

## КЛАССИЧЕСКИЕ И КВАНТОВЫЕ ДИСКРЕТНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

*В. В. Корняк*

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

ВВЕДЕНИЕ	96
КЛАССИЧЕСКАЯ И КВАНТОВАЯ ДИНАМИКА	102
Основные понятия и структуры	102
Динамические системы с пространством	105
Особенности детерминистической динамики	119
КОНСТРУКТИВНОЕ ОПИСАНИЕ КВАНТОВОГО ПОВЕДЕНИЯ	125
Квантование дискретных систем	128
Примеры конечных квантовых систем	137
ПЕРЕСТАНОВОЧНО-ИНВАРИАНТНЫЕ БИЛИНЕЙНЫЕ ФОРМЫ	147
Базис перестановочно-инвариантных форм	148
Связь перестановочно-инвариантных форм с разложением на неприводимые компоненты	150
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	155
Приложение А	
ОБЪЕДИНЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ И ВНУТРЕННИХ СИММЕТРИЙ	157
Приложение Б	
СТРУКТУРНЫЙ АНАЛИЗ ДИСКРЕТНЫХ ОТНОШЕНИЙ	159
Приложение В	
ЛОКАЛЬНЫЕ КВАНТОВЫЕ МОДЕЛИ НА РЕГУЛЯРНЫХ ГРАФАХ	171
Приложение Г	
ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ КОНЕЧНЫХ ГРУПП	175
Приложение Д	
КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ СИММЕТРИЙ И ФЕНОМЕНОЛОГИЯ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ	177
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	181

## КЛАССИЧЕСКИЕ И КВАНТОВЫЕ ДИСКРЕТНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

*В. В. Корняк*

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Мы рассматриваем детерминистическую и квантовую динамику с конструктивной «конечной» точки зрения, поскольку введение континуума или других актуальных бесконечностей в физику создает серьезные концептуальные и технические трудности без какой-либо необходимости в этих понятиях для физики как эмпирической науки. Особое внимание уделяется симметричным свойствам дискретных систем. Для согласованного описания симметрий динамических систем в различные моменты времени и симметрий различных частей таких систем мы вводим дискретные аналоги калибровочных связностей. Эти структуры особенно важны для описания квантового поведения. Симметрии определяют фундаментальные свойства поведения динамических систем. В частности, можно показать, что движущиеся солитоноподобные структуры возникают неизбежно в детерминистической динамической системе, группа симметрий которой разбивает множество состояний на конечное число групповых орбит. Мы показываем, что квантовое поведение динамических систем является естественным следствием их симметрий. Такое поведение является результатом фундаментальной невозможности проследить идентичность неразличимых объектов в процессе эволюции. Доступна лишь информация об инвариантных утверждениях и величинах, относящихся к таким объектам. Используя математические аргументы общего характера, можно показать, что любая квантовая динамика может быть сведена к последовательности перестановок. Квантовые интерференции возникают в инвариантных подпространствах перестановочных представлений групп симметрий динамических систем. Наблюдаемые величины могут быть выражены в терминах перестановочных инвариантов. Мы показываем также, что для описания квантовых явлений вместо неконструктивной числовой системы — поля комплексных чисел — достаточно использовать циклотомические поля — минимальные расширения натуральных чисел, пригодные для квантовой механики. Конечные группы симметрий играют центральную роль в данной статье. Интерес к таким группам имеет дополнительную мотивацию в физике. Многочисленные эксперименты и наблюдения в физике элементарных частиц указывают на важную роль конечных групп относительно невысоких порядков в ряде фундаментальных процессов. Происхождение этих групп не имеет объяснения в рамках признанных в настоящее время теорий, в частности, в Стандартной модели.

We study deterministic and quantum dynamics from a constructive «finite» point of view, since the introduction of a continuum, or other actual infinities in physics poses serious conceptual and technical difficulties, without any need for these concepts to physics as an empirical science. Particular attention is paid to the symmetry properties of discrete systems. For a consistent description of the symmetries of dynamical systems at different times and the symmetries of the various parts of such systems, we introduce discrete analogs of the gauge connections. Gauge structures are particularly important to describe the quantum behavior. Fundamental properties of the behavior of dynamical systems are defined by their symmetries. In particular, we can show that the moving soliton-like structures are inevitable in a deterministic (classical) dynamical system, whose symmetry group breaks the set of states into a finite number of orbits of the group. We show that quantum behavior is a natural consequence of symmetries of dynamical systems. This behavior is the result of

a fundamental inability to trace the identity of indistinguishable objects in the process of evolution. Information is available only on invariant statements and values, relating to such objects. Using mathematical arguments of a general nature we can show that any quantum dynamics can be reduced to a sequence of permutations. Quantum interferences occur in the invariant subspaces of permutation representations of symmetry groups of dynamical systems. The observable values can be expressed in terms of permutation invariants. We also show that for the description of quantum phenomena, instead of a nonconstructive number system — the field of complex numbers, it is enough to use cyclotomic fields — the minimal extensions of natural numbers suitable for quantum mechanics. Finite groups of symmetries play a central role in this article. The interest in such groups has an additional motivation in physics. Numerous experiments and observations in particle physics point to an important role of finite groups of relatively low orders in a number of fundamental processes. The origin of these groups has no explanation within the currently recognized theories, in particular, in the Standard Model.

PACS: 03.65.Aa; 03.65.Fd; 03.65.Ta; 02.20.-a; 11.30.-j; 11.15.-q

## ВВЕДЕНИЕ

Существует много аргументов, как прагматического, так и концептуального характера, в пользу того, что дискретная или даже конечная математика более пригодна для описания физической реальности, чем непрерывная. Особенно отчетливо это проявляется на фундаментальном уровне. В частности, изучение физических процессов, пространственно-временные масштабы которых близки к планковским, почти неизбежно приводит к необходимости введения дискретных структур. В качестве примера можно привести «голографический принцип» Г. 'т Хоофта [16], возникший при изучении термодинамики черных дыр. Согласно этому принципу вся физическая информация, содержащаяся в некоторой области пространства, полностью определяется дискретными данными на двумерной границе этой области. Плотность информации этих данных равна самое большее одному биту на планковскую площадь («предел Бекенштейна»). С более спекулятивной точки зрения вся Вселенная представляет собой конечную информационную структуру на замкнутой двумерной решетке — «космологическом горизонте», а наблюдаемые три измерения возникают лишь как результат эффективного описания в макроскопических масштабах и при низких энергиях.

Изучение дискретных систем важно и с прикладной точки зрения: многие физические объекты, даже если адекватные для их описания пространственно-временные масштабы существенно больше фундаментальных — *наноструктуры*, например, — являются по существу дискретными, а не непрерывными образованиями.

С концептуальной точки зрения вопрос о том, «является ли реальный мир дискретным или непрерывным» или даже «конечным или бесконечным», относится исключительно к метафизике, так как никакие эмпирические наблюдения или логические аргументы не в состоянии обосновать

тот или иной выбор — это вопрос веры, вкуса или привычки. Вообще, в практике идея непрерывности возникает из макроскопического опыта как приближенное («*осредненное*», «*термодинамическое*») описание больших совокупностей дискретных элементов. Типичный пример физической системы, порождающей эмпирическое представление о непрерывности, — жидкость. Динамика жидкости описывается уравнениями в частных производных типа уравнений Навье–Стокса, тогда как на более фундаментальном уровне жидкость — это совокупность молекул, а на еще более фундаментальном — комбинация квантовых частиц, подчиняющихся дискретным законам\*. Математическое понятие континуума представляет собой логическое уточнение эмпирической идеи непрерывности.

Конечно, дискретные и непрерывные *математические* теории существенно различаются, и эффективность их применения в физике зависит от конкретных исторических обстоятельств. Непрерывность позволяет создавать модели физических систем, основанные на дифференциальных уравнениях, для исследования и решения которых было разработано большое количество разнообразных методов. Эмпирическим эквивалентом понятия производной является предположение о том, что малые изменения физических величин приблизительно пропорциональны малым изменениям координат, в которых эти величины заданы. Ясно, что такая гипотеза существенно упрощает физические модели. Фактически, со времен Ньютона и до появления современных компьютеров анализ и дифференциальная геометрия были единственным средством математического изучения физических систем. Высоко оценивал эвристическую силу понятия непрерывности Пуанкаре (хотя он и не признавал фундаментальную обоснованность этого понятия). В книге «О науке» ([57, с. 288–289 перевода на русский язык]) Пуанкаре пишет: *«Единственный естественный предмет математической мысли есть целое число. Непрерывность . . . без сомнения, изобретена нами, но изобрести ее нас вынудил внешний мир. Без него не было бы анализа бесконечно малых. Все математическое знание свелось бы к арифметике или к теории подстановок. Но мы, напротив, посвятили изучению непрерывности почти все наше время, почти все наши силы. . . . Вам, без сомнения, скажут, что вне целого числа нет строгости, а следовательно, нет математической истины, что оно*

---

\*Описание физической системы называют *феноменологическим*, если известно или предполагается, что оно может быть, хотя бы в принципе, получено из некоторого более фундаментального описания с помощью приближений и упрощающих предположений. В случае уравнений гидродинамики цепочку таких упрощений, начиная от квантово-механического описания, легко проследить: ВКБ-приближение → уравнение Лиувилля для функции распределения → разложение функции распределения по порядкам моментов → «гипотезы замыкания» (феноменологические соотношения, выражающие «высшие» моменты через «низшие» и, таким образом, позволяющие «оборвать» бесконечную цепочку уравнений для моментов) → уравнения гидродинамики.

*скрывается всюду и что нужно стараться разоблачить его покровы, хотя бы для этого пришлось обречь себя на нескончаемые повторения. Но мы не будем столь строги; мы будем признательны непрерывности, которая, если даже все исходит из целого числа, одна только была способна извлечь из него так много».*

В настоящее время цифровые технологии почти повсеместно вытесняют аналоговые. Благодаря компьютерам реальные возможности дискретной математики в приложениях существенно выросли. Соответственно и «дискретный» стиль мышления становится все более популярным. Важным преимуществом дискретного описания является его концептуальная «экономность» в оккамовском смысле — отсутствие «лишних сущностей», основанных на идеях актуальной бесконечности типа «дедекиндовых сечений», «последовательностей Коши» и т. п. Более того, дискретная математика содержательно богаче непрерывной — непрерывность «сглаживает» тонкие детали строения структур. Упрощения описания, достигаемые введением производных в математические структуры, могут обходиться достаточно дорого. Для иллюстрации этого тезиса можно сравнить списки простых групп Ли и простых конечных групп. Благодаря дифференцируемости и, следовательно, возможности введения алгебр Ли классификация простых групп Ли — сравнительно несложная задача, которая была решена в начале XX в. Результат классификации: четыре бесконечных последовательности и пять исключительных групп. Классификация простых конечных групп — исключительно трудная проблема, решение которой, как считается, было завершено к 2004 г. Список простых конечных групп состоит из 18 бесконечных последовательностей (16 из которых содержат непосредственные аналоги всех простых групп Ли) и 26 спорадических групп.

Статья начинается с общего обсуждения дискретных динамических систем. Наиболее фундаментальными понятиями являются дискретное время и множество состояний, эволюционирующих во времени. Пространство рассматривается как дополнительная структура, позволяющая организовать множество состояний в виде множества функций на точках пространства со значениями в некотором множестве, называемом множеством локальных состояний. Мы обсуждаем симметрии пространства и локальных состояний и то, каким образом эти симметрии могут быть объединены в полную группу симметрий системы в целом\*.

---

\*Если подойти к проблеме с противоположной стороны, то пространство можно построить из заданного полного множества состояний как множество классов смежности по некоторой подгруппе полной группы, а группу симметрий пространства как эффективно действующую на этом множестве классов часть полной группы. Однако в данной статье мы не будем развивать эту тему.

Важной особенностью систем с симметриями является наличие степеней свободы в их описании, связанных с произволом в выборе систем координат. Если этот выбор «глобальный», т. е. установлен раз и навсегда для всей эволюции системы или (при наличии нетривиальной пространственной структуры) для разных частей системы, то он не может сказаться на объективно наблюдаемых данных. Возможность «локального» выбора систем координат приводит к физически наблюдаемым калибровочным эффектам. Естественной математической схемой, подходящей для описания таких эффектов, является теория связностей в расслоениях. Поэтому в данной статье мы используем подходящим образом модифицированные для дискретного случая понятия расслоений и связностей в этих расслоениях. Для иллюстрации мы показываем, как, исходя из введенных нами конструкций, можно построить континуальные версии абелевых (электродинамика) и неабелевых (теория Янга–Миллса) калибровочных теорий.

С помощью простой модели мы демонстрируем, каким образом в дискретной динамике могут возникать характерные пространственно-временные структуры, такие как предельная скорость и световые конусы.

Далее мы обсуждаем особенности поведения классических детерминистических систем. Мы показываем, что при наличии симметрий в таких системах совершенно естественным образом возникают сохраняющие форму движущиеся (солитоноподобные) структуры. Мы также обсуждаем идею 'т Хоофта о том, каким образом может возникать наблюдаемая в природе обратимость фундаментальных процессов, и показываем, что в случае дискретных детерминистических систем обратимость (априори редкая) неизбежно возникает в результате эволюции как эффективно наблюдаемое явление.

Наиболее фундаментальную — фактически определяющую — роль симметрии играют в феноменах квантового поведения. Характерной чертой квантового поведения является его универсальность. Его демонстрируют системы совершенно различной физической природы и масштабов: от субатомных элементарных частиц до больших молекул\*. Универсальность явления (т. е. независимость от физического субстрата) указывает на то, что описывающая его теория должна основываться на некоторых априорных математических принципах. Мы показываем, что в случае квантовой механики таким ведущим математическим принципом является симметрия. Наши аргументы основаны на том, что квантовое поведение демонстрируют лишь системы, содержащие неразличимые частицы: любое отклонение от точной идентично-

---

\*В частности, в [53] описаны эксперименты по наблюдению квантовых интерференций между молекулами фуллерена  $C_{60}$ , а недавно были опубликованы [20] данные об интерференции для гораздо большей молекулы — производной фталоцианина с брутто-формулой  $C_{48}H_{26}F_{24}N_8O_8$ .

сти частиц разрушает квантовые интерференции. Неразличимость элементов системы означает, что они лежат на одной и той же орбите группы симметрии этой системы. Для систем с симметриями объективными являются только не зависящие от «переобозначений» «однородных» элементов, т. е. *инвариантные*, отношения и утверждения. Например, никакого объективного смысла нельзя приписать электрическим потенциалам  $\varphi$  и  $\psi$  или точкам пространства, обозначаемым векторами  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ . Объективный смысл имеют лишь некоторые их комбинации, например, комбинации, обозначаемые как  $\psi - \varphi$  или  $\mathbf{b} - \mathbf{a}$  (или в более общей символике теории групп  $\varphi^{-1}\psi$  и  $\mathbf{a}^{-1}\mathbf{b}$ ).

В основе квантового формализма лежат унитарные операторы в гильбертовых пространствах. Эти операторы принадлежат общей унитарной группе или, в более строгих терминах, *унитарному представлению* группы автоморфизмов (преобразований, сохраняющих эрмитово скалярное произведение) гильбертова пространства. Для придания конструктивности квантовым концепциям мы можем заменить общую унитарную группу унитарными представлениями *конечных групп* без всякого риска исказить *физическое* содержание проблемы, поскольку, как отмечалось выше, метафизическое различие между «конечным» и «бесконечным» не может иметь каких-либо эмпирически наблюдаемых последствий. Более того, имеются надежные экспериментальные данные о том, что в основе некоторых фундаментальных процессов лежат конечные\* группы относительно невысоких порядков.

Используя тот факт, что *любое линейное представление* конечной группы является подпредставлением перестановочного, мы показываем, что любая квантово-механическая проблема может быть сведена к *перестановкам*, а квантовые наблюдаемые могут быть выражены в терминах *перестановочных инвариантов*. Более детальный анализ «перестановочного» подхода показывает, что комплексные числа в квантово-механическом формализме должны быть заменены циклотомическими. Если принять эту модификацию формализма, то

— квантовые амплитуды приобретают простой и естественный смысл: они являются проекциями в инвариантные подпространства векторов кратностей («чисел заполнения») элементов множества, на котором группа действует перестановками;

— борновские вероятности оказываются рациональными числами — в полном соответствии с естественной для конечных множеств «частотной интерпретацией» вероятностей;

— квантовые явления возникают как результат фундаментальной невозможности проследить идентичность неразличимых объектов в процессе эво-

---

\*Приложение Д содержит краткий обзор того, как конечные симметрии проявляются в феноменологии физики ароматов.

люции — доступна только информация об инвариантных комбинациях таких объектов.

Некоторые темы, несколько отклоняющиеся от основного направления статьи (структурный анализ дискретных отношений, клеточные автоматы, локальные квантовые модели на графах и др.), а также информация технического характера вынесены в приложения.

Для обеспечения целостности изложения и единства обозначений с самого начала опишем наиболее фундаментальные понятия, используемые в данной статье.

**Натуральные числа.** Исходной базовой системой чисел у нас является *полукольцо натуральных чисел*

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}.$$

Подчеркнем, что мы включаем нуль в множество натуральных чисел. Натуральные числа наиболее естественны в дискретной математике, где они выступают как счетчики элементов и комбинаций элементов дискретных систем. Остальные конструктивные системы чисел выводятся из множества  $\mathbb{N}$  чисто математическими средствами. Например, *кольцо целых чисел*  $\mathbb{Z} = \{\dots, -1, 0, 1, \dots\}$  мы рассматриваем как *алгебраическое расширение* полукольца  $\mathbb{N}$  с помощью *примитивного квадратного корня из единицы\**, поле рациональных чисел  $\mathbb{Q}$ , в свою очередь, интерпретируется как поле частных кольца  $\mathbb{Z}$  и т. д.

**Расслоения.** Для систем с симметриями, в особенности при исследовании их квантового поведения, важную роль играет понятие расслоения. *Расслоением* по определению\*\* называется структура вида

$$(E, X, S, G, \pi),$$

где  $E$  — множество, называемое (*тотальным*) *пространством расслоения*;  $X$  — множество, называемое *базой расслоения*;  $S$  — множество, называемое *типичным (модельным) слоем расслоения*;  $G$  — группа преобразований типичного слоя  $S$ , называемая *структурной группой расслоения*;  $\pi$  — отображение  $E \rightarrow X$ , называемое *проекцией расслоения*.

Проекция  $\pi : E \rightarrow X$  характеризуется следующим свойством. Если  $x$  — точка базы, т. е.  $x \in X$ , то множество  $S_x = \pi^{-1}(x)$ , называемое *слоем над*

---

\*Такое определение, как будет видно из дальнейшего, мотивировано квантовой механикой. Другой распространенный способ введения целых чисел — это интерпретация их в виде классов эквивалентности пар натуральных чисел с отношением эквивалентности  $\sim$ :  $(n, m) \sim (n', m')$  означает, что  $n + m' = n' + m$ , где  $n, m, n', m' \in \mathbb{N}$ .

\*\*В литературе теория расслоений обычно излагается как составная часть дифференциальной геометрии [23, 64]. Однако существенные для нас элементы этой теории не требуют понятия дифференцируемости и без труда переносятся на дискретный и конечный случай.



точкой  $x$ , изоморфно типичному слою  $S$ . Изоморфизм здесь означает, что существует элемент структурной группы  $g_x \in G$ , такой, что  $S_x g_x^{-1} = S$ .

Роль структурной группы в физике заключается в том, что она дает возможность с помощью калибровочных связностей\* «сравнивать» данные, относящиеся к различным моментам времени и разным точкам пространства.

*Сечением расслоения*  $(E, X, S, G, \pi)$  называется отображение  $\sigma : X \rightarrow E$  такое, что  $\pi \circ \sigma = \text{id}_X$ . Символически множество всех сечений можно представить как  $\prod_{x \in X} S_x$ . Таким образом, для конечных  $X$  и  $S$  полное число всех возможных сечений равно  $|S|^{|X|}$ .

Расслоение называется *главным*, если типичным слоем является сама структурная группа. Символически главное расслоение можно записать в виде

$$(P, X, G, \rho),$$

где  $P$  — тотальное пространство, а  $\rho$  — проекция. Подразумевается, что структурная группа  $G$  действует на слое  $G$  правыми (или левыми) сдвигами.

## 1. КЛАССИЧЕСКАЯ И КВАНТОВАЯ ДИНАМИКА

**1.1. Основные понятия и структуры.** Наиболее фундаментальным понятием динамики является *время*. В дискретной версии время  $\mathcal{T}$  это последовательность целых чисел, нумерующих последовательность событий, например,

$$\mathcal{T} = \mathbb{Z} \quad \text{или} \quad \mathcal{T} = [0, 1, \dots, T], \quad (1)$$

где  $T$  — некоторое натуральное число.

Мы предполагаем, что *состояния* динамической системы образуют конечное множество

$$\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_N\} \quad (2)$$

некоторых элементов. Также предполагаем наличие нетривиальной *группы симметрий*

$$G = \{g_1, \dots, g_M\} \leq \text{Sym}(\Omega), \quad (3)$$

действующей на множестве состояний  $\Omega$ . Без потери общности можно предполагать, что группа  $G$  действует на  $\Omega$  *точно* (в противном случае  $G$  можно заменить фактор-группой по ядру действия) и *транзитивно* (в противном случае можно рассматривать орбиты действия по отдельности\*\*).

---

\*Понятие связности, существенно зависящее от структуры базы расслоения, мы рассмотрим после более конкретного обсуждения дискретных версий базы.

\*\*В некоторых случаях, например, при описании обсуждаемых ниже «солитонов» в дискретных системах, приходится рассматривать совокупности орбит, т. е. нетранзитивные действия.

*Эволюция* или *траектория* динамической системы — это последовательность состояний, индексированных временем,

$$h = \dots \rightarrow w_{t-1} \rightarrow w_t \rightarrow w_{t+1} \rightarrow \dots, \quad \text{где } w_i \in \Omega. \quad (4)$$

Здесь мы сталкиваемся с проблемой отождествления «неразличимых» объектов — более формально, элементов множества (2) лежащих на одной орбите группы симметрий (3) — в различные моменты времени\*. Дело в том, что для регистрации и отождествления индивидуально неразличимых объектов используются некоторые индивидуально различимые метки (символы, числа). Ясно, что не существует абсолютного способа сопоставить таким различимым меткам неразличимые элементы. Фиксировать такие элементы можно только относительно некоторой дополнительной системы [61], проявляющейся в разных контекстах как «система координат» или «наблюдатель» или «измерительный прибор».

Рассмотрим более подробно понятия системы координат и замены координат в конечном случае. Для начала фиксируем какой-нибудь (произвольный) порядок на изначально неупорядоченном множестве  $\Omega$ , т. е. будем предполагать, что  $\Omega$  — это вектор (в данном контексте слово «вектор» означает просто упорядоченное множество, используется также термин «кортеж») вида

$$\Omega = (\omega_1, \dots, \omega_N).$$

Мы будем называть  $\Omega$  *каноническим множеством состояний*. Действие группы симметрий  $G$  на множестве  $\Omega$  имеет вид\*\*

$$\Omega g = (\omega_1 g, \dots, \omega_k g, \dots, \omega_N g) = (\omega_{i_1}, \dots, \omega_{i_k}, \dots, \omega_{i_N}).$$

Нам удобно в качестве меток элементов  $\omega_k \in \Omega$  использовать натуральные числа  $k$ . Введем функцию *site*( $v, V$ ), которая по заданному элементу  $v$ , один и только один раз входящему в упорядоченное множество  $V$ , выдает его позицию в этом множестве, например, *site*( $\omega_k, \Omega$ ) =  $k$  и *site*( $\omega_{i_k}, \Omega g$ ) =  $k$ .

Позицию элемента в упорядоченном множестве мы будем называть *координатой*. Применяя функцию *site* к элементам множества  $\Omega$ , мы получим вектор

$$R = (1, 2, \dots, N), \quad (5)$$

\*В приложении «Ars Combinatoria» к книге [66] Г. Вейль (автор идеи калибровочной инвариантности в физике) подробно обсуждает проблемы индивидуализации неразличимых объектов и их отождествления в процессе эволюции во времени.

\*\*В статье мы будем в основном записывать действие группы справа. Это соглашение более естественно и интуитивно. Оно широко используется в математике и, в частности, в основных системах компьютерной алгебры, ориентированных на задачи теории групп, GAP и Magma.

который будем называть *канонической системой координат*. Другими словами, мы поместили некоторым фиксированным образом состояния из множества  $\Omega$  натуральными числами. Это позволит нам контролировать индивидуальность состояний в процессе эволюции динамической системы. Действие элемента группы  $g \in G$  на состояния в терминах координат можно записать в виде перестановки

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & k & \dots & N \\ 1g & \dots & kg & \dots & Ng \end{pmatrix}.$$

Это «*контравариантное*» действие переводит одно состояние в другое:  $\omega_k g \rightarrow \omega_j$ . Соответствующее «*ковариантное*» преобразование системы координат имеет вид

$$S = Rg^{-1} = (1g^{-1}, 2g^{-1}, \dots, Ng^{-1}). \quad (6)$$

Это означает, что если некоторый элемент  $x$  множества состояний в канонической системе координат  $R$  имеет координату  $x_R = \mathbf{site}(x, R)$ , то его координатой в системе  $S$  будет  $x_S = \mathbf{site}(x, S)$ . Операционально получение координаты означает, что мы имеем возможность распознать  $x$  среди элементов  $S$  и подсчитать число шагов, пройденных до этого элемента. Эта процедура аналогична «*координатизации*» [61] точек векторного пространства. Например, координата точки вещественной прямой (одномерного пространства  $\mathbb{R}$ ) — это «расстояние», которое необходимо пройти от начала координат до данной точки. Начало координат и «масштаб шагов расстояния» (метрика) зависят от выбора системы координат.

Ясно, что в соответствии с (6) из канонической системы координат (5) можно построить все остальные и что переходы между произвольными системами координат описываются формулой  $S' = Sh^{-1}$ ,  $h \in G$ .

Вернемся к эволюции (4). Мы не знаем *a priori*, от какого именно из объектов  $a \in \Omega$  или  $b \in \Omega$  в момент времени  $t - 1$  «произошел» некоторый объект  $c$  в момент времени  $t$ , если  $a$  и  $b$  лежат на одной групповой орбите, т. е.  $b = ag$  для некоторого  $g \in G$ . Такое отождествление осуществляется введением дополнительной структуры, называемой *калибровочной связностью* или *параллельным переносом*.

Рассмотрим расслоение, базой которого является время (1), типичным слоем — каноническое множество состояний (2), а структурной группой — группа (3)

$$(W, \mathcal{T}, \Omega, G, \tau). \quad (7)$$

Здесь  $W$  и  $\tau$  — тотальное пространство и проекция соответственно. Связность определяет изоморфизм между слоями этого расслоения над различными моментами времени:

$$\Omega_{t_2} = \Omega_{t_1} \chi(t_1, t_2), \quad \text{где } \chi(t_1, t_2) \in G.$$

Важным принципом в физике является *калибровочная инвариантность*, т. е. возможность задавать системы координат в слоях расслоения над различными точками базы независимо друг от друга. В данном случае этот принцип приводит к следующему *правилу преобразования для связностей*:

$$\chi(t_1, t_2) \rightarrow g(t_1)^{-1} \chi(t_1, t_2) g(t_2), \quad g(t_1), g(t_2) \in G. \quad (8)$$

Здесь  $g(t_1)$  и  $g(t_2)$  — *произвольные* элементы группы  $G$ , т. е. значения произвольного сечения главного  $G$ -расслоения над  $T$ . Очевидно, что связность между произвольными моментами времени можно записать как произведение связностей, соответствующих элементарным шагам по времени:

$$\chi(t_1, t_2) = \chi(t_1, t_1 + 1) \cdots \chi(t, t + 1) \cdots \chi(t_2 - 1, t_2).$$

Таким образом, в данном случае связность можно определить с помощью функции на парах последовательных моментов времени, т. е. функции на ребрах линейного графа, вершинами которого являются моменты времени.

Траектории (4) динамической системы представляют собой сечения расслоения (7). Символически принадлежность траектории  $h$  к множеству сечений можно записать следующим образом:

$$h \in \prod_{t \in T} \Omega_t. \quad (9)$$

В основе классического подхода лежит изучение индивидуальных траекторий в предположении фиксированного для всех моментов времени правила отождествления состояний  $\omega_i$ . Поэтому расслоение (7) можно заменить прямым произведением  $T \times \Omega$  и интерпретировать траекторию как функцию от времени со значениями в множестве состояний  $\Omega$

$$h \in \Omega^T.$$

Физически существенным учет локальной калибровочной инвариантности становится в ситуациях, когда рассматриваются совокупности различных индивидуальных траекторий, соединяющих точки расслоения. Особенно отчетливо это проявляется в фейнмановской формулировке квантовой механики через интегралы по траекториям.

**1.2. Динамические системы с пространством.** В физике множество состояний  $\Omega$  обычно имеет специальную структуру множества функций

$$\Omega = \Sigma^X, \quad (10)$$

где множество аргументов

$$X = \{x_1, \dots, x_n\} \quad (11)$$

называется *пространством*, а множество значений

$$\Sigma = \{\sigma_1, \dots, \sigma_{|\Sigma|}\} \quad (12)$$

— множеством *локальных состояний*.

Важным свойством динамических систем с пространством является возможность введения нетривиальных *калибровочных связностей* между точками пространства. Калибровочные структуры приводят к наблюдаемым физическим последствиям: кривизны нетривиальных связностей описывают силы в физических теориях. Другой темой, в которой важна пространственная структура, является связь между спином и статистикой.

