

ДИНАМИКА ПУЧКА В СИНХРОТРОНАХ
С ЦИФРОВЫМИ ШИРОКОПОЛОСНЫМИ
СИСТЕМАМИ ПОДАВЛЕНИЯ КОГЕРЕНТНЫХ
ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ
ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ

В. М. Жабицкий

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

ВВЕДЕНИЕ	806
ЦИФРОВЫЕ ШИРОКОПОЛОСНЫЕ СИСТЕМЫ ПОДАВЛЕНИЯ КОГЕРЕНТНЫХ ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ	810
Структурная схема системы подавления	810
Дискретная модель системы подавления колебаний сгустка	813
Z -преобразование как метод решения	819
Идеальная система подавления	824
Реализации цепей обратной связи	825
Влияние взаимодействия сгустков	828
Допуск на отклонение рабочей точки	830
Отклик пучка на дельта-импульс	834
Отклик пучка на гармоническое воздействие	837
Особенность решений характеристического уравнения вблизи полуцелого числа бетатронных колебаний Q_0	841
МНОГОКАНАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ПОДАВЛЕНИЯ КОГЕРЕНТНЫХ ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ	843
Дискретная модель многоканальной системы	844
Быстрая система подавления	846
СГЛАЖЕННОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ДЛЯ ОПИСАНИЯ ДИНАМИКИ ПУЧКА В СИНХРОТРОНЕ С СИСТЕМОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ	850
Основные уравнения	851
Методы решения	852

Системы обратной связи с цифровым фильтром	854
СИСТЕМЫ ПОДАВЛЕНИЯ КОГЕРЕНТНЫХ ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ С НЕЛИНЕЙНОЙ ПЕРЕДАТОЧНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ ЦЕПИ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ	856
Дискретная модель системы подавления с нелинейной передаточной характеристикой цепи обратной связи	857
Примеры систем подавления с нелинейной передаточной характеристикой цепи обратной связи	860
О РОСТЕ ЭМИТТАНСА ПУЧКА В СИНХРОТРОНЕ ВСЛЕДСТВИЕ ОШИБОК ИНЖЕКЦИИ ПРИ НАЛИЧИИ СИСТЕМЫ ПОДАВЛЕНИЯ	863
Физико-математическая модель	863
Система подавления с линейной передаточной характеристикой	865
Система подавления с нелинейной передаточной характеристикой	867
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	869
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	869

ДИНАМИКА ПУЧКА В СИНХРОТРОНАХ С ЦИФРОВЫМИ ШИРОКОПОЛОСНЫМИ СИСТЕМАМИ ПОДАВЛЕНИЯ КОГЕРЕНТНЫХ ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ

В. М. Жабицкий

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Обзор посвящен современному состоянию дел в области исследований динамики пучка в синхротронах с цифровыми широкополосными системами подавления когерентных поперечных колебаний заряженных частиц. Особое внимание уделено количественным и качественным закономерностям для декрементов и сдвигов частот затухающих когерентных колебаний сгустков в синхротроне при наличии цифровой обработки детектируемых сигналов в цепи обратной связи системы подавления. Теоретические предсказания сопоставлены с экспериментальными данными, полученными на Большом адронном коллайдере (ЛHC).

A review of modern studies of beam dynamics in synchrotrons with digital wideband transverse feedback systems is presented. Features of decisions for decrements and frequency shifts of the coherent betatron oscillation decay caused by a digital signal processing in a feedback chain are revealed. Theoretical predictions are compared with the experimental data obtained at the Large Hadron Collider.

PACS: 29.20.dk; 29.27.-a

ВВЕДЕНИЕ

Повышение интенсивности и уменьшение фазовых объемов накопленных и ускоренных пучков является актуальной задачей для физики и техники современных кольцевых ускорителей заряженных частиц. Одна из ключевых проблем, решаемых в этом контексте (особенно для протонных (ионных) синхротронов), — это быстрое подавление когерентных колебаний, возникающих из-за ошибок инжекции, и противодействие когерентным (коллективным) неустойчивостям пучка. Основная нагрузка при решении указанной проблемы возлагается на технологические системы отрицательной обратной связи по пучку, в которых корректирующее воздействие на сгусток пропорционально когерентному смещению этого же сгустка в предшествующие моменты времени [1, 2].

В первых экспериментальных реализациях систем подавления (СП) поперечных когерентных колебаний пучка как целого (см., например, [3, 4]) активное воздействие на пучок осуществлялось с помощью демпфирующего дефлектора, на который подавался аналоговый сигнал с датчика положения, пропорциональный смещению центра тяжести пучка в предшествующие моменты времени. При синхронизации отсчетов для измеренных отклонений и корректирующих импульсных воздействий для одних и тех же частиц обеспечивалось подавление их когерентных поперечных колебаний при условии, что между датчиком положения и демпфирующим дефлектором укладывается нечетное число четвертей длин волн бетатронных колебаний, т. е. дробная часть набега фазы бетатронных колебаний от датчика до дефлектора равна $\pm 90^\circ$.

В последующие годы на многих синхротронах были введены в эксплуатацию аналоговые СП, которые позволяли подавлять не только когерентные поперечные колебания пучка в целом, но и остаточные колебания отдельных ступков при их инжекции из синхротрона-инжектора в основной синхротрон. На ускорителе У-70 (ИФВЭ, Протвино) была создана СП с верхней граничной частотой пропускания, превышающей частоту ускоряющего поля [5]. Декремент α затухающих колебаний за оборот при инжекции протонов составлял $\alpha = T_0/\tau_d \approx 0,005$, где T_0 — период обращения заряженной частицы в синхротроне, τ_d — постоянная времени затухания когерентных колебаний, которая наблюдается в измерениях сигнала с датчика положения. Более высокий темп подавления при применении СП был достигнут на SPS (ЦЕРН): $\alpha \approx 0,012$ (см. [6]).

На У-70 также успешно использовалась СП с двумя датчиками положения [7], смещенными друг относительно друга на четверть длины волны бетатронных колебаний. В такой схеме обеспечивалось оптимальное фазовое соотношение ВЧ-сигналов на дефлекторе и виртуальном датчике, образованном за счет суммирования сигналов с двух измерительных датчиков с весовыми коэффициентами. В результате оптимальные условия для подавления когерентных поперечных колебаний достигались при изменении в небольшом диапазоне частот бетатронных колебаний и возникающих вследствие этого изменений набега фазы бетатронных колебаний от датчика до дефлектора.

При тщательной настройке СП удавалось увеличить интенсивность пучка на всех синхротронах (электронных и протонных), где подобные СП устанавливались. Так, например, на синхротроне PETRA при величине порогового тока 3 мА и временном промежутке 96 нс между 80 ступками получен средний ток пучка 56 мА при $\alpha \approx 0,0384$ (см. [8]). При малых интенсивностях электронного пучка для поперечных колебаний получен в два раза более высокий темп подавления [9].

На электрон-позитронном коллайдере ВЭПП-4М получено более чем трехкратное превышение порогового тока поперечной неустойчивости, причем ограничение тока инжектированного пучка определялось бустерным на-

копителем ВЭПП-3, а не системой обратной связи [10]. Для вертикальных колебаний декремент составлял $\alpha \approx 0,01$.

