rho\nu}). \quad (120)$$

В табл. 6 даны проекции спиральных и мультипольных амплитуд, получившиеся из основных лоренцевских структур в уравнении (84). Видно, что эти лоренцевские структуры удовлетворяют условиям (88) и (89). Мультипольные амплитуды  $A_{E1, M2}$ , полученные из структур  $K_{\mu\rho\nu}^{(i)}$  ( $i = 2, 4, 5, 6$ ), имеют правильное низкоэнергетическое поведение  $A_{E1} \sim |\mathbf{q}_2|$  и  $A_{M2} \sim |\mathbf{q}_2|^2$ . Лидирующий вклад по  $|\mathbf{q}_2|$  в угловое распределение пропорционален  $|A_{E1}|^2$ , что дает  $W(\cos\vartheta) \propto (3 - \cos^2\vartheta)$ . Следующая за лидирующим вкладом поправка  $2\text{Re}(A_{E1}A_{M2}^*)$  подавлена одной степенью  $|\mathbf{q}_2|$ . Нелидирующий вклад в угловое распределение пропорционален  $W(\cos\vartheta) \propto (1 - 3\cos^2\vartheta)$  (в тех же самых единицах).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Choi S. K. et al. (Belle Collab.)*. Observation of a New Narrow Charmonium State in Exclusive  $B^\pm \rightarrow K^\pm \pi^+ \pi^- J\psi$  Decays // *Phys. Rev. Lett.* 2003. V. 91. P. 262001.
2. *Nakamura K. et al. (Particle Data Group Collab.)* // *J. Phys. G.* 2010. V. 37. P. 075021.
3. *Aubert B. et al. (BABAR Collab.)*. Observation of the Decay  $B \rightarrow J\psi\eta K$  and Search for  $X(3872) \rightarrow J\psi\eta$  // *Phys. Rev. Lett.* 2004. V. 93. P. 041801.
4. *Acosta D. E. et al. (CDF Collab.)*. Observation of the Narrow State  $X(3872) \rightarrow J\psi\pi^+\pi^-$  in  $\bar{p}p$  Collisions at  $\sqrt{s} = 1.96$  TeV // *Ibid.* P. 072001.
5. *Abazov V. M. et al. (D0 Collab.)*. Observation and Properties of the  $X(3872)$  Decaying to  $J\psi\pi^+\pi^-$  in  $p\bar{p}$  Collisions at  $\sqrt{s} = 1.96$  TeV // *Ibid.* P. 162002.
6. *Aaltonen T. et al. (CDF Collab.)*. Precision Measurement of the  $X(3872)$  Mass in  $J/\psi\pi^+\pi^-$  Decays // *Phys. Rev. Lett.* 2009. V. 103. P. 152001.
7. *Yi K.* Heavy Quark Meson Spectroscopy at CDF. arXiv:0910.3163 [hep-ex].



8. Abe K. et al. (*Belle Collab.*). Evidence for  $X(3872) \rightarrow \gamma J\psi$  and the Sub-threshold Decay  $X(3872) \rightarrow \omega J\psi$ . arXiv:hep-ex/0505037.
9. Aubert B. et al. (*BABAR Collab.*). Search for  $B^+ \rightarrow X(3872)K^+$ ,  $X_{3872} \rightarrow J/\psi\gamma$  // *Phys. Rev. D.* 2006. V. 74. P. 071101.
10. Abulencia A. et al. (*CDF Collab.*). Analysis of the Quantum Numbers  $J^{PC}$  of the  $X(3872)$  // *Phys. Rev. Lett.* 2007. V. 98. P. 132002.
11. Gokhroo G. et al. (*Belle Collab.*). Observation of a Near-Threshold  $D^0\bar{D}^0\pi^0$  Enhancement in  $B \rightarrow D^0\bar{D}^0\pi^0 K$  Decay // *Phys. Rev. Lett.* 2006. V. 97. P. 162002.
12. Aubert B. et al. (*BABAR Collab.*). Study of Resonances in Exclusive  $B$  Decays to  $\bar{D}^{(*)}D^{(*)}K$  // *Phys. Rev. D.* 2008. V. 77. P. 011102.