Мы будем предполагать, что как пространство (11), так и локальные состояния (12) обладают нетривиальными группами симметрий:

$$\begin{aligned} F &= \{f_1, \dots, f_{|F|}\} \leq \text{Sym}(X) \text{ — симметрии пространства,} \\ \Gamma &= \{\gamma_1, \dots, \gamma_{|\Gamma|}\} \leq \text{Sym}(\Sigma) \text{ — внутренние симметрии.} \end{aligned} \quad (13)$$

Для интерпретации группы внутренних симметрий  $\Gamma$  как локальной калибровочной группы введем расслоение с тотальным пространством  $E$ , базой  $X$ , типичным слоем  $\Sigma$  и проекцией  $\pi$ :

$$(E, X, \Sigma, \Gamma, \pi). \quad (14)$$

Теперь множество состояний вместо (10) имеет вид множества сечений расслоения (14)

$$\Omega = \prod_{x \in X} \Sigma_x. \quad (15)$$

Нетривиальность группы (13) симметрий пространства предполагает наличие некоторой структуры у множества (11). Для физики существенны топологические понятия, позволяющие классифицировать точки по степени их «близости» друг к другу.

В подходе, называемом *теоретико-множественная топология*, понятие «близости» точек формализуется с помощью семейства *открытых подмножеств*, удовлетворяющего определенным аксиомам. Эти аксиомы являются абстракцией обычных свойств континуума и мало пригодны для дискретных пространств (хотя формально и применимы к ним).

Наиболее адекватной в дискретном случае топологической структурой является *абстрактный симплицальный комплекс* [63], который задается некоторым набором  $K$  подмножеств множества  $X$ . В данном контексте элементы множества  $X$  называются *точками* или *вершинами*. Элементы множества  $K$ , называемые *симплексами\**, обладают тем свойством, что любые

---

\*Интуитивная идея «близости» точек соответствует тому, что точки из одного симплекса «ближе друг к другу», чем точки из разных симплексов.

их подмножества также являются симплексами, т. е. входят в множество  $K$ . Кроме того, симплексами являются все одноэлементные подмножества множества вершин  $X$ . Подсимплексы симплексов часто называют *гранями*. Очевидно, что структура комплекса  $K$  однозначно определяется *максимальными по включению* симплексами. *Размерность* симплекса  $\delta \in K$  определяется формулой  $\dim \delta = |\delta| - 1$ . Это определение мотивировано тем фактом, что  $k + 1$  точек, погруженных в общем положении в евклидово пространство  $\mathbb{R}^n$ , образуют вершины простейшего (лат. simplex — простой) выпуклого  $k$ -мерного многогранника, если  $n \geq k$ . *Размерность комплекса*  $K$  определяется как максимальная размерность его симплексов:  $\dim K = \max_{\delta \in K} \dim \delta$ .

Одномерный симплициальный комплекс называется *графом*, а составляющие его двухэлементные подмножества (одномерные симплексы) называются *ребрами*. С точки зрения абстрактной комбинаторной топологии возможность погружения в евклидовы пространства не имеет особого значения. Существенно только, каким образом симплексы, составляющие комплекс, связаны (пересекаются) между собой. Однако заметим, что в топологической теории размерности имеется *теорема Небелинга–Понтрягина*, из которой следует, что любой  $k$ -мерный симплициальный комплекс может быть погружен в пространство  $\mathbb{R}^{2k+1}$ . В частности, любой граф можно погрузить в трехмерное пространство  $\mathbb{R}^3$ .

Если нас не интересуют несущественные с дискретной точки зрения вопросы геометрической реализации комплексов в евклидовых пространствах, то любые задачи с данными на произвольных комплексах можно свести к задачам на графах, воспользовавшись понятием *остова симплициального комплекса*. По определению  *$q$ -мерным остовом* ( *$q$ -остовом*,  *$q$ -скелетом*) симплициального комплекса  $K$  называется симплициальный комплекс, состоящий из всех  $p$ -мерных симплексов комплекса  $K$ , где  $p \leq q$ . Таким образом, вместо произвольного комплекса  $K$  мы можем рассматривать его 1-остов, т. е. граф. Каждому симплексу комплекса  $K$  соответствует некоторый полный подграф этого 1-остова. Напомним, что граф называется *полным*, если все пары его вершин являются ребрами. Графы (мы будем называть их также *решетками*) достаточны для всех, рассматриваемых в данной статье, задач. В частности, они достаточны для введения калибровочных и квантовых структур. Чтобы не перегружать текст, мы сохраним для обозначения пространства символ  $X$ , подразумевая при этом, что помимо вершин  $\{x_1, \dots, x_n\}$  заданы также и ребра, т. е. некоторый набор 2-элементных подмножеств вида  $e_{ij} = \{x_i, x_j\}$ . Группой симметрий (13) пространства  $X$  в данном случае будет группа автоморфизмов графа, т. е.  $F = \text{Aut}(X)$ . В принципе группа автоморфизмов графа с  $n$  вершинами может иметь до  $n!$  элементов. Однако существует весьма эффективный алгоритм, разработанный и реализованный Б. МакКеем [48]. Этот алгоритм строит компактное множество элементов, порождающих группу  $F$ .

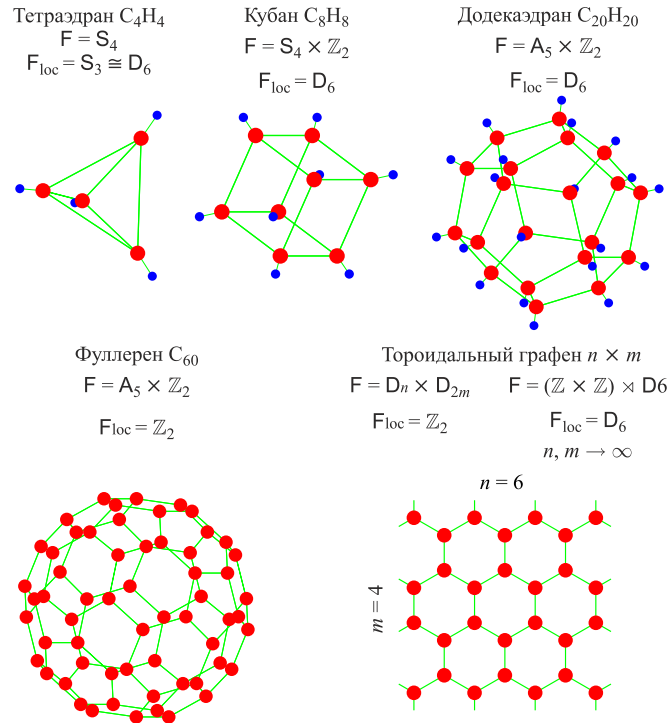


Рис. 1. Примеры угле(водо)родных наноструктур.  $F$  — группа симметрий графа структуры.  $F_{loc}$  — группа симметрий окрестности вершины графа. Символы  $Z_k, D_{2k}, A_k$  обозначают циклические, диэдральные и альтернирующие группы соответственно

Число порождающих элементов в реальных задачах обычно равно двум или трем и не может превосходить  $n - 1$  по построению алгоритма.

Рассмотрим примеры решеток достаточно высокой симметрии, соответствующих реальным физическим объектам [32]. На рис. 1 изображены так называемые *платоновы углеводороды*: *тетраэдран*, *кубан* и *додекаэдран*, а также *фуллерен* и *графен* — перспективные в области нанотехнологий углеводные структуры.

Заметим, что *кубан* и *додекаэдран* были искусственно синтезированы. Они достаточно устойчивы, хотя и не встречаются в природе. Тетраэдран неустойчив, но можно синтезировать его устойчивые аналоги, присоединив к тетраэдральному углеродному каркасу вместо атомов водорода третбутиловые  $(CH_3)_3C$  или триметилсилиловые  $(CH_3)_3Si$  радикалы. На рисунке также приведены полные группы симметрий графов соответствующих объектов  $F$  и их подгруппы, фиксирующие отдельные вершины  $F_{loc}$ . Решетки, приведенные на рис. 1, ввиду их невысокой сложности интересны с методической

точки зрения для построения простых моделей дискретных динамических систем. При этом соответствующий граф интерпретируется как дискретное пространство  $X$ , группа симметрий графа  $F$  — как полная группа симметрий пространства, а подгруппа  $F_{loc}$  — как группа *локальных симметрий пространства*. Эта группа, описывающая симметрии окрестности вершины графа, представляет собой аналог инфинитезимальных симметрий в физических моделях, основанных на дифференциальных уравнениях. Если законы динамики дискретных моделей определяются локальными соотношениями, т. е. соотношениями, заданными на окрестностях графов (как, например, в клеточных автоматах или описанных в приложении В квантовых моделях на регулярных графах), то естественным требованием должна быть симметрия этих соотношений относительно группы  $F_{loc}$ .

Заметим, что графы структур на рис. 1 являются *3-регулярными (3-валентными)*. Регулярность графа аналогична в некоторых аспектах изотропности и однородности непрерывного пространства. Рассуждая спекулятивно, можно было бы предположить, что пространство на планковских масштабах может быть смоделировано каким-нибудь  $k$ -регулярным графом. Однако макроскопически наблюдаемая регулярность и изотропность физического пространства может быть результатом усреднения по большим ансамблям графов самых различных структур. Тем не менее предположение о регулярности существенно упрощает дискретные физические модели.

Воспользовавшись тем, что пространство  $X$  имеет структуру графа, мы можем ввести на нем связность с помощью  $\Gamma$ -значной функции на ребрах  $\mu(\{x_i, x_j\}) \equiv \mu(x_i, x_j)$ . Связность имеет очевидное свойство  $\mu(x_i, x_j) = \mu(x_j, x_i)^{-1}$ .

Связность  $\tilde{\mu}(x_i, x_j)$  называется *тривиальной*, если ее можно выразить в терминах функции на точках (вершинах графа):

$$\tilde{\mu}(x_i, x_j) = \alpha(x_i) \alpha(x_j)^{-1}, \quad \alpha(x_i), \alpha(x_j) \in \Gamma. \quad (16)$$

Из локальной калибровочной инвариантности следует аналогичное (8) *правило преобразования для связностей*

$$\mu(x_i, x_j) \rightarrow \gamma(x_i)^{-1} \mu(x_i, x_j) \gamma(x_j), \quad \gamma(x_i), \gamma(x_j) \in \Gamma. \quad (17)$$

Здесь  $\gamma(x_i)$  и  $\gamma(x_j)$  — произвольные элементы группы внутренних симметрий (можно считать, что они фиксируют локальные координаты в слоях  $\Sigma_{x_i}$  и  $\Sigma_{x_j}$ ).

Предположив (*одно*)связность графа  $X$  (т. е. наличие пути, соединяющего любые две его вершины  $x_{i_1}$  и  $x_{i_k}$ ), мы можем определить зависящий от пути *параллельный перенос*

$$\mu(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}) = \mu(x_{i_1}, x_{i_2}) \mu(x_{i_2}, x_{i_3}) \cdots \mu(x_{i_{k-1}}, x_{i_k}),$$

где каждая пара  $\{x_{i_m}, x_{i_{m+1}}\}$  является ребром.



Параллельный перенос вдоль цикла графа, т. е. вдоль замкнутого пути,

$$\mu(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}, x_{i_1}) = \mu(x_{i_1}, x_{i_2}) \mu(x_{i_2}, x_{i_3}) \cdots \mu(x_{i_k}, x_{i_1})$$

называется *голономией*. В непрерывном пространстве инфинитезимальным аналогом голономии является *кривизна связности*, которая в физических теориях описывает силовые поля. Очевидно, что любая голономия тривиальной связности (16) тривиальна, т. е. равна единице группы  $\tilde{\mu}(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}, x_{i_1}) = \mathbf{1}$ . Это означает, в частности, что тривиальные связности не приводят к каким-либо физически наблюдаемым последствиям.

Заметим, что в наших конструкциях время «более фундаментально», чем пространство, т. е. пространство не входит в единую структуру на равных с временем, как это принято в релятивистски-инвариантных физических теориях. Введение локальных времен в дискретных моделях может быть достаточно проблематичным и искусственным из-за отсутствия непрерывных лоренцевых симметрий. Однако далее мы покажем, что такие понятия как «*предельная скорость*» и «*световой конус*» возникают в дискретной динамике вполне естественно, а лоренцевы симметрии могут проявляться в макроскопических масштабах как континуальные приближения при осреднении по большим кластерам дискретных элементов. Кроме того, общее, т. е. без локальных репараметризаций, время  $\mathcal{T}$  («*время жизни Вселенной в целом*») обеспечивает единство описания динамики независимо от того, представлены ли состояния системы в общем виде (2) или имеют специальную структуру (15), подразумевающую наличие пространства.

Описание эволюции динамических систем с пространством должно учитывать эволюцию самого пространства. Здесь также (в силу наличия пространственных симметрий  $F$ ) возникает естественная проблема отождествления точек пространства в разные моменты времени. Для разрешения этой проблемы представим пространство-время  $M$  в виде расслоения  $\sigma: M \rightarrow \mathcal{T}$  с базой  $\mathcal{T}$ , типичным слоем  $X$  и структурной группой  $F$ :

$$(M, \mathcal{T}, X, F, \sigma). \quad (18)$$

Ясно, что если пространство  $X$  имеет структуру графа, а время  $\mathcal{T}$  дискретно, то построенное нами пространство-время  $M$  также является графом и мы можем использовать конструкции связности и параллельного переноса, аналогичные приведенным выше.

Для того чтобы включить эволюцию систем с пространством в общую схему, описываемую расслоением (7), необходимо структурную группу  $G$  этого расслоения представить в виде комбинации пространственных и внутренних симметрий: пространственная группа  $F$  переставляет точки расслоения (18), а группа внутренних симметрий преобразует слои в (14). Более де-

тальный анализ приводит к конструкции, называемой *сплетением* [5,7,12,59]:

$$G = \Gamma \wr_X F \cong \Gamma^X \rtimes F. \quad (19)$$

Последний изоморфизм означает, что сплетение имеет структуру *полупрямого* произведения, т. е. группа  $\Gamma^X$  функций на пространстве со значениями в группе внутренних симметрий является нормальным делителем группы  $G$ .

Из (19) видно, что группа  $G$  является частным случаем разложимого расширения группы  $F$  с помощью группы  $\Gamma^X$ . Приведем в явном виде операции группы  $G$ , имеющей структуру (19), в терминах операций составляющих ее групп  $F$  и  $\Gamma$ . Действие группы  $G$  на множестве состояний  $\Omega$  вида (15) выражается формулой

$$\sigma(x)(\alpha(x), a) = \sigma(xa^{-1})\alpha(xa^{-1}), \quad (20)$$

где пара  $(\alpha(x), a)$  — элемент группы  $G$ ,  $x \in X$ ,  $\sigma(x) \in \Omega$ ,  $a \in F$ . Произведение элементов  $G$  имеет вид

$$(\alpha(x), a)(\beta(x), b) = (\alpha(x)\beta(xa), ab), \quad (21)$$

где  $(\beta(x), b) \in G$ . Для полноты приведем также формулу обратного элемента:

$$(\alpha(x), a)^{-1} = (\alpha(xa^{-1})^{-1}, a^{-1}). \quad (22)$$

Заметим, что расширения групп образуют классы эквивалентности. В частности, формулы (20)–(22) можно записать различными эквивалентными способами. Устройство этих эквивалентностей, а также способы объединения пространственных и внутренних симметрий обсуждаются в приложении А с общей точки зрения.

Поучительно посмотреть, каким образом калибровочные структуры реализуются в непрерывных физических теориях. Мы рассмотрим два примера, в которых введенные выше конструкции используются без предположения их дискретности. В обоих примерах множеством  $M$  будет 4-мерное пространство Минковского с точками  $x = (x^\nu)$ , а множествами локальных состояний  $\Sigma$  — комплексные линейные пространства различных размерностей. Сечения  $\psi(x)$  этих расслоений называются полями частиц.

### 1.2.1. Электродинамика. Абелев прототип всех калибровочных теорий.

В данном случае группой внутренних симметрий (симметрии лагранжианов и физических наблюдаемых) является абелева унитарная группа  $\Gamma = U(1)$ . Сечения главного  $U(1)$ -расслоения над пространством-временем можно представить в виде  $e^{-i\alpha(x)}$ .

Рассмотрим параллельный перенос для двух близко расположенных точек пространства-времени:

$$\mu(x, x + \Delta x) = e^{-i\rho(x, x + \Delta x)}.$$

Фундаментальное правило преобразования связностей (17) принимает вид

$$\mu'(x, x + \Delta x) = e^{i\alpha(x)} \mu(x, x + \Delta x) e^{-i\alpha(x+\Delta x)}.$$

Далее в соответствии с гипотезой, на которой основаны эмпирические приложения дифференциального исчисления, мы заменяем рассматриваемые выражения линейными комбинациями разностей координат, что приводит к приближениям

$$\begin{aligned} \mu(x, x + \Delta x) &= e^{-i\rho(x, x+\Delta x)} \approx \mathbf{1} - iA(x)\Delta x, \\ \mu'(x, x + \Delta x) &= e^{-i\rho(x, x+\Delta x)} \approx \mathbf{1} - iA'(x)\Delta x, \\ e^{-i\alpha(x+\Delta x)} &\approx e^{-i\alpha(x)} (\mathbf{1} - i\nabla\alpha(x)\Delta x). \end{aligned}$$

Коэффициенты  $A(x)$  и  $A'(x)$ , введенные в этих приближениях, называются *1-формами связности*. Воспользовавшись коммутативностью группы  $U(1)$ , мы получаем правило преобразования формы абелевой связности в виде

$$A'(x) = A(x) + \nabla\alpha(x).$$

В компонентах эта формула имеет вид

$$A'_\nu(x) = A_\nu(x) + \frac{\partial\alpha(x)}{\partial x^\nu}.$$

1-форма  $A(x)$ , принимающая значения в алгебре Ли группы  $U(1)$ , отождествляется с векторным потенциалом электромагнитного поля, а ее дифференциал  $F = (F_{\nu\eta}) = dA$  — с электрическими и магнитными силовыми полями. Напомним, что в тензорных обозначениях в локальных координатах дифференциал  $F$  формы  $A$  имеет вид

$$F_{\nu\eta} = \frac{\partial A_\eta}{\partial x^\nu} - \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\eta}.$$

Для обеспечения калибровочной инвариантности необходимо в дифференциальных уравнениях, описывающих поля  $\psi(x)$ , заменить частные производные *ковариантными*:

$$\partial_\nu \rightarrow D_\nu = \partial_\nu - iA_\nu(x).$$

Чтобы завершить построение, нужно добавить уравнения, описывающие эволюцию самого калибровочного поля  $A(x)$ . Точный вид таких уравнений не следует непосредственно из калибровочного принципа. Ясно лишь, что они должны быть калибровочно-инвариантными. В данном случае простейший выбор калибровочно-инвариантных уравнений приводит к *уравнениям Максвелла*

$$\begin{aligned} dF &= 0 \text{ — первая пара,} \\ d \star F &= 0 \text{ — вторая пара.} \end{aligned} \tag{23}$$

Здесь  $\star$  — оператор *сопряжения Ходжа* («звезда Ходжа»). Заметим, что уравнение (23) соответствует уравнениям Максвелла в вакууме. В присутствии тока  $J$  *вторая пара* уравнений Максвелла принимает вид

$$\star d \star F = J.$$

Заметим также, что *первая пара* уравнений — существенно априорное утверждение, т. е. тождество, которое выполняется для любого дифференциала внешней формы, каковым  $F$  является по определению.

1.2.2. *Неабелевы калибровочные теории в непрерывном пространстве-времени.* Если калибровочная группа  $\Gamma$  является неабелевой группой Ли, то потребуются незначительная модификация предыдущего построения. Снова замена  $\Gamma$ -значного параллельного переноса между двумя близко расположенными пространственно-временными точками  $x$  и  $x + \Delta x$  линейной комбинацией разностей этих точек приводит к 1-форме  $A = (A_\nu)$  со значениями в алгебре Ли группы  $\Gamma$ :

$$\mu(x, x + \Delta x) \approx \mathbf{1} + A_\nu(x) \Delta x^\nu.$$

Здесь использовался тот факт, что  $\mu(x, x) = \mathbf{1}$ . Стандартные инфинитезимальные манипуляции с правилом преобразования связностей (17)

$$\begin{aligned} \gamma(x)^{-1} \mu(x, x + \Delta x) \gamma(x + \Delta x) &\longrightarrow \\ &\longrightarrow \gamma(x)^{-1} (\mathbf{1} + A_\nu(x) \Delta x^\nu) \left( \gamma(x) + \frac{\partial \gamma(x)}{\partial x^\nu} \Delta x^\nu \right) \end{aligned}$$

приводят к следующему правилу преобразования для 1-формы связности:

$$A'_\nu(x) = \gamma(x)^{-1} A_\nu(x) \gamma(x) + \gamma(x)^{-1} \frac{\partial \gamma(x)}{\partial x^\nu}.$$

2-форма кривизны связности

$$F = dA + [A \wedge A] \tag{24}$$

интерпретируется как *физические силовые поля*. 1-форма *тривиальной* связности имеет вид

$$\tilde{A}_\nu(x) = \gamma_0(x)^{-1} \frac{\partial \gamma_0(x)}{\partial x^\nu}.$$

Форма кривизны (24) такой связности равна нулю. Тривиальная связность не порождает никаких физических сил и называется *плоской* в дифференциальной геометрии.

Существуют различные варианты динамических уравнений для калибровочных полей [56]. Наиболее важным примером является *теория Янга–Миллса*, основанная на лагранжиане

$$L_{YM} = \text{Tr} [F \wedge \star F].$$

Уравнения движения Янга–Миллса имеют вид

$$\begin{aligned} dF + [A \wedge F] &= 0, \\ d \star F + [A \wedge \star F] &= 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Здесь снова уравнение (25) является априорным утверждением, называемым *тождеством Бьянки*. Заметим, что уравнения Максвелла являются частным случаем уравнений Янга–Миллса.

Интересно посмотреть как выглядит лагранжиан Янга–Миллса на дискретной решетке. Для простоты рассмотрим гиперкубическую решетку в пространстве-времени Минковского  $M$ . Вычисление с использованием инфинитезимальных аппроксимаций показывает, что  $L_{YM} \sim \sum_f \sigma(\gamma_f)$ , где суммирование ведется по всем двумерным граням элементарного гиперкуба. Функция  $\sigma$  имеет вид

$$\sigma(\gamma) = 2 \dim \rho - \chi(\rho(\gamma)) - \chi(\rho^\dagger(\gamma)) \equiv 2\chi(\mathbf{1}) - \chi(\rho(\gamma)) - \chi(\rho^\dagger(\gamma)),$$

где  $\rho$  — фундаментальное представление калибровочной группы ( $\rho^\dagger$  означает дуальное представление),  $\chi$  — характер (след матрицы представления),  $\gamma_f$  — голономия группы  $\Gamma$  вокруг грани  $f$ .

В теории Янга–Миллса используется оператор Ходжа, преобразующий  $k$ -формы в  $(n - k)$ -формы при наличии метрики в  $n$ -мерном пространстве  $M$ . В топологических приложениях большую роль играет так называемая *BF-теория*. BF-теория избегает использования метрики за счет введения дополнительного динамического поля  $B$ , представляющего собой  $(n - 2)$ -форму со значениями в алгебре Ли калибровочной группы. Калибровочно-инвариантный лагранжиан BF-теории имеет вид

$$L_{BF} = \text{Tr} [B \wedge F].$$

*1.2.3. Возникновение пространства в дискретной динамике.* В некоторых современных физических теориях подразумевается, что пространство и даже время являются производными понятиями, т. е. они отсутствуют в фундаментальной формулировке теории, но появляются как некоторые приближенные концепции на макроскопическом уровне. Интерпретация пространства в таком духе возникает довольно естественно. Что же касается времени\*,

---

\*Мотивация рассматривать время на одном уровне фундаментальности с пространством исходит из специальной теории относительности.

то попытки вывести его из более фундаментальных понятий требуют дополнительных усилий и использования некоторых аргументов *ad hoc*. Проблемы вывода пространства и времени из более фундаментальных сущностей обсуждаются, в частности, в теории струн [60], теории каузальных множеств [52] и теории спиновых сетей [3].

С помощью простой конструкции [41] покажем, каким образом пространственно-временные структуры могут возникать в дискретной динамике. Предположим, что имеется последовательность помеченных (индексированных) временем событий разных типов и возможность различать эти типы. Более конкретно рассмотрим множество символов  $\Sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_N\}$ , обозначающих фиксируемые в восприятии некоторого «наблюдателя» элементы опыта, и предположим, что «наблюдатель» способен «воспринимать» и «запоминать» последовательности (потoki) символов

$$h = s_0 s_1 \dots s_t, \quad \text{где } s_i \in \Sigma, t \in \mathbb{N}. \quad (26)$$

Понятия «причинности» и «светового конуса» возникают совершенно естественно. Невозможность преодолеть «скорость света» означает невозможность получить больше чем  $t$  символов («элементов восприятия») за  $t$  наблюдений.

В простейшем подходе счетчики событий различных типов можно интерпретировать как пространственные измерения, а точку пространства-времени  $p$  определить как класс эквивалентности последовательностей с одинаковыми кратностями вхождения каждого символа, т. е.  $p$  представляет собой

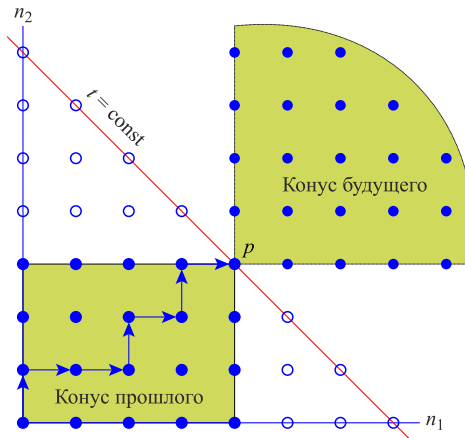


Рис. 2. Пространственно-временная точка  $p$  как класс эквивалентности путей с одинаковыми числами  $n_1, n_2, \dots, n_N$

«коммутативный моном» полной степени  $t$ , описываемый вектором из  $N$  натуральных чисел:

$$p = (n_1, \dots, n_{N+1})^T, \quad n_1 + \dots + n_N = t, \quad (27)$$

$n_i$  — кратность вхождения символа  $\sigma_i$  в последовательность  $h$ . В терминах коммутативных мономов «световой конус прошлого» — это множество делителей монома  $p$ , а «световой конус будущего» — множество его кратных (рис. 2).

Разумеется, приведенная схема имеет лишь иллюстративный характер. Чтобы приспособить ее к описанию более реальных моделей, необходимо введение дополнительных структур и, возможно, другого определения понятия пространственно-временной точки, учитывающего, в частности, симметрии между символами множества  $\Sigma$ . Необходимо, например, чтобы в пределе больших значений  $n_i$  (или, в зависимости от определения понятия точки, каких-либо других подобных характеристик последовательности (26)) в качестве континуального приближения возникали симметрии Лоренца (или Пуанкаре).

Для иллюстрации этих соображений построим простую физическую модель. Рассмотрим множество символов из двух элементов  $\Sigma = \{\sigma_1, \sigma_2\}$  с естественным предположением, что оно симметрично относительно перестановки символов. Эта перестановка порождает группу  $S_2$ . Допустим, что точка пространства-времени характеризуется, в соответствии с (27), вектором  $p = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix}$ . Действие группы  $S_2$  на такие векторы описывается двумя матрицами  $e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  и  $r = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Для учета симметрии символов необходимо выразить точку  $p$  в терминах инвариантных подмодулей группы  $S_2$ . Для этого нужно разложить действие группы на неприводимые компоненты. Переход к базису инвариантных подмодулей можно выполнить, например, с помощью матрицы  $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ . Единичная матрица  $e$ , очевидно, не изменится, а матрица отражения примет вид  $r' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ . Точка пространства-времени в новом базисе примет вид  $p' = \begin{pmatrix} n_1 + n_2 \\ n_1 - n_2 \end{pmatrix}$ , или, если ввести обозначения  $t = n_1 + n_2$  и  $x = n_1 - n_2$ ,  $p' = \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}$ . Переменную  $x$  назовем «пространством» («пространственным измерением»). Мы видим, что наличие симметрий уменьшило число ожидаемых пространственных измерений и, кроме

того, переход к инвариантным подмодулям вынудил нас ввести отрицательные числа\*.

Теперь добавим немного физики, предположив, что последовательность символов  $h = s_0 s_1 \cdots s_t, s_i \in \{\sigma_1, \sigma_2\}$  соответствует *схеме испытаний Бернулли*, т. е. в достаточно длинных подпоследовательностях символы  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  появляются с фиксированными частотами (вероятностями)  $p_1$  и  $p_2$  ( $p_1 + p_2 = 1$ ). Тогда вероятность каждой отдельной последовательности описывается биномиальным распределением

$$P(n_1, n_2) = \frac{(n_1 + n_2)!}{n_1! n_2!} p_1^{n_1} p_2^{n_2}. \quad (28)$$

Введем величину  $v = p_1 - p_2$  и назовем ее «*скоростью*». Скорость, очевидно, ограничена по абсолютной величине:  $-1 \leq v \leq 1$ . Вычислим с помощью формулы Стирлинга асимптотику выражения (28) для больших  $n_1$  и  $n_2$  в окрестности стационарного значения этого выражения. Мы ограничиваемся членами второго порядка в разложении в ряд логарифма выражения (28) в окрестности стационарного значения. Заменяя  $n_1$  и  $n_2$  переменными  $t$  и  $x$ , а вероятности — скоростью, мы получим

$$P(x, t) \approx \tilde{P}(x, t) = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \exp \left[ -\frac{1}{2t} \left( \frac{x-vt}{\sqrt{1-v^2}} \right)^2 \right]. \quad (29)$$

Заметим, что это выражение содержит «релятивистский» фрагмент  $\frac{x-vt}{\sqrt{1-v^2}}$ . Выполнив замену переменных  $t = T + t'$  и  $x = vT + x'$ , выражение (29) можно переписать в виде

$$\tilde{P}(x, t) = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \sqrt{\frac{2}{\pi T}} \exp \left[ -\frac{1}{2T} \left( \frac{x'-vt'}{\sqrt{1-v^2}} \right)^2 \right] + O \left( \frac{t'}{T} \right). \quad (30)$$

Если предположить, что  $t' \ll T$  ( $1/T$  — «*постоянная Хаббла*», а  $t'$  — «*характерное время наблюдений*»), то (30) с высокой точностью воспроизводит «релятивистскую инвариантность». Выражение (29) представляет собой фундаментальное решение *уравнения теплопроводности*\*\*

$$\frac{\partial \tilde{P}(x, t)}{\partial t} + v \frac{\partial \tilde{P}(x, t)}{\partial x} = \frac{(1-v^2)}{2} \frac{\partial^2 \tilde{P}(x, t)}{\partial x^2}.$$

\*Поскольку  $r^2 = 1$ , собственные числа матрицы отражения — квадратные корни из единицы, один из которых  $\epsilon = e^{2\pi i/2}$  является *примитивным*. Таким образом, мы получаем кольцо  $\mathbb{Z}$  как *алгебраическое расширение* полукольца  $\mathbb{N}$  с помощью алгебраического элемента  $\epsilon$ .