Таким образом, СП обеспечивают подавление когерентных поперечных неустойчивостей сгустков в действующих синхротронах. Однако достигнутые декременты недостаточны для подавления ошибок инжекции, которые приводят к нежелательному росту фазового объема пучка и, следовательно, его поперечного и продольного размеров. Так, на ускорительном комплексе ЦЕРН, в составе которого при ускорении протонных сгустков используется цепочка из четырех синхротронов PSB–PS–SPS–LHC, нормализованный поперечный эмиттанс пучка возрастает почти в 1,5 раза в основном из-за ошибок инжекции [11]. В работе [12] получено, что рост эмиттанса пучка вследствие ошибок инжекции в отсутствие неустойчивостей зависит от отношения постоянной времени активного демпфирования когерентного движения к постоянной времени естественного затухания когерентных колебаний, происходящих из-за нелинейности бетатронного или синхротронного движений. Чем меньше это отношение, тем меньшая доля начальной когерентной ошибки успевает перейти в некогерентное движение, необратимо ухудшая качество пучка. Ясно, что декремент растет при увеличении корректирующего воздействия СП, которое имеет естественное ограничение: корректирующий импульс не должен превышать когерентный импульс, отвечающий ошибке инжекции.

Существенный прогресс произошел при переходе к цифровым системам подавления когерентных поперечных колебаний, в которых оптимальные фазовые соотношения обеспечиваются с помощью цифровых фильтров в цепи обратной связи [13]. Например, на синхротроне У-70 (ИФВЭ, Протвино) была успешно испытана цифровая СП и получен темп подавления около 120 оборотов при инжекции протонного пучка [14], т. е. $\alpha = T_0/\tau_d \approx 0,0083$. С помощью цифровой СП на LHC для протонного пучка с энергией 450 ГэВ (после инжекции) был получен темп подавления около 14 оборотов ($\alpha \approx 0,071$), а при энергии 3,5 ТэВ для затухающих когерентных вертикальных колебаний декремент составлял $\alpha \leq 0,05$ [2].

В работе [13] приведена подробная классификация аналоговых и цифровых систем подавления когерентных колебаний. Показано, что широко распространенные системы подавления для пооборотного (mode-by-mode) подавления поперечных и продольных неустойчивостей замещаются на цифровые широкополосные системы подавления. Обосновано, что с использованием цифровых технологий обработки сигнала в цепи обратной связи можно создавать высокоэффективные системы подавления когерентных колебаний, управляющие движением каждого сгустка в многосгустковом режиме (bunch-by-bunch). При использовании таких СП и наличии когерентных колебаний сгустка при движении вдоль орбиты синхротрона осуществляется коррекция импульса сгустка как целого в линейной пропорции к его же смещению от

равновесной орбиты, измеренному в предшествующие моменты времени на одном или нескольких оборотах. Для выделения информационного сигнала на фоне помех используются цифровые фильтры.

СП должна обеспечивать подавление когерентных неустойчивостей сгустков в широком диапазоне частот. Так, для систем подавления когерентных поперечных колебаний сгустков сгруппированного пучка минимальная частота f_{\min} пропорциональна дробной части числа бетатронных колебаний, а максимальная частота f_{\max} должна превосходить $f_b/2$, где f_b — максимальная частота следования сгустков [1]. Например, для системы подавления когерентных поперечных колебаний протонного пучка в ЛНС [2, 15] этот диапазон простирается от $f_{\min} \approx 3$ кГц до $f_{\max} \approx 20$ МГц, поскольку дробная часть числа бетатронных колебаний $\{Q\} \approx 0,3$, частота обращения протонов в коллайдере $f_0 = 11,24$ кГц, а минимальное расстояние между сгустками отвечает их расположению в каждой десятой сепаратрисе (частота ускоряющего поля $f_{\text{rf}} = 400$ МГц, максимальная частота следований сгустков $f_b = f_{\text{rf}}/10$). Для циркулирующих в коллайдере сгустков дискретное представление сигнала с измерительного датчика положения центра тяжести пучка, пропорционального когерентным смещениям пучка от равновесной орбиты, в виде последовательности отсчетов, формируемых на каждом обороте с максимальной частотой следования сгустков f_b , однозначно возможно в соответствии с теоремой Котельникова [16] при использовании в качестве тактовой частоты $f_{\text{clk}} > f_b = 2f_{\max}$. Для СП в коллайдере ЛНС выполнение данного условия уже обеспечено средствами современной электроники [17].

Использование цифровых методов обработки и формирования требуемых сигналов возможно при соблюдении требований к разрядности аналого-цифровых преобразователей (АЦП) в цепи обратной связи СП, поскольку квантование неизбежно приводит к шумам, влияющим на время жизни пучка. В работах [18, 19] приведена следующая оценка темпа роста эмиттанса:

$$\frac{1}{\tau_{x^2}} = \frac{4}{3} f_0 \alpha_q^2 \Delta Q_p^2,$$

где τ_{x^2} — постоянная времени роста эмиттанса; ΔQ_p — величина разброса числа бетатронных колебаний; $\alpha_q = 2^{-(b-1)}$ — коэффициент, учитывающий шумы квантования в цифровой системе с числом бит b . Так, в системе подавления когерентных поперечных колебаний протонного пучка в ЛНС в цепи обратной связи используется АЦП с числом эффективных бит $b = 12$ [17]. Поэтому $\tau_{x^2} \approx 3100$ ч при $f_0 = 11,24$ кГц и $\Delta Q_p = 5 \cdot 10^{-3}$. Следовательно, для коллайдера ЛНС обеспечивается более чем приемлемое время циркуляции пучка без заметного роста эмиттанса вследствие шумов квантования в цифровой электронике.

В качестве другого примера можно рассмотреть возможность создания цифровой системы подавлений когерентных поперечных колебаний для про-

ектируемого коллайдера ускорительного комплекса NICA (ОИЯИ) [20]. В этом случае с учетом предполагаемых параметров коллайдера [21] можно принять $f_{\min} \approx 0,1f_0$, где f_0 лежит в диапазоне 522–587 кГц. Для подавления когерентных поперечных колебаний соседних сгустков, расположенных в каждой третьей сепаратрисе, необходимо осуществлять демпфирование колебаний вплоть до частот $f_{\max} = 7$ МГц (проектное значение частоты ускоряющего поля не превосходит 43 МГц). Учитывая, что для систем подавления уже испытываются специализированные цифровые сигнальные процессоры с тактовой частотой 100 МГц [22], можно рассчитывать на реализацию цифровой системы подавления внутрисгустковых колебаний заряженных частиц для коллективных процессов с частотой до 50 МГц. Принципиальная возможность подавления таких мод колебаний успешно протестирована на протонном синхротроне PS (ЦЕРН) [23]. При использовании в цепи обратной связи 16-разрядных АЦП с числом эффективных бит $b = 14$ имеем $\tau_{x^2} = 900$ ч при $f_0 = 590$ кГц и $\Delta Q_p = 5 \cdot 10^{-3}$. Это означает, что для коллайдера NICA при существующей элементной базе для цифровых устройств можно обеспечить приемлемое время циркуляции пучка без заметного роста эмиттанса.