13. del Amo Sanchez P. et al. (*BABAR Collab.*). Evidence for the Decay  $X(3872) \rightarrow J/\psi\omega$  // *Phys. Rev. D.* 2010. V. 82. P. 011101.
14. Choi S. K. et al. (*Belle Collab.*). Bounds on the Width, Mass Difference and Other Properties of  $X(3872) \rightarrow \pi^+\pi^- J/\psi$  Decays // *Phys. Rev. D.* 2011. V. 84. P. 052004.
15. Klempt E., Zaitsev A. Glueballs, Hybrids, Multiquarks. Experimental Facts versus QCD Inspired Concepts // *Phys. Rep.* 2007. V. 454. P. 1.
16. Aubert B. et al. (*BABAR Collab.*). Evidence for  $X(3872) \rightarrow \psi(2S)\gamma$  in  $B^\pm \rightarrow X(3872)K^\pm$  Decays, and a Study of  $B \rightarrow c\bar{c}\gamma K$  // *Phys. Rev. Lett.* 2009. V. 102. P. 132001.
17. Brambilla N. et al. Heavy Quarkonium: Progress, Puzzles, and Opportunities // *Eur. Phys. J. C.* 2011. V. 71. P. 1534.
18. Eidelman S. et al. Developments in Heavy Quarkonium Spectroscopy. arXiv:1205.4189 [hep-ex].
19. Tornqvist N. A. Isospin Breaking of the Narrow Charmonium State of Belle at 3872-MeV as a Deuson // *Phys. Lett. B.* 2004. V. 590. P. 209.
20. Close F. E., Page P. R. The  $D_0^*D_0$  Bar Threshold Resonance // *Phys. Lett. B.* 2004. V. 578. P. 119.
21. Thomas C. E., Close F. E. Is  $X(3872)$  a Molecule? // *Phys. Rev. D.* 2008. V. 78. P. 034007.
22. Barnes T., Godfrey S. Charmonium Options for the  $X(3872)$  // *Phys. Rev. D.* 2004. V. 69. P. 054008.
23. Swanson E. S. Short Range Structure in the  $X(3872)$  // *Phys. Lett. B.* 2004. V. 588. P. 189.
24. Swanson E. S. Diagnostic Decays of the  $X(3872)$  // *Ibid.* V. 598. P. 197.
25. Voloshin M. B. Interference and Binding Effects in Decays of Possible Molecular Component of  $X(3872)$  // *Ibid.* V. 579. P. 316.
26. Voloshin M. B. Heavy Quark Spin Selection Rule and the Properties of the  $X(3872)$  // *Ibid.* V. 604. P. 69.
27. Voloshin M. B.  $X(3872)$  Diagnostics with Decays to  $D\bar{D}\gamma$  // *Intern. J. Mod. Phys. A.* 2006. V. 21. P. 1239.

28. *Dubynskiy S., Voloshin M.B.* Pionic Transitions from  $X(3872)$  to  $\chi_{cJ}$  // *Phys. Rev. D.* 2008. V. 77. P. 014013.
29. *Kalashnikova Yu. S.* Coupled-Channel Model for Charmonium Levels and an Option for  $X(3872)$  // *Phys. Rev. D.* 2005. V. 72. P. 034010.
30. *Braaten E., Kusunoki M.* Low-Energy Universality and the New Charmonium Resonance at 3870 MeV // *Phys. Rev. D.* 2004. V. 69. P. 074005.
31. *Braaten E., Kusunoki M.* Factorization in the Production and Decay of the  $X(3872)$  // *Phys. Rev. D.* 2005. V. 72. P. 014012.
32. *Braaten E., Kusunoki M.* Decays of the  $X(3872)$  into  $J/\psi$  and Light Hadrons // *Ibid.* V. 72. P. 054022.
33. *Braaten E., Lu M.* Operator Product Expansion in the Production and Decay of the  $X(3872)$  // *Phys. Rev. D.* 2006. V. 74. P. 054020.
34. *Braaten E., Lu M., Lee J.* Weakly-Bound Hadronic Molecule near a 3-Body Threshold // *Phys. Rev. D.* 2007. V. 76. P. 054010.
35. *Liu Y. R. et al.* Is  $X(3872)$  Really a Molecular State? // *Eur. Phys. J. C.* 2008. V. 56. P. 63.