\*\*Это уравнение называется также, в зависимости от интерпретации функции  $\tilde{P}(x, t)$ , *уравнением диффузии* или *уравнением Фоккера–Планка*.



В «пределе скорости света»  $|v| = 1$  это уравнение переходит в *волновое уравнение*

$$\frac{\partial \tilde{P}(x, t)}{\partial t} \pm \frac{\partial \tilde{P}(x, t)}{\partial x} = 0.$$

Простота этой модели дает возможность сравнить точные комбинаторные выражения с их континуальными приближениями. Сравнение показывает, что континуальные приближения могут вносить серьезные артефакты. Рассмотрим типичную для механики задачу: найти экстремали траекторий, связывающих две фиксированные точки пространства-времени  $(0, 0)$  и  $(X, T)$ . Нашей версией «*принципа наименьшего действия*» будет поиск траекторий максимальной вероятности. Вероятность траектории, связывающей точки  $(0, 0)$  и  $(X, T)$  и проходящей через некоторую промежуточную точку  $(x, t)$ , в соответствии с правилом вычисления *условной вероятности* имеет вид

$$\begin{aligned} P_{(0,0) \rightarrow (x,t) \rightarrow (X,T)} &= \frac{P(x, t) P(X - x, T - t)}{P(X, T)} = \\ &= \frac{t! (T - t)! \left(\frac{T - X}{2}\right)! \left(\frac{T + X}{2}\right)!}{\left(\frac{t - x}{2}\right)! \left(\frac{t + x}{2}\right)! \left(\frac{T - t - X - x}{2}\right)! \left(\frac{T - t + X - x}{2}\right)! T!}. \end{aligned} \quad (31)$$

Аналогичная условная вероятность для континуального приближения (29) принимает вид

$$\tilde{P}_{(0,0) \rightarrow (x,t) \rightarrow (X,T)} = \frac{T}{\sqrt{\frac{\pi}{2} (1 - v^2) t T (T - t)}} \exp \left[ -\frac{(Xt - xT)^2}{2(1 - v^2) t T (T - t)} \right]. \quad (32)$$

Имеются существенные различия между точным выражением (31) и его континуальным приближением (32):

— выражение (32) содержит *искусственную зависимость* от скорости  $v$  (или, эквивалентно, от вероятностей  $p_1, p_2$ ) в отличие от точной вероятности (31).

— легко проверить, что максимум вероятности в точном выражении (31) достигается не на единственной траектории, а на множестве различных траекторий, тогда как функционал (32) имеет единственную экстремаль, а именно, прямую линию  $x = \frac{X}{T}t$  в качестве *детерминистической траектории*. Здесь мы имеем пример того, что детерминистическое поведение может возникнуть в результате приближения, основанного на законе больших чисел.

**1.3. Особенности детерминистической динамики.** Результаты этого раздела основаны на работах [27, 31, 34].

Отсутствие каких-либо закономерностей в поведении динамической системы означает, что ее траекторией может быть с неопределенной вероятностью любое сечение (9) расслоения (7). Рассмотрим эволюции с фиксированным числом  $k$  шагов по времени:  $h_{k,t} = (\omega_{t-k}, \dots, \omega_t)$ . Эти траектории являются элементами множества  $H_{k,t} = \prod_{s=t-k}^t \Omega_s$ . Стандартный способ введения закономерностей в динамику состоит в том, чтобы приписать какие-либо неотрицательные числа  $p(h_{k,t})$  точкам множества  $H_{k,t}$ . Эти числа мы будем называть *весами*\*. Значениями функции  $p(\cdot)$  могут быть произвольные вещественные числа, однако в соответствии с идеологией данной статьи мы предпочитаем натуральные значения. Если ограничиться для весовой функции только значениями 0 и 1, то мы получим *характеристическую функцию* некоторого подмножества множества  $H_{k,t}$ . В классическом случае состояния системы во все моменты времени  $\mathcal{T}$  фиксированно отождествлены с элементами множества  $\Omega$ . Поэтому множество траекторий можно записать в виде  $H_{k,t} = \Omega^{k+1} \equiv H_k$ . Заметим, что мы «потеряли» зависимость от «текущего момента времени»  $t$ , поэтому естественно предположить, что и характеристическая функция также зависит только от длины траектории. Любое подмножество декартового произведения  $n$  множеств (необязательно одинаковых) называется  $n$ -арным отношением\*\*.  $(k+1)$ -арное дискретное отношение на множестве  $H_k$  мы будем называть *эволюционным отношением  $k$ -го порядка*. С помощью характеристической функции это отношение можно записать в виде уравнения

$$R(\omega_{t-k}, \dots, \omega_t) = 0. \quad (33)$$

Мы будем называть эволюционное отношение  $k$ -го порядка *детерминистическим*, если уравнение (33) можно разрешить\*\*\* относительно переменной  $\omega_t$ . Детерминистическое эволюционное уравнение  $k$ -го порядка можно записать в виде

$$\omega_t = F(\omega_{t-1}, \dots, \omega_{t-k}). \quad (34)$$

В приложениях обычно рассматриваются детерминистические динамические системы первого порядка. Для любой траектории такой системы ее состоя-

\*Отнормировав *весовую функцию*  $p(\cdot)$  по всем элементам множества  $H_{k,t}$ , можно получить *распределение вероятностей*.

\*\*Более подробно дискретные отношения и их приложения к структурному анализу динамических систем, в частности, клеточных автоматов, обсуждаются в приложении Б.

\*\*\*Отношения такого типа называются *функциональными* (см. приложение Б).

ние в данный момент времени является *функцией* состояния в предыдущий момент:

$$w_t = F(w_{t-1}), \quad w_t, w_{t-1} \in \Omega. \quad (35)$$

Далее в этом разделе мы будем рассматривать только системы первого порядка, хотя, с некоторыми техническими усложнениями, результаты, аналогичные тем, что будут изложены ниже, можно получить и для более общей детерминистической динамики (34).

Начнем с замечаний общего характера о связи симметрий с динамикой в детерминистическом случае. Группа симметрий  $G$  разбивает множество  $\Omega$  на непересекающиеся орбиты конечного размера. Из функциональности отношения (35) немедленно следует, что

- динамические траектории проходят *групповые орбиты* в порядке невозрастания размеров орбит,
- периодические траектории проходят через орбиты одного и того же размера.

### 1.3.1. Солитоноподобные структуры в детерминистической динамике.

Обратимся к динамическим системам с пространством. Одной из характерных особенностей динамики таких систем является формирование движущихся в пространстве структур, сохраняющих форму. Покажем, что такое поведение является естественным свойством симметрий пространства.

Начнем с простого обозримого примера динамической системы. В качестве пространства  $X$  возьмем куб (мы здесь, для краткости, кубом называем *граф куба*). Заметим, что куб можно рассматривать как простейшую «конечную модель графена», полученную замыканием гексагональной подрешетки в тор, как это показано на рис. 3.

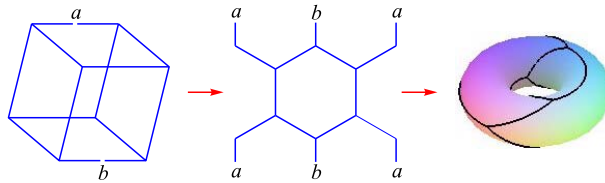


Рис. 3. Граф куба образует четырехугольную решетку на сфере (шесть четырехугольников) и шестиугольную решетку на торе (четыре шестиугольника)

Группой симметрий куба является 48-элементная группа  $F = S_4 \times \mathbb{Z}_2$ . Если  $\Sigma = \{0, 1\}$  — множество состояний вершин куба, то полное число состояний модели равно  $|\Sigma^X| = 2^8 = 256$ . Для простоты предположим, что группа внутренних симметрий тривиальна  $\Gamma = \{\mathbf{1}\}$ , тогда в соответствии с формулой (19) полная группа симметрий модели фактически совпадает с группой симметрий пространства:  $G = \Gamma^X \times F = \{\mathbf{1}\}^X \times F \cong F$ . Группа  $G$

Таблица 1. Орбиты множества состояний

Размер орбит	1	2	4	6	8	12	24
Число орбит	2	1	2	2	5	4	6

расщепляет множество состояний  $\Sigma^X$  на 22 орбиты, размеры и числа которых приведены в табл. 1.

Рассмотрим детерминистическую динамическую систему на кубе, а именно, симметричный [26, 30] бинарный трехвалентный клеточный автомат (см. приложение Б) с правилом 86. Число 86 — это десятичное представление строки битов (подразумевается возрастающий порядок разрядов) из последней колонки табл. 2, задающей правило эволюции автомата. В таблице  $x_i$  и  $x'_i$  — состояния  $i$ -й вершины куба в предыдущий и последующий моменты времени соответственно;  $x_{1,i}, x_{2,i}, x_{3,i}$  — состояния вершин, смежных с  $i$ -й в предыдущий момент. Подразумевается симметричность правила эволюции относительно всех перестановок вершин  $x_{1,i}, x_{2,i}, x_{3,i}$ , поэтому в первых трех колонках таблицы представлены симметризованные комбинации значений.

Таблица 2. Правило эволюции автомата 86

$x_{1,i}$	$x_{2,i}$	$x_{3,i}$	$x_i$	$x'_i$
0	0	0	0	0
0	0	0	1	1
1	0	0	0	1
1	0	0	1	0
1	1	0	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	0	1
1	1	1	1	0

Это правило можно также записать в стиле, принятом для автоматов типа Life Конвея, в терминах списков «рождение»/«выживание» в виде B123/S0 или в виде полинома над конечным полем  $\mathbb{F}_2$

$$x'_i = x_i + \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3,$$

где  $\Pi_1 = x_{1,i} + x_{2,i} + x_{3,i}$ ,  $\Pi_2 = x_{1,i}x_{2,i} + x_{1,i}x_{3,i} + x_{2,i}x_{3,i}$ ,  $\Pi_3 = x_{1,i}x_{2,i}x_{3,i}$  — элементарные симметрические функции.

Фазовый портрет автомата показан на рис. 4. На этом рисунке групповые орбиты представлены маленькими окружностями, содержащими метки

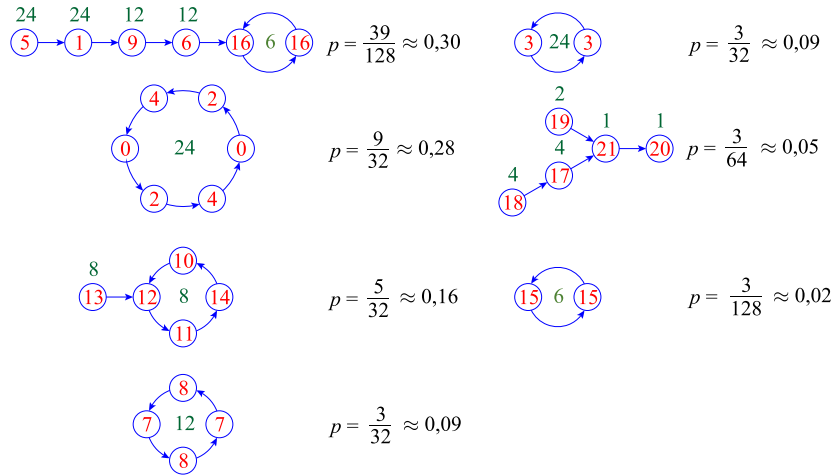


Рис. 4. Классы эквивалентности траекторий для симметричного клеточного автомата на кубе с правилом эволюции 86

орбит\*. Числа над орбитами и внутри циклов — размеры орбит. Напомним, что циклы состоят из орбит одинакового размера (см. замечание на с. 120). Рациональное число  $p$  обозначает вес соответствующего элемента фазового портрета. Фактически  $p$  — это вероятность того, что траектория случайно выбранного состояния окажется изолированным циклом или будет захвачена соответствующим аттрактором:  $p = \frac{\text{размер бассейна}}{\text{полное число состояний}}$ , где *размер бассейна* — это сумма размеров орбит, входящих в данную структуру.

Обобщая этот пример, мы видим, что, если группа симметрий *детерминистической* динамической системы расщепляет множество состояний на *конечное* число орбит, то *любая* траектория за конечное число шагов по времени *неизбежно* перейдет в цикл над некоторой последовательностью орбит. Это как раз и означает формирование *солитоноподобных структур*. А именно, рассмотрим эволюцию

$$\sigma_{t_0}(x) \rightarrow \sigma_{t_1}(x) = A_{t_1 t_0}(\sigma_{t_0}(x)). \quad (36)$$

Если состояния в моменты  $t_0$  и  $t_1$  принадлежат *одной и той же орбите*, т. е.

$$\sigma_{t_0}(x), \sigma_{t_1}(x) \in O_i \subseteq \Sigma^X,$$

\*Фактически эти метки представляют собой порядковые номера, которые компьютерная программа, вычисляющая эволюцию модели, присваивает орбитам в процессе их появления.

то эволюцию (36) можно заменить групповым действием

$$\sigma_{t_1}(x) = \sigma_{t_0}(x)g, \quad g \in G. \quad (37)$$

Поскольку действие группы симметрий пространства эквивалентно «движению» в пространстве, то (37) означает, что начальное состояние («форма»)  $\sigma_{t_0}(x)$  воспроизводится после некоторого движения в пространстве.

Приведем несколько примеров циклов над групповыми орбитами с указанием соответствующих симметрий (две из которых непрерывные):

- бегущие волны  $\sigma(x - vt)$  в математической физике — группа Галилея;
- «обобщенные когерентные состояния» в квантовой физике — унитарные представления компактных групп Ли;
- «космические корабли» в клеточных автоматах — симметрии решеток.

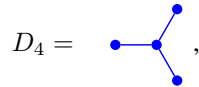
В качестве более детального примера рассмотрим «глайдер» — один из «космических кораблей» конвеевского автомата Life. Пространство  $X$  этого автомата представляет собой квадратную решетку. Мы будем считать, что эта решетка реализована в виде дискретного тора размера  $N \times N$ . Если  $N \neq 4$ , то группа симметрий пространства  $X$  представляет собой полупрямое произведение двумерных трансляций  $T^2 = \mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_N$  и диэдральной группы  $D_8 \cong \mathbb{Z}_4 \rtimes \mathbb{Z}_2$ :

$$F = T^2 \rtimes D_8, \quad \text{если } N = 3, 5, 6, \dots, \infty.$$

В случае  $N = 4$  подгруппа трансляций  $T^2 = \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$  уже не является нормальным делителем и группа  $F$  приобретает несколько более сложную структуру [37]:

$$F = \overbrace{\left( \left( \left( \mathbb{Z}_2 \times D_8 \right) \rtimes \mathbb{Z}_2 \right) \rtimes \mathbb{Z}_3 \right) \rtimes \mathbb{Z}_2}^{\text{Нормальное замыкание } T^2}.$$

Наличие дополнительного сомножителя  $\mathbb{Z}_3$  в этом выражении объясняется симметрией диаграммы Дынкина с четырьмя вершинами



соответствующей случаю  $N = 4$ .

Множество локальных состояний клеток автомата Life имеет вид  $\Sigma = \{0, 1\} = \{\text{«мертвая»}, \text{«живая»}\}$ . Поскольку локальное правило этого автомата не симметрично относительно перестановки локальных состояний  $0 \leftrightarrow 1$ , группа внутренних симметрий  $\Gamma$  тривиальна. Поэтому  $G = \{\mathbf{1}\}^X \rtimes F \cong F$ . Действие  $G$  на функции  $\sigma(x) \in \Sigma^X$  в соответствии с формулой (20) имеет вид  $\sigma(x)g = \sigma(xf^{-1})$ , где  $g = (\mathbf{1}, f)$ ,  $f \in F$ . На рис. 5 воспроизведены в предположении  $N > 4$  четыре шага эволюции глайдера.

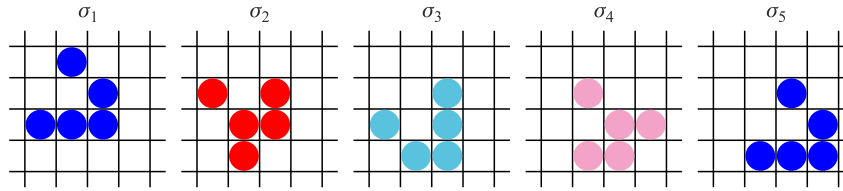


Рис. 5. Пример солитоноподобной структуры. «Глайдер» клеточного автомата Life представляет собой цикл над двумя орбитами группы  $F = T^2 \rtimes D_8$ . Конфигурации  $\sigma_3$  и  $\sigma_4$  получаются из  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  соответственно одной и той же комбинацией сдвига, поворота на  $90^\circ$  по часовой стрелке и отражения относительно вертикали

### 1.3.2. Об обратимости в дискретных детерминистических системах.

Типичная дискретная детерминистическая система *необратима*. Фазовый портрет такой системы похож на представленный на рис. 4. Мы видим, что там имеются несколько изолированных и несколько предельных циклов\*. В непрерывном случае можно в принципе, увеличивая точность описания, восстановить предысторию любой траектории, стремящейся к предельному циклу, поскольку точка континуума может содержать потенциально бесконечное количество информации. В дискретном случае информация о состояниях, в которых была система до перехода на предельный цикл, безвозвратно теряется. Это означает, что по прошествии некоторого времени предельные циклы становятся физически неотличимыми от изолированных и динамическая система ведет себя как обратимая. Возможно, подобные соображения могут быть использованы для объяснения наблюдаемой обратимости фундаментальных законов природы.

Именно с таких позиций Г. 'т Хоофт в ряде своих работ (см., например, [17, 18]) пытается разрешить конфликт между необратимостью гравитации (потеря информации на горизонтах черных дыр) и обратимостью (унитарностью) стандартной квантовой механики. Подход 'т Хоофта основан на следующих предположениях:

- физические системы на микроскопических (планковских) масштабах описываются *дискретными степенями свободы*;
- состояния этих степеней свободы образуют *первичный (primordial) базис гильбертова пространства* (в котором задана неунитарная эволюция);
- первичные состояния образуют *классы эквивалентности*: два состояния эквивалентны, если по истечении некоторого времени они переходят в одно и то же состояние;

\*Неподвижные точки можно считать циклами единичной длины.

— эти классы эквивалентности по построению образуют базис гильбертова пространства с унитарной эволюцией, описываемой обратимым во времени уравнением Шредингера.

В нашей терминологии это соответствует переходу к предельным циклам. За конечное число шагов по времени система полностью «забывает» свою «доцикловую» предысторию.

Если приведенные рассуждения имеют какое-либо отношение к физической реальности, то необратимости такого типа вряд ли можно наблюдать экспериментально. Система, вероятно, должна проводить вне цикла время порядка планковского, т. е. примерно  $10^{-44}$  с. Наиболее короткий интервал времени, фиксируемый экспериментально в настоящее время, равен приблизительно  $10^{-18}$  с или  $10^{26}$  планковских единиц.

## 2. КОНСТРУКТИВНОЕ ОПИСАНИЕ КВАНТОВОГО ПОВЕДЕНИЯ

Этот раздел основан на работах [42–46].

Наиболее известной эмпирической демонстрацией квантового поведения считается *двухщелевой эксперимент*. Если провести двухщелевой эксперимент с заряженными частицами в установке, снабженной соленоидом, то можно наблюдать *эффект Ааронова–Бома* (рис. 6), демонстрирующий роль калибровочных связностей в квантовой механике. Заряженные частицы движутся в области, содержащей идеально экранированный тонкий соленоид. Интерференционная картина меняется при включении соленоида, несмотря на отсутствие электромагнитных сил, действующих на частицы. Эффект возникает из-за того, что работающий соленоид создает вокруг себя  $U(1)$ -связность, изменяющую фазы волновых функций частиц.

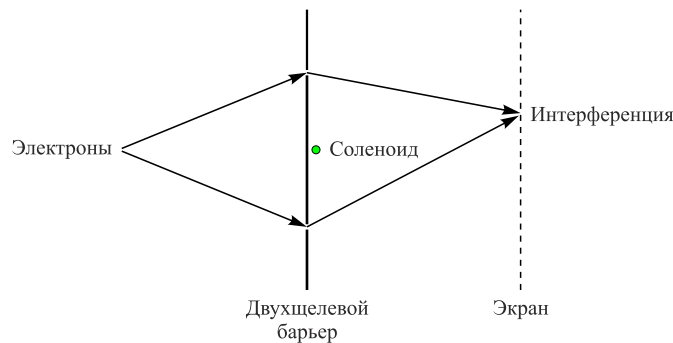


Рис. 6. Эффект Ааронова–Бома. Интерференционная картина сдвигается при включении соленоида, несмотря на отсутствие электромагнитных сил вне соленоида



Для квантования динамических систем с пространственной структурой наиболее удобен фейнмановский метод интегралов по траекториям [8], фактически возникший из изучения двухщелевого эксперимента\*. Согласно подходу Фейнмана амплитуда квантового перехода системы из одного состояния в другое вычисляется с помощью суммирования амплитуд вдоль всех возможных классических траекторий, соединяющих эти состояния. Амплитуда вдоль отдельной траектории вычисляется как произведение амплитуд переходов между ближайшими последовательными состояниями на траектории. А именно, амплитуда вдоль траектории представляется в виде экспоненты от действия вдоль траектории:

$$A_{U(1)} = A_0 \exp(iS) = A_0 \exp\left(i \int_0^T L dt\right). \quad (38)$$

Функция  $L$ , зависящая от *первых производных* состояний по времени, называется *лагранжианом*. В дискретном времени экспонента от интеграла переходит в произведение:  $\exp\left(i \int L dt\right) \rightarrow e^{iL_{0,1}} \dots e^{iL_{t-1,t}} \dots e^{iL_{T-1,T}}$ , и выражение для амплитуды принимает вид

$$A_{U(1)} = A_0 e^{iL_{0,1}} \dots e^{iL_{t-1,t}} \dots e^{iL_{T-1,T}}.$$

Сомножители  $\mu_{t-1,t} = e^{iL_{t-1,t}}$  этого произведения представляют собой элементы *связности* со значениями в *одномерном* унитарном представлении  $U(1)$  окружности, т. е. коммутативной группы Ли  $\Gamma = S^1 \equiv \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ , являющейся в данном случае группой внутренних симметрий. В соответствии с нашим взглядом на квантовое поведение это предполагает наличие некоторого множества  $\Sigma$  *локальных* состояний, на котором действует группа Ли  $S^1$ , а ее представление  $U(1)$  действует на линейном пространстве (в данном случае  $\mathbb{C}$ ) *амплитуд* состояний из  $\Sigma$ . Далее при обсуждении квантового поведения с общей точки зрения мы уточним связь между состояниями и их амплитудами, т. е. числовыми весами, приписываемыми состояниям. Здесь, как обычно, амплитуды, на которых действует представление  $U(1)$  (и, соответственно, состояния, на которых действует  $S^1$ ), ненаблюдаемы, а наблюдаемы только инварианты этих действий. Непрерывной версией того, что элементы связности определены на парах состояний, соответствующих начальному и конечному моментам интервала времени, т. е. на ребрах абстрактного графа\*\*, является зависимость лагранжиана от первых производных по времени.

\*Известно высказывание Р. Фейнмана о том, что «вся квантовая механика может быть извлечена из тщательного обдумывания следствий одного этого эксперимента».

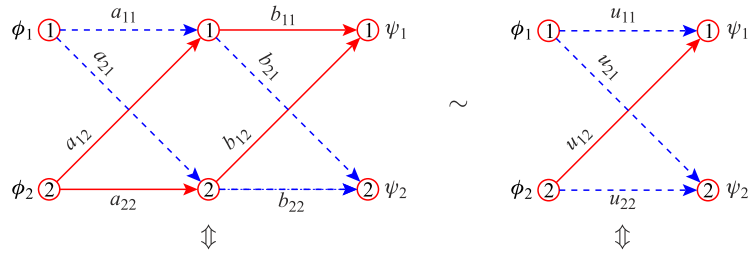
\*\*Напомним, что определение связности как функции на *парах* точек необходимо для обеспечения нетривиальности связности.

Естественное обобщение возникает из предположений, что группа  $\Gamma$  не обязательно окружность и что ее унитарное представление  $\rho(\Gamma)$  не обязательно одномерно. В этом случае амплитуда представляет собой многокомпонентный вектор, что удобно для описания частиц с более сложно устроенными внутренними степенями свободы. Значение такой многокомпонентной амплитуды на траектории принимает вид\*

$$A_{\rho(\Gamma)} = \rho(\alpha_{T,T-1}) \cdots \rho(\alpha_{t,t-1}) \cdots \rho(\alpha_{1,0}) A_0, \quad \alpha_{t,t-1} \in \Gamma. \quad (39)$$

В соответствии с нашей идеологией мы будем предполагать, что  $\Gamma$  — конечная группа. В этом случае нет необходимости заботиться об унитарности, поскольку линейные представления конечных групп автоматически унитарны. Ясно, что стандартное квантование (38) можно аппроксимировать с помощью одномерных представлений конечных циклических групп достаточно большого периода.

Правила Фейнмана, сформулированные в абстрактной форме, фактически совпадают с правилами умножения матриц. Согласно правилам Фейнмана, для того чтобы получить амплитуду перехода из одного состояния в другое, необходимо соединить эти состояния всеми возможными траекториями, перемножить амплитуды вдоль этих траекторий и суммировать полученные произведения. Совпадение этих инструкций с правилами умножения матриц очевидно из иллюстрации, на которой два шага эволюции квантовой системы с двумя состояниями («однокубитный регистр») представлены параллельно в фейнмановской и матричной формах:



$$BA = \begin{pmatrix} b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} & b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21} \\ b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22} & b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} \end{pmatrix} \sim U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix}.$$

В соответствии с фейнмановскими правилами переход, скажем, из состояния  $\phi_2$  в  $\psi_1$  определяется суммой по двум путям  $b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22}$ . Но это

\*В некоммутативном случае важно соблюдать порядок операторов, согласованный в данном случае с традицией писать матрицы слева от векторов.

же выражение является элементом  $u_{12}$  произведения матриц  $U = BA$ . Общий случай произвольного числа состояний и произвольного числа шагов по времени легко выводится из этого элементарного примера математической индукцией по указанным числам.

В случае некоммутативной связности формула (39) соответствует неабелевой калибровочной теории. Приведенное выше рассуждение о соответствии фейнмановского квантования матричному умножению здесь также применимо. Нам достаточно лишь трактовать эволюционные матрицы  $A, B$  и  $U$  как блочные матрицы с некоммутативными элементами, являющимися матрицами из представления  $\rho(\Gamma)$ .

Представление матричного умножения фейнмановскими правилами: «перемножить последовательные события» и «суммировать альтернативные истории», пригодно для матриц с произвольными элементами. В обычной формулировке фейнмановского квантования элементы матриц имеют очень специальный вид. А именно, все элементы матрицы представляют собой комплексные числа  $e^{iLdt}$ , равные по модулю единице. Эти числа можно интерпретировать как континуальные аналоги корней из единицы. То, что они не могут обращаться в нуль, означает, что невозможно реализовать системы, в которых запрещены переходы между некоторыми состояниями — например, между состояниями в далеко отстоящих друг от друга точках пространства. Более того, выпадает важный случай тривиальной группы внутренних симметрий  $\Gamma = \{1\}$ . В этом случае квантовая эволюция описывается матрицами перестановок. Матрица перестановок размера  $n \times n$  содержит  $n$  единиц и  $n^2 - n$  нулей. Нуль, разумеется, невозможно представить экспонентой какого-либо числа.

Изучение квантового поведения дискретных динамических систем с пространственной структурой — комбинаторно трудная задача. Построение соответствующих моделей существенно зависит от ряда допущений, которые необходимо наложить на структуру пространства и свойства квантовых переходов, чтобы сделать модель поддающейся изучению. Один из подходов к построению квантовых моделей на дискретных пространствах описан в приложении В. Квантовые переходы в этих моделях определены локально, а именно, на окрестностях регулярных графов, что делает их в определенном смысле похожими на клеточные автоматы.

Далее мы будем рассматривать проблему квантового поведения дискретных систем в общем виде, т. е. игнорируя возможное наличие пространства в структуре полного множества состояний. Заметим, что существует много физических проблем, например, квантовые вычисления, для которых выделение в множестве состояний какой-либо пространственной структуры несущественно.