Таким образом, существующие предсказания по тактовой частоте цифровых СП и оценки влияния шумов квантования на рост эмиттанса пучка не приводят к каким-либо принципиальным ограничениям при использовании цифровых технологий.

В цифровых системах обработка сигналов осуществляется с применением цифровых сигнальных процессоров, позволяющих быстро и достаточно просто менять алгоритм обработки сигналов программными средствами. При этом используются эффективные методы анализа и синтеза радиотехнических устройств, которые являются общепринятыми и поддерживаются многими прикладными компьютерными программами.

В настоящем обзоре уделено особое внимание новым результатам по ограничениям на величины декрементов когерентных колебаний, возникающим в синхротронах при наличии цифровой обработки детектируемых сигналов в цепи обратной связи системы подавления.

1. ЦИФРОВЫЕ ШИРОКОПОЛОСНЫЕ СИСТЕМЫ ПОДАВЛЕНИЯ КОГЕРЕНТНЫХ ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ

1.1. Структурная схема системы подавления. Система подавления (СП) когерентных поперечных колебаний пучка в синхротроне (см. рис. 1) обеспечивает требуемую коррекцию импульса сгустков на каждом обороте с помощью демпфирующего дефлектора (ДК) с учетом данных с измерительного датчика (ВРМ) об отклонениях этих сгустков от расчетной траектории в предшествующие моменты времени.

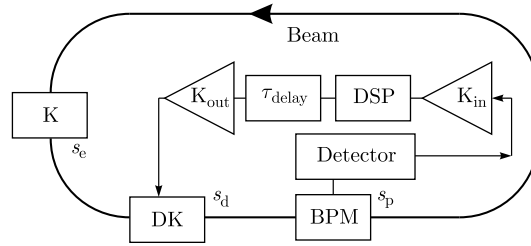


Рис. 1. Структурная схема цифровой системы подавления [13]

Сигнал с ВРМ после детектирования колебаний высокой (несущей) частоты преобразуется в колебания низкой (модулирующей) частоты, затем усиливается. В результате формируется непрерывный (аналоговый) низкочастотный сигнал $V_{in}(t)$ на входе радиотехнической цепи обратной связи. Мгновенная величина напряжения $V_{in}(t)$ линейно зависит от смещения центра тяжести конкретного сгустка в горизонтальном и вертикальном направлениях относительно электрического центра ВРМ. В пределах одного оборота величины $V_{in}(t)$ пропорциональны смещениям различных сгустков, пролетающих сквозь ВРМ. Затем процесс формирования $V_{in}(t)$ повторяется.

Низкочастотный сигнал $V_{in}(t)$ подвергается дискретизации по времени и квантованию по уровню (оцифровке) с помощью аналого-цифрового преобразователя, т. е. представляется в цифровой форме. В цифровых СП каждому сгустку отвечает независимый цифровой отсчет, который с погрешностью квантования совпадает с дискретным отсчетом $V_{in}[k]$. Здесь и далее все непрерывные величины (аналоговые сигналы) будут обозначаться как $x(t)$, а соответствующие $x(t)$ дискретные отсчеты как $x[k]$. Согласно теореме Котельникова [16] дискретный сигнал $V_{in}[k]$ эквивалентен аналоговому сигналу $V_{in}(t)$, если частота дискретизации сигнала f_d больше, чем удвоенная наивысшая частота f_{max} в спектре сигнала (т. е. $f_d > 2f_{max}$). При помощи математических алгоритмов, осуществляемых во временной области, сигнал $V_{in}[k]$ преобразуется в некоторый другой сигнал $V_{out}[k]$, имеющий требуемые свойства и предназначенный для подачи на демпфирующий дефлектор. Процесс преобразования сигналов осуществляется с помощью цифрового фильтра. Поскольку отсчеты сигналов поступают с постоянной скоростью f_d , фильтр должен успевать обрабатывать текущий отсчет до поступления следующего, т. е. обрабатывать сигнал в реальном времени. Для обработки сигналов (фильтрации) в реальном времени используются цифровые сигнальные процессоры. Среди возможных алгоритмов обработки сигнала $V_{in}[k]$ обычно рассматриваются лишь те, в которых участвуют отсчеты, относящиеся к одному сгустку. Однако эти отсчеты могут отвечать смещениям сгустка, зафиксированным

датчиком положения на разных оборотах. Для согласования по времени импульсного воздействия на сгусток с данными о его же состоянии в предшествующие моменты времени используется цифровая задержка τ_{delay} , являющаяся неотъемлемой частью DSP.

Затем сигнал $V_{\text{out}}[k]$ с помощью цифроаналогового преобразователя преобразуется в непрерывный (аналоговый) сигнал $V_{\text{out}}(t)$, усиливается до необходимого уровня и передается на дефлектор ДК, изменяющий угол наклона траектории сгустка относительно расчетной замкнутой орбиты. Следует подчеркнуть, что в цифровой системе подавления осуществляется коррекция поперечного импульса сгустка в многосгустковом режиме (bunch-by-bunch). Это означает, что верхняя граничная частота мощного усилителя, нагрузкой которого является демпфирующий дефлектор с реальными радиотехническими параметрами, должна быть достаточно высокой, чтобы обеспечивать максимальное воздействие электромагнитного поля в дефлекторе на корректируемый сгусток при минимальном влиянии остаточных полей, создаваемых предшествующими сгустками. Система подавления когерентных поперечных колебаний, отвечающая этому условию, называется широкополосной СП [13].

Модельный подход к изучению колебаний жестких сгустков, подверженных корректирующему воздействию СП, приводится во многих работах. Например, в [13, 24] на каждом обороте вычисляется изменение угла наклона траектории сгустка при прохождении демпфирующего дефлектора под действием приложенного к нему напряжения, пропорционального смещению этого же сгустка в момент прохождения им измерительного датчика в пределах одного оборота. Возникающее вследствие этого изменение траектории частицы учитывается на следующем обороте, и процесс последовательных итераций повторяется. Данный численный алгоритм позволяет методом перебора решений выявить условия, при которых происходит демпфирование колебаний. При этом существенным приближением при вычислении приложенного к дефлектору напряжения является использование коэффициентов резистивной и реактивной обратной связи в качестве задаваемых параметров, которые должны соответствовать экспериментально найденным значениям или быть определены из численных расчетов. Показано [13], что при использовании такого подхода можно рассчитать параметры фильтра первого порядка с конечной импульсной характеристикой, последовательно соединенного с узкополосным заграждающим фильтром. Данный метод был применен для расчета параметров цифровой СП на ускорителе У-70 (Протвино, ИФВЭ). В проведенных экспериментах наблюдалось устойчивое подавление когерентных поперечных колебаний протонных сгустков [14]. Влияние более сложных схем цифровых фильтров на динамику пучка в указанном выше подходе возможно только с помощью компьютерных расчетов, что существенно ограничивает возможности его применения.