36. *Cheuk-Yin Wong.* Molecular States of Heavy Quark Mesons // *Phys. Rev. C.* 2004. V. 69. P. 055202.
37. *Fleming S. et al.* Pion Interactions in the  $X(3872)$  // *Phys. Rev. D.* 2007. V. 76. P. 034006.
38. *Fleming S., Mehen T.* Hadronic Decays of the  $X(3872)$  to  $\chi_{cJ}$  in Effective Field Theory // *Phys. Rev. D.* 2008. V. 78. P. 094019.
39. *AlFiky M. T., Gabbiani F., Petrov A. A.*  $X(3872)$ : Hadronic Molecules in Effective Field Theory // *Phys. Lett. B.* 2006. V. 640. P. 238.
40. *Colangelo P., De Fazio F., Nicotri S.*  $X(3872) \rightarrow D\bar{D}\gamma$  Decays and the Structure of  $X_{3872}$  // *Phys. Lett. B.* 2007. V. 650. P. 166.
41. *Dong Y. B. et al.* Estimate for the  $X(3872)$  to  $\gamma J/\psi$  Decay Width // *Phys. Rev. D.* 2008. V. 77. P. 094013.
42. *Dong Y. et al.*  $X(3872)$  as a Hadronic Molecule and Its Decays to Charmonium States and Pions // *Phys. Rev. D.* 2009. V. 79. P. 094013.
43. *Dong Y. et al.*  $J/\psi\gamma$  and  $\psi(2S)\gamma$  Decay Modes of the  $X(3872)$  // *J. Phys. G.* 2011. V. 38. P. 015001.
44. *Lee I. W. et al.*  $X(3872)$  as a Molecular  $DD^*$  State in a Potential Model // *Phys. Rev. D.* 2009. V. 80. P. 094005.
45. *Fernandez-Carames T., Valcarce A., Vijande J.* Charmonium Spectroscopy above Thresholds // *Phys. Rev. Lett.* 2009. V. 103. P. 222001.
46. *Maiiani L. et al.* Diquark–Antidiquarks with Hidden or Open Charm and the Nature of  $X(3872)$  // *Phys. Rev. D.* 2005. V. 71. P. 014028.
47. *Bigi I. et al.* Four-Quark Mesons in Non-leptonic  $B$  Decays — Could They Resolve Some Old Puzzles? // *Ibid.* P. 114016.

48. *Maiani L., Polosa A. D., Riquer V.* Indications of a Four-Quark Structure for the  $X(3872)$  and  $X(3876)$  Particles from Recent Belle and BABAR Data // *Phys. Rev. Lett.* 2007. V. 99. P. 182003.
49. *Ebert D., Faustov R. N., Galkin V. O.* Relativistic Description of Heavy Tetraquarks // *Phys. At. Nucl.* 2009. V. 72. P. 184.
50. *Ebert D., Faustov R. N., Galkin V. O.* Masses of Heavy Tetraquarks in the Relativistic Quark Model // *Phys. Lett. B.* 2006. V. 634. P. 214.
51. *Nielsen M., Navarra F. S., Lee S. H.* New Charmonium States in QCD Sum Rules: A Concise Review // *Phys. Rep.* 2010. V. 497. P. 41.
52. *Navarra F. S., Nielsen M.*  $X(3872) \rightarrow J/\psi\pi^+\pi^-$  and  $X(3872) \rightarrow J/\psi\pi^+\pi^-\pi^0$  Decay Widths from QCD Sum Rules // *Phys. Lett. B.* 2006. V. 639. P. 272.
53. *Terasaki K.* A New Tetra-Quark Interpretation of  $X(3872)$  // *Prog. Theor. Phys.* 2007. V. 118. P. 821.
54. *Terasaki K.*  $\omega-\rho(0)$  Mixing as a Possible Origin of the Hypothetical Isospin Non-conservation in the  $X(3872) \rightarrow \pi^+\pi^- J/\psi$  Decay // *Prog. Theor. Phys.* 2010. V. 122. P. 1285.
55. *Bugg D. V.* Reinterpreting Several Narrow «Resonances» as Threshold Cusps // *Phys. Lett. B.* 2004. V. 598. P. 8.