**2.1. Квантование дискретных систем.** Таким образом, мы будем придерживаться традиционной формулировки квантовой механики, в которой эво-

люция квантовой динамической системы из начального состояния в конечно описывается *матрицей эволюции*  $U: |\psi_0\rangle \rightarrow |\psi_T\rangle = U|\psi_0\rangle$ . Матрица эволюции может быть представлена в виде произведения матриц, соответствующих элементарным временным шагам:  $U = U_{T \leftarrow T-1} \cdots U_{t \leftarrow t-1} \cdots U_{1 \leftarrow 0}$ .

*2.1.1. Стандартная и «конечная» версии квантовой механики.* Для более формального обоснования законности замены в физических задачах бесконечных групп конечными можно воспользоваться понятием финитной аппроксимируемости. (Бесконечная) группа  $G$  называется *финитно аппроксимируемой\** [50], если для каждого ее элемента  $g \neq 1$  существует такой гомоморфизм  $\phi: G \rightarrow H$  в конечную группу  $H$ , что  $\phi(g) \neq 1$ . Это означает, что любые соотношения между элементами группы  $G$  можно смоделировать соотношениями между элементами конечной группы. Здесь имеется аналогия с широко используемым в физике приемом, когда для решения некоторой задачи бесконечное пространство заменяется, например, тором, размер которого достаточен для того, чтобы вместить данные задачи. На практике все конструктивные бесконечные группы, используемые в физике, являются финитно аппроксимируемыми. Типичным примером финитно аппроксимируемой группы является популярная в теоретической физике *группа кос*. Согласно стандартной конструкции [58] группа кос с  $n$  нитями  $B_n$  порождается образующими  $b_1, \dots, b_{n-1}$ , удовлетворяющими соотношениям:

$$b_i b_{i+1} b_i = b_{i+1} b_i b_{i+1}, \quad i = 1, \dots, n-1 \text{ — уравнение Янга–Бакстера,} \quad (40)$$

$$b_i b_j = b_j b_i, \quad |i-j| \geq 2 \text{ — дальняя коммутативность.} \quad (41)$$

Заметим, что группа кос является ближайшим бесконечным «родственником» группы перестановок: группа перестановок  $S_n$  получается из  $B_n$ , если к (40) и (41) добавить соотношения  $b_i^2 = 1$ .

Обратимся теперь к унитарным группам, играющим центральную роль в квантовой физике. Здесь, поскольку мы начинаем с континуума, требуется два шага для перехода от бесконечного к конечному.

1. Из теории квантовых вычислений [55] известно, что существуют универсальные конечные наборы унитарных операторов, называемых *квантовыми вентилями*, с помощью которых можно порождать множества операторов, всюду плотных в множестве всех унитарных операторов, действующих в соответствующем гильбертовом пространстве. Квантовые вентили действуют в гильбертовых пространствах небольших фиксированных размерностей (однокубитные, двухкубитные и т. д. вентили), но из них можно построить конеч-

---

\*В англоязычной литературе используется термин *residually finite*, еще более подчеркивающий «конечный» аспект таких групп.

ные наборы унитарных матриц, действующих в гильбертовых пространствах произвольной размерности. Эти матрицы можно рассматривать как образующие конечно порожденной группы, которая аппроксимирует с произвольной точностью (плотно вкладывается в) общую унитарную группу.

2. Согласно теореме А. И. Мальцева [51], всякая конечно порожденная группа матриц над (любым) полем *финитно аппроксимируема*.

Таким образом, унитарные группы можно заменить конечными безо всякого ущерба для физики как эмпирической науки.

Для того чтобы воспроизвести квантовую механику в конструктивной «конечной» постановке, мы будем придерживаться принципа Оккама: вводить новые элементы описания, только если они действительно необходимы. Приведем сравнение основных элементов стандартной квантовой механики с их конструктивными аналогами.

1. а) Стандартная квантовая механика имеет дело с *унитарными операторами*  $U$ , действующими в *гильбертовом пространстве*  $\mathcal{H}$  над полем комплексных чисел  $\mathbb{C}$ . Элементы  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$  этого пространства называются «*состояниями*», «*векторами состояний*», «*волновыми функциями*», «*амплитудами*» и т. д. Операторы  $U$  являются элементами общей унитарной группы  $\text{Aut}(\mathcal{H})$ , действующей в  $\mathcal{H}$ .

б) В «конечной» квантовой механике\* гильбертово пространство над полем  $\mathbb{C}$  заменяется  $K$ -мерным гильбертовым пространством  $\mathcal{H}_K$  над *абелевым числовым полем*  $\mathcal{F}$  — расширением рациональных чисел  $\mathbb{Q}$  с *абелевой группой Галуа* [61]. Операторы  $U$  принадлежат теперь унитарному представлению  $U$  в пространстве  $\mathcal{H}_K$  некоторой *конечной группы*  $G = \{g_1, \dots, g_M\}$ . Поле  $\mathcal{F}$  определяется структурой группы  $G$  и ее представлением  $U$ . Фактически поле  $\mathcal{F}$  представляет собой *минимальное расширение натуральных чисел*, применимое для описания квантового поведения.

2. В обеих версиях квантовой механики квантовые *частицы* ассоциируются с *унитарными представлениями* определенных групп симметрий. Представления, в соответствии с их размерностями, называются «*синглетами*», «*дублетами*», «*триплетами*» и т. д. Многомерные представления, в частности, описывают *спин*.

3. Квантовая *эволюция* описывается унитарным преобразованием *начального* вектора состояния  $|\psi_{\text{in}}\rangle$  в *конечный*  $|\psi_{\text{out}}\rangle = U |\psi_{\text{in}}\rangle$ .

---

\*Термин «конечная квантовая механика» используется в литературе в существенно другом смысле. Так называют направление (см., например, [2, 9, 10]), возникшее из предложения Г. Вейля [65] заменить в квантовой механике фазовое пространство  $(p, q)$  конечным дискретным тором. Мы используем здесь этот термин за неимением другого достаточно краткого и осмысленного.

а) В стандартной квантовой механике элементарный шаг эволюции в непрерывном времени описывается уравнением Шредингера

$$i \frac{d}{dt} |\psi\rangle = H |\psi\rangle,$$

где  $H$  — эрмитов оператор, называемый оператором энергии или гамильтонианом.

б) В конечной квантовой механике имеется лишь конечное число возможных эволюций:

$$U_j \in \{U(g_1), \dots, U(g_j), \dots, U(g_M)\}.$$

Очевидно, что здесь вообще нет необходимости в каком-либо аналоге уравнения Шредингера. Впрочем, формально всегда можно ввести гамильтониан с помощью формулы  $H_j = i \ln U_j \equiv \sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k U_j^k$ , где  $p$  — период оператора  $U_j$  (т. е. минимальное  $p > 0$  такое, что  $U_j^p = \mathcal{I}$ ),  $\lambda_k$  — легко вычисляемые коэффициенты\*.

4. В обеих версиях квантовой механики квантово-механический эксперимент (наблюдение, «измерение»\*\*) сводится к сравнению состояния системы  $|\psi\rangle$  с состоянием прибора (аппарата)  $|\phi\rangle$ .

5. В обеих версиях квантовой механики, в соответствии с правилом Борна, вероятность зарегистрировать частицу, описываемую состоянием  $|\psi\rangle$  аппаратом, настроенным на состояние  $|\phi\rangle$ , равна

$$P(\phi, \psi) = \frac{|\langle \phi | \psi \rangle|^2}{\langle \phi | \phi \rangle \langle \psi | \psi \rangle}. \quad (42)$$

Однако для конечной квантовой механики требуется определенное концептуальное уточнение. В «конечном» контексте единственной осмысленной интерпретацией вероятности может быть лишь частотная интерпретация: вероятность — это отношение числа выделенных комбинаций элементов системы к полному числу рассматриваемых комбинаций. Поскольку мы имеем дело с комбинациями элементов конечных множеств, мы ожидаем, что, если все организовано правильно, формула (42) должна выдавать рациональные числа. Мы будем использовать это в дальнейших построениях в качестве одного из ведущих принципов.

\*Эти коэффициенты содержат неалгебраический элемент, именно, число  $\pi$ , представляющее собой бесконечную сумму элементов из  $\mathcal{F}$ . Иными словами,  $\lambda_k$  — элементы трансцендентного расширения поля  $\mathcal{F}$ . Логарифмическая функция является существенно конструкцией из непрерывной математики, имеющей дело с актуальными бесконечностями.

\*\*Наименее удачный термин, поскольку квантово-механические «измерения» фактически сводятся к подсчету числа некоторых событий.

6. Квантовые *наблюдаемые* описываются *эрмитовыми операторами* в гильбертовых пространствах. В конечной квантовой механике эти операторы можно выразить как элементы представления *групповой алгебры*

$$A = \sum_{k=1}^M \alpha_k U(\mathbf{g}_k).$$

Разумеется, требование эрмитовости может наложить определенные ограничения на коэффициенты  $\alpha_k$ .

Заметим, что остальные элементы конечной квантовой теории получаются из стандартной простым переписыванием. Например, как хорошо известно, *принцип неопределенности Гейзенберга* следует из *неравенства Коши* (–Буняковского–Шварца)

$$\langle A\psi | A\psi \rangle \langle B\psi | B\psi \rangle \geq |\langle A\psi | B\psi \rangle|^2,$$

справедливого для любых гильбертовых пространств над любыми полями. Очевидно, что неравенство Коши эквивалентно стандартному свойству любой вероятности  $\mathbf{P}(A\psi, B\psi) \leq 1$ .

2.1.2. *Перестановки, представления и числа.* Все множества, на которых конечная группа  $G = \{g_1, \dots, g_M\}$  действует транзитивно, можно легко описать [12]. Любое такое множество  $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_N\}$  находится во взаимно-однозначном соответствии с множеством (*правых*  $H \backslash G$  или *левых*  $G/H$ ) смежных классов по некоторой подгруппе  $H \leq G$ . Множество  $\Omega$  называется *однородным пространством* группы  $G$  (или, кратко, *G-пространством*). Действие  $G$  на  $\Omega$  является *точным*, если подгруппа  $H$  не содержит нормальных подгрупп группы  $G$ . Мы можем записать действие в виде перестановок

$$\pi(g) = \begin{pmatrix} \omega_i \\ \omega_i g \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} Ha \\ Hag \end{pmatrix}, \quad g, a \in G, \quad i = 1, \dots, N, \quad (43)$$

или, эквивалентно, в виде матриц, состоящих из нулей и единиц:

$$\pi(g) \rightarrow P(g) = (P(g)_{ij}), \quad \text{где } P(g)_{ij} = \delta_{\omega_i g, \omega_j}, \quad i, j = 1, \dots, N. \quad (44)$$

Здесь  $\delta_{\alpha, \beta}$  означает дельту Кронекера на множестве  $\Omega$ . Отображение (44) называется *перестановочным представлением*.

Максимальное транзитивное множество  $\Omega$  эквивалентно множеству элементов самой группы  $G$ , т. е. множеству смежных классов по тривиальной подгруппе  $H = \{1\}$ . Соответствующие действие и матричное представление называются *регулярными*. Одна из центральных теорем теории представлений (см. приложение Г) утверждает, что *любое неприводимое представление конечной группы содержится в регулярном представлении*.

Представление (44) имеет смысл над любой числовой системой, содержащей 0 и 1. Наиболее естественной системой чисел является *полукольцо натуральных чисел*  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ . С помощью этого полукольца можно снабдить элементы множества  $\Omega$  *счетчиками*, интерпретируя их как «кратности вхождения» (или «числа заполнения») элементов  $\omega_i$  в состояние системы, содержащей эти элементы. Это состояние можно записать в виде вектора с натуральными компонентами

$$|n\rangle = \begin{pmatrix} n_1 \\ \vdots \\ n_N \end{pmatrix}. \quad (45)$$

Таким образом, мы приходим к представлению группы  $G$  в  $N$ -мерном модуле  $H_N$  над полукольцом  $\mathbb{N}$ . Действие (44) на векторе (45) сводится просто к перестановке его компонент. Для дальнейших целей нам необходимо превратить модуль  $H_N$  в  $N$ -мерное гильбертово пространство  $\mathcal{H}_N$ , расширив полукольцо  $\mathbb{N}$  до какого-либо поля.

Основным полем в теории представлений (и, следовательно, в квантовой механике) является поле комплексных чисел  $\mathbb{C}$ . Причиной такого выбора является алгебраическая замкнутость поля  $\mathbb{C}$ , означающая, в частности, что не может возникнуть никаких проблем при решении характеристических уравнений и, следовательно, во всей линейной алгебре. Тем не менее поле  $\mathbb{C}$  чрезмерно велико — большинство его элементов неконструктивны и поэтому бесполезны в приложениях к эмпирической реальности. Таким образом, следует рассмотреть ситуацию более тщательно.

Прежде всего нам нет необходимости решать *произвольные* характеристические уравнения: любое линейное представление является подпредставлением некоторого перестановочного представления, а все собственные значения последнего являются *корнями из единицы*. Это видно из легко вычисляемого *характеристического полинома* матрицы перестановок (44)

$$\chi_{P(g)}(\lambda) = \det(P(g) - \lambda I) = (\lambda - 1)^{k_1} (\lambda^2 - 1)^{k_2} \dots (\lambda^n - 1)^{k_n},$$

где  $k_i$  — число циклов длины  $i$  в перестановке (43). Для обеспечения унитарности представлений в качестве нормирующих коэффициентов используются *квадратные корни* их размерностей. На самом деле иррациональности обоих типов, т.е. корни из единицы и квадратные корни из целых чисел, имеют одинаковую природу — все они являются *циклотомическими целыми*, т.е. целочисленными линейными комбинациями корней из единицы. Используя стандартные тождества для корней из единицы, отрицательные коэффициенты в циклотомических целых всегда можно заменить положительными. Таким образом, изначальными элементами числовой системы, которую мы



собираемся построить, являются *натуральные числа* и линейные комбинации с натуральными коэффициентами *корней из единицы* некоторой степени  $\mathcal{P}$ , зависящей от структуры группы  $G$ . Все остальное строится с помощью совершенно формальных математических процедур. Степень  $\mathcal{P}$  в математической литературе обычно называется *кондуктором*. В общем случае кондуктор является кратным *экспоненты* группы, которая определяется как наименьшее общее кратное порядков элементов группы  $G$ .

С помощью любого набора циклотомических целых можно построить некоторое *абелево числовое поле*  $\mathcal{F}$ , содержащее все элементы этого набора. В частности, минимальное абелево числовое поле, содержащее заданное множество иррациональностей, можно вычислить с помощью системы компьютерной алгебры GAP [11]. Команда `Field(gens)` этой системы возвращает наименьшее поле, содержащее все элементы из списка иррациональностей *gens*. Теорема Кронекера–Вебера утверждает, что любое абелево (в частности, квадратичное) расширение рациональных чисел является подполем некоторого *циклотомического поля*.

Остановимся подробнее на конструкции циклотомических полей. *Корнем из единицы*  $\mathcal{P}$ -й степени называется любое решение *циклотомического уравнения*  $r^{\mathcal{P}} = 1$ . Любой корень из единицы является некоторой степенью *примитивного* корня из единицы, т. е. корня из единицы с периодом, равным в точности  $\mathcal{P}$ . Все примитивные корни из единицы (и только они) являются решениями уравнения  $\Phi_{\mathcal{P}}(r) = 0$ , где  $\Phi_{\mathcal{P}}(r)$  — неприводимый над  $\mathbb{Q}$  делитель бинома  $r^{\mathcal{P}} - 1$ , называемый *циклотомическим полиномом*. Линейные комбинации корней из единицы с целыми коэффициентами образуют кольцо циклотомических целых  $\mathbb{N}_{\mathcal{P}}$ . Фактически в качестве коэффициентов циклотомических целых достаточно ограничиться *натуральными* числами, поскольку в случае  $\mathcal{P} \geq 2$  *отрицательные* целые можно ввести с помощью тождества  $(-1) = \sum_{k=1}^{p-1} r^{\frac{\mathcal{P}}{p}k}$ , где  $p$  — произвольный делитель периода  $\mathcal{P}$ . Введение отрицательных чисел не является концептуально необходимым. Однако оно дает технические преимущества, позволяя использовать развитые методы полиномиальной алгебры.  $\mathcal{P}$ -е *циклотомическое поле*  $\mathbb{Q}_{\mathcal{P}}$  вводится как *поле частных* кольца  $\mathbb{N}_{\mathcal{P}}$ . Поле  $\mathbb{Q}_{\mathcal{P}}$  можно представить в виде

$$\mathbb{Q}_{\mathcal{P}} = \frac{\mathbb{Q}[r]}{\langle \Phi_{\mathcal{P}}(r) \rangle}. \quad (46)$$

Из этого представления и свойств циклотомических полиномов следует, что поле  $\mathbb{Q}_{\mathcal{P}}$  представляет собой векторное пространство (более того, алгебру) размерности  $\varphi(\mathcal{P})$  над полем рациональных чисел  $\mathbb{Q}$ . Здесь  $\varphi(\mathcal{P})$  обозначает *функцию Эйлера* (другое название этой функции — *тоциент*), определяемую как число положительных целых, не превосходящих  $\mathcal{P}$  и взаимно простых с  $\mathcal{P}$  (по определению число 1 считается взаимно простым с любым

целым). Наиболее естественным для представления (46) является *степенной базис* векторного пространства  $\mathbb{Q}_P$ , т.е. элементы поля  $\mathbb{Q}_P$  представляются в виде линейных комбинаций с рациональными коэффициентами степеней примитивного корня, меньших степени циклотомического полинома. Этот базис является *целочисленным* в том смысле, что любое циклотомическое целое может быть представлено в нем как целочисленный вектор. Заметим, что в математике часто используются другие целочисленные базисы для циклотомических чисел.

Абелево числовое поле  $\mathcal{F}$  представляет собой подполе поля  $\mathbb{Q}_P$ , фиксируемое дополнительными симметриями, называемыми *автоморфизмами Галуа*. Автоморфизм Галуа  $*k$  — это отображение, задаваемое преобразованием  $r_P \rightarrow r_P^k$  примитивного корня  $P$ -й степени из единицы. Здесь  $k$  — взаимно простое с  $P$  целое в пределах  $1 \leq k < P$ .

Циклотомические числа можно погрузить в поле комплексных чисел  $\mathbb{C}$ , однако в этом нет никакой необходимости. Чисто алгебраических свойств циклотомических чисел достаточно для всех манипуляций в гильбертовом пространстве  $\mathcal{H}_N$  и его подпространствах. Например, комплексное сопряжение циклотомического числа определяется преобразованием  $\overline{r_P^m} = r_P^{P-m}$ . Однако для иллюстрации мы приводим на рис. 7 примеры погружения циклотомических целых в комплексную плоскость. Ясно, что циклотомические дроби, т.е. элементы поля  $\mathbb{Q}_P$ , при  $P \geq 3$  заполняют комплексную плоскость всюду плотно.

Все иррациональности являются промежуточными элементами квантового описания, исчезающими в окончательных выражениях для квантовых наблюдаемых. Это утверждение представляет собой конструктивное уточне-

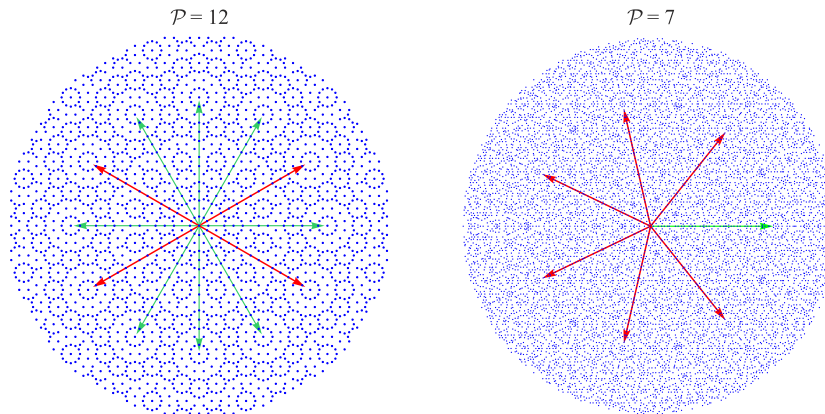


Рис. 7. Погружение  $\mathbb{N}_P$  в  $\mathbb{C}$ . Примитивные корни выделены более жирными стрелками

ние взаимосвязи между комплексными и вещественными числами в стандартной квантовой механике, где промежуточные величины могут быть комплексными, но наблюдаемые обязаны быть вещественными.

2.1.3. *Представление квантовой эволюции перестановками.* Из сказанного выше следует, что любое  $K$ -мерное представление  $U$  может быть расширено до  $N$ -мерного представления  $\tilde{U}$ , соответствующего *перестановочному действию* группы  $G$  на  $N$ -элементном множестве  $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_N\}$ . Это означает, что  $T^{-1}PT = \tilde{U}$ , где  $P$  — перестановочное представление (44), а  $T$  — матрица преобразования. Ясно, что  $N \geq K$ . Если  $N = K$ , то представление  $U$  само по себе является перестановочным. Если  $N > K$ , то перестановочное представление имеет следующую структуру:

$$T^{-1}PT = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & & \\ & U & \\ & & V \end{pmatrix} \equiv \mathbf{1} \oplus U \oplus V.$$

Здесь  $\mathbf{1}$  означает тривиальное одномерное представление, являющееся обязательной компонентой любого перестановочного представления. Компонента  $V$  может отсутствовать.

Очевидно, что дополнительные «скрытые параметры», появляющиеся из-за увеличения размерности пространства, никоим образом не могут влиять на данные, относящиеся к пространству  $\mathcal{H}_K$ , поскольку как само это пространство, так и его дополнение являются *инвариантными подпространствами* в пространстве  $\mathcal{H}_N$ . Таким образом, *любая квантовая проблема* в  $K$ -мерном гильбертовом пространстве может быть переформулирована в терминах перестановок  $N$  предметов\*.

Приняв тривиальное предположение о том, что компоненты векторов состояния могут быть произвольными элементами основного поля  $\mathcal{F}$ , мы можем установить произвольные (например, нулевые) данные в подпространстве  $\mathcal{H}_{N-K}$ , дополнительном к  $\mathcal{H}_K$ . В этом случае мы получаем — с точностью до физически несущественного различия между «конечным» и «бесконечным» — стандартную квантовую механику, переформулированную в терминах перестановок.

---

\*С алгоритмической точки зрения операции с перестановками существенно более эффективны, чем манипуляции линейной алгебры с матрицами. Однако степень  $N$  перестановок может значительно превосходить размерность  $K$  матриц. Например, наибольшая спорадическая простая группа  $M$  («монстр Фишера–Грисса») порядка  $2^{46} \cdot 3^{20} \cdot 5^9 \cdot 7^6 \cdot 11^2 \cdot 13^3 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \times 31 \cdot 41 \cdot 47 \cdot 59 \cdot 71 \approx 10^{54}$  имеет минимальное точное неприводимое представление размерности  $47 \cdot 59 \cdot 71 \approx 2 \cdot 10^5$ , а степень ее минимального перестановочного представления равна  $2^4 \cdot 3^7 \cdot 5^3 \cdot 7^4 \cdot 11 \cdot 13^2 \cdot 29 \cdot 41 \cdot 59 \cdot 71 \approx 10^{20}$ . Тем не менее сама возможность *сведения квантовой динамики к перестановкам* концептуально гораздо важнее алгоритмических вопросов.

Однако, отказавшись от этого тривиального предположения, можно придать гораздо более естественный смысл квантовым амплитудам. Естественно предположить, что квантовые состояния системы и аппарата в перестановочном базисе являются векторами с натуральными компонентами:

$$|n\rangle = \begin{pmatrix} n_1 \\ \vdots \\ n_N \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad |m\rangle = \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_N \end{pmatrix}.$$

В соответствии с правилом Борна вероятность обнаружить состояние  $|n\rangle$  аппаратом, настроенным на состояние  $|m\rangle$ , равна

$$P(m, n) = \frac{\left(\sum_i m_i n_i\right)^2}{\sum_i m_i^2 \sum_i n_i^2}.$$

Ясно, что значение этого выражения на ненулевых векторах  $|n\rangle$  и  $|m\rangle$  является рациональным числом, строго большим нуля. Это означает, в частности, невозможность наблюдать деструктивную квантовую интерференцию в системе в целом. Тем не менее деструктивная интерференция векторов с натуральными компонентами возможна в собственных *инвариантных подпространствах* перестановочного представления. Рассмотрим вначале простой пример.

**2.2. Примеры конечных квантовых систем.** *2.2.1. Подробный пример: наименьшая некоммутативная группа  $S_3$ .* Мы выбрали группу  $S_3$  в качестве примера из-за простоты анализа. Тем не менее эта группа имеет важные приложения в физике. В частности, она используется для описания так называемого *три-бимаксимального смешивания* в нейтринных осцилляциях [13, 14]. (Более подробное обсуждение см. в приложении Д.) Группа состоит из шести элементов, которые можно представить следующими перестановками трех объектов

$$g_1 = (), \quad g_2 = (2, 3), \quad g_3 = (1, 3), \quad g_4 = (1, 2), \quad g_5 = (1, 2, 3), \quad g_6 = (1, 3, 2).$$

Экспонента группы  $S_3$  равна шести, поскольку степени ее элементов равны 2 и 3. Группа может быть порождена различными парами своих элементов. Например, в качестве порождающего множества можно выбрать пару  $\{g_2, g_6\}$ . Группа  $S_3$  распадается на три класса сопряженных элементов:

$$K_1 = \{g_1\}, \quad K_2 = \{g_2, g_3, g_4\}, \quad K_3 = \{g_5, g_6\}.$$

В табл. 3 представлены характеры (см. приложение Г) этой группы.

Таблица 3. Характеры группы  $S_3$

	$K_1$	$K_2$	$K_3$
$\chi_1$	1	1	1
$\chi_2$	1	-1	1
$\chi_3$	2	0	-1

В соответствии с традицией, принятой в физической литературе, мы будем обозначать *неприводимые* представления их размерностями жирным шрифтом. Таким образом, мы имеем три неприводимых представления  $\mathbf{1}$ ,  $\mathbf{1}'$  и  $\mathbf{2}$ , из которых только  $\mathbf{2}$  является точным. Для обозначения *перестановочных* представлений, играющих важную роль в нашем подходе, мы будем использовать также их размерности, выделенные жирным шрифтом, но с дополнительным подчеркиванием.

Матрицы перестановочного представления порождающих элементов имеют вид

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & 1 & \cdot \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad P_6 = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & 1 \\ 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot \end{pmatrix}.$$

Эти матрицы имеют, соответственно, следующие наборы собственных значений:  $(1, 1, -1)$  и  $(1, r_3, r_3^2)$ , где  $r_3$  — примитивный корень 3-й степени из единицы, определяемый циклотомическим полиномом  $\Phi_3(r) = 1 + r + r^2$ .

Как было отмечено выше, любое перестановочное представление имеет одномерное инвариантное подпространство с базисным вектором  $(1, \dots, 1)^T$ . Таким образом, единственным возможным разложением перестановочного представления является  $\underline{\mathbf{3}} \cong \mathbf{1} \oplus \mathbf{2}$  или в явном матричном виде

$$\tilde{U}_j = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & U_j \end{pmatrix}, \quad j = 1, \dots, 6, \quad (47)$$

где матрицы  $U_j$  — элементы точного неприводимого представления  $\mathbf{2}$ .

Для построения разложения (47) необходимо определить матрицы  $U_j$  и  $T$  таким образом, чтобы выполнялось соотношение  $\tilde{U}_j = T^{-1}P_jT$ . Дополнительно мы потребуем, чтобы все эти матрицы были унитарными. Ясно, что для построения матриц  $U_j$  и  $T$  достаточно использовать только перестановоч-

ные матрицы порождающих элементов\*. Разложение (47) можно построить разными способами. Ясно, что мы всегда можем выбрать диагональной матрицу  $U_j$  одного из порождающих элементов.

Если начать с диагонализации  $P_6$ , то мы получим следующий набор матриц  $U_j$ :

$$\begin{aligned} U_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad U_2 = \begin{pmatrix} 0 & r_3^2 \\ r_3 & 0 \end{pmatrix}, \quad U_3 = \begin{pmatrix} 0 & r_3 \\ r_3^2 & 0 \end{pmatrix}, \\ U_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad U_5 = \begin{pmatrix} r_3^2 & 0 \\ 0 & r_3 \end{pmatrix}, \quad U_6 = \begin{pmatrix} r_3 & 0 \\ 0 & r_3^2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (48)$$

Матрица преобразования (с точностью до несущественного произвола в выборе ее элементов) имеет вид

$$T = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & r_3^2 \\ 1 & r_3^2 & 1 \\ 1 & r_3 & r_3 \end{pmatrix}, \quad T^{-1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & r_3 & r_3^2 \\ r_3 & 1 & r_3^2 \end{pmatrix}. \quad (49)$$

Минимальным абелевым числовым полем, содержащим все элементы матриц (48) и (49), является циклотомическое поле  $\mathbb{Q}_{12}$ . Таким образом, мы можем переписать, скажем, матрицу (49) в терминах элементов из  $\mathbb{Q}_{12}$ :

$$T = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2r_{12} + r_{12}^9 & 2r_{12} + r_{12}^9 & r_{12}^7 + r_{12}^9 \\ 2r_{12} + r_{12}^9 & r_{12}^7 + r_{12}^9 & 2r_{12} + r_{12}^9 \\ 2r_{12} + r_{12}^9 & 2r_{12}^3 + r_{12}^7 & 2r_{12}^3 + r_{12}^7 \end{pmatrix}, \quad (50)$$

где  $r_{12}$  — примитивный 12-й корень из единицы, т. е. произвольное (абстрактное) решение уравнения  $\Phi_{12}(r) \equiv 1 - r^2 + r^4 = 0$ . В (50) мы использовали «натуральное» представление циклотомических целых. Приведение по модулю циклотомического полинома  $\Phi_{12}(r)$  дает «целое» представление в степенном базисе, т. е. представление с отрицательными коэффициентами, но с минимальными степенями  $r_{12}$ :

$$T = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2r_{12} - r_{12}^3 & 2r_{12} - r_{12}^3 & -r_{12} - r_{12}^3 \\ 2r_{12} - r_{12}^3 & -r_{12} - r_{12}^3 & 2r_{12} - r_{12}^3 \\ 2r_{12} - r_{12}^3 & -r_{12} + 2r_{12}^3 & -r_{12} + 2r_{12}^3 \end{pmatrix}.$$

---

\*Заметим, что проблема построения общих инвариантных подпространств для нескольких матриц или, в несколько более общем смысле, проблема расщепления модулей над ассоциативными алгебрами на неприводимые подмодули алгоритмически весьма нетривиальна. Достаточно универсальный алгоритм, называемый *MeatAxe* [15], разработан только для алгебр над конечными полями. Алгоритм *MeatAxe* включен в системы компьютерной алгебры GAP и Magma. Однако в случае групповых алгебр (по крайней мере для небольших групп) необходимые построения можно провести «методом проб и ошибок», как правило, без особых затруднений и над полями нулевой характеристики, в частности, над циклотомическими полями или их подполями.