1.2. Дискретная модель системы подавления колебаний сгустка. Для решения задачи о колебаниях одиночного сгустка можно использовать традиционные подходы изучения динамики поперечного движения отдельной частицы с использованием матриц перехода. Это позволяет существенным образом упростить изложение материала и проанализировать предельные случаи, сопоставив полученные результаты с уже имеющимися решениями.

В рамках оригинальной модели [25–28] были изучены бетатронные колебания заряженной частицы в синхротроне [29–31] в присутствии малых демпфирующих (F_d) и возмущающих (F_e) сил:

$$\frac{d^2 x(s)}{ds^2} + K(s)x(s) = \frac{1}{m_0 \gamma_0 v_0^2} (F_d + F_e), \quad (1)$$

где s — текущее положение выбранной частицы с массой m_0 и зарядом q в момент времени $t > 0$ на орбите синхротрона. Предполагается, что выбранная частица движется вдоль расчетной (равновесной) орбиты с периметром C_0 со скоростью v_0 , так что ее релятивистский фактор $\gamma_0 = (1 - v_0^2/c^2)^{-1/2}$, где c — скорость света. Фокусирующие свойства магнитной системы синхротрона описываются с помощью коэффициентов жесткости $K(s)$, причем $K(s + C_0) = K(s)$. Состояние частицы принято задавать с помощью матрицы-столбца $\hat{X}(n, s)$, в которой первый элемент есть $x(n, s)$ — смещение частицы относительно мгновенной замкнутой (равновесной или деформированной) орбиты на n -м обороте, а второй элемент $x'(n, s)$ — угол наклона ее траектории [29–31]:

$$x(t) \equiv x(n, s), \quad x'(t) \equiv x'(n, s), \quad v_0 t = s + nC_0, \quad s \in [0, C_0]. \quad (2)$$

При этом выполняются очевидные условия непрерывности [28]:

$$x(n + 1, s) = x(n, s + C_0), \quad x'(n + 1, s) = x'(n, s + C_0). \quad (3)$$

Замкнутая орбита в общем случае смещена относительно расчетной орбиты на величину $x_D(s)$, которая определена дисперсионной функцией $D(s)$ синхротрона [30–32]:

$$x_D(s) = D(s) \frac{\delta p_s}{p_0}, \quad D(s + C_0) = D(s).$$

Величина отклонения продольного импульса δp_s от его расчетного значения $p_0 = m_0 \gamma_0 v_0$ зависит от времени вследствие когерентных синхротронных колебаний: $\delta p_s(t) \sim \cos(\Omega_s t + \phi_s)$, где Ω_s — циклическая частота синхротронных колебаний с начальной фазой ϕ_s . Поскольку эта частота в сотни раз ниже частоты обращения частицы, можно считать величину $x_D(s)$ постоянной для характерных промежутков демпфирования когерентных поперечных

колебаний (около ста оборотов). Поэтому в первом приближении для анализа поперечной динамики частицы в синхротроне при наличии системы подавления можно использовать традиционное предположение о независимости поперечного и продольного движений частицы.

После однократного прохождения короткого дипольного демпфирующего дефлектора ДК, расположенного в точке s_d орбиты (см. рис. 1), угол наклона траектории частицы изменяется на величину $\Delta x'_d(n)$ без ее заметного смещения:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} (x'(n, s_d + \epsilon) - x'(n, s_d - \epsilon)) = \Delta x'_d(n), \quad (4)$$

$$\frac{1}{m_0 \gamma_0 v_0^2} F_d = \Delta x'_d(n) \delta(s - s_d), \quad \Delta x'_d(n) = \frac{q E_d(n) l_d}{m_0 \gamma_0 v_0^2},$$

где $\delta(s)$ — обобщенная дельта-функция Дирака [33]; $E_d(n)$ — отклоняющее электростатическое поле в дефлекторе с эффективной длиной l_d . Такое приближение правомерно в том случае, если внешняя сила действует в течение короткого промежутка времени [34, 35]. В этом же приближении после прохождения частицей короткого дипольного толкателя К, расположенного в точке $s_e \leq s_d$, угол наклона траектории частицы изменяется на величину $\Delta x'_e(n)$. Используемые приближения традиционно применяются при изучении динамики частиц в синхротронах с системами подавления [35–38]. В итоге для состояний частицы на двух последовательных оборотах можем записать [28, 39]

$$\widehat{X}(n+1, s) \equiv \widehat{X}(n, s + C_0) = \widehat{M}(s) \widehat{X}(n, s) + \Delta x'_d(n) \widehat{M}_d \widehat{E} + \Delta x'_e(n) \widehat{M}_e \widehat{E}, \quad (5)$$

где в матрице-столбце \widehat{E} имеем $E_1 = 0$ и $E_2 = 1$, а для матриц перехода $\widehat{M}(s_2|s_1)$ из точки s_1 в позицию s_2 введены обозначения [29]

$$\widehat{M}(s) \equiv \widehat{M}(s + C_0|s), \quad \widehat{M}_d \equiv \widehat{M}(s + C_0|s_d), \quad \widehat{M}_e \equiv \widehat{M}(s + C_0|s_e).$$

В матричном уравнении (5) для одной частицы можно выполнить процедуру усреднения по всем частицам заданного сгустка, следуя общепринятым моделям и предположениям [40]. Будем пренебрегать фазовым движением частиц в пределах одного сгустка и считать, что распределения частиц по длине сгустка и по его поперечному сечению отвечают стационарной функции распределения в широком смысле [16], т.е. ее первый (математическое ожидание) и второй (дисперсия) моменты постоянны, а автокорреляционная функция зависит только от разности моментов времени, для которых взяты смещения частицы в сгустке. Переход частицы из состояния $(x(n, s); x'(n, s))$ в состояние $(x(n, s + ds); x'(n, s + ds))$ является процессом с непрерывным временем. С точки зрения наблюдателя, фиксирующего смещения центра тяжести сгустка на разных оборотах в моменты времени

$t_1, t_2 = t_1 + T_0, \dots$, число которых конечно или счетно, можно говорить о процессе $(x[n, s]; x'[n, s])$, дискретном во времени (здесь $T_0 \equiv 1/f_0$ — период обращения сгустка в синхротроне с частотой f_0). Для детерминированного процесса — движения сгустка как устойчивого ансамбля частиц вдоль орбиты синхротрона — наблюдаемые величины $(x[n, s]; x'[n, s])$ и средние значения $(\langle x(n, s) \rangle; \langle x'(n, s) \rangle)$ в заданной точке орбиты (например, в месте расположения датчика положения) будем считать равными величинами независимо от номера оборота n . При применении такой процедуры усреднения в уравнениях (3) и (5) переходим от уравнений движения отдельных частиц, состояние которых описывается непрерывными функциями $x(n, s)$ и $x'(n, s)$, к уравнению движения центра тяжести «жесткого» сгустка, состояние которого задается с помощью матрицы-столбца $\widehat{X}[n, s]$, в котором первый элемент есть смещение центра тяжести сгустка $x[n, s]$, а второй — угол наклона траектории сгустка $x'[n, s]$. Данное модельное приближение о равенстве дискретных и непрерывных величин смещений как первого момента функции распределения будет далее неоднократно использоваться.