56. *Li B. A.* Is  $X(3872)$  a Possible Candidate of Hybrid Meson // *Phys. Lett. B.* 2005. V. 605. P. 306.
57. *Close F. E., Godfrey S.* Charmonium Hybrid Production in Exclusive  $B$  Meson Decays // *Phys. Lett. B.* 2003. V. 574. P. 210.
58. *Seth K. K.* An Alternative Interpretation of  $X(3872)$  // *Phys. Lett. B.* 2005. V. 612. P. 1.
59. *Eichten E. et al.* Quarkonia and Their Transitions // *Rev. Mod. Phys.* 2008. V. 80. P. 1161.
60. *Godfrey S., Olsen S. L.* The Exotic  $XYZ$  Charmonium-Like Mesons // *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.* 2008. V. 58. P. 51.
61. *Voloshin M. B.* Charmonium // *Prog. Part. Nucl. Phys.* 2008. V. 61. P. 455.
62. *Zhu S. L.* New Hadron States // *Intern. J. Mod. Phys. E.* 2008. V. 17. P. 283.
63. *Swanson E. S.* The New Heavy Mesons: A Status Report // *Phys. Rep.* 2006. V. 429. P. 243.
64. *Bauer G.* The  $X(3872)$  Meson and Exotic Spectroscopy at CDF II // *Intern. J. Mod. Phys. A.* 2006. V. 21. P. 959.
65. *Bignamini C. et al.* Is the  $X(3872)$  Production Cross Section at Tevatron Compatible with a Hadron Molecule Interpretation? // *Phys. Rev. Lett.* 2009. V. 103. P. 162001.
66. *Artoisenet P., Braaten E.* Production of the  $X(3872)$  at the Tevatron and the LHC // *Phys. Rev. D.* 2010. V. 81. P. 114018.
67. *Bignamini C. et al.* More Loosely Bound Hadron Molecules at CDF? // *Phys. Lett. B.* 2010. V. 684. P. 228.

68. *Dubnicka S. et al.* Quark Model Description of the Tetraquark State  $X(3872)$  in a Relativistic Constituent Quark Model with Infrared Confinement // *Phys. Rev. D.* 2010. V. 81. P. 114007.
69. *Dubnicka S. et al.* A Relativistic Quark Model with Infrared Confinement and the Tetraquark State // *AIP Conf. Proc.* 2011. V. 1343. P. 385.
70. *Dubnicka S. et al.* One-Photon Decay of the Tetraquark State  $X(3872) \rightarrow \gamma + J/\psi$  in a Relativistic Constituent Quark Model with Infrared Confinement // *Phys. Rev. D.* 2011. V. 84. P. 014006.
71. *Branz T. et al.* Relativistic Constituent Quark Model with Infrared Confinement // *Phys. Rev. D.* 2010. V. 81. P. 034010.
72. *Anikin I. V. et al.* The Extended Nambu–Jona-Lasinio Model with Separable Interaction: Low-Energy Pion Physics and Pion Nucleon Form-Factor // *Z. Phys. C.* 1995. V. 65. P. 681.
73. *Ivanov M. A., Lyubovitskij V. E.* The  $\gamma^* \pi^0 \rightarrow \gamma$  Form Factor // *Phys. Lett. B.* 1997. V. 408. P. 435.
74. *Faessler A. et al.* Pion and Sigma Meson Properties in a Relativistic Quark Model // *Phys. Rev. D.* 2003. V. 68. P. 014011.
75. *Ivanov M. A., Locher M. P., Lyubovitskij V. E.* Electromagnetic Form Factors of Nucleons in a Relativistic Three-Quark Model // *Few Body Syst.* 1996. V. 21. P. 131.
76. *Faessler A. et al.* Semileptonic Decays of the Light  $J(P) = 1/2(+)$  Ground State Baryon Octet // *Phys. Rev. D.* 2008. V. 78. P. 094005.
77. *Ivanov M. A. et al.* Heavy Baryon Transitions in a Relativistic Three-Quark Model // *Phys. Rev. D.* 1997. V. 56. P. 348.
78. *Ivanov M. A. et al.* Exclusive Nonleptonic Decays of Bottom and Charm Baryons in a Relativistic Three-Quark Model: Evaluation of Nonfactorizing Diagrams // *Phys. Rev. D.* 1998. V. 57. P. 5632.