Диагонализация  $P_2$  приводит к другому виду разложения (47). В этом случае для матриц порождающих элементов мы имеем

$$U'_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad U'_6 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}. \quad (51)$$

Матрица преобразования принимает вид

$$T' = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad T'^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \sqrt{\frac{2}{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}. \quad (52)$$

Эта матрица используется в физике частиц для описания феноменологии нейтринных осцилляций, где она известна под именами *матрица три-бимаксимального смешивания* или *матрица Харрисона–Перкинса–Скотта*.

Минимальное абелево числовое поле  $\mathcal{F}$ , содержащее все элементы матриц (51) и (52), является подполем циклотомического поля  $\mathbb{Q}_{24}$ , фиксируемым с помощью автоморфизма Галуа  $r_{24} \rightarrow r_{24}^{23}$ . Здесь  $r_{24}$  — примитивный 24-й корень из единицы. Соответствующий циклотомический полином имеет вид  $\Phi_{24}(r) = 1 - r^4 + r^8$ . В терминах циклотомических чисел матрицы (51) и (52) имеют вид

$$U'_6 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 2r_{24}^2 - r_{24}^6 \\ -2r_{24}^2 + r_{24}^6 & -1 \end{pmatrix}$$

и

$$T' = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 4r_{24}^2 - 2r_{24}^6 & 2r_{24} + 2r_{24}^3 + 2r_{24}^5 - 4r_{24}^7 & 0 \\ 4r_{24}^2 - 2r_{24}^6 & -r_{24} - r_{24}^3 - r_{24}^5 + 2r_{24}^7 & -6r_{24} + 6r_{24}^5 \\ 4r_{24}^2 - 2r_{24}^6 & -r_{24} - r_{24}^3 - r_{24}^5 + 2r_{24}^7 & 6r_{24} - 6r_{24}^5 \end{pmatrix}.$$

Фактически информация о «квантовом поведении» закодирована в матрицах преобразования, таких как (49) или (52).

Пусть  $|n\rangle = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$  и  $|m\rangle = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix}$  — векторы состояний системы и аппарата в «перестановочном» базисе. С помощью матрицы преобразования (49)

мы можем записать эти векторы в «квантовом» базисе:

$$\begin{aligned} |\tilde{\psi}\rangle &= T^{-1} |n\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} n_1 + n_2 + n_3 \\ n_1 + n_2 r_3 + n_3 r_3^2 \\ n_1 r_3 + n_2 + n_3 r_3^2 \end{pmatrix}, \\ |\tilde{\phi}\rangle &= T^{-1} |m\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} m_1 + m_2 + m_3 \\ m_1 + m_2 r_3 + m_3 r_3^2 \\ m_1 r_3 + m_2 + m_3 r_3^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Проекции векторов состояний в двумерное инвариантное подпространство имеют вид

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} n_1 + n_2 r_3 + n_3 r_3^2 \\ n_1 r_3 + n_2 + n_3 r_3^2 \end{pmatrix}, \quad |\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} m_1 + m_2 r_3 + m_3 r_3^2 \\ m_1 r_3 + m_2 + m_3 r_3^2 \end{pmatrix}.$$

Соответственно, составляющие борновской вероятности (42) для двумерной подсистемы принимают вид

$$\langle\psi|\psi\rangle = Q_3(n, n) - \frac{1}{3} L_3(n)^2, \quad (53)$$

$$\langle\phi|\phi\rangle = Q_3(m, m) - \frac{1}{3} L_3(m)^2, \quad (54)$$

$$|\langle\phi|\psi\rangle|^2 = \left( Q_3(m, n) - \frac{1}{3} L_3(m) L_3(n) \right)^2, \quad (55)$$

где  $L_N(n) = \sum_{i=1}^N n_i$  и  $Q_N(m, n) = \sum_{i=1}^N m_i n_i$  — линейный и квадратичный перестановочные инварианты. Эти инварианты являются общими для любых групп перестановок.

Обратим внимание на то, что

1. Выражения (53)–(55) скомбинированы из *инвариантов перестановочного представления*.

2. *Деструктивная квантовая интерференция*, т. е. обращение в нуль борновской вероятности, определяется уравнением

$$3(m_1 n_1 + m_2 n_2 + m_3 n_3) - (m_1 + m_2 + m_3)(n_1 + n_2 + n_3) = 0.$$

Это уравнение имеет бесконечно много «натуральных» решений, например,

$$|n\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad |m\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$



Таким образом, простым переходом к инвариантному подпространству мы получили существенные черты квантового поведения из «перестановочной динамики» и «натуральной» интерпретации (45) квантовых амплитуд.

Этот пример можно слегка обобщить. Любое перестановочное представление содержит  $(N - 1)$ -мерное инвариантное подпространство. Скалярное произведение в этом подпространстве в терминах перестановочных инвариантов имеет вид

$$\langle \phi | \psi \rangle = Q_N(m, n) - \frac{1}{N} L_N(m) L_N(n).$$

Тождество  $Q_N(n, n) - \frac{1}{N} L_N(n)^2 \equiv \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N (L_N(n) - N n_i)^2$  показывает явно,

что  $\langle \psi | \psi \rangle > 0$  для  $|n\rangle$  с различными\* компонентами  $n_i$ . Это скалярное произведение не содержит иррациональностей, если векторы  $|n\rangle$  и  $|m\rangle$  натуральны.

2.2.2. *Группа икосаэдра  $A_5$* . Группа симметрий икосаэдра  $A_5$  — это наименьшая простая некоммутативная группа. Она состоит из 60 элементов, и ее экспонента равна 30. Эта группа играет настолько важную роль в математике и приложениях, что Ф. Клейн посвятил ей отдельную книгу [22]. В физической литературе для группы икосаэдра часто используется обозначение  $\Sigma(60)$ . Интересно отметить, что  $A_5$  имеет «физическое воплощение»: молекула фул-

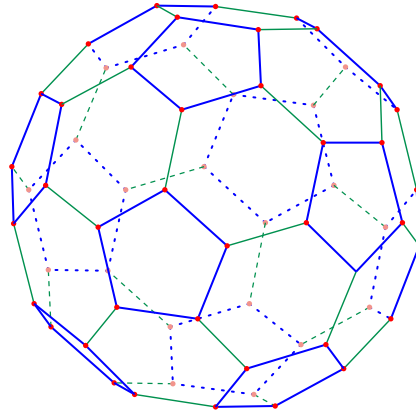


Рис. 8. Граф Кэли группы  $A_5$ . Пятиугольники, шестиугольники и связи, соединяющие смежные пятиугольники, соответствуют реляторам  $a^5$ ,  $(ab)^3$  и  $b^2$  в представлении (8)

\*Векторы с одинаковыми компонентами принадлежат одномерному дополнению к рассматриваемому  $(N - 1)$ -мерному подпространству.

лерепа  $S_{60}$  имеет структуру графа Кэли этой группы (рис. 8). Это ясно из следующего представления  $A_5$  с помощью двух порождающих элементов, на которые наложены три соотношения\*:

$$A_5 \cong \langle a, b \mid a^5, b^2, (ab)^3 \rangle. \quad (56)$$

Группа  $A_5$  разбивается на пять классов сопряженных элементов  $K_1, K_{15}, K_{20}, K_{12}, K_{12'}$ . Для различения классов мы здесь используем их размеры в качестве нижних индексов. В табл. 4 приведены характеры группы.

Таблица 4. Характеры группы  $A_5$

	$K_1$	$K_{15}$	$K_{20}$	$K_{12}$	$K_{12'}$
$\chi_1$	1	1	1	1	1
$\chi_3$	3	-1	0	$\phi$	$1 - \phi$
$\chi_{3'}$	3	-1	0	$1 - \phi$	$\phi$
$\chi_4$	4	0	1	-1	-1
$\chi_5$	5	1	-1	0	0

Здесь  $\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$  — «золотое сечение». Заметим, что  $\phi$  и  $1 - \phi$  являются циклотомическими целыми (или «циклотомическими натуральными»):  $\phi = -r_5^2 - r_5^3 \equiv 1 + r_5 + r_5^4$  и  $1 - \phi = -r_5 - r_5^4 \equiv 1 + r_5^2 + r_5^3$ , где  $r_5$  — примитивный корень 5-й степени из единицы. Из таблицы характеров видно, что  $A_5$  имеет пять неприводимых представлений: тривиальное  $\mathbf{1}$  и четыре точных  $\mathbf{3}, \mathbf{3}', \mathbf{4}, \mathbf{5}$ .

Что касается перестановок, то группа имеет три примитивных действия на множествах из 5, 6 и 10 элементов. Соответствующие перестановочные представления имеют следующие разложения на неприводимые компоненты

$$\underline{\mathbf{5}} \cong \mathbf{1} \oplus \mathbf{4}, \quad \underline{\mathbf{6}} \cong \mathbf{1} \oplus \mathbf{5}, \quad \underline{\mathbf{10}} \cong \mathbf{1} \oplus \mathbf{4} \oplus \mathbf{5}.$$

Напомним, что транзитивное действие группы  $G$  на множестве  $\Omega$  называется импримитивным [67], если имеется нетривиальное разбиение множества  $\Omega$ , инвариантное относительно действия группы. При этом тривиальными разбиениями по определению являются: разбиение на одноэлементные блоки и разбиение на блок, содержащий все множество  $\Omega$ , и дополнительный к нему пустой блок. Нетривиальное инвариантное разбиение называется системой импримитивности или системой блоков. Если инвариантными являются только тривиальные разбиения, то действие называется примитивным.

\*Если соотношение записано в виде  $R = \mathbf{1}$ , то его левую часть  $R$  называют релятором.

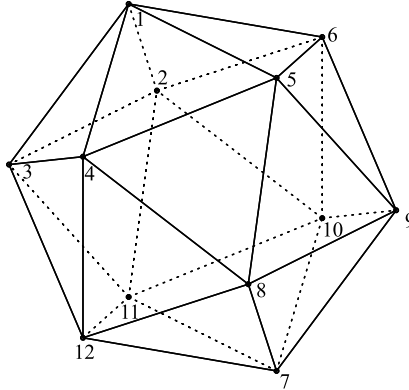


Рис. 9. Икосаэдр. Пары противоположных вершин образуют систему импримитивности

Примитивные действия считаются наиболее фундаментальными среди всех перестановочных действий.

Рассмотрим действие  $A_5$  на множестве вершин икосаэдра  $\Omega_{12}$ . Это действие транзитивно, но *импримитивно*. Система импримитивности имеет вид

$$\{ | B_1 | \cdots | B_i | \cdots | B_6 | \} \equiv \{ | 1, 7 | \cdots | i, i + 6 | \cdots | 6, 12 | \}$$

в предположении нумерации вершин, изображенной на рис. 9. Каждый блок  $B_i$  состоит из пары противоположных вершин икосаэдра. Группа  $A_5$  переставляет блоки между собой как целые объекты. Мы будем обозначать соответствие между противоположными вершинами блоков («комплементарность») символом  $^c$ , т. е., если  $B_i = \{p, q\}$ , то  $q = p^c$  и  $p = q^c$ . Для нумерации, используемой на рис. 9, комплементарность можно выразить формулой  $p^c \equiv 1 + (p + 5 \pmod{12})$ .

Перестановочное представление действия  $A_5$  на вершинах икосаэдра имеет следующее разложение на неприводимые компоненты:

$$\begin{aligned} \underline{12} &\cong \mathbf{1} \oplus \mathbf{3} \oplus \mathbf{3}' \oplus \mathbf{5} \quad \text{или} \\ \Gamma^{-1}(\underline{12})\Gamma &= \mathbf{1} \oplus \mathbf{3} \oplus \mathbf{3}' \oplus \mathbf{5}. \end{aligned} \tag{57}$$

Используя обозначения

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\phi}{4} \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}, & \beta &= \frac{\sqrt{5}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{20}, \\ \gamma &= \frac{\sqrt{3}}{8} \left( 1 - \frac{\sqrt{5}}{3} \right), & \delta &= -\frac{\sqrt{3}}{8} \left( 1 + \frac{\sqrt{5}}{3} \right), \end{aligned}$$

матрицу преобразования  $T$  из формулы (57) можно записать, в частности, как

$$T = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{6} & \alpha & \beta & 0 & \alpha & \beta & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{\sqrt{15}}{12} \\ \frac{\sqrt{3}}{6} & 0 & \alpha & \beta & -\beta & 0 & \alpha & -\frac{\phi}{4} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \gamma \\ \frac{\sqrt{3}}{6} & \beta & 0 & \alpha & 0 & -\alpha & -\beta & \frac{\phi-1}{4} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \delta \\ \frac{\sqrt{3}}{6} & 0 & \alpha & -\beta & -\beta & 0 & -\alpha & -\frac{\phi}{4} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \gamma \\ \frac{\sqrt{3}}{6} & -\beta & 0 & \alpha & 0 & \alpha & -\beta & \frac{\phi-1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \delta \\ \frac{\sqrt{3}}{6} & \alpha & -\beta & 0 & -\alpha & \beta & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{\sqrt{15}}{12} \\ \frac{\sqrt{3}}{6} & 0 & -\alpha & \beta & \beta & 0 & \alpha & -\frac{\phi}{4} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \gamma \\ \frac{\sqrt{3}}{6} & \beta & 0 & -\alpha & 0 & -\alpha & \beta & \frac{\phi-1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \delta \\ \frac{\sqrt{3}}{6} & -\alpha & \beta & 0 & \alpha & -\beta & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{\sqrt{15}}{12} \\ \frac{\sqrt{3}}{6} & -\alpha & -\beta & 0 & -\alpha & -\beta & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{\sqrt{15}}{12} \\ \frac{\sqrt{3}}{6} & 0 & -\alpha & -\beta & \beta & 0 & -\alpha & -\frac{\phi}{4} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \gamma \\ \frac{\sqrt{3}}{6} & -\beta & 0 & -\alpha & 0 & \alpha & \beta & \frac{\phi-1}{4} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \delta \end{pmatrix}. \quad (58)$$

Заметим, что стандартные системы компьютерной алгебры, такие как *Maple* или *Mathematica*, не в состоянии выполнять вычисления с матрицами такого типа из-за ограниченных возможностей этих систем в упрощении сложных выражений с иррациональностями, в особенности с вложенными корнями.

Однако если выразить матричные элементы в терминах соответствующего абелевого числового поля, то проблема упрощения сводится к простым вычислениям с полиномами от одной переменной по модулю циклотомического полинома. В данном случае минимальным полем  $\mathcal{F}$  является подполе циклотомического поля  $\mathbb{Q}_{60}$ , фиксируемое в  $\mathbb{Q}_{60}$  автоморфизмом Галуа  $r \rightarrow r^{59}$ , где  $r$  — примитивный корень из единицы 60-й степени. Соответствующий циклотомический полином имеет вид  $\Phi_{60}(r) = 1 + r^2 - r^6 - r^8 - r^{10} + r^{14} + r^{16}$ . Иррациональные элементы матрицы (58) на языке циклотомических чисел

ИМЕЮТ ВИД

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{3}}{6} &= \frac{1}{6} (2r^5 - r^{15}), \\ \frac{\phi}{4} \sqrt{10 - 2\sqrt{5}} &= \frac{1}{2} (r + r^3 - r^9 - r^{11} + r^{15}), \\ \frac{\sqrt{5} \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{20} &= \frac{1}{2} (r + 4r^3 - 3r^9 - r^{11} + 2r^{15}), \\ -\frac{\phi}{4} &= \frac{1}{4} (-r^4 - r^6 + r^{14}), \\ \frac{\phi - 1}{4} &= \frac{1}{4} (-1 + r^4 + r^6 - r^{14}), \\ \frac{\sqrt{15}}{12} &= \frac{1}{12} (-2r + 2r^5 + 4r^7 + 2r^9 + 2r^{11} - 4r^{13} - 3r^{15}), \\ \frac{\sqrt{3}}{8} \left(1 - \frac{\sqrt{5}}{3}\right) &= \frac{1}{12} (r + 2r^5 - 2r^7 - r^9 - r^{11} + 2r^{13}), \\ -\frac{\sqrt{3}}{8} \left(1 + \frac{\sqrt{5}}{3}\right) &= \frac{1}{12} (r - 4r^5 - 2r^7 - r^9 - r^{11} + 2r^{13} + 3r^{15}). \end{aligned}$$

Скалярные произведения в инвариантных подпространствах представления (57) в терминах перестановочных инвариантов принимают вид

$$\begin{aligned} \langle \Phi_1 | \Psi_1 \rangle &= \frac{1}{12} L_{12}(m) L_{12}(n), \\ \langle \Phi_3 | \Psi_3 \rangle &= \frac{1}{20} \left( 5Q_{12}(m, n) - 5A(m, n) + \sqrt{5} (B(m, n) - C(m, n)) \right), \end{aligned} \quad (59)$$

$$\langle \Phi_{3'} | \Psi_{3'} \rangle = \frac{1}{20} \left( 5Q_{12}(m, n) - 5A(m, n) - \sqrt{5} (B(m, n) - C(m, n)) \right), \quad (60)$$

$$\langle \Phi_5 | \Psi_5 \rangle = \frac{1}{12} (5Q_{12}(m, n) + 5A(m, n) - B(m, n) - C(m, n)),$$

где

$$A(m, n) = A(n, m) = \sum_{k=1}^{12} m_k n_{k^c}, \quad (61)$$

$$B(m, n) = B(n, m) = \sum_{k=1}^{12} m_k \sum_{i \in N(k)} n_i, \quad (62)$$

$$C(m, n) = C(n, m) = \sum_{k=1}^{12} m_k \sum_{i \in N(k^c)} n_i. \quad (63)$$

В формулах (62) и (63)  $N(k)$  обозначает «окрестность»  $k$ -й вершины икосаэдра, т. е. множество вершин, смежных с  $k$ . Например,  $N(1) = \{2, 3, 4, 5, 6\}$  на рис. 9. Таким образом, внутренняя сумма в (62) представляет собой сумму данных на окрестности вершины  $k$ , а аналогичная сумма в (63) — это сумма данных на окрестности вершины, противоположной к  $k$ .

Квадратичные инварианты (61)–(63) не независимы. Между ними имеется следующее тождество:

$$A(m, n) + B(m, n) + C(m, n) + Q_{12}(m, n) = L_{12}(m) L_{12}(n). \quad (64)$$

Скалярные произведения (59) и (60), если их рассматривать по отдельности, приводят к упомянутой выше проблеме с вероятностями. А именно, борновские вероятности для подпредставлений  $\mathfrak{Z}$  и  $\mathfrak{Z}'$  содержат иррациональности, что противоречит частотной интерпретации вероятностей для конечных множеств. Очевидно, это является следствием импримитивности: невозможно переместить вершину икосаэдра без одновременного перемещения противоположной вершины. Чтобы разрешить это противоречие, необходимо рассматривать комплементарные подпредставления  $\mathfrak{Z}$  и  $\mathfrak{Z}'$  совместно. Скалярное произведение в подпредставлении  $\mathfrak{Z} \oplus \mathfrak{Z}'$

$$\langle \Phi_{\mathfrak{Z} \oplus \mathfrak{Z}'} | \Psi_{\mathfrak{Z} \oplus \mathfrak{Z}'} \rangle = \frac{1}{2} (Q_{12}(m, n) - A(m, n))$$

всегда дает рациональные борновские вероятности для векторов с натуральными «числами заполнения».

### 3. ПЕРЕСТАНОВОЧНО-ИНВАРИАНТНЫЕ БИЛИНЕЙНЫЕ ФОРМЫ

Для вычисления квантовых интерференций натуральных амплитуд в соответствии с правилом Борна достаточно знать выражения для скалярных произведений в инвариантных подпространствах перестановочного представления. Ранее мы получали эти выражения прямым вычислением с помощью матрицы перехода от «перестановочного» базиса к «квантовому». Как было отмечено в сноске на с. 139, проблема расщепления модуля над ассоциативной алгеброй на неприводимые подмодули и, в частности, вычисление соответствующей матрицы перехода не имеет удовлетворительного алгоритмического решения для важных для нас систем чисел. Однако можно попытаться обойти эти трудности, если удастся получить выражения для скалярных произведений непосредственно, т. е. без использования матриц перехода. Опишем один из возможных подходов.

**3.1. Базис перестановочно-инвариантных форм.** Для начала построим множество всех инвариантных билинейных форм в перестановочном базисе. Предположим, что группа  $G \equiv G(\Omega)$ , действующая перестановками на множестве  $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_N\}$ , порождается  $K$  элементами  $g_1, \dots, g_k, \dots, g_K$ . Ясно, что достаточно проверить инвариантность формы относительно этих элементов. Для удобства множество  $\Omega$  отождествим канонически с множеством индексов его элементов:  $\Omega = \vec{N} = \{1, \dots, N\}$ . Обозначим матрицы перестановочного представления порождающих элементов символами  $P_k = P(g_k)$ . Очевидно, что  $P_k^T = P(g_k^{-1})$ . Условие инвариантности билинейной формы  $A = (a_{ij})$  относительно группы  $G$  можно записать в виде системы матричных уравнений

$$A = P_k A P_k^T, \quad 1 \leq k \leq K. \quad (65)$$

Легко проверить, что в компонентах уравнения системы (65) имеют вид

$$a_{ij} = a_{i g_k j g_k}. \quad (66)$$

Таким образом, базис всех инвариантных билинейных форм находится во взаимно-однозначном соответствии с множеством орбит  $\Delta_1, \dots, \Delta_R$  действия группы  $G$  на декартовом произведении  $\Omega \times \Omega$ . Орбиты группы на произведении  $\Omega \times \Omega$ , называемые *орбитами*, играют важную роль в теории групп перестановок и их представлений [5, 7]. Если группа транзитивна, то существует единственный орбитал, состоящий из всех пар вида  $(i, i)$ . Такой орбитал называется *тривиальным* или *диагональным*. Число орбиталов  $R$  называется *рангом* группы  $G$ . Каждому орбиталу  $\Delta_r$  можно поставить в соответствие

1) ориентированный граф, вершинами которого являются элементы  $\Omega$ , а ребрами — пары  $(i, j) \in \Delta_r$ ,

2) матрицу  $A(\Delta_r)$  размера  $N \times N$  по правилу

$$A(\Delta_r)_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } (i, j) \in \Delta_r, \\ 0, & \text{если } (i, j) \notin \Delta_r. \end{cases}$$

Свойства графов орбиталов отражают важные свойства групп. Например, транзитивная группа перестановок примитивна тогда и только тогда, когда графы всех ее нетривиальных орбиталов связны.

Множество матриц орбиталов представляет собой базис *централизованного кольца* перестановочного представления группы  $G$ . Это кольцо играет важную роль в теории представлений групп. Мы будем обозначать его символом  $ZR \equiv ZR(G(\Omega))$ . Таблица умножения базисных элементов централизованного кольца  $ZR$  имеет вид

$$A(\Delta_p) A(\Delta_q) = \sum_{r=1}^R a_{pq}^r A(\Delta_r),$$

где все структурные константы  $a_{pq}^r$  — натуральные числа.

Заметим, что для построения централизаторного кольца часто используется несколько иной подход [67]. Этот (идуший от классических работ Шура) подход основан на изучении орбит стабилизаторов точек множества  $\Omega$ . Напомним, что стабилизатором элемента  $i \in \Omega$  называется подгруппа  $G_i$  группы  $G$ , оставляющая этот элемент неподвижным. В общем случае стабилизатор  $G_i$  транзитивной группы  $G$  действует на множестве  $\Omega$  нетранзитивно, порождая множество орбит  $\Lambda_1 = \{i\}, \Lambda_2, \dots, \Lambda_R$ . Между орбитами стабилизатора (иногда называемыми *подорбитами*) и множеством орбиталов тривиальным образом строится взаимно-однозначное соответствие (см., например, [5, 7]). Поэтому число  $R$  орбит стабилизатора  $G_i$  совпадает с рангом группы перестановок  $G(\Omega)$ . В терминах орбит стабилизаторов базисные матрицы централизаторного кольца строятся следующим образом. Рассматриваются орбиты стабилизатора  $G_1$ . Каждой орбите  $\Lambda$  стабилизатора  $G_1$  ставится в соответствие матрица  $A(\Lambda)$  по правилу

$$A(\Lambda)_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если существуют } g \in G \text{ и } l \in \Lambda \text{ такие, что } 1g = i \text{ и } lg = j, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Техническим преимуществом такого подхода является использование изоморфизма орбит стабилизаторов различных точек: вначале по орбите стабилизатора точки 1 мы строим первую строку матрицы, а затем с помощью групповых переносов — остальные строки.

Мы будем называть матрицы орбиталов  $\mathcal{A}_r \equiv A(\Delta_r)$  (или, если угодно, матрицы подорбит) *базисными формами*, поскольку любая перестановочно-инвариантная билинейная форма может быть представлена их линейной комбинацией.

Алгоритм вычисления базисных форм сводится к построению орбиталов в соответствии с формулой (66). Основной цикл алгоритма имеет следующий вид.

1. Допустим, что у нас уже построены орбиталы  $\Delta_1, \dots, \Delta_{r-1}$  и базисные формы  $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_{r-1}$ .

2. Ищем пару  $(i, j)$ , не принадлежащую к уже построенным орбиталам. Если такой пары нет, то алгоритм оканчивает работу.

3. В противном случае текущий орбитал устанавливаем в виде  $\Delta_r = \{(i, j)\}$ , а матрицу текущей формы — в виде  $\mathcal{A}_r = 0$ .

4. Добавляем к  $\Delta_r$  все пары вида  $(ig_k, jg_k)$  для всех порождающих элементов  $g_k$  и применяем такую же процедуру к новым элементам орбитала до тех пор, пока новые элементы не перестанут появляться.

5. Параллельно строим матрицу  $\mathcal{A}_r$  по правилу  $(\mathcal{A}_r)_{ij} = 1$ , если  $(i, j) \in \Delta_r$ .

Результатом работы алгоритма является полный базис перестановочно-инвариантных билинейных форм

$$\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_R.$$



Алгоритм весьма прост. Наша реализация представляет собой несколько строк на языке Си.

Непосредственно из построения следует тождество

$$\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \dots + \mathcal{A}_R = L^T L = \mathcal{U}_N \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad (67)$$

где  $L$  — ковектор вида  $\overbrace{(1, 1, \dots, 1)}^N$ , а  $\mathcal{U}_N$  — «матрица из единиц» размера  $N \times N$ . Частным случаем тождества (67) является формула (64).

Проиллюстрируем работу алгоритма на примере группы  $\mathbb{Z}_3$ , действующей на множестве  $\Omega = \{1, 2, 3\}$ . Группа порождается одним элементом, например,  $g_1 = (1, 2, 3)$ . Нам необходимо распределить множество пар индексов

$$\begin{array}{ccc} (1, 1) & (1, 2) & (1, 3) \\ (2, 1) & (2, 2) & (2, 3) \\ (3, 1) & (3, 2) & (3, 3) \end{array} \quad (68)$$

по классам эквивалентности в соответствии с формулой (66). Если начать построение с левого верхнего угла таблицы (68) и искать необработанные пары в лексикографическом порядке, то орбиталы будут построены в следующем порядке:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}, \\ \Delta_2 &= \{(1, 2), (2, 3), (3, 1)\}, \\ \Delta_3 &= \{(1, 3), (2, 1), (3, 2)\}. \end{aligned}$$

Соответствующий полный базис инвариантных форм имеет вид

$$\mathcal{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}_2 = \begin{pmatrix} \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 \\ 1 & \cdot & \cdot \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}_3 = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & 1 \\ 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot \end{pmatrix}.$$

Заметим, что в общем случае, если мы условимся начинать работу алгоритма с пары  $(1, 1)$  и группа  $G$  действует на  $\Omega$  транзитивно, то первой базисной формой всегда будет единичная матрица  $\mathcal{A}_1 = \mathcal{I}_N$ , соответствующая тривиальному орбиталу. В данном примере все базисные матрицы инвариантных форм оказываются матрицами перестановок.

**3.2. Связь перестановочно-инвариантных форм с разложением на неприводимые компоненты.** Несмотря на простоту получения, перестановочно-инвариантные формы достаточно информативны. Рассмотрим разложение перестановочного представления на неприводимые компоненты с помощью

матрицы преобразования  $T$ . Это разложение для транзитивных групп перестановок имеет вид

$$T^{-1}P(g)T = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & & & & \\ & \left\{ \begin{array}{c} U_2(g) \\ \ddots \\ U_2(g) \end{array} \right. & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \left\{ \begin{array}{c} U_{N_{\text{irr}}}(g) \\ \ddots \\ U_{N_{\text{irr}}}(g) \end{array} \right. & \\ & & & & m_{N_{\text{irr}}} \end{pmatrix}, \quad g \in G.$$

Здесь  $N_{\text{irr}}$  — полное число различных неприводимых представлений  $U_k$  ( $U_1 \equiv \mathbf{1}$ ) группы  $G$ , входящих в перестановочное представление  $P$ ;  $m_k$  — кратность подпредставления  $U_k$  в представлении  $P$ .