Матрица перехода $\widehat{M}(s_2|s_1)$ из s_1 в s_2 имеет вид [29, 30]

$$\begin{aligned} \widehat{M}(s_2|s_1) = & \sqrt{\frac{\widehat{\beta}_2}{\widehat{\beta}_1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\widehat{\alpha}_1 - \widehat{\alpha}_2}{\widehat{\beta}_2} & \frac{\widehat{\beta}_1}{\widehat{\beta}_2} \end{pmatrix} \cos(\psi_{12}) + \\ & + \sqrt{\frac{\widehat{\beta}_2}{\widehat{\beta}_1}} \begin{pmatrix} \widehat{\alpha}_1 & \widehat{\beta}_1 \\ -\frac{1 + \widehat{\alpha}_1 \widehat{\alpha}_2}{\widehat{\beta}_2} & -\widehat{\alpha}_2 \frac{\widehat{\beta}_1}{\widehat{\beta}_2} \end{pmatrix} \sin(\psi_{12}), \end{aligned}$$

где $\widehat{\alpha}_i \equiv (-1/2)\widehat{\beta}'_i$ и $\widehat{\beta}_i$ — функции Твисса в точке s_i . Набег фазы ψ_{12} и число ν_{12} бетатронных колебаний из точки s_1 в s_2 есть

$$\psi_{12} \equiv \psi(s_2|s_1) = \psi(s_2) - \psi(s_1) = \int_{s_1}^{s_2} \frac{ds}{\widehat{\beta}(s)} = 2\pi\nu_{12}.$$

Учитывая определение для $\widehat{M}(s_2|s_1)$, матричное уравнение (5) нетрудно преобразовать к разностному уравнению для смещений «жесткого» сгустка $x[n, s]$. Пусть в уравнении (5), в котором после процедуры усреднения $\langle \widehat{X}(n, s) \rangle = \widehat{X}[n, s]$, точка s совпадает с расположением датчика положения центра тяжести пучка: $s = s_p$. Будем далее обозначать $x[n, s_p] \equiv x[n]$ и отождествлять дискретное смещение сгустка в датчике положения с дискретным отсчетом на входе радиотехнической цепи обратной связи, пропорциональным $V_{in}[n]$. Такое же соглашение соотнесем с величинами, связанными с импульсными воздействиями: $\langle \Delta x'_d(n) \rangle = \Delta x'_d[n]$ и $\langle \Delta x'_e(n) \rangle = \Delta x'_e[n]$, что

физически оправдано для цифровой широкополосной СП. Тогда разностное уравнение, эквивалентное матричному уравнению (5), есть [41]

$$\begin{aligned} x[n+2] - 2 \cos(\mu) x[n+1] + x[n] = \\ = \sqrt{\hat{\beta}_p \hat{\beta}_d} \left(\sin(\mu - \eta) \Delta x'_d[n+1] + \sin(\eta) \Delta x'_d[n] \right) + \\ + \sqrt{\hat{\beta}_p \hat{\beta}_e} \left(\sin(\mu - \eta_e) \Delta x'_e[n+1] + \sin(\eta_e) \Delta x'_e[n] \right), \quad (6) \end{aligned}$$

где $\mu = 2\pi Q_0$ есть набег фазы бетатронных колебаний за оборот (Q_0 — число бетатронных колебаний за оборот), $\eta \equiv \psi_{pd} = \psi(s_d|s_p)$ — набег фазы бетатронных колебаний из точки s_p до расположенного в точке s_d демпфирующего дефлектора и η_e — набег фазы бетатронных колебаний из точки s_p до толкателя, расположенного в точке s_e .

Обычно рассматривают два типа вынужденных колебаний, инициированных толкателем [39]. Во-первых, изучаются последствия очень короткого по времени воздействия на частицу, происходящего на n_e обороте:

$$\sqrt{\hat{\beta}_e \hat{\beta}_p} \Delta x'_e[n] = a_e \delta[n - n_e], \quad (7)$$

где a_e — амплитуда импульсного воздействия; $\delta[n - m]$ — обобщенная δ -функция единичного скачка [33]. Во-вторых, вынужденные колебания могут быть вызваны гармоническим воздействием, возникающим на n_e обороте и действующим в течение N_e оборотов, с частотой $Q_e f_0$ и начальной фазой ϕ_e :

$$\sqrt{\hat{\beta}_e \hat{\beta}_p} \Delta x'_e[n] = a_e \sin(2\pi(n - n_e)Q_e + \phi_e) (u[n - n_e] - u[n - n_e - N_e]), \quad (8)$$

где $u[n - m]$ — функция Хевисайда [33].

Колебания после окончания воздействия внешнего возмущения называются свободными. Обычно такие колебания классифицируют как колебательный процесс, обусловленный начальными условиями в отсутствие внешнего возбуждения. Если в начальный момент времени при прохождении датчика положения смещение частицы равно x_0 , а угол наклона траектории x'_0 , то имеем с учетом матричного уравнения (5)

$$\begin{aligned} x_0 \equiv x[0], \quad x'_0 \equiv x'[0], \\ x_1 \equiv x[1] = (\cos \mu + \hat{\alpha}_p \sin \mu) x_0 + (\hat{\beta}_p \sin \mu) x'_0 + \\ + \left(\sqrt{\hat{\beta}_p \hat{\beta}_d} \sin(\mu - \eta) \right) \Delta x'_d[0] + \left(\sqrt{\hat{\beta}_p \hat{\beta}_e} \sin(\mu - \eta_e) \right) \Delta x'_e[0]. \quad (9) \end{aligned}$$

Отметим, что матричное уравнение (5) описывает состояние частицы в произвольной точке орбиты и является рекуррентной формулой для величин

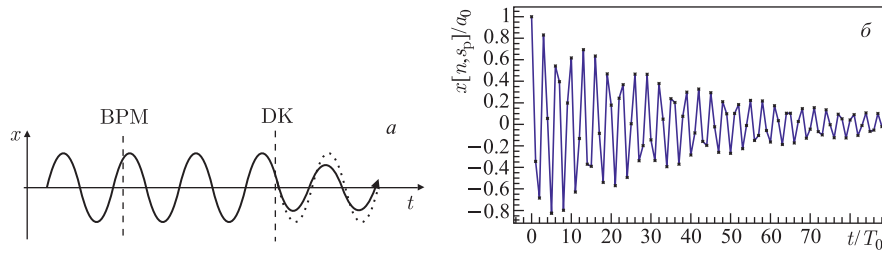


Рис. 2. *а*) Фрагмент траектории $x(t)$ частицы вдоль орбиты; *б*) эволюция величин смещений $x[n, s_p]$ (отмечены точками на графике) на разных оборотах $n = t/T_0$ [39]

смещений $x(n, s)$ и углов наклона траектории $x'(n, s)$. Эволюция этих величин от оборота к обороту зависит от начальных значений x_0 и x'_0 , а также от корректирующих $\Delta x'_d[n]$ и возмущающих $\Delta x'_e[n]$ воздействий. Пример фрагмента траектории частицы $x(t) = x(n, s)$ и эволюции величин смещений частицы $x(n, s_p) = x[n, s_p] \equiv x[n]$, наблюдаемых с помощью датчика положения BPM, приведен на рис. 2 [39]. Как это принято в цифровой технике, отображение зависимости цифровых отсчетов $x[n, s_p]$ от номера выборки n осуществлено в виде графика, где последовательные цифровые отсчеты соединены между собой прямыми линиями. Данное соглашение будет использоваться далее для отображения колебательного движения отдельной частицы или заданного сгустка, наблюдаемого с помощью датчика положения как эволюция величин $x[n, s_p]$.