79. *Ivanov M. A. et al.* One-Pion Charm Baryon Transitions in a Relativistic Three-Quark Model // *Phys. Lett. B.* 1998. V. 442. P. 435.
80. *Ivanov M. A. et al.* Strong and Radiative Decays of Heavy Flavored Baryons // *Phys. Rev. D.* 1999. V. 60. P. 094002.
81. *Ivanov M. A. et al.* One-Photon Transitions between Heavy Baryons in a Relativistic Three-Quark Model // *Phys. Lett. B.* 1999. V. 448. P. 143.
82. *Ivanov M. A. et al.*  $\Lambda/b$  and  $\Lambda/c$  Baryon Decays at Finite Values of Heavy Quark Masses // *Phys. Lett. B.* 2000. V. 476. P. 58.
83. *Faessler A. et al.* Semileptonic Decays of Double Heavy Baryons // *Phys. Lett. B.* 2001. V. 518. P. 55.
84. *Faessler A. et al.* Magnetic Moments of Heavy Baryons in the Relativistic Three-Quark Model // *Phys. Rev. D.* 2006. V. 73. P. 094013.
85. *Faessler A. et al.* Semileptonic Decays of Double Heavy Baryons in a Relativistic Constituent Three-Quark Model // *Phys. Rev. D.* 2009. V. 80. P. 034025.

86. *Branz T. et al.* Radiative Decays of Double Heavy Baryons in a Relativistic Constituent Three-Quark Model Including Hyperfine Mixing // *Phys. Rev. D.* 2010. V. 81. P. 114036.
87. *Ivanov M.A., Santorelli P.* Leptonic and Semileptonic Decays of Pseudoscalar Mesons // *Phys. Lett. B.* 1999. V. 456. P. 248.
88. *Ivanov M.A., Santorelli P., Tancredi N.* The Semileptonic Form-Factors of  $B$  and  $D$  Mesons in the Quark Confinement Model // *Eur. Phys. J. A.* 2000. V. 9. P. 109.
89. *Ivanov M.A., Körner J.G., Santorelli P.* The Semileptonic Decays of the  $B_c$  Meson // *Phys. Rev. D.* 2001. V. 63. P. 074010.
90. *Faessler A. et al.* The Exclusive Rare Decays  $B \rightarrow K(K^*)\bar{\ell}\ell$  and  $B_c \rightarrow D(D^*)\bar{\ell}\ell$  in a Relativistic Quark Model // *Eur. Phys. J. C.* 2002. V. 4. P. 18.
91. *Ivanov M.A., Körner J.G., Pakhomova O.N.* The Nonleptonic Decays  $B/c^+ \rightarrow D/s^+\bar{D}^0$  and  $B/c^+ \rightarrow D/s^+D^0$  in a Relativistic Quark Model // *Phys. Lett. B.* 2003. V. 555. P. 189.
92. *Ivanov M.A., Körner J.G., Pakhomova O.N.* Exclusive Semileptonic and Nonleptonic Decays of the  $B_c$  Meson // *Phys. Rev. D.* 2006. V. 73. P. 054024.
93. *Ivanov M.A., Körner J.G., Santorelli P.* Semileptonic Decays of  $B_c$  Mesons into Charmonium States in a Relativistic Quark Model // *Phys. Rev. D.* 2005. V. 71. P. 094006; 2007. V. 75. P. 019901.
94. *Ivanov M.A., Körner J.G., Santorelli P.* The  $J/\psi$  Dissociation Cross-Sections in a Relativistic Quark Model // *Phys. Rev. D.* 2004. V. 70. P. 014005.
95. *Efimov G.V., Ivanov M.A.* The Quark Confinement Model of Hadrons. Bristol & Philadelphia: IOP Publ., 1993.
96. *Efimov G.V., Ivanov M.A.* Light Mesons in the Quark Confinement Model // *Part. Nucl.* 1989. V. 20. P. 1129.
97. *Efimov G.V., Ivanov M.A.* Confinement and Quark Structure of Light Hadrons // *Intern. J. Mod. Phys. A.* 1989. V. 4. P. 2031.
98. *Ivanov M.A., Ladygina N.B., Lyubovitskij V.E.* Semileptonic Decays of Heavy Baryons // *Part. Nucl.* 1995. V. 26. P. 60.