Наиболее общую перестановочно-инвариантную билинейную форму можно записать в виде линейной комбинации базисных форм

$$A = a_1 \mathcal{A}_1 + a_2 \mathcal{A}_2 + \dots + a_R \mathcal{A}_R, \quad (69)$$

где коэффициенты  $a_i$  являются элементами некоторого абелева числового поля  $\mathcal{F}$ . Конкретно это поле определяется в ходе вычислений, которые будут описаны ниже.

Легко показать (см. [5, 67]), что в системе координат, расщепляющей перестановочное представление на неприводимые компоненты, форма (69) будет иметь вид

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \mathcal{B}_1 & & & & \\ & \mathcal{B}_2 \otimes \mathcal{I}_{d_2} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \mathcal{B}_k \otimes \mathcal{I}_{d_k} & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & \mathcal{B}_{N_{\text{irr}}} \otimes \mathcal{I}_{d_{N_{\text{irr}}}} \end{pmatrix}. \quad (70)$$

Здесь  $\otimes$  означает *кронекерово произведение* матриц;  $\mathcal{B}_k$  — матрица размера  $m_k \times m_k$ , элементы которой представляют собой линейные комбинации коэффициентов  $a_i$  из формулы (69), а  $m_k$  — кратность неприводимой компоненты  $U_k$ ;  $\mathcal{I}_{d_k}$  — единичная матрица размера  $d_k \times d_k$ , где  $d_k$  — размерность  $U_k$ . Из структуры матрицы (70) видно, что ранг  $R$  группы (т.е. размерность централизованного кольца) равен сумме квадратов кратностей:  $R = 1 + m_2^2 + \dots + m_{N_{\text{irr}}}^2$ .

Рассмотрим теперь определитель  $\det(A)$ . В терминах переменных  $a_1, \dots, a_R$  этот определитель представляет собой однородный полином степени  $N$ . Поскольку определитель формы не зависит от выбора системы координат, а определитель блочно-диагональной матрицы равен произведению определителей ее блоков, то из разложения (70) следует

$$\det(A) = \det(\mathcal{B}_1) \det(\mathcal{B}_2)^{d_2} \dots \det(\mathcal{B}_k)^{d_k} \dots \det(\mathcal{B}_{N_{\text{irr}}})^{d_{N_{\text{irr}}}}.$$

Здесь мы воспользовались тождеством  $\det(X \otimes Y) = \det(X)^m \det(Y)^n$  для кронекерова произведения  $n \times n$  матрицы  $X$  на  $m \times m$  матрицу  $Y$ .

Ясно, что  $\det(\mathcal{B}_k)$  представляет собой однородный полином степени  $m_k$  от переменных  $a_1, \dots, a_R$ :  $\det(\mathcal{B}_k) = E_k(a_1, \dots, a_R)$ . Таким образом, мы имеем следующее

**Утверждение.** *Определитель линейной комбинации базисных форм следующим образом разлагается на множители над некоторым кольцом циклотомических целых чисел:*

$$\det \sum_{i=1}^R a_i \mathcal{A}_i = \prod_{k=1}^{N_{\text{irr}}} E_k(a_1, \dots, a_R)^{d_k}, \quad \deg E_k(a_1, \dots, a_R) = m_k. \quad (71)$$

Здесь  $N_{\text{irr}}$  — число различных неприводимых представлений, входящих в состав перестановочного;  $E_k$  — неприводимый полином, соответствующий  $k$ -му неприводимому представлению размерности  $d_k$ , входящему в перестановочное представление с кратностью  $m_k$ . Мы будем называть неприводимые полиномы  $E_k$  *элементарными* множителями.

Из этого утверждения следует идея алгоритма вычисления инвариантных форм в неприводимых подпространствах перестановочного представления.

Вначале необходимо вычислить полином  $\det(A)$ , что представляет собой алгоритмически относительно несложную задачу. В частности, практические алгоритмы, использующие гауссово исключение, имеют кубическую сложность по размерности перестановочного представления.

Затем необходимо разложить полином  $\det(A)$  на максимальное число неприводимых компонент. Заметим, что современные алгоритмы факторизации полиномов автоматически определяют алгебраическое расширение рациональных чисел, обеспечивающее максимальное разложение на множители. Такого рода алгоритмы называются алгоритмами «*абсолютной факторизации*». Существует большое число практических реализаций алгоритмов факторизации полиномов, имеющих различные оценки сложности\*.

---

\*Для повышения эффективности можно попытаться написать специализированный алгоритм, учитывающий тот факт, что в нашем случае полиномы разлагаются над кольцами циклотомических целых, кондукторами которых являются делители экспоненты группы. Однако польза такой работы требует отдельного изучения.

Таким образом, построение разложения (71) является алгоритмически реализуемой задачей. Решив эту задачу, мы имеем полную информацию о размерностях и кратностях всех неприводимых подпредставлений. Это дает определенную конкретизацию структуры разложения перестановочного представления на неприводимые компоненты.

Следующим естественным шагом будет попытка вычислить явно инвариантные скалярные произведения  $\mathcal{B}_k$  в неприводимых подпространствах перестановочного представления. Для этого необходимо исключить из рассмотрения множитель  $E_k(a_1, \dots, a_R)$ , относящийся к компоненте  $\mathcal{B}_k$ , и приравнять к нулю остальные множители, т. е. необходимо записать систему уравнений

$$E_1 = \dots = \widehat{E_k} = \dots = E_{N_{\text{irr}}} = 0. \quad (72)$$

Если все кратности  $m_i = 1$  (при соблюдении этого условия  $R = N_{\text{irr}}$  и централизаторное кольцо коммутативно), то все полиномы  $E_i$  линейны. В этом случае вычисление скалярных произведений в инвариантных подпространствах без труда может быть доведено до конца, поскольку сводится к решению системы линейных уравнений.

Рассмотрим для примера группу  $SL(2, 3)$ , определяемую как группа специальных линейных преобразований двумерного пространства над полем из трех элементов  $\mathbb{F}_3$ . Эта группа используется в физике элементарных частиц, где ее часто обозначают символом  $T'$ , поскольку она является двукратной накрывающей группы симметрий  $T \cong A_4$  тетраэдра. Группа состоит из 24 элементов, ее экспонента равна 12. Мы рассмотрим ее точное перестановочное действие степени 8, которое можно породить, например, следующими двумя перестановками:

$$g_1 = (1, 5, 3, 2, 6, 4)(7, 8) \quad \text{и} \quad g_2 = (1, 3, 7, 2, 4, 8)(5, 6).$$

Перестановочное представление размерности 8 мы будем обозначать символом  $\underline{8}$ .

Следующие четыре матрицы, полученные вычислением орбиталов, составляют базис кольца  $ZR \equiv ZR(SL(2, 3)(\underline{8}))$  перестановочно-инвариантных форм

$$\mathcal{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}_2 = \begin{pmatrix} \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{A}_3 = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & 1 & \cdot & 1 & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & 1 & \cdot & 1 \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 1 & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ 1 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}_4 = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & 1 & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & 1 & \cdot & 1 & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 1 & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ 1 & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}.$$

Определитель линейной комбинации этих матриц

$$A = a_1 \mathcal{A}_1 + a_2 \mathcal{A}_2 + a_3 \mathcal{A}_3 + a_4 \mathcal{A}_4$$

разлагается на линейные множители над кольцом циклотомических целых  $\mathbb{N}_3$  (обратим внимание на то, что кондуктор 3 — делитель экспоненты группы)

$$\begin{aligned} \det A &= (a_1 + a_2 + 3a_3 + 3a_4) \times \\ &\quad \times \{a_1 - a_2 + (1 + 2r)a_3 - (1 + 2r)a_4\}^2 \times \\ &\quad \times \{-a_1 + a_2 + (1 + 2r)a_3 - (1 + 2r)a_4\}^2 \times \\ &\quad \times (a_1 + a_2 - a_3 - a_4)^3, \quad (73) \end{aligned}$$

где  $r$  — примитивный корень из единицы 3-й степени. Из формулы (73) непосредственно видна структура разложения перестановочного представления  $\underline{\mathfrak{g}}$  на неприводимые компоненты:

$$\underline{\mathfrak{g}} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{2} \oplus \mathbf{2}' \oplus \mathbf{3}.$$

Исключая линейные множители, соответствующие последовательно представлениям  $k = \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{2}', \mathbf{3}$ , и приравнивая к нулю остальные множители, мы получим четыре системы из трех линейных уравнений от четырех переменных.

Рассмотрим для примера подпредставление  $\mathbf{2}$ . Для этой компоненты система уравнений (72) принимает вид

$$a_1 + a_2 + 3a_3 + 3a_4 = 0, \quad (74)$$

$$-a_1 + a_2 + (1 + 2r)a_3 - (1 + 2r)a_4 = 0, \quad (75)$$

$$a_1 + a_2 - a_3 - a_4 = 0. \quad (76)$$

Линейные системы такого типа состоят из  $R - 1$  уравнений, но содержат  $R$  переменных. Поскольку билинейная форма (69) описывает невырожденное скалярное произведение, коэффициент  $a_1$  при диагональной базисной форме не может обращаться в нуль. Поэтому  $a_1$  можно рассматривать как

параметр и решать систему уравнений относительно остальных переменных. В принципе, коэффициент  $a_1$  может быть произвольным (ненулевым) параметром, поскольку борновская вероятность не зависит от его значения. Однако для каждой неприводимой компоненты  $U_k$  разумно выбирать значение  $a_1 = d_k/N$  — при такой нормировке сумма скалярных произведений в инвариантных подпространствах будет равна стандартному скалярному произведению в пространстве перестановочного представления.

Решая линейную систему (74)–(76), установив  $a_1 = 2/8 = 1/4$ , мы получим

$$a_2 = -\frac{1}{4}, \quad a_3 = -\frac{1+2r}{12}, \quad a_4 = \frac{1+2r}{12}.$$

Применяя аналогичную процедуру ко всем неприводимым компонентам, мы приходим к следующему набору скалярных произведений в инвариантных подпространствах

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_1 &= \frac{1}{8} (\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3 + \mathcal{A}_4) \equiv \frac{1}{8} \mathcal{U}_8, \\ \mathcal{B}_2 &= \frac{1}{4} \left( \mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_2 - \frac{1+2r}{3} \mathcal{A}_3 + \frac{1+2r}{3} \mathcal{A}_4 \right), \\ \mathcal{B}_{2'} &= \frac{1}{4} \left( \mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_2 + \frac{1+2r}{3} \mathcal{A}_3 - \frac{1+2r}{3} \mathcal{A}_4 \right), \\ \mathcal{B}_3 &= \frac{3}{8} \left( \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 - \frac{1}{3} \mathcal{A}_3 - \frac{1}{3} \mathcal{A}_4 \right). \end{aligned}$$

Легко проверить, что использованная нами нормировка коэффициентов обеспечивает тождество  $\mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_2 + \mathcal{B}_{2'} + \mathcal{B}_3 = \mathcal{A}_1 \equiv \mathcal{I}_8$ . Напомним, что во всех подобных задачах  $\mathcal{B}_1$  не требует вычисления, поскольку скалярное произведение в подпространстве тривиального представления всегда имеет вид  $\frac{1}{N} \mathcal{U}_N$ .

В случае кратных подпредставлений ситуация существенно усложняется ввиду нелинейности соотношений. Во многих конкретных примерах, применяя приемы *ad hoc*, удается провести, аналогично случаю единичных кратностей, полное разложение скалярных произведений на неприводимые компоненты. Вопрос о том, можно ли разработать общий алгоритм для случая кратных подпредставлений, требует более глубокого дополнительного изучения.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В основе данной статьи лежит представление о том, что любая проблема, имеющая осмысленное эмпирическое содержание, может быть сформулирована в конструктивных, более того, конечных терминах. Исключение актуальных бесконечностей из описания физической реальности, освобождая

от множества технических трудностей, позволяет сконцентрироваться на содержательной стороне физических задач. Кроме того, конструктивность — необходимое требование для самой возможности построения компьютерных моделей физических систем. Мы также придерживались принципа экономного введения новых элементов в описания, т. е. математические понятия вводились только тогда, когда они были реально необходимы (конечно, с точностью до нашего понимания проблемы) — бесконтрольное введение новых математических структур (или расширение старых просто из-за возможности обобщения) затрудняет отделение содержательных элементов описания от артефактов.

Придерживаясь этих позиций, мы рассмотрели классические и квантовые динамические системы с нетривиальными симметричными свойствами. Особое внимание было уделено одному из центральных принципов в физике — принципу калибровочной инвариантности, который мы переформулировали в «конечном» виде. Мы рассмотрели детерминистические динамические системы и обсудили групповую природу формирования сохраняющих форму движущихся структур, часто наблюдаемых в динамике таких систем. Мы обсудили также, каким образом в детерминистической динамике может возникнуть унитарность, присущая фундаментальным законам природы и лежащая в основе квантово-механического поведения.

Конструктивный анализ квантово-механического поведения приводит к следующим выводам.

1. Квантовая механика по существу является *априорной математической схемой*, в основе которой лежит принципиальная невозможность проследить идентичность неразличимых объектов в процессе эволюции совокупности таких объектов. Фактически это раздел комбинаторики, который можно назвать *«исчислением неразличимых»*.

2. Любая квантово-механическая проблема может быть сведена к *перестановкам*.

3. *Квантовые интерференции* — это явления, наблюдаемые в инвариантных подпространствах перестановочных представлений и выражаемые в терминах *перестановочных инвариантов*.

4. Натуральная интерпретация *квантовых амплитуд* («волн») как векторов кратностей вхождения элементов, подвергаемых перестановкам, («частиц») в совокупность таких элементов, приводит к *рациональным* квантовым вероятностям. Это согласуется с *частотной интерпретацией* вероятности для конечных множеств.

Идея натуральных квантовых амплитуд выглядит весьма привлекательной. В частности, она позволяет интерпретировать элементы множества неразличимых объектов, на которых группа симметрий действует перестановками, как «частицы», а векторы кратностей вхождения этих объектов в ансамбль как «волны». Эта идея ведет к простой и самосогласованной картине кван-

того поведения. Она, однако, требует проверки. Если идея верна, то квантовые явления в различных инвариантных подпространствах представляют собой различные проявления — видимые в различных «наблюдательных (экспериментальных) установках» — единого процесса перестановок одной и той же совокупности объектов. Данные, относящиеся к различным инвариантным подпространствам перестановочного представления, требуют интерпретации. Например, тривиальное одномерное подпредставление любого перестановочного представления можно интерпретировать как «счетчик частиц»: перестановочный инвариант  $L_N(n)$ , соответствующий этому подпредставлению, представляет собой полное число частиц в ансамбле. Интерпретация данных, относящихся к другим инвариантным подпространствам, требует дальнейшего изучения.

**Благодарности.** Автор благодарен С. А. Абрамову, Ю. А. Блинкову, С. И. Виницкому, В. П. Гердту, В. В. Иванову, В. С. Мележику и А. А. Михалеву за обсуждение результатов, изложенных в статье. Работа частично поддерживалась Российским фондом фундаментальных исследований (грант № 01-01-00200) и Министерством образования и науки РФ (грант № 3802.2012.2).

### Приложение А ОБЪЕДИНЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ И ВНУТРЕННИХ СИММЕТРИЙ

В общем случае в качестве симметрий множества состояний  $\Omega$  можно рассматривать произвольную подгруппу симметрической группы  $S_\Omega$ . Однако, если требуется, чтобы для динамических систем с пространством и локальными состояниями группа симметрий  $G$  была сконструирована из групп  $F$  и  $\Gamma$ , то необходимо снабдить групповой структурой декартово произведение  $\Gamma^X \otimes F$ . Здесь  $\Gamma^X$  — множество функций на пространстве  $X$  со значениями в группе внутренних симметрий  $\Gamma$ . Таким образом, каждый элемент  $u \in G$  представляет собой пару  $u = (\alpha(x), a)$ , где  $\alpha(x) \in \Gamma^X$  и  $a \in F$ . Естественно предположить, что результатом действия пространственных симметрий на функции из  $\Gamma^X$  являются также элементы  $\Gamma^X$ . Это означает, что группа  $\Gamma^X$  должна быть *нормальным делителем* искомой группы  $G$ , т. е.  $G$  представляет собой *расширение* группы  $F$  с помощью группы  $\Gamma^X$ . Если далее предположить, что симметрии пространства вкладываются в полную группу  $G$  как подгруппа, то получается частный тип расширений, называемых *разложимыми*.

Наиболее важный пример разложимого расширения представляет собой *сплетение*, введенное на с. 111. Эта конструкция адекватна принципу калибровочной инвариантности. В физических теориях обычно предполагается независимость пространственных и внутренних симметрий, что приводит к



более простой конструкции разложимого расширения, а именно, к *прямому произведению*  $G \cong \Gamma^X \times F$ . Действие и групповое умножение для прямого произведения имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma(x) (\alpha(x), a) &= \sigma(x) \alpha(x), \\ (\alpha(x), a) (\beta(x), b) &= (\alpha(x) \beta(x), ab). \end{aligned} \tag{77}$$

Следующее утверждение обобщает обе эти конструкции.

*Любой антигомоморфизм  $\mu : F \rightarrow F$  (термин «антигомоморфизм» означает, что  $\mu(a)\mu(b) = \mu(ba)$ ) группы пространственных симметрий определяет класс эквивалентности разложимых групповых расширений*

$$\mathbf{1} \rightarrow \Gamma^X \rightarrow G \rightarrow F \rightarrow \mathbf{1}.$$

*Эквивалентность описывается произвольной функцией  $\kappa : F \rightarrow F$ . Основные групповые операции — действие на  $\Sigma^X$ , групповое умножение и взятие обратного элемента — имеют следующий явный вид:*

$$\begin{aligned} \sigma(x) (\alpha(x), a) &= \sigma(x\mu(a)) \alpha(x\kappa(a)) \\ (\alpha(x), a) (\beta(x), b) &= (\alpha(x\kappa(ab)^{-1}\mu(b)\kappa(a)) \beta(x\kappa(ab)^{-1}\kappa(b)), ab), \\ (\alpha(x), a)^{-1} &= (\alpha(x\kappa(a^{-1})^{-1}\mu(a)^{-1}\kappa(a))^{-1}, a^{-1}). \end{aligned}$$

Это утверждение получается специализацией общей конструкции разложимых расширений группы  $F$  группой  $H$  (см., например, [21]) на случай, когда  $H$  представляет собой группу  $\Gamma$ -значных функций на  $X$ , а  $F$  действует на аргументах этих функций. Эквивалентность расширений с одним и тем же антигомоморфизмом  $\mu$ , но с различными функциями  $\kappa$  выражается следующей коммутативной диаграммой:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{1} & \longrightarrow & \Gamma^X & \longrightarrow & G & \longrightarrow & F \longrightarrow \mathbf{1} \\ & & \downarrow & & \downarrow K & & \downarrow \\ \mathbf{1} & \longrightarrow & \Gamma^X & \longrightarrow & G' & \longrightarrow & F \longrightarrow \mathbf{1} \end{array},$$

где отображение  $K$  имеет вид  $K : (\alpha(x), a) \mapsto (\alpha(x\kappa(a)), a)$ .

Стандартные сплетение и прямое произведение получаются из этой общей конструкции выбором антигомоморфизмов  $\mu(a) = a^{-1}$  и  $\mu(a) = \mathbf{1}$  соответственно. Что касается произвольной функции  $\kappa$ , в математической литературе обычно используются  $\kappa(a) = a^{-1}$  для сплетения и  $\kappa(a) = \mathbf{1}$  для прямого произведения. В формулах (20)–(22) и (77) мы использовали как раз эти функции.

## Приложение Б СТРУКТУРНЫЙ АНАЛИЗ ДИСКРЕТНЫХ ОТНОШЕНИЙ

Методы анализа совместности, такие как вычисление базисов Гребнера или приведение в инволюцию, широко используются для изучения систем полиномиальных и дифференциальных уравнений. В этом приложении мы развиваем аналогичную технику для дискретных систем [24, 25]. Для иллюстрации возможностей нашего подхода мы приводим его приложения к изучению клеточных автоматов.

Рассмотрим декартово произведение  $\Sigma^n = \Sigma_1 \times \Sigma_2 \times \dots \times \Sigma_n$ , т. е. множество кортежей (векторов) вида  $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ , где  $\sigma_i \in \Sigma_i$  для каждого  $i$ .  $n$ -арным отношением называется любое подмножество  $n$ -мерного гиперпараллелепипеда  $\Sigma^n$ . Мы предполагаем, что все  $\Sigma_i$  — конечные множества, состоящие из  $q_i = |\Sigma_i|$  элементов, которые мы будем называть *состояниями*.

Мы можем интерпретировать  $n$  измерений гиперпараллелепипеда  $\Sigma^n$  как множество точек  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Для того чтобы превратить это изначально аморфное множество в «пространство», нужно снабдить  $X$  некоторой структурой, определяющей степень «близости» друг к другу различных точек. Подходящей для этих целей математической конструкцией является абстрактный симплициальный комплекс. Натуральная концепция пространства предполагает однородность его точек. Это означает, что существует группа симметрий, действующая транзитивно на  $X$ , т. е. имеется возможность «перемещать» свободно точки друг в друга. Однородность возможна, только если все  $\Sigma_i$  эквивалентны. Пусть  $\Sigma$  означает класс эквивалентности. Мы можем представить  $\Sigma$  канонически в виде  $\Sigma = (0, \dots, q - 1)$ ,  $q = |\Sigma|$ .

Если число состояний — степень простого числа, т. е.  $q = p^m$ , мы можем снабдить множество  $\Sigma$  дополнительно структурой поля Галуа  $\mathbb{F}_q$ . Воспользовавшись функциональной полнотой полиномов над конечными полями [47], мы можем представить любое  $k$ -арное отношение на  $\Sigma$  в виде множества нулей некоторого полинома из кольца  $\mathbb{F}_q[x_1, x_2, \dots, x_n]$ . Таким образом, множество отношений можно реализовать в виде системы полиномиальных уравнений. Хотя такое представление не является необходимым (и не работает, если  $\Sigma_i$  — различные множества или  $q$  не является степенью простого числа), оно полезно ввиду нашей привычки к работе с полиномами и возможности использовать развитые средства полиномиальной алгебры, в частности, базисы Гребнера.

**Б.1. Основные определения и конструкции.** Помимо симплексов, являющихся выделенными подмножествами множества  $X$ , мы будем рассматривать произвольные множества точек из  $X$ . Для краткости множества, содержащие  $k$  точек, мы будем называть  $k$ -множествами. Имея дело с системами отношений, определенных на различных множествах точек, нам необходимо установить соответствие между точками и размерностями гиперкуба  $\Sigma^k$ . Для

этого мы будем использовать экспоненциальные обозначения. Обозначение  $\Sigma^{\{x_i\}}$  фиксирует  $\Sigma$  как множество значений точки  $x_i$ . Для  $k$ -множества  $\delta = \{x_{i_1}, \dots, x_{i_k}\}$  мы вводим обозначение  $\Sigma^\delta = \Sigma^{\{x_{i_1}\}} \times \dots \times \Sigma^{\{x_{i_k}\}}$ . Мы будем называть множество точек  $\delta$  *областью определения* отношения  $R^\delta$ , если  $R^\delta \subseteq \Sigma^\delta$ . Весь гиперкуб  $\Sigma^\delta$  мы будем называть *тривиальным* отношением. Заметим, что отношения весьма экономно представляются в памяти компьютера битовыми строками, а манипуляции с отношениями эффективно реализуются битовыми операциями из базового набора процессорных команд.

*Б.1.1. Отношения.* Таким образом, мы имеем

**Определение 1** (отношение). *Отношением*  $R^\delta$  на множестве точек  $\delta = \{x_{i_1}, \dots, x_{i_k}\}$  называется любое подмножество гиперкуба  $\Sigma^\delta$ , т.е.  $R^\delta \subseteq \Sigma^\delta$ . Отношение  $R^\delta$  можно отождествить с булевозначной (характеристической) функцией  $R^\delta : \Sigma^\delta \rightarrow \{0, 1\}$ .

Важный специальный случай отношения:

**Определение 2** (функциональное отношение). Отношение  $R^\delta$  на множестве точек  $\delta = \{x_{i_1}, \dots, x_{i_k}\}$  называется *функциональным*, если существует позиция  $p \in (1, \dots, k)$ , такая, что для любых  $\sigma_{i_1}, \dots, \sigma_{i_{p-1}}, \sigma_{i_{p+1}}, \dots, \sigma_{i_k}, \varsigma, \tau \in \Sigma$  из  $(\sigma_{i_1}, \dots, \sigma_{i_{p-1}}, \varsigma, \sigma_{i_{p+1}}, \dots, \sigma_{i_k}) \in R^\delta$  и  $(\sigma_{i_1}, \dots, \sigma_{i_{p-1}}, \tau, \sigma_{i_{p+1}}, \dots, \sigma_{i_k}) \in R^\delta$  следует  $\varsigma = \tau$ .

Если интерпретировать точки пространства как переменные, то функциональное отношение можно написать в виде

$$x_{i_p} = F(x_{i_1}, \dots, x_{i_{p-1}}, x_{i_{p+1}}, \dots, x_{i_k}), \text{ где } F : \Sigma^{\delta \setminus \{x_{i_p}\}} \rightarrow \Sigma.$$

Нам потребуется возможность расширять отношения с множества точек на его надмножество:

**Определение 3** (расширение отношения). Для данного множества точек  $\delta$ , его подмножества  $\tau \subseteq \delta$  и отношения  $R^\tau$  на  $\tau$  мы определяем *расширение* отношения  $R^\tau$  следующим образом:

$$R^\delta = R^\tau \times \Sigma^{\delta \setminus \tau}.$$

Это определение позволяет, в частности, привести отношения  $R^{\delta_1}, \dots, R^{\delta_m}$ , определенные на разных областях, к общей области определения, т.е. к объединению  $\delta_{i_1} \cup \dots \cup \delta_{i_m}$ .

Логические следствия отношений определяются естественным образом:

**Определение 4** (следствие отношения). Отношение  $Q^\delta$  называется *следствием* отношения  $R^\delta$ , если  $R^\delta \subseteq Q^\delta \subseteq \Sigma^\delta$ , т.е.  $Q^\delta$  — произвольное *надмножество* множества  $R^\delta$ .

Отношение  $R^\delta$  может иметь много различных следствий: их полное число равно, очевидно,  $2^{|\Sigma^\delta| - |R^\delta|}$ .

При анализе структуры отношения важно выделить следствия, которые можно свести к отношениям на меньших множествах точек:

**Определение 5** (собственное следствие). *Нетривиальное* отношение  $Q^\tau$  называется *собственным следствием* отношения  $R^\delta$ , если  $\tau$  — *собственное подмножество* множества  $\delta$  (т. е.  $\tau \subset \delta$ ), и отношение

$$Q^\tau \times \Sigma^{\delta \setminus \tau}$$

является следствием отношения  $R^\delta$ .

Отношения, не имеющие собственных следствий, мы будем называть *простыми отношениями*.

**Б.1.2. Совместность систем отношений.** Совместность нескольких отношений естественно определить как пересечение расширений этих отношений на их общую область определения.

**Определение 6** (базисное отношение). *Базисным отношением* системы отношений  $R^{\delta_1}, \dots, R^{\delta_m}$  называется отношение

$$R^\delta = \bigcap_{i=1}^m R^{\delta_i} \times \Sigma^{\delta \setminus \delta_i}, \quad \text{где } \delta = \bigcup_{i=1}^m \delta_i. \quad (78)$$

В полиномиальном случае, когда  $q = p^n$ , стандартным средством анализа совместности является метод базисов Гребнера. Относительно связи базисов Гребнера с нашим определением можно сделать следующие замечания:

- в отличие от базиса Гребнера, который обычно представляет собой систему полиномов, условие совместности, выражаемое базисным отношением, всегда можно представить *единственным* полиномом;
- любой возможный базис Гребнера системы отношений  $R^{\delta_1}, \dots, R^{\delta_m}$ , представленных полиномами, является некоторой комбинацией *следствий* базисного отношения.

**Б.1.3. Декомпозиция отношений.** Если отношение имеет собственные следствия, то можно попытаться представить его в виде комбинации этих следствий, т. е. отношений на меньших множествах точек. Для этого мы вводим следующее определение.

**Определение 7** (каноническая декомпозиция). *Канонической декомпозицией* отношения  $R^\delta$ , имеющего собственные следствия  $Q^{\delta_1}, \dots, Q^{\delta_m}$ , называется представление  $R^\delta$  в виде

$$R^\delta = P^\delta \cap \left( \bigcap_{i=1}^m Q^{\delta_i} \times \Sigma^{\delta \setminus \delta_i} \right), \quad (79)$$

где фактор  $P^\delta$  определяется следующим образом:

**Определение 8** (главный фактор). *Главным фактором* отношения  $R^\delta$ , имеющего собственные следствия  $Q^{\delta_1}, \dots, Q^{\delta_m}$ , называется отношение

$$P^\delta = R^\delta \cup \left( \Sigma^\delta \setminus \bigcap_{i=1}^m Q^{\delta_i} \times \Sigma^{\delta \setminus \delta_i} \right).$$

Главный фактор представляет собой максимально «свободное», т. е. наиболее близкое к тривиальному, отношение, позволяющее в комбинации с собственными следствиями восстановить исходное отношение.

Если главный фактор в канонической декомпозиции тривиален, то отношение можно полностью свести к отношениям на меньших множествах точек.