Изменение траектории частицы, приведенное на рис. 2, *а*, вызвано толчком демпфирующего дефлектора, величина которого выбрана прямо пропорциональной ее смещению в месте расположения BPM. Абсолютную величину этого коэффициента пропорциональности принято называть коэффициентом обратной связи, для которого в соответствии с (6) можем записать

$$g = \left| \frac{\Delta x'_d[n]}{x[n]} \sqrt{\hat{\beta}_p \hat{\beta}_d} \right|. \quad (10)$$

Поскольку $x[n]/(\hat{\beta}_p \hat{\beta}_d)^{1/2} \approx x'_d[n]$ и, следовательно, $g \approx |\Delta v_\perp / v_\perp|$ есть абсолютная величина отношения изменения скорости поперечного движения частицы Δv_\perp к ее мгновенному амплитудному значению, величина g характеризует степень воздействия демпфирующего дефлектора на колебательное движение частицы и будет приниматься в рассматриваемой задаче в качестве малого параметра [42].

Доопределим величины корректирующих воздействий дефлектора в более общем виде, следуя [28, 39]. Как уже отмечалось выше, в широкополосных СП величина демпфирующего толчка пропорциональна выходному напряжению V_{out} на усилителе в цепи обратной связи. Будем также считать все

структурные элементы цепи обратной связи линейными и инвариантными во времени, как это принято в радиотехнике [16]. Тогда V_{out} пропорционально выходному напряжению фильтра V_{ftr} , которое, в свою очередь, линейно зависит от входного напряжения V_{in} . В результате можем записать

$$V_{\text{ftr}}[n] = \sum_{m=0}^{N_f} b[m] V_{\text{in}}[n-m] u[n-m] + \sum_{m=1}^{N_r} c[m] V_{\text{ftr}}[n-m] u[n-m],$$

$$\Delta x'_d[n] = \varkappa S_{\text{out}} V_{\text{out}}[n] = \varkappa S_{\text{out}} K_{\text{out}} V_{\text{ftr}}[n-\hat{q}] u[n-\hat{q}], \quad (11)$$

где $\varkappa = \pm 1$ — коэффициент, учитывающий полярность подаваемого на дефлектор управляющего напряжения; S_{out} — передаточная характеристика демпфирующего дефлектора; K_{out} — коэффициент усиления по напряжению выходных усилителей (см. рис. 1); $u[n]$ — функция Хевисайда; N_f — порядок фильтра с конечной импульсной характеристикой (КИХ-фильтр) в DSP; $b[m]$ — коэффициенты КИХ-фильтра; N_r — порядок фильтра с бесконечной импульсной характеристикой (БИХ-фильтр); $c[m]$ — коэффициенты БИХ-фильтра [16]. В (11) учтено, что синхронизация отсчетов $V_{\text{in}}[n]$ и $V_{\text{out}}[n]$ может осуществляться с задержкой на \hat{q} оборотов. Иначе говоря, если $t(0, s_p)$ есть момент пролета частицы сквозь ВРМ после инжекции, $\tau \equiv \tau_{\text{pd}}$ — время пролета частицы от ВРМ до ДК, то корректирующий сигнал должен возникнуть в ДК в момент времени $t(\hat{q}, s_d)$, такой, что

$$\tau + \hat{q} T_0 = t(\hat{q}, s_d) - t(0, s_p). \quad (12)$$

Величину \hat{q} далее будем называть кратностью задержки. Конкретное значение задержки τ_{delay} в модуле цифровой обработки сигнала (DSP) формируется с учетом времени прохождения сигнала по цепи обратной связи от ВРМ до ДК таким образом, чтобы обеспечить выполнение условия (12). Обычно $\hat{q} = 0$ на ускорителях с большой длиной дорожки, однако в электронных синхротронах для выполнения условий синхронизации с учетом реальной задержки в цепи обратной связи приходится выбирать отличные от нуля значения \hat{q} (так, в накопителе PETRA [8] использовалась величина $\hat{q} = 1$).

В свою очередь, напряжение V_{in} на входе радиотехнической части цепи обратной связи линейно зависит от смещения $x[n]$:

$$V_{\text{in}}[n] = (x[n] + \delta x_p) S_{\text{in}} K_{\text{in}} u[n], \quad \delta x_p = x_D(s_p) - \Delta x_p, \quad (13)$$

где S_{in} — чувствительность измерительного датчика; K_{in} — коэффициент усиления по напряжению входных усилителей; δx_p — погрешность измерения бетатронных смещений колеблющейся частицы в месте расположения ВРМ. Эта погрешность зависит от Δx_p — отклонения электрического центра ВРМ относительно расчетной орбиты и от $x_D(s_p)$ — смещения мгновенной замкнутой орбиты относительно расчетной.

Необходимо подчеркнуть, что уравнения (11) или (13) являются наиболее общими для линейных инвариантных во времени систем (ЛИВ-систем) дискретного времени [16, 43]. Практически все радиотехнические устройства, входящие в цепь обратной связи на ускорителях заряженных частиц, относятся к таким ЛИВ-системам. Однако следует помнить, что в уравнении (13) при замене $x(t)$ на $x[n]$ предполагается, что дискретизация сигнала осуществляется с помощью идеальных устройств выборки и хранения. В свою очередь, в уравнении (13) при замене $\Delta x'_d(t)$ на $\Delta x'_d[n]$ считается, что мощный усилитель совместно с дефлектором имеет идеальную импульсную характеристику. При определении основных свойств устойчивости движения частиц с системой обратной связи данное предположение является вполне приемлемым, так как приблизиться к почти идеальным характеристикам этих устройств вполне возможно, если число ускоряемых сгустков K_b значительно меньше кратности ускорения $h_{\text{тф}}$ (например, в ЛНС расчетное число сгустков $K_b \leq 2808$ при $h_{\text{тф}} = 35640$ [44]).

Матричное уравнение (5) или эквивалентное ему разностное уравнение (6) совместно с выражениями (9) для начальных условий, уравнениями (11) и (13) для демпфирующих воздействий и уравнениями (7) или (8) для возмущающей силы являются базовыми уравнениями для описания поперечных колебаний частицы в синхротроне при наличии системы подавления.