99. *Salam A.* // *Nuovo Cim.* 1962. V. 25. P. 224.
100. *Weinberg S.* // *Phys. Rev.* 1963. V. 130. P. 776.
101. *Hayashi K. et al.* // *Fort. Phys.* 1967. V. 15. P. 625.
102. *Stone S.* Heavy Flavor Physics // *Proc. of the DPF-2011 Conf., Providence, RI, USA, August 8–13, 2011.*
103. *El-Bennich B. et al.* // *Erice School on Nuclear Physics 2011: From Quarks and Gluons to Hadrons and Nuclei (unpublished).*
104. *Faller S., Fleischer R., Mannel T.* Precision Physics with  $B_s^0 \rightarrow J/\psi\phi$  at the LHC: The Quest for New Physics // *Phys. Rev. D.* 2009. V. 79. P. 014005.
105. *Buchalla G., Buras A.J., Lautenbacher M.E.* Weak Decays beyond Leading Logarithms // *Rev. Mod. Phys.* 1996. V. 68. P. 1125–1144.

106. *Beneke M. et al.* QCD Factorization for  $B \rightarrow \pi\pi$  Decays: Strong Phases and  $CP$  Violation in the Heavy Quark Limit // *Phys. Rev. Lett.* 1999. V. 83. P. 1914.
107. *Beneke M., Neubert M.* QCD Factorization for  $B \rightarrow PP$  and  $B \rightarrow PV$  Decays // *Nucl. Phys. B.* 2003. V. 675. P. 333–415.
108. *Feldmann T.* Soft-Collinear Effective Theory: Recent Results and Applications // *PoS CONFINEMENT8 007.* 2008.
109. *Bauer C. W. et al.* An Effective Field Theory for Collinear and Soft Gluons: Heavy to Light Decays // *Phys. Rev. D.* 2001. V. 63. P. 114020.
110. *Ball P., Zwicky R.* // *Phys. Rev. D.* 2005. V. 71. P. 014029.
111. *Khodjamirian A., Mannel T., Offen N.* // *Phys. Rev. D.* 2007. V. 75. P. 054013.
112. *Grinstein B., Pirjol D.* Exclusive Rare  $B \rightarrow Kl^+l^-$  Decays at Low Recoil: Controlling the Long-Distance Effects // *Phys. Rev. D.* 2004. V. 70. P. 114005.
113. *Bobeth C., Hiller G., van Dyk D.* The Benefits of  $\bar{B}\bar{K}^*l^+l^-$  Decays at Low Recoil // *J. High Energy Phys.* 2010. V. 1007. P. 098.
114. *Bobeth C., Hiller G., van Dyk D.* More Benefits of Semileptonic Rare  $B$  Decays at Low Recoil:  $CP$  Violation // *J. High Energy Phys.* 2011. V. 1107. P. 067.
115. *Ivanov M. A. et al.*  $B^-$  to Light-Meson Transition Form-Factors // *Phys. Rev. D.* 2007. V. 76. P. 034018.
116. *Melikhov D., Nikitin N., Simula S.* Rare Exclusive Semileptonic  $b \rightarrow s$  Transitions in the Standard Model // *Phys. Rev. D.* 1998. V. 57. P. 6814.
117. *Melikhov D.* Dispersion Approach to Quark-Binding Effects in Weak Decays of Heavy Mesons // *Eur. Phys. J. C.* 2002. V. 4. P. 1.
118. *Ebert D., Faustov R. N., Galkin V. O.* New Analysis of Semileptonic  $B$  Decays in the Relativistic Quark Model // *Phys. Rev. D.* 2007. V. 75. P. 074008.
119. *Ladisa M., Nardulli G., Santorelli P.* Semileptonic and Rare  $B$  Meson Decays into a Light Pseudoscalar Meson // *Phys. Lett. B.* 1999. V. 455. P. 283–290.
120. *Colangelo P. et al.* Semileptonic and Rare  $B$  Meson Transitions in a QCD Relativistic Potential Model // *Eur. Phys. J. C.* 1999. V. 8. P. 81.