**Определение 9** (приводимое отношение). Отношение  $R^\delta$  называется *приводимым*, если его можно представить в виде

$$R^\delta = \bigcap_{i=1}^m Q^{\delta_i} \times \Sigma^{\delta \setminus \delta_i}, \quad (80)$$

где  $\delta_i$  — собственные подмножества  $\delta$ .

Это определение дает возможность ввести «топологию», т. е. структуру абстрактного симплициального комплекса с соответствующими теориями гомологий, когомологий и т. д., на произвольном  $n$ -арном отношении  $R \subseteq \Sigma^n$ . Для этого нужно

- 1) назвать измерения гиперкуба  $\Sigma^n$  «точками»  $x_1, \dots, x_n \in X$ ;
- 2) разложить отношение  $R$  (которое теперь можно обозначить как  $R^X$ ) на *неприводимые* компоненты;
- 3) объявить области определения неприводимых компонент отношения  $R^X$  *максимальными симплексами* симплициального комплекса.

**Б.2. Приложение к исследованию клеточных автоматов. Б.2.1. Клеточный автомат Дж. Конвея Life.** Автомат Конвея Life входит в семейство 2-мерных бинарных (т. е.  $\Sigma = \{0, 1\}$ ;  $q = 2$ ) клеточных автоматов с правилами, заданными на окрестности Мура  $3 \times 3$ . Квадратная решетка с такой окрестностью может быть представлена 8-валентным (8-регулярным) графом. Правило автомата Life описывается следующим образом: клетка (вершина графа) «рождается», если имеет ровно три «живых» соседа, «выживает», если имеет два или три «живых» соседа и «умирает» во всех остальных случаях. Символически это правило можно записать в виде списка «рождение»/«выживание» как V3/S23. Другие примеры автоматов из этого семейства — HighLife (правило V36/S23) Day&Night (правило V3678/S34678).

Для обобщения этого типа правил мы определяем *k-валентное правило* Life как *бинарное* правило на окрестности  $k$ -валентного графа (мы будем обозначать центральную вершину этого графа символом  $x_{k+1}$ , а смежные с ней вершины соответственно  $x_1, \dots, x_k$ ), задаваемое двумя произвольными подмножествами множества  $\{0, 1, \dots, k\}$ . Эти подмножества  $B, S \subseteq \{0, 1, \dots, k\}$  содержат условия переходов за один шаг по времени  $x_{k+1} \rightarrow x'_{k+1}$  вида  $0 \rightarrow 1$  и  $1 \rightarrow 1$  соответственно. Поскольку число подмножеств любого конечного множества  $A$  равно  $2^{|A|}$ , а различные пары  $B/S$  определяют различные пра-

вила, то полное число различных правил равно

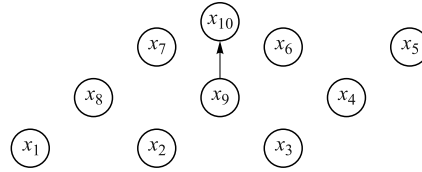
$$N_{B/S,k} = 2^{k+1} \times 2^{k+1} = 2^{2k+2}. \quad (81)$$

Введем другое определение: *k-симметричным q-арным правилом* называется правило на *k-валентной* окрестности, симметричное относительно группы  $S_k$  всех перестановок *k* внешних вершин окрестности. Нетрудно подсчитать полное число всех различных *k-симметричных q-арных правил*:

$$N_{q,S_k} = q^{\binom{k+q-1}{q-1}}. \quad (82)$$

Мы видим, что при  $q = 2$  числа (81) и (82) совпадают:  $N_{B/S,k} = N_{2,S_k}$ . Таким образом, любое *k-симметричное бинарное правило* можно записать в форме списка «рождение»/«выживание».

Локальное отношение автомата Life, которое мы будем обозначать символом  $R_{\text{Life}}^\delta$ , определено на 10-множестве  $\delta = \{x_1, \dots, x_{10}\}$ :



где точка  $x_{10} \equiv x'_9$  отождествляется с «точкой  $x_9$  в следующий момент времени». По построению точки 10-мерного гиперкуба  $\Sigma^\delta$  принадлежат отношению  $R_{\text{Life}}^\delta$ , т. е.  $(x_1, \dots, x_{10}) \in R_{\text{Life}}^\delta$ , в следующих случаях:

- 1)  $\left(\sum_{i=1}^8 x_i = 3\right) \wedge (x_{10} = 1)$ ,
- 2)  $\left(\sum_{i=1}^8 x_i = 2\right) \wedge (x_9 = x_{10})$ ,
- 3)  $x_{10} = 0$ , если не выполняется ни одно из предыдущих условий.

Число элементов отношения равно  $|R_{\text{Life}}^\delta| = 512$ . Отношение  $R_{\text{Life}}^\delta$ , как и в случае любого клеточного автомата, является *функциональным*: состояние точки  $x_{10}$  однозначно определяется состояниями других точек. Если дополнительно снабдить множество  $\Sigma = \{0, 1\}$  структурой поля  $\mathbb{F}_2$ , то отношение  $R_{\text{Life}}^\delta$  можно записать в виде полинома из кольца  $\mathbb{F}_2[x_1, \dots, x_{10}]$ . Это позволяет провести исследование автомата как нашим методом структурного анализа, так и полиномиальными методами. Приведем сравнение нашего подхода с методом базисов Гребнера.

Полиномиальное представление отношения  $R_{\text{Life}}^\delta$  имеет вид

$$P_{\text{Life}} = x_{10} + x_9 (\Pi_7 + \Pi_6 + \Pi_3 + \Pi_2) + \Pi_7 + \Pi_3, \quad (83)$$

где  $\Pi_k \equiv \Pi_k(x_1, \dots, x_8)$  —  $k$ -й элементарный симметрический полином, определяемый для  $n$  переменных  $x_1, \dots, x_n$  формулой

$$\Pi_k(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k}.$$

Далее мы будем использовать следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \Pi_k &\equiv \Pi_k(x_1, \dots, x_8), & \Pi_k^i &\equiv \Pi_k(x_1, \dots, \widehat{x}_i, \dots, x_8), \\ \Pi_k^{ij} &\equiv \Pi_k(x_1, \dots, \widehat{x}_i, \dots, \widehat{x}_j, \dots, x_8). \end{aligned}$$

Применяя написанную нами программу для структурного анализа дискретных отношений к  $R_{\text{Life}}^\delta$ , мы обнаруживаем, что это отношение *приводимо* и его каноническая декомпозиция имеет вид

$$R_{\text{Life}}^\delta = R_2^{\delta \setminus \{x_9\}} \cap \left( \bigcap_{k=1}^7 R_1^{\delta \setminus \{x_{i_k}\}} \right), \quad (84)$$

где  $(i_1, \dots, i_7)$  — произвольное 7-элементное подмножество множества  $(1, \dots, 8)$ . Для краткости мы отбросили в (84) тривиальные факторы  $\Sigma^{\{x_{i_k}\}}$ , входящие в общую формулу (80).

Восемь отношений  $R_1^{\delta \setminus \{x_i\}}$  ( $1 \leq i \leq 8$ ; для построения декомпозиции (84) достаточно взять любые семь из них) имеют следующую полиномиальную форму:

$$\begin{aligned} x_9 x_{10} (\Pi_6^i + \Pi_5^i + \Pi_2^i + \Pi_1^i) + x_{10} (\Pi_6^i + \Pi_2^i + 1) + \\ + x_9 (\Pi_7^i + \Pi_6^i + \Pi_3^i + \Pi_2^i) = 0. \end{aligned}$$

Полиномиальная форма отношения  $R_2^{\delta \setminus \{x_9\}}$  имеет вид

$$x_{10} (\Pi_7 + \Pi_6 + \Pi_3 + \Pi_2 + 1) + \Pi_7 + \Pi_3 = 0.$$

Отношения  $R_1^{\delta \setminus \{x_i\}}$  и  $R_2^{\delta \setminus \{x_9\}}$  являются *неприводимыми*, но *не простыми*, и могут быть разложены в соответствии с формулой (79). Продолжая итерации декомпозиций, мы окончательно приходим к максимально упрощенной системе отношений, эквивалентной исходному отношению  $R_{\text{Life}}^\delta$ . Для наглядности приведем их полиномиальную форму:

$$x_9 x_{10} (\Pi_2^i + \Pi_1^i) + x_{10} (\Pi_2^i + 1) + x_9 (\Pi_7^i + \Pi_6^i + \Pi_3^i + \Pi_2^i) = 0, \quad (85)$$

$$x_{10} (\Pi_3 + \Pi_2 + 1) + \Pi_7 + \Pi_3 = 0, \quad (86)$$

$$(x_9 x_{10} + x_{10}) (\Pi_3^{ij} + \Pi_2^{ij} + \Pi_1^{ij} + 1) = 0, \quad (87)$$

$$x_{10} (\Pi_3^i + \Pi_2^i + \Pi_1^i + 1) = 0, \quad (88)$$

$$x_{10} x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3} x_{i_4} = 0. \quad (89)$$

Простейшие отношения (89) легко интерпретируются: если состояние точки  $x_{10}$  равно 1, тогда по крайней мере одна из любых четырех точек, окружающих  $x_9$ , должна быть в состоянии 0.

Приведенный выше анализ отношения  $R_{\text{Life}}^\delta$  выполняется менее чем за 1 с на среднем ноутбуке. Для вычисления базиса Гребнера к полиному (83) нужно добавить десять полиномов

$$x_i^2 + x_i, \quad i = 1, \dots, 10,$$

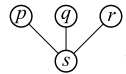
в соответствии с тождеством  $x^q = x$ , которому удовлетворяют все элементы конечного поля  $\mathbb{F}_q$ . Вычисление с помощью функции, встроенной в систему **Maple**, выполняется примерно за 1 ч. Результат зависит от упорядочения переменных, которое необходимо задавать при использовании метода базисов Гребнера:

— чисто лексикографическое упорядочение с порядком переменных  $x_{10} \succ x_9 \succ \dots \succ x_1$  не дает новой информации, оставляя исходный полином (83) неизменным;

— чисто лексикографическое упорядочение с порядком переменных  $x_1 \succ x_2 \succ \dots \succ x_{10}$  и упорядочение по степеням с обратной лексикографией воспроизводят отношения (85)–(89) с точностью до нескольких дополнительных полиномиальных редукций, нарушающих симметрию полиномов.

*Б.2.2. Элементарные клеточные автоматы.* Простейшие бинарные одномерные клеточные автоматы были названы С. Вольфрамом *элементарными клеточными автоматами*. В этом разделе мы будем придерживаться обозначений и терминологии книги Вольфрама [68]. Элементарные автоматы существенно проще, чем Life, и мы можем при их исследовании уделить больше внимания топологическим аспектам структурного анализа.

Локальные правила элементарных клеточных автоматов определяются на 4-множестве  $\delta = \{p, q, r, s\}$ , которое можно изобразить картинкой



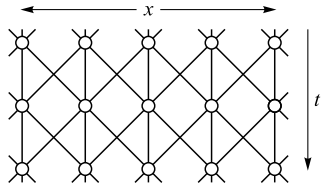
Локальное правило — это бинарная функция вида  $s = f(p, q, r)$ . Полное число таких функций равно  $2^{2^3} = 256$ . Следовательно, каждое правило можно индексировать 8-битным бинарным числом.

Наши вычисления показывают, что 256 отношений, соответствующих этим правилам, подразделяются на 118 *приводимых* и 138 *неприводимых*. Только два отношения из неприводимых оказались *простыми*, а именно, пра-



вила 105 и 150 в нумерации Вольфрама\*. Простые правила 105 и 150 имеют линейные полиномиальные формы  $s = p + q + r + 1$  и  $s = p + q + r$  соответственно.

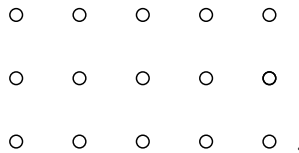
Пространство-время элементарных автоматов представляет собой решетку с целочисленными координатами  $(x, t) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ . Разумеется, мы можем без всяких проблем рассматривать конечную решетку  $\mathbb{Z}_m \times [0, 1, \dots, T]$ , выбрав достаточно большие  $m$  и  $T$ . Состояние точки решетки мы будем представлять функцией  $u(x, t) \in \Sigma = \{0, 1\}$ . Если представить решетку в виде графа, то в общем случае мы предполагаем, что точки решетки связаны между собой, как показано на рисунке



Отсутствие горизонтальных связей выражает независимость «пространственно-подобных» точек в клеточных автоматах.

**Приводимые автоматы.** Анализ показывает, что некоторые автоматы с приводимыми локальными отношениями можно представить в виде объединения автоматов, определенных на несвязных (непересекающихся) подкомплексах.

• Два автомата 0 и 255 определяются унарными отношениями  $s = 0$  и  $s = 1$  на несвязном множестве точек:



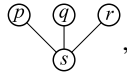
Заметим, что в математике унарные отношения обычно называют *свойствами*.

• Шесть автоматов 15, 51, 85, 170, 204 и 240 фактически представляют собой наборы несвязных пространственно-нульмерных автоматов, т. е. изолированные точки, эволюционирующие во времени. Для примера рассмотрим

---

\*Битовые строки значений функции  $s = f(p, q, r)$  при лексикографически возрастающем порядке комбинаций значений переменных  $p, q, r$  интерпретируются как числа с бинарными разрядами, идущими в убывающем порядке.

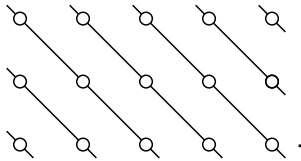
автомат 15. Его локальное правило, определенное на множестве



можно представить строкой битов 0101010110101010. Это отношение сводится к отношению на грани



с битовой строкой 0110. Пространственно-временная решетка расщепляется следующим образом:

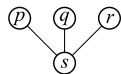


Строка битов 0110 означает, что состояния точек  $p$  и  $s$  всегда противоположны, поэтому можно сразу написать общее решение для автомата 15:

$$u(x, t) = a(x - t) + t \pmod{2},$$

где  $u(x, 0) \equiv a(x)$  — произвольное начальное условие.

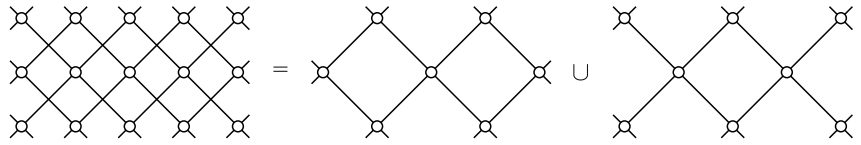
• Каждый из десяти автоматов 5, 10, 80, 90, 95, 160, 165, 175, 245, 250 распадается на два идентичных автомата. Для примера рассмотрим правило 90. Этот автомат известен тем, что он порождает фрактал топологической размерности 1 и хаусдорфовой размерности  $\ln 3 / \ln 2 \approx 1,58$ , известный как «треугольник Серпинского» (а также как «решетка» или «салфетка» Серпинского). Локальное отношение правила 90 на множестве



представляется битовой строкой 1010010101011010. Это отношение в соответствии с разложением (80) сводится к отношению с битовой строкой

$$10010110 \text{ на грани } \begin{matrix} p & r \\ & s \end{matrix} . \tag{90}$$

Из структуры этой грани видно, что пространственно-временная решетка распадается на два идентичных независимых комплекса:



Для построения общего решения автомата 90 удобно использовать полиномиальную форму  $s + p + r = 0$  отношения (90). Из этого линейного выражения легко выводится общее решение:

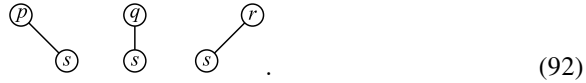
$$u(x, t) = \sum_{k=0}^t \binom{t}{k} a(x - t + 2k) \pmod{2}, \quad u(x, 0) \equiv a(x).$$

**Использование собственных следствий.** Собственные следствия, даже если они не являются функциональными, содержат полезную информацию о глобальном поведении клеточного автомата.

Например, 64 автомата\* имеют собственные следствия с битовой строкой

$$1101 \tag{91}$$

на, по крайней мере, одной из граней



Отношения (91) имеют на гранях (92) полиномиальные формы

$$ps + s = 0, \quad qs + s = 0, \quad rs + s = 0$$

соответственно.

Отношение (91) *не функционально* и, следовательно, не может описывать какую бы то ни было детерминистическую эволюцию. Тем не менее оно накладывает жесткие ограничения на поведение соответствующих автоматов. Характерные черты такого поведения отчетливо видны на многих представленных в атласе [69] иллюстрациях к компьютерным вычислениям эволюции автоматов. Типичная картина из этого атласа, на которой представлены несколько эволюций автомата 168, воспроизведена на рис. 10. На рисунке нули

\*Приведем полный список этих автоматов в нумерации Вольфрама: 2, 4, 8, 10, 16, 32, 34, 40, 42, 48, 64, 72, 76, 80, 96, 112, 128, 130, 132, 136, 138, 140, 144, 160, 162, 168, 171, 174–176, 186, 187, 190–192, 196, 200, 205, 206, 208, 220, 222–224, 234–239, 241–254. Автоматы из этого списка имеют как приводимые, так и неприводимые локальные отношения.

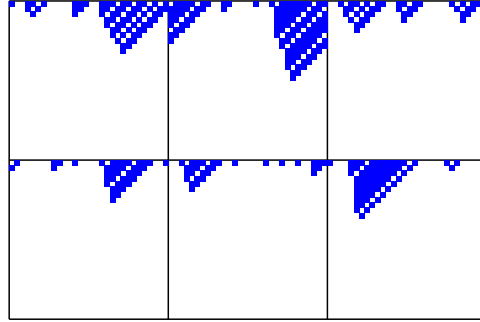


Рис. 10. Правило 168. Несколько эволюций со случайными начальными условиями

и единицы изображены пустыми и заполненными квадратными клетками соответственно. Заметим, что авторы вычислений использовали периодичность по пространственному измерению:  $x \in \mathbb{Z}_{30}$ .

Локальное отношение автомата 168 в полиномиальной форме имеет вид  $pqr + qr + pr + s = 0$ . Это отношение имеет собственное следствие  $rs + s = 0$ , означающее, что если  $r$  находится в состоянии 1, то  $s$  может быть в любом из двух состояний 0 или 1, однако, если состояние  $r$  равно 0, то  $s$  *обязано* быть в состоянии 0. Символически:

$$\begin{aligned} r = 1 &\Rightarrow s = 0 \vee s = 1, \\ r = 0 &\Rightarrow s = 0. \end{aligned}$$

На рис. 10 видно, что любая эволюция состоит из обрывающихся диагоналей, направленных влево вниз. Каждая диагональ начинается с нескольких идущих подряд единиц, но после первого появления нуля все последующие клетки диагонали могут быть только нулями.


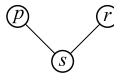
**Сравнение канонической декомпозиции с базисами Гребнера.** Ясно, что наша каноническая декомпозиция (79) — более общий метод исследования дискретных отношений, чем базисы Гребнера. Однако в полиномиальном случае их можно сравнивать. В качестве примера приведем базисы Гребнера и канонические декомпозиции двух элементарных клеточных автоматов. Мы вычисляли базисы Гребнера в упорядочении по полной степени и обратной лексикографии. Тривиальные полиномы  $p^2 + p$ ,  $q^2 + q$ ,  $r^2 + r$  и  $s^2 + s$  исключены из описаний базисов Гребнера.

• **Автомат 30** известен своим хаотическим поведением. Он даже используется как генератор случайных чисел в системе *Mathematica*.

Отношение: 1001010101101010 или  $qr + s + r + q + p = 0$ .

**Каноническая декомпозиция.**

Собственные следствия:

Грань		
Строка битов	11011110	11011110
Полином	$qs + pq + q$	$rs + pr + r$ .

Главный фактор: 10111110111111 или  $qrs + pqr + rs + qs + pr + pq + s + p = 0$ .


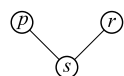

**Базис Гребнера:**  $\{qr + s + r + q + p, qs + pq + q, rs + pr + r\}$ . Таким образом, для автомата 30 множество полиномов канонической декомпозиции совпадает (с точностью до очевидных полиномиальных подстановок в главный фактор) с базисом Гребнера.

• **Автомат 110** является, подобно машине Тьюринга, *универсальным*, т. е. с его помощью можно реализовать любой вычислительный процесс, в частности, воспроизвести поведение любого другого клеточного автомата.

Отношение: 1100000100111110 или  $pqr + qr + s + r + q = 0$ .

**Каноническая декомпозиция.**

Собственные следствия:

Грань			
Строка битов	11011111	11011111	10010111
Полином	$pqs + qs + pq + q$	$prs + rs + pr + r$	$qrs + s + r + q$ .

Главный фактор: 111111111111110 или  $pqrs = 0$ .

**Базис Гребнера:**

$\{prs + rs + pr + r, qs + rs + r + q, qr + rs + s + q, pr + pq + ps\}$ .

В этом случае полиномы базиса Гребнера не совпадают с полиномами канонической декомпозиции. Система отношений, определяемых базисом Гребнера, имеет вид

$$\begin{aligned}
 R_1^{\{p,r,s\}} &= 11011111 = (prs + rs + pr + r = 0), \\
 R_2^{\{q,r,s\}} &= 10011111 = (qs + rs + r + q = 0), \\
 R_3^{\{q,r,s\}} &= 10110111 = (qr + rs + s + q = 0), \\
 R_4^{\{p,q,r,s\}} &= 1110101110111110 = (pr + pq + ps = 0).
 \end{aligned}$$

В целом можно упомянуть следующие различия между нашим подходом и методом базиса Гребнера.

- В отличие от базиса Гребнера базисное отношение (78), определяемое как пересечение условий, согласуется с натуральным для логики и теории множеств понятием совместности.

- В отличие от канонической декомпозиции базис Гребнера может выглядеть вне полиномиального контекста как набор случайных надмножеств.

- Тем не менее некоторая аналогия между базисами Гребнера и каноническими декомпозициями имеется. Фактически в наших вычислениях соответствующие наборы полиномов совпадали примерно в половине случаев.

- Каноническая декомпозиция более эффективна в проблемах, в которых полиномы могут иметь произвольные степени, — иллюстрацией этого являются приведенные выше вычисления с автоматом Конвея.

- Для задач с полиномами малых степеней и большим числом  $n$  переменных базис Гребнера превосходит каноническую декомпозицию — число полиномов ограниченной степени полиномиально зависит от  $n$ , а алгоритм канонической декомпозиции сканирует экспоненциально большое число  $q^n$  точек гиперкуба  $\Sigma^n$ .

## Приложение В ЛОКАЛЬНЫЕ КВАНТОВЫЕ МОДЕЛИ НА РЕГУЛЯРНЫХ ГРАФАХ

В стандартной квантовой механике амплитуда вдоль пути пропорциональна экспоненте от действия:  $A \propto \exp\left(\frac{i}{\hbar}S\right)$ . Ясно, что это выражение никогда не обращается в нуль. Поэтому в стандартной формулировке в принципе возможны квантовые переходы между любыми состояниями системы. Здесь мы рассмотрим более удобные для исследования модели с ограниченными множествами возможных переходов. А именно, в наших моделях [37, 39], определенных на регулярных графах, переходы будут возможны только в пределах окрестностей вершин графов.

**В.1. Общее определение квантовой модели на графе.** Определение локальной квантовой модели на  $k$ -валентном графе включает следующее.

1. *Пространство*  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$  представляет собой  $k$ -валентный граф. Вершины графа, смежные с данной вершиной  $x_i$ , мы будем обозначать символами  $x_{1,i}, \dots, x_{k,i}$ .

2. *Схема локальных переходов*  $E_i = \{e_{0,i}, e_{1,i}, \dots, e_{k,i}\}$  — это множество ребер, смежных с вершиной  $x_i$ , дополненное ребром  $e_{0,i} = (x_i \rightarrow x_i) \equiv (x_i \rightarrow x_{0,i})$ . Каждое ребро  $e_{m,i} = (x_i \rightarrow x_{m,i})$  символизирует переход за один шаг времени из вершины  $x_i$  в некоторую вершину окрестности или в саму  $x_i$ .

3. Мы предполагаем, что группа симметрий пространства  $F = \text{Aut}(X)$  действует транзитивно на множестве схем локальных переходов  $\{E_1, \dots, E_n\}$ .

4. Определим группу *локальных симметрий пространства* как подгруппу  $F$ , фиксирующую вершину  $x_i$ :  $F_{\text{loc}} = \text{Stab}_F(x_i) \leq F$ . Ввиду транзитивности действия  $F$  на множестве окрестностей группа  $F_{\text{loc}}$  не зависит от выбора вершины.

5.  $\Omega_i = \{\omega_{0,i}, \omega_{1,i}, \dots, \omega_{h,i}\}$  означает *множество орбит*  $F_{\text{loc}}$  на  $E_i$ . Ясно, что эти множества изоморфны для всех вершин  $x_i$ .

6. Мы предполагаем, что с каждой вершиной ассоциировано множество внутренних степеней свободы (локальных состояний)  $\Sigma$ , на котором действует группа внутренних симметрий  $\Gamma$ .

7. Мы будем называть *эволюционным правилом*  $R$  функцию на  $E_i$  со значением в некотором представлении  $\rho(\Gamma)$  группы внутренних симметрий. Это правило предписывает  $\rho(\Gamma)$ -значные веса переходам за один шаг по времени между вершинами окрестности  $x_i$ . Из соображений симметрии правило  $R$  должно быть функцией на орбитах из множества  $\Omega_i$ , т. е.  $R(e_{m,i}g) = R(e_{m,i})$ , если  $g \in F_{\text{loc}}$ .

Для иллюстрации этих конструкций рассмотрим локальную квантовую модель на графе фуллерена  $C_{60}$ . Этот граф изображен на рис. 1 и 8. В данном случае группой симметрий пространства  $X = \{x_1, \dots, x_{60}\}$  является  $F = \text{Aut}(X) = A_5 \times \mathbb{Z}_2$ . Окрестность вершины графа  $x_i$  устроена следующим образом:

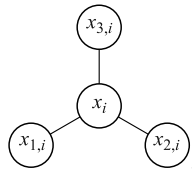


Схема локальных переходов имеет вид  $E_i = \{e_{0,i}, e_{1,i}, e_{2,i}, e_{3,i}\}$ , где

$$\begin{aligned} e_{0,i} &= (x_i \rightarrow x_i), \\ e_{1,i} &= (x_i \rightarrow x_{1,i}), \\ e_{2,i} &= (x_i \rightarrow x_{2,i}), \\ e_{3,i} &= (x_i \rightarrow x_{3,i}). \end{aligned}$$

Заметим, что ребра окрестности не равнозначны: ребра  $e_{1,i}$  и  $e_{2,i}$  принадлежат пятиугольнику, примыкающему к вершине  $x_i$ , а ребро  $e_{3,i}$  разделяет два шестиугольника; или, с точки зрения химии, ребро  $e_{3,i}$  соответствует двойной связи в молекуле углерода  $C_{60}$ , а остальные ребра представляют простые связи. Поэтому группа локальных симметрий пространства, т. е. стабилизатор

вершины  $x_i$ , не является максимальной для подобных окрестностей группой  $D_6$ , а имеет вид  $F_{\text{loc}} = \text{Stab}_F(x_i) = \mathbb{Z}_2$ . Множество орбит  $F_{\text{loc}}$  на  $E_i$  состоит из трех элементов (подмножеств):

$$\Omega_i = \{\omega_{0,i} = \{e_{0,i}\}, \omega_{1,i} = \{e_{1,i}, e_{2,i}\}, \omega_{2,i} = \{e_{3,i}\}\},$$

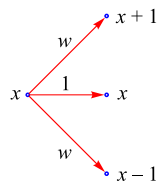
т. е. стабилизатор переставляет ребра  $(x_i \rightarrow x_{1,i})$  и  $(x_i \rightarrow x_{2,i})$ , но не двигает  $(x_i \rightarrow x_i)$  и  $(x_i \rightarrow x_{3,i})$ .

С учетом этих симметрий правило эволюции принимает вид

$$\begin{aligned} R(x_i \rightarrow x_i) &= \rho(\alpha_0), \\ R(x_i \rightarrow x_{1,i}) &= R(x_i \rightarrow x_{2,i}) = \rho(\alpha_1), \\ R(x_i \rightarrow x_{3,i}) &= \rho(\alpha_2), \end{aligned}$$

где  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \in \Gamma$ .

**В.2. Иллюстрация: дискретная модель квантовой свободной частицы.** Рассмотрим квантование свободной частицы, движущейся в одном измерении. Такая частица описывается лагранжианом  $L = \frac{m\dot{x}^2}{2}$ . Предполагая, что имеются квантовые переходы только в ближайшие точки дискретизированного пространства, мы приходим к следующему правилу переходов за один шаг времени:



$$\begin{aligned} \exp\left[\frac{i m \{(x+1) - x\}^2}{\hbar}\right] &= \exp\left(i \frac{m}{2\hbar}\right), \\ \exp\left[\frac{i m (x - x)^2}{\hbar}\right] &= 1, \\ \exp\left[\frac{i m \{(x-1) - x\}^2}{\hbar}\right] &= \exp\left(i \frac{m}{2\hbar}\right), \end{aligned}$$

т. е. правило эволюции  $R$  представляет собой функцию со значениями в унитарном представлении окружности  $U(1)$ :

$$\begin{aligned} R(x \rightarrow x) &= 1 \in U(1), \\ R(x \rightarrow x-1) &= R(x \rightarrow x+1) = w = \exp\left(i \frac{m}{2\hbar}\right) \in U(1). \end{aligned}$$

Далее предположим, что  $w$  — элемент некоторого одномерного представления конечной группы  $\Gamma$ . Одномерность представления предполагает, что без потери общности можно считать группу циклической  $\Gamma = \mathbb{Z}_M$ , а  $w$  — примитивным корнем из единицы  $M$ -й степени. Реорганизуя *мультиномиальные коэффициенты* — *триномиальные* в данном конкретном случае, — нетрудно



написать сумму амплитуд по всем возможным путям между пространственно-временными точками  $(0, 0)$  и  $(x, t)$ :

$$A_x^t(w) = \sum_{\tau=0}^t \frac{\tau!}{\left(\frac{\tau-x}{2}\right)! \left(\frac{\tau+x}{2}\right)!} \times \frac{t!}{\tau!(t-\tau)!} w^\tau.$$

Заметим, что значение  $x$  должно лежать в пределах  $\pm t$ :  $x \in [-t, t]$ .