1.3. \mathcal{Z} -преобразование как метод решения. 1.3.1. *Основные определения.* Система линейных уравнений (5), (6), (11), (13), (7) и (8) с начальными условиями (9) может быть решена с использованием одностороннего \mathcal{Z} -преобразования (преобразование Лорана) [16, 33]:

$$\mathbf{y}(z, s) \equiv \mathcal{Z}\{y[n, s]\} = \sum_{n=0}^{\infty} y[n, s] z^{-n}, \quad y[n, s] = 0 \quad \forall n < 0, \quad s \in [0, C_0], \quad (14)$$

$$y[n, s] \equiv \mathcal{Z}^{-1}\{\mathbf{y}(z, s)\} = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \mathbf{y}(z, s) z^{n-1} dz = \sum_r \text{Res} [\mathbf{y}(z_r, s) z_r^{n-1}; z_r].$$

Здесь Γ — любой замкнутый контур, окружающий все особые точки z_r функции $\mathbf{y}(z, s)$ на комплексной z -плоскости, в частности любая окружность $|z| > R_z$, где R_z — радиус круга, вне которого сходится (абсолютно и равномерно) задающий $\mathbf{y}(z, s)$ ряд. Данный способ решения впервые применен в работе [28], он был выбран для анализа движения частиц пучка при наличии цепи обратной связи с цифровой обработкой сигнала, поскольку \mathcal{Z} -преобразование широко используется при анализе радиотехнических систем дискретного времени [16, 43].

Таким образом, исходное разностное или рекуррентное уравнение для $y[n, s]$ используется для нахождения функции-изображения $\mathbf{y}(z, s)$. Определив полюсы функции $\mathbf{y}(z, s)$ в произвольной точке s , восстанавливают после-

довательность $y[n, s]$ в той же точке s в соответствии с теоремой о вычетах для вычисления контурного интеграла согласно (14). Отсюда ясно, что устойчивое решение возможно, если все полюсы z_r на комплексной z -плоскости лежат внутри круга с радиусом $R_z = 1$, т. е.

$$|z_r| \leq 1. \quad (15)$$

В этом случае $y[n, s]$ согласно (14) есть сумма затухающих с ростом n слагаемых (мод колебаний), пропорциональных z_r^{n-1} . Поэтому декремент амплитуды колебаний за оборот для r -й моды есть

$$\alpha_r = -\ln |z_r| = T_0/\tau_r, \quad (16)$$

где τ_r есть постоянная времени затухания данной моды колебаний. Использование величин $|z_r|$ для характеристики темпа подавления связано с удобством представления на рисунках областей устойчивости системы подавления для τ_r , близких к T_0 . Таким образом, значения $|z_r|$ для затухающих колебаний соответствуют области величин от нуля до единицы. Другим важным параметром является аргумент z_r , который пропорционален дробной части числа колебаний за оборот:

$$\{Q_r\} = \frac{1}{2\pi} \arg(z_r), \quad -\pi < \arg(z_r) \leq \pi. \quad (17)$$

Данное определение является общепринятым в теории колебаний. Каждой из мод колебаний z_r можно сопоставить циклическую частоту колебаний:

$$\omega_{(k)r} = (\{Q_r\} + k)\omega_0, \quad \omega_0 = 2\pi/T_0,$$

где k — целое число; ω_0 — циклическая частота обращения частицы. Величины $\omega_{(k)r}$ регистрируются в спектре сигнала с датчика положения [13]. Каждому значению $\omega_{(k)r}$ отвечает изменение фазы за оборот $\omega_{(k)r}T_0$, регистрируемое как остаток деления этого изменения на 2π , так что $\text{mod}(\omega_{(k)r}T_0, 2\pi) = 2\pi\{Q_r\}$.

Среди различных мод колебаний всегда можно выделить моды, затухающие наиболее медленно. Поэтому естественно в области изменения какого-либо параметра определить минимальную величину постоянной времени затухания [28], которой отвечает максимальное значение $|z_r|$:

$$\alpha \equiv \frac{T_0}{\tau_d} \equiv \frac{T_0}{\tau_r^{(\min)}} = -\ln(\text{MAX}(|z_r|)). \quad (18)$$

Подчеркнем, что, вообще говоря, величина $\text{MAX}(|z_r|)$ в одной из областей изменения выбранного параметра может отвечать, например, $|z_1|$, а в другой

области, например, $|z_3|$. Поэтому кривая $\text{MAX}(|z_r|)$ есть огибающая среди всех рассматриваемых кривых для $|z_r|$.

Решения для дискретных величин $y[n, s]$ совпадают с непрерывными величинами $y(n, s)$ по крайней мере в одной точке на орбите, причем на произвольном обороте. Поэтому с точки зрения устойчивости движения частиц устойчивость решений $y[n, s]$ является необходимой.

Таким образом, определив положение полюсов z_r функции изображения на комплексной z -плоскости, можно выявить величины параметров, при которых движение частиц устойчиво, а также декременты и собственные частоты затухающих поперечных колебаний частиц.

1.3.2. Общее решение. Выполняя \mathcal{Z} -преобразование для линейных разностных уравнений (11) и (13), получаем

$$\Delta \mathbf{x}'_d(z) = z^{-\hat{q}} \mathcal{K}(z) S_{\text{in}} S_{\text{out}} \left(\mathbf{x}(z) + \frac{\delta x_p}{1 - z^{-1}} \right),$$

где введено обозначение $\mathbf{K}(z) \equiv K_{\text{in}} K_{\text{out}} H(z)$ для передаточной функции радиотехнической части цепи обратной связи, зависящей от передаточной функции цифрового фильтра $H(z) = \mathcal{Z}\{V_{\text{ftr}}[n]\}$:

$$H(z) = \mathcal{Z}\{V_{\text{ftr}}[n]\} = \left(b[0] + \sum_{m=1}^{N_f} b[m] z^{-m} \right) \left(1 - \sum_{m=1}^{N_r} c[m] z^{-m} \right)^{-1}. \quad (19)$$

Выполняя \mathcal{Z} -преобразование для матричного уравнения (5) с начальными условиями (9) и учитывая результат для $\mathcal{Z}\{\Delta x'_d[n]\}$, получаем для функции $\widehat{\mathbf{X}}(z, s) = \mathcal{Z}\{\widehat{X}[n, s]\}$ следующее выражение [28, 39]:

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{X}}(z, s) = & \frac{z\widehat{I} - \widehat{\mathbf{M}}^{-1} \det \widehat{\mathbf{M}}}{\det(z\widehat{I} - \widehat{\mathbf{M}})} \left(z\widehat{X}[0, s] + \right. \\ & \left. + \frac{\hat{g}(z) \delta x_p}{(1 - z^{-1})(\hat{\beta}_d \hat{\beta}_p)^{1/2}} \widehat{M}_d \widehat{E} + \mathcal{Z}\{\Delta x'_e[n]\} \widehat{M}_e \widehat{E} \right), \quad (20) \end{aligned}$$

где функция $\hat{g}(z)$ определена следующим образом:

$$\hat{g}(z) = z^{-\hat{q}} \mathcal{K}(z) S_{\text{in}} S_{\text{out}} \sqrt{\hat{\beta}_d \hat{\beta}_p}. \quad (21)$$