121. *Colangelo P. et al.* QCD Sum Rule Analysis of the Decays  $B \rightarrow K\ell^+\ell^-$  and  $B \rightarrow K^*\ell^+\ell^-$  // *Phys. Rev. D.* 1996. V. 53. P. 3672–3686.
122. *Colangelo P., Santorelli P.* Dependence of the Form-Factors of  $B \rightarrow \pi$  Lepton Neutrino on the Heavy Quark Mass // *Phys. Lett. B.* 1994. V. 327. P. 123–128.
123. *Ivanov M. A. et al.* Form Factors for Semileptonic, Nonleptonic and Rare  $B(B_s)$  Meson Decays // *Phys. Rev. D.* 2012. V. 85. P. 034004.
124. *Vermaseren J. A. M.* The FORM Project // *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* 2008. V. 183. P. 19.
125. *Ebert D., Feldmann T., Reinhardt H.* Extended NJL Model for Light and Heavy Mesons without  $q\bar{q}$  Thresholds // *Phys. Lett. B.* 1996. V. 388. P. 154.

126. Volkov M. K., Yudichev V. L. Chiral  $SU(2) \times SU(2)$  Model with Infrared Quark Confinement // Phys. At. Nucl. 2000. V. 63. P. 464.
127. Mandelstam S. Quantum Electrodynamics without Potentials // Ann. Phys. 1962. V. 19. P. 1.
128. Terning J. Gauging Nonlocal Lagrangians // Phys. Rev. D. 1991. V. 44. P. 887.
129. Dorokhov A. E., Broniowski W. Vector and Axial Vector Correlators in a Nonlocal Chiral Quark Model // Eur. Phys. J. C. 2003. V. 32. P. 79.
130. Rosner J. L., Stone S. Leptonic Decays of Charged Pseudoscalar Mesons. arXiv: 1002.1655 [hep-ex].
131. Laiho J., Lunghi E., van de Water R. S. Lattice QCD Inputs to the CKM Unitarity Triangle Analysis // Phys. Rev. D. 2010. V. 81. P. 034503.
132. Chiu T. W. et al. (TWQCD Collab.). Beauty Mesons in Lattice QCD with Exact Chiral Symmetry // Phys. Lett. B. 2007. V. 651. P. 171–176.
133. Becirevic D. et al. Nonperturbatively Improved Heavy–Light Mesons: Masses and Decay Constants // Phys. Rev. D. 1999. V. 60. P. 074501.
134. Uhlemann C. F., Kauer N. Narrow-Width Approximation Accuracy // Nucl. Phys. B. 2009. V. 814. P. 195.
135. Körner J. G., Mauser M. C. One Loop Corrections to Polarization Observables // Lect. Notes Phys. 2004. V. 647. P. 212–244.
136. Altmannshofer W. et al. Symmetries and Asymmetries of  $B \rightarrow K^* \mu^+ \mu^-$  Decays in the Standard Model and Beyond // JHEP. 2009. V. 0901. P. 019.
137. Bobeth C., Misiak M., Urban J. Photonic Penguins at Two Loops and  $m(t)$  Dependence of  $BR[B \rightarrow X(s) \text{lepton}^+ \text{lepton}^-]$  // Nucl. Phys. B. 2000. V. 574. P. 291–330.
138. Körner J. G., Goldstein G. R. Quark and Particle Helicities in Hadronic Charmed Particle Decays // Phys. Lett. B. 1979. V. 89. P. 105.
139. Ali A. et al. Nonleptonic Weak Decays of Bottom Mesons // Z. Phys. C. 1979. V. 1. P. 269.
140. Beneke M., Rohrer J., Yang D. Branching Fractions, Polarisation and Asymmetries of  $B \rightarrow VV$  Decays // Nucl. Phys. B. 2007. V. 774. P. 64.
141. Körner J. G. et al. Zweig Forbidden Radiative Orthoquarkonium Decays in Perturbative QCD // Nucl. Phys. B. 1983. V. 229. P. 115.
142. Auvil P. R., Brehm J. J. // Phys. Rev. 1966. V. 145. P. 1152.
143. Cottingham W. N., Pollard B. R. A Unified Treatment of Electromagnetic Decays, Electroproduction and Pair Production in  $E^+ E^-$  Annihilation for Hadrons of Arbitrary Spin // Ann. Phys. 1977. V. 105. P. 111.