Можно усложнить модель, добавив, например, калибровочные связности, действующие вдоль путей, вводя ограничения на возможные пути, как, например, экран в «двухщелевом эксперименте» и т. п. В любом случае амплитуда  $A(w)$  будет полиномиальной функцией от  $w$ . Для того чтобы воспроизвести, скажем, деструктивную интерференцию — одно из ярких проявлений квантового поведения, — необходимо решить систему полиномиальных уравнений:  $A(w) = \Phi_M(w) = 0$ , где  $\Phi_M(w)$  —  $M$ -й циклотомический полином. В данной модели наименьшей группой, при которой появляется деструктивная интерференция, является  $\mathbb{Z}_4$ .

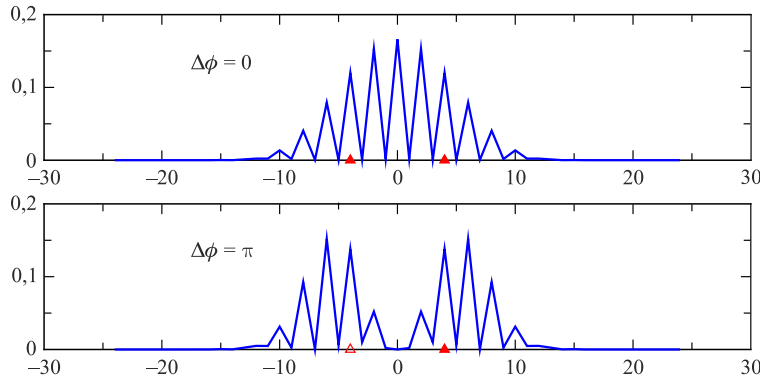


Рис. 11. Группа  $\mathbb{Z}_4$ . Интерференция от двух источников в позициях  $-4$  и  $4$ . Число шагов по времени  $T = 20$ .  $\Delta\phi = \phi_4 - \phi_{-4}$  — разности фаз между источниками

На рис. 11 показаны интерференционные картины — нормализованные квадраты модулей амплитуд («вероятности») — от двух источников, помещенных в точках  $x = -4$  и  $x = 4$  для 20 шагов по времени. Верхний и нижний графики показывают интерференции в случаях, когда фазы источников одинаковы ( $\Delta\phi = 0$ ) и противоположны ( $\Delta\phi = \pi$ ) соответственно.

**Приложение Г**  
**ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ КОНЕЧНЫХ ГРУПП**

Любое линейное представление конечной группы эквивалентно унитарному, поскольку из произвольного скалярного произведения с помощью «усреднения по группе» можно построить инвариантное. Например, в качестве исходного скалярного произведения в  $K$ -мерном гильбертовом пространстве  $\mathcal{H}$  можно взять стандартное

$$(\phi | \psi) \equiv \sum_{i=1}^K \bar{\phi}^i \psi^i. \quad (93)$$

Усреднив (93) по группе, мы приходим к *инвариантному скалярному произведению*

$$\langle \phi | \psi \rangle \equiv \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (U(g) \phi | U(g) \psi),$$

обеспечивающему унитарность представления  $U$  группы  $G$  в пространстве  $\mathcal{H}$ .

Важным преобразованием элементов группы — аналогом замены системы координат в физике — является сопряжение  $a^{-1}ga \rightarrow g'$ ,  $g, g' \in G$ ,  $a \in S_G$ . Сопряжением с помощью элемента самой группы, т.е., если  $a \in G$ , называется *внутренним автоморфизмом*. Классы эквивалентности относительно внутренних автоморфизмов называются *классами сопряженных элементов*. Отправной точкой изучения представлений группы является ее разложение на классы сопряженных элементов

$$G = K_1 \sqcup K_2 \sqcup \dots \sqcup K_m.$$

Групповое умножение индуцирует *умножение на классах*. Произведение классов  $K_i$  и  $K_j$  представляет собой разложенное на классы *мультимножество* всех возможных произведений  $ab$ ,  $a \in K_i$ ,  $b \in K_j$ . Очевидно, что это произведение коммутативно, поскольку  $ab$  и  $ba$  принадлежат одному и тому же классу:  $ab \sim a^{-1}(ab)a = ba$ . Таким образом, мы имеем следующую таблицу умножения классов:

$$K_i K_j = K_j K_i = \sum_{k=1}^m c_{ijk} K_k.$$

*Натуральные целые*  $c_{ijk}$  — кратности вхождения классов в мультимножества — называются *коэффициентами классов*. Полученная таким образом *алгебра классов* содержит всю информацию, необходимую для построения представлений группы.

Приведем краткий список основных свойств линейных представлений конечных групп.

1. Любое неприводимое представление содержится в регулярном. Более конкретно, существует матрица преобразования  $T$ , одновременно приводящая все матрицы регулярного представления к виду

$$T^{-1}P(g)T = \begin{pmatrix} D_1(g) & & & & \\ & d_2 \begin{pmatrix} D_2(g) & & \\ & \ddots & \\ & & D_2(g) \end{pmatrix} & & \\ & & \ddots & & \\ & & & d_m \begin{pmatrix} D_m(g) & & \\ & \ddots & \\ & & D_m(g) \end{pmatrix} & \\ & & & & \end{pmatrix}, \quad (94)$$

и любое неприводимое представление является одним из  $D_j$ . Число неэквивалентных неприводимых представлений равно числу классов сопряженных элементов. Число  $d_j$  — это одновременно размерность неприводимой компоненты  $D_j$  и кратность ее вхождения в регулярное представление. Из (94) видно, что для размерностей неприводимых представлений справедливо равенство  $d_1^2 + d_2^2 + \dots + d_m^2 = |G| = M$ . Кроме того, размерности неприводимых представлений делят порядок группы:  $d_j \mid M$ .

2. Любое неприводимое представление  $D_j$  определяется однозначно своим *характером*  $\chi_j$ , т. е. набором следов матриц представления:  $\chi_j(g) = \text{Tr } D_j(g)$ . Этот набор является фактически функцией на классах сопряженных элементов, поскольку в силу стандартных свойств следов матриц  $\chi_j(g) = \chi_j(a^{-1}ga)$ . Очевидно, что  $\chi_j(\mathbf{1}) = d_j$ .

3. Компактным средством перечисления всех неприводимых представлений является *таблица характеров*. Столбцы этой таблицы пронумерованы классами сопряженных элементов, а строки содержат значения характеров неэквивалентных представлений. Согласно традиции, 1-й столбец соответствует

Таблица 5. Таблица характеров

	$K_1$	$K_2$	$\dots$	$K_m$
$\chi_1$	1	1	$\dots$	1
$\chi_2$	$\chi_2(K_1) = d_2$	$\chi_2(K_2)$	$\dots$	$\chi_2(K_m)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$
$\chi_m$	$\chi_m(K_1) = d_m$	$\chi_m(K_2)$	$\dots$	$\chi_m(K_m)$

классу групповой единицы, а 1-я строка содержит *тривиальное* представление. Как строки, так и столбцы попарно *ортогональны*. Важная информация о группе и ее представлениях может быть считана непосредственно с таблицы характеров. Например, неприводимое представление является *точным* тогда и только тогда, когда значение характера в 1-м столбце (т.е. размерность) не повторяется более нигде в соответствующей строке. Таблицы характеров почти полностью определяют группы. Они не различают лишь изоклинные группы [6]. Группы называются *изоклинными*, если их фактор-группы по их центрам изоморфны. Изоклинные группы имеют идентичные таблицы характеров, поскольку характеры «игнорируют» центры. Примером изоклинных групп являются 8-элементные диэдральная  $D_8 = \{\text{симметрии квадрата}\}$  и кватернионная  $Q_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$  группы. Здесь  $i, j, k$  — кватернионные мнимые единицы.

**Приложение Д**  
**КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ СИММЕТРИЙ**  
**И ФЕНОМЕНОЛОГИЯ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ**

В настоящее время все экспериментальные данные [54], касающиеся фундаментальных частиц, согласуются со Стандартной моделью, которая представляет собой калибровочную теорию с группой внутренних (калибровочных) симметрий  $\Gamma$ , являющейся прямым произведением групп  $U(1)$ ,  $SU(2)$  и  $SU(3)$ . В контексте теории Большого объединения предполагается, что  $\Gamma$  — подгруппа некоторой большей (предположительно, простой) группы. Относительно пространственно-временных симметрий элементарные частицы подразделяются на два класса: *бозоны*, отвечающие за физические силы (грубо говоря, они соответствуют элементам калибровочной группы), и *фермионы*, интерпретируемые как частицы материи. Фермионы Стандартной модели составляют три поколения *кварков* и *лептонов*, представленных в табл. 6. Частицы различных поколений отличаются друг от друга только массами и квантовым свойством, называемым *ароматом*. Физические процессы, изменяющие ароматы, такие как слабые распады кварков или осцилляции нейтрино,

Таблица 6. Фермионы Стандартной модели. Античастицы для краткости опущены

Поколения	1	2	3
Верхние кварки	$u$	$c$	$t$
Нижние кварки	$d$	$s$	$b$
Заряженные лептоны	$e^-$	$\mu^-$	$\tau^-$
Нейтрино	$\nu_e$	$\nu_\mu$	$\nu_\tau$

описываются унитарными *матрицами смешивания* размера  $3 \times 3$ . Экспериментальные данные позволяют вычислить абсолютные величины элементов этих матриц.

В случае кварков («в *кварковом секторе*»), матрицей перехода между «верхними» и «нижними» кварками является так называемая *матрица Кабиббо–Кобаяши–Маскавы* (СКМ)

$$V_{\text{СКМ}} = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix},$$

где  $|V_{\alpha\beta}|^2$  представляет собой вероятность того, что кварк (имеющий аромат)  $\beta$  при слабом процессе переходит в кварк  $\alpha$ . Полученные к настоящему времени экспериментальные данные дают следующие величины для модулей матричных элементов:

$$\begin{pmatrix} |V_{ud}| & |V_{us}| & |V_{ub}| \\ |V_{cd}| & |V_{cs}| & |V_{cb}| \\ |V_{td}| & |V_{ts}| & |V_{tb}| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,974 & 0,225 & 0,004 \\ 0,225 & 0,974 & 0,041 \\ 0,009 & 0,040 & 0,999 \end{pmatrix}.$$

Мы использовали округление до трех десятичных цифр — более точные величины можно найти в [54].

В «*лептонном секторе*» слабые процессы описываются матрицей смешивания *Понтекорво–Маки–Накагавы–Сакаты* (PMNS)

$$U_{\text{PMNS}} = \begin{pmatrix} U_{e1} & U_{e2} & U_{e3} \\ U_{\mu1} & U_{\mu2} & U_{\mu3} \\ U_{\tau1} & U_{\tau2} & U_{\tau3} \end{pmatrix}.$$

Здесь индексы  $e, \mu, \tau$  соответствуют ароматам нейтрино. Это означает, что в слабых процессах нейтрино  $\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau$  возникают совместно с  $e^+, \mu^+, \tau^+$  (или порождают  $e^-, \mu^-, \tau^-$ ) соответственно. Индексы 1, 2, 3 соответствуют собственным значениям оператора массы, т. е. символы  $\nu_1, \nu_2, \nu_3$  означают нейтрино, имеющие определенные массы  $m_1, m_2, m_3$ . Многочисленные наблюдения солнечных и атмосферных нейтрино и эксперименты с нейтрино, получаемыми с помощью реакторов и ускорителей, выявляют дискретные (более того, конечные) симметрии, которые невозможно вывести из Стандартной модели. Феноменологическая картина с высокой точностью выглядит следующим образом [62]:

а) ароматы  $\nu_\mu$  и  $\nu_\tau$  распределены с равными весами по всем трем массам  $\nu_1, \nu_2, \nu_3$  (это называется «*би-максимальным смешиванием*»):  $|U_{\mu i}|^2 = |U_{\tau i}|^2$ ,  $i = 1, 2, 3$ ;

б) все три аромата представлены равномерно в собственном значении  $\nu_2$  оператора массы («три-максимальное смешивание»):  $|U_{e2}|^2 = |U_{\mu 2}|^2 = |U_{\tau 2}|^2$ ;

в)  $\nu_e$  отсутствует в  $\nu_3$ :  $|U_{\mu 3}|^2 = 0$ .

Эти соотношения совместно с условиями нормализации вероятностей приводят к следующим значениям квадратов модулей матричных элементов:

$$(|U_{li}|^2) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \quad (95)$$

Частный вид унитарной матрицы, удовлетворяющей данным (95), был предложен Харрисоном, Перкинсом и Скоттом в [13]:

$$U_{ТВ} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Эта так называемая *трибимаксимальная* (ТВ) матрица смешивания совпадает — с точностью до тривиальной перестановки двух столбцов, соответствующей переименованию  $\nu_1 \leftrightarrow \nu_2$  двух массовых состояний — с матрицей преобразования (52), разлагающей 3-мерное перестановочное представление группы  $S_3$  на неприводимые компоненты. Это означает, что мы можем отождествить базис ароматов с базисом перестановок трех элементов, а массовый базис с базисом, в котором перестановочное представление разложено на неприводимые компоненты. В [14] Харрисон и Скотт подробно исследуют связь оператора массы нейтрино с таблицей характеров и алгеброй классов группы  $S_3$ .

В настоящее время активно разрабатываются и изучаются модели, в основе которых лежат конечные группы симметрий, связанных с ароматами (обзоры этой деятельности представлены, например, в работах [19,49]). При конструировании этих моделей наиболее популярны следующие группы:

- $T = A_4$  — группа (симметрий) тетраэдра;
- $T'$  — двойная накрывающая группы  $A_4$ ;
- $O = S_4$  — группа октаэдра;
- $I = A_5$  — группа икосаэдра;

- $D_N$  — диэдральная группа ( $N$  — четное);
- $Q_N$  — кватернионная группа (4 делит  $N$ );
- $\Sigma(2N^2)$  — группы этой серии имеют структуру  $(\mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_N) \rtimes \mathbb{Z}_2$ ;
- $\Delta(3N^2)$  — структура  $(\mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_N) \rtimes \mathbb{Z}_3$ ;
- $\Sigma(3N^3)$  — структура  $(\mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_N) \rtimes \mathbb{Z}_3$ ;
- $\Delta(6N^2)$  — структура  $(\mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_N) \rtimes S_3$ .

В кварковом секторе наблюдения не дают такой отчетливой картины, как в случае лептонов. Имеется ряд работ, посвященных поиску конечных симметрий в кварковом секторе и симметрий, общих для кварков и лептонов. Например, в [4] группа  $D_{14}$  использовалась для объяснения величины угла Кабиббо (один из параметров матрицы смешивания СКМ), однако без какой-либо связи с лептонными симметриями. В целом естественные попытки найти дискретные симметрии, объединяющие лептоны и кварки, до сих пор остаются не слишком успешными. Тем не менее имеются некоторые обнадеживающие наблюдения: например, *кварк-лептонная комплементарность* — экспериментальный факт приближенного равенства  $\pi/4$  суммы углов смешивания для кварков и лептонов.

Происхождение конечных симметрий между фундаментальными частицами в настоящее время не ясно. Имеются различные попытки объяснения, иногда несколько переусложненные и искусственные. Например, эти симметрии интерпретируются как симметрии многообразий, возникающих в результате компактификации дополнительных измерений в теориях с пространствами высоких размерностей [1]. С нашей точки зрения, идея того, что симметрии наиболее фундаментального уровня являются конечными сами по себе, выглядит более привлекательной. При таком подходе унитарные группы, используемые в физических теориях, представляют собой своего рода «резервуары», в которых собраны «на всякий случай» все возможные конечные группы, имеющие точные представления соответствующей размерности. Например, группа  $SU(n)$  в качестве подгрупп содержит все конечные группы, имеющие точные  $n$ -мерные представления с определителем, равным единице. Более того, ввиду избыточности поля  $\mathbb{C}$  группа  $SU(n)$  не является минимальной группой, содержащей все конечные группы с указанными свойствами.

Скорее всего, такие небольшие группы, как  $S_3, A_4$  и т. п., представляют собой лишь следы больших комбинаций (расширений, прямых и полупрямых произведений) более фундаментальных конечных симметрий. Можно ожидать, что естественный масштаб, на котором такие фундаментальные симметрии проявляются, это масштаб Большого объединения. Можно попытаться для направленного поиска фундаментальных симметрий воспользоваться симметриями Стандартной модели. Например, конечные подгруппы группы  $SU(3)$ , имеющие точные 3-мерные представления, полностью описаны: их список содержит несколько бесконечных серий и несколько от-

дельных групп. Однако такая попытка вряд ли будет достаточно успешной, поскольку Стандартная модель представляет собой компактную форму описания феноменологии, полученной при масштабах энергии около  $10^4$  ГэВ, тогда как масштаб Большого объединения равен примерно  $10^{16}$  ГэВ, что довольно близко к планковскому масштабу ( $10^{19}$  ГэВ) и далеко выходит за пределы экспериментальных возможностей. По-видимому, единственным практическим подходом является конструирование моделей и сравнение следствий из них с доступными экспериментальными данными. В такого рода исследованиях могут оказаться полезными методы вычислительной теории групп [15].

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Altarelli G., Feruglio F.* Discrete Flavor Symmetries and Models of Neutrino Mixing // *Rev. Mod. Phys.* 2010. V. 82(3). P. 2701–2729.
2. *Athanasiu G. G., Floratos E. G., Nicolis S.* Holomorphic Quantization on the Torus and Finite Quantum Mechanics // *J. Phys. A: Math. Gen.* 1996. V. 29, No. 21. P. 6737–6745.
3. *Baez J. C.* Spin Foam Models // *Class. Quant. Grav.* 1998. V. 15. P. 1827–1858.
4. *Blum A., Hagedorn C.* The Cabibbo Angle in a Supersymmetric D14 Model // *Nucl. Phys. B.* 2009. V. 821. P. 327–353.
5. *Cameron P. J.* Permutation Groups. Cambridge Univ. Press, 1999.
6. *Conway J. H. et al.* Atlas of Finite Groups. Oxford: Clarendon Press, 1985.
7. *Dixon J. D., Mortimer B.* Permutation Groups. Springer, 1996.
8. *Фейнман П., Хибс А.* Квантовая механика и интегралы по траекториям. М.: Мир, 1968.
9. *Floratos E. G., Leontaris G. K.* Uncertainty Relation and Non-Dispersive States in Finite Quantum Mechanics // *Phys. Lett. B.* 1997. V. 412, No. 1–2. P. 35–41.
10. *Floratos E. G., Nicolis S.* Non-Commutative Solitons in Finite Quantum Mechanics // *Nucl. Phys. B.* 2003. V. 119. P. 947–949.
11. GAP — Groups, Algorithms, Programming — A System for Computational Discrete Algebra. <http://www.gap-system.org/>.
12. *Холл М.* Теория групп. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.
13. *Harrison P. F., Perkins D. H., Scott W. G.* Tri-Bimaximal Mixing and the Neutrino Oscillation Data // *Phys. Lett. B.* 2002. V. 530. P. 167; arXiv:hep-ph/0202074.
14. *Harrison P. F., Scott W. G.* Permutation Symmetry, Tri-Bimaximal Neutrino Mixing and the S3 Group Characters // *Phys. Lett. B.* 2003. V. 557. P. 76; arXiv:hep-ph/0302025.
15. *Holt D. F., Eick B., O'Brien E. A.* Handbook of Computational Group Theory. Boca Raton; London; N. Y.; Washington, D.C.: Chapman & Hall/CRC, 2005.



16. 't Hooft G. Dimensional Reduction in Quantum Gravity. Utrecht Preprint THU-93/26. 1993. gr-qc/9310006.
17. 't Hooft G. Quantum Gravity as a Dissipative Deterministic System // *Class. Quant. Grav.* 1999. V. 16. P. 3263;  
Fundamental Interactions: From Symmetries to Black Holes. Conference Held on the Occasion of the «Eméritat» of François Englert, March 24–27, 1999 / Ed. by J.-M. Frère et al. Univ. Libre de Bruxelles, Belgium, 1999. P. 221–240.
18. 't Hooft G. The Mathematical Basis for Deterministic Quantum Mechanics. ITP-UU-06/14, SPIN-06/12; quant-ph/0604008. 2006. P. 1–17.
19. Ishimori H. et al. Non-Abelian Discrete Symmetries in Particle Physics // *Prog. Theor. Phys. Suppl.* 2010. V. 183. P. 1–173; arXiv:1003.3552.
20. Juffmann Th. et al. Real-Time Single-Molecule Imaging of Quantum Interference // *Nature Nanotechnol.* 2012; doi:10.1038/nnano.2012.34.
21. Кириллов А. А. Элементы теории представлений. М.: Наука, 1972.
22. Klein F. Vorlesungen über das Ikosaeder. Leipzig: Teubner, 1884;  
Клейн Ф. Лекции об икосаэдре и решении уравнений пятой степени. М.: Наука, 1989.
23. Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. Т. I. М.: Наука, 1981.
24. Korniyak V. V. On Compatibility of Discrete Relations // *Lect. Notes Comp. Sci.* 2005. V. 3718. P. 272–284;  
<http://www.springerlink.com/content/4maevdt65e0u5y79/>.
25. Korniyak V. V. Discrete Relations on Abstract Simplicial Complexes // *Prog. Comp. Soft.* 2006. V. 32, No. 2. P. 84–89;  
<http://www.springerlink.com/content/653689132m608294/>.
26. Korniyak V. V. Cellular Automata with Symmetric Local Rules // *Lect. Notes Comp. Sci.* 2006. V. 4194. P. 240–250;  
<http://www.springerlink.com/content/y145uk08t1x21415/>.
27. Корняк В. В. Симметрии дискретных динамических систем // *Теоретическая физика.* 2007. Т. 8. С. 158–169.
28. Korniyak V. V. Discrete Symmetries and Dynamics of Cellular Automata // *Computer Algebra Systems in Teaching and Research.* Siedlce: Wydawnictwo Akademii Podlaskiej, 2007. P. 192–201.
29. Korniyak V. V. Symmetry Analysis of Discrete Dynamical Systems // *Computer Algebra and Differential Equations. Acta Academiae Aboensis, Ser. B.* 2007. V. 67, No. 2. P. 154–166.
30. Korniyak V. V. Symmetric Cellular Automata // *Prog. Comp. Soft.* 2007. V. 33, No. 2. P. 87–93; <http://www.springerlink.com/content/k7554t4u7075v2u3/>.
31. Korniyak V. V. Symmetries and Dynamics of Discrete Systems // *Lect. Notes Comp. Sci.* 2007. V. 4770. P. 236–251;  
<http://www.springerlink.com/content/yn1qu5h4ph465382/>.

32. *Корняк В. В.* Моделирование наноструктур дискретными динамическими системами // *Ядерная физика и нанотехнологии: Ядерно-физические аспекты формирования, изучения и применения наноструктур* / Под общ. ред. А. Н. Сисакяна. Дубна: ОИЯИ, 2008. С. 320–338.
33. *Kornyak V. V.* Gauge Invariance in Discrete Models // *Computer Algebra Systems in Teaching and Research*. Siedlce: Wydawnictwo Akademii Podlaskiej, 2009. P. 39–48.
34. *Kornyak V. V.* Discrete Dynamical Systems with Symmetries: Computer Analysis // *Prog. Comp. Soft.* 2008. V. 34, No. 2. P. 84–94; <http://www.springerlink.com/content/4g275044677126v3/>.
35. *Kornyak V. V.* Symmetries, Gauge Invariance and Quantization in Discrete Models // *Num. Meth. Prog. Adv. Comp.* 2009. V. 10. P. 415–421; <http://num-meth.srcc.msu.ru>.
36. *Kornyak V. V.* Discrete Symmetry Analysis of Lattice Systems // *Part. Nucl., Lett.* 2009. V. 6, No. 7. P. 554–558; <http://www.springerlink.com/content/11m3t23476v23v4u/>.
37. *Kornyak V. V.* Discrete Dynamics: Gauge Invariance and Quantization // *Lect. Notes Comp. Sci.* 2009. V. 5743. P. 180–194.
38. *Kornyak V. V.* Computer Algebra Study of Structural and Symmetry Properties of Discrete Dynamical Systems // *Modern Optics and Photonics*. World Sci., 2010. P. 197–221.
39. *Kornyak V. V.* Quantization in Discrete Dynamical Systems // *J. Math. Sci.* 2010. V. 168, No. 3. P. 390–397; <http://www.springerlink.com/content/t001t72u8h079116/>.
40. *Kornyak V. V.* Constructive Study of Quantum Behavior // *Mathematical Modeling in Physics, Civil Engineering, Economics and Finance*. Siedlce: Wydawnictwo Collegium Mazovia Innowacyjna Szkoła Wyższa, 2011. P. 100–114.
41. *Kornyak V. V.* Structural and Symmetry Analysis of Discrete Dynamical Systems // *Cellular Automata*. N. Y.: Nova Sci. Publ., Inc., 2011. P. 119–163.
42. *Корняк В. В.* Конечные квантовые модели: конструктивный подход к описанию квантового поведения // *Зап. науч. сем. ПОМИ РАН*. 2011. Т. 387. С. 122–144.
43. *Kornyak V. V.* Computation in Finite Groups and Quantum Physics // *Lect. Notes Comp. Sci.* 2011. V. 6885. P. 263–279; <http://www.springerlink.com/content/u8mr05u2081157u1/>.
44. *Kornyak V. V.* Finite Quantum Models: Constructive Approach to Description of Quantum Behavior // *J. Math. Sci.* 2011. V. 179, No. 6. P. 702–713; <http://www.springerlink.com/content/y5812061x5222759/>.
45. *Kornyak V. V.* Mathematical Modeling of Finite Quantum Systems // *Lect. Notes Comp. Sci.* 2012. V. 7125. P. 79–93; <http://arxiv.org/abs/1107.5675>.
46. *Kornyak V. V.* Permutation Interpretation of Quantum Mechanics // *J. Phys.: Conf. Ser.* 2012. V. 343, No. 1. P. 1–20; <http://iopscience.iop.org/1742-6596/343/1/012059/>.
47. *Лидл Р., Нидеррайтер Г.* Конечные поля: В 2 т. М.: Мир, 1988.

48. *McKay B. D.* Practical Graph Isomorphism // *Congressus Numerantium*. 1981. V. 30. P. 45–87; <http://cs.anu.edu.au/bdm/nauty/PGI>.
49. *Ludl P. O.* Systematic Analysis of Finite Family Symmetry Groups and Their Application to the Lepton Sector. 2009; arXiv:0907.5587.
50. *Magnus W.* Residually Finite Groups // *Bull. Am. Math. Soc.* 1969. V. 75, No. 2. P. 305–316.
51. *Мальцев А. И.* Об изоморфном представлении бесконечных групп матрицами // *Матем. сб.* 1940. Т. 8(50), № 3. С. 405–422.
52. *Markopoulou F.* The Internal Description of a Causal Set: What the Universe Looks Like from the Inside? // *Commun. Math. Phys.* 2000. V. 211. P. 559–583.
53. *Nairz O., Arndt M., Zeilinger A.* Quantum Interference Experiments with Large Molecules // *Am. J. Phys.* 2003. V. 71, No. 4. P. 319–325.
54. *Nakamura K. et al. (Particle Data Group).* The Review of Particle Physics // *J. Phys. G.* 2010. V. 37. 075021. P. 1–1422.
55. *Nielsen M. A., Chuang I. L.* Quantum Computation and Quantum Information. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2000.
56. *Oeckl R.* Discrete Gauge Theory (From Lattices to TQFT). London: Imperial College Press, 2005.
57. *Poincaré H.* La valeur de la Science. Paris: Flammarion, 1904;  
*Пуанкаре А.* О науке. Пер. с фр. / Под ред. Л. С. Понтрягина. М.: Наука, 1990. 736 с.
58. *Прасолов В. В., Сосинский А. Б.* Узлы, зацепления, косы и трехмерные многообразия. М.: МЦНМО, 1997.
59. *Rotman J. J.* An Introduction to the Theory of Groups. Springer, 1995.
60. *Seiberg N.* Emergent Spacetime. 2006. 23 p.; arXiv:hep-th/0601234v1.
61. *Шафаревич И. Р.* Основные понятия алгебры. Ижевск: РХД, 2001.
62. *Smirnov A. Yu.* Discrete Symmetries and Models of Flavor Mixing. 2011; arXiv:1103.3461.
63. *Спеньер Э.* Алгебраическая топология. М.: Мир, 1971.
64. *Зуланке Р., Винтген П.* Дифференциальная геометрия и расслоения. М.: Мир, 1975.
65. *Вейль Г.* Теория групп и квантовая механика. М.: Наука, 1986.
66. *Weyl H.* *Ars Combinatoria*. Appendix B // *Philosophy of Mathematics and Natural Science*. Princeton Univ. Press, 1949 (рус. пер. в сб. Прикладная комбинаторная математика. М.: Мир, 1968).
67. *Wielandt H.* Finite Permutation Groups. N. Y.; London: Acad. Press, 1964.
68. *Wolfram S.* A New Kind of Science. Wolfram Media, Inc., 2002.
69. The Wolfram Atlas. <http://atlas.wolfram.com/01/01/>.