В (20) \widehat{I} — единичная матрица, а матрица $\widehat{\mathbf{M}}$ имеет вид

$$\widehat{\mathbf{M}} \equiv \widehat{\mathbf{M}}(Q_0, z, s) = \widehat{M}(s) + \frac{\hat{g}(z)}{(\hat{\beta}_d \hat{\beta}_p)^{1/2}} \widehat{M}_d \widehat{T} \widehat{M}(s_p|s), \quad (22)$$

где \widehat{T} — квадратная 2×2 матрица, в которой $T_{21} = 1$, а все остальные элементы равны нулю. В (20) использовалось примененное в [35] представление прохождения демпфирующего дефлектора с помощью матрицы \widehat{T} :

$$\Delta \mathbf{x}'_d(z) \widehat{E} \equiv \frac{\hat{g}(z)}{(\hat{\beta}_d \hat{\beta}_p)^{1/2}} \widehat{T} \widehat{\mathbf{X}}(z, s_p) + \frac{\hat{g}(z) \delta x_p}{(1 - z^{-1})(\hat{\beta}_d \hat{\beta}_p)^{1/2}} \widehat{E}.$$

Следует подчеркнуть, что оптические функции Твисса и набег бетаатронных фаз в матрицах $\widehat{M}(s)$, $\widehat{M}_d(s + C_0|s_d)$ и $\widehat{M}(s_p|s)$ заданы на орбите, где число бетаатронных колебаний за оборот равно Q_0 . Это отражено в определении матрицы \widehat{M} в (22), где зависимость от Q_0 указана в явном виде как $\widehat{M}(Q_0, z, s)$.

Для выявления свойств колебательного поперечного движения циркулирующей частицы необходимо определить положение полюсов z_r функции изображения $\widehat{\mathbf{X}}(z, s)$ на комплексной z -плоскости.

1.3.3. Характеристическое уравнение. Собственные значения z_r при $a_e = 0$ и $\delta x_p = 0$ есть решения характеристического уравнения [28, 39]:

$$\det \left(z_r \widehat{T} - \widehat{M}(Q_0, z_r, s) \right) \equiv z_r^2 - z_r \operatorname{tr} \widehat{M}(Q_0, z_r, s) + \det \widehat{M}(Q_0, z_r, s) = \\ = z_r^2 - (2 \cos \mu + \hat{g}(z_r) \sin(\mu - \eta)) z_r + 1 - \hat{g}(z_r) \sin \eta = 0. \quad (23)$$

Поскольку $\hat{g}(z) \propto z^{-\hat{q} - N_f}$ при $N_r < N_f$, то характеристическое уравнение (23) является алгебраическим уравнением степени $(2 + \hat{q} + N_f)$ относительно z . Коэффициенты уравнения (23) — действительные числа. Следовательно, такое алгебраическое уравнение имеет парные комплексно-сопряженные корни и/или различные вещественные корни (в частных случаях некоторые из вещественных корней могут совпадать). Так, при $\hat{g} = 0$ получаем квадратное уравнение, имеющее два комплексно-сопряженных корня $z_{1,2} = \exp(\pm j 2\pi Q_0)$, т. е. хорошо известное решение для бетаатронных колебаний [30, 31]. В этом случае величина $\arg z_{1,2} = 2\pi\{Q_0\}$ есть приращение фазы бетаатронных колебаний за оборот, которое фиксируется как наблюдаемая величина в сигнале с датчика положения [13]. Этому приращению можно сопоставить циклическую частоту Ω_β и абсолютную величину Q_β для $\{Q_0\}$:

$$Q_\beta \equiv |\{Q_0\}|, \quad \Omega_\beta \equiv Q_\beta \omega_0, \quad \omega_0 \equiv 2\pi/T_0, \quad \Omega_\beta T_0 = 2\pi Q_\beta.$$

Величины Ω_β и Q_β далее будут использоваться в качестве характеристики минимальной моды бетаатронных колебаний. С учетом принятого в радиотехнике правила соответствия $\mathbf{K}(\omega) = \mathbf{K}(z = \exp(j\omega T_0))$ для $\hat{g}(z)$ можно записать

$$\hat{g}(z) = g z^{-\hat{q}} \frac{z \mathbf{K}(z)}{K_0}, \quad g \equiv S_{\text{in}} S_{\text{out}} K_0 \sqrt{\hat{\beta}_d \hat{\beta}_p} = |\hat{g}(\Omega_\beta)|, \quad K_0 \equiv |\mathbf{K}(\Omega_\beta)|,$$

где g — коэффициент обратной связи, причем $|\Delta \mathbf{x}'_d(\Omega_\beta)| (\hat{\beta}_d \hat{\beta}_p)^{1/2} = g |\mathbf{x}_d(\Omega_\beta)|$. Данное определение g согласуется с определением (10).

1.3.4. Асимптотические решения. При $\hat{g} \neq 0$ физический смысл имеют решения, в которых все моды колебаний являются затухающими ($|z_r| < 1$) и колебательный процесс описывается функцией, имеющей предельное нулевое значение [28, 45]. Следовательно, для асимптотических решений в соответствии с теоремой о конечном значении [43], выполняющейся при $|z_r| < 1$, можем записать для $\hat{\mathbf{X}}(z, s)$ из (20)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{X}[n, s] = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1) \hat{\mathbf{X}}(z, s) = 0. \quad (24)$$

Таким образом, все полюсы z_r функции $(z - 1) \hat{\mathbf{X}}(z, s)$ должны лежать внутри круга единичного радиуса, т. е. влияние погрешностей δx_p в $\hat{\mathbf{X}}(z, s)$ должно быть исключено. Это возможно, если $\hat{g}(z = 1) = 0$, т. е. при выполнении условия

$$b[0] + \sum_{m=1}^{N_f} b[m] = 0. \quad (25)$$

Последнее достигается благодаря применению в цепи обратной связи узкополосного заграждающего фильтра (notch filter) [28, 45], передаточная функция которого $H_n(z) = (1 - z^{-1})$. Это требование к радиотехнической части цепи обратной связи имеет простой физический смысл: в сигнале с датчика положения должны быть подавлены все гармоники частоты обращения, включая постоянную составляющую. В противном случае, например, постоянная составляющая в сигнале с датчика положения приведет к возникновению постоянной дипольной составляющей в корректирующем импульсе, которым запитывается демпфирующий дефлектор, и, следовательно, к искажению равновесной орбиты, что нежелательно: по своему назначению система подавления должна обеспечивать коррекцию только колебательного движения, не оказывая влияния на стационарное состояние пучка.

1.3.5 Приближенные решения. Как уже отмечалось выше, при $\hat{g} = 0$ характеристическое уравнение (23) имеет два решения $z_{1,2}^{(0)} = \exp(\pm j2\pi Q_0)$, которые можно использовать в качестве нулевого приближения при нахождении решений вблизи $z_{1,2}^{(0)}$ при $\hat{g} \neq 0$. Следуя традициям рассмотрения колебательных процессов в радиотехнике, для нулевого приближения приближенного решения z_1 выберем решение $z^{(0)} = \exp(j2\pi Q_0)$. Поскольку коэффициенты характеристического уравнения — действительные числа, второе решение есть комплексно-сопряженное значение: $z_2 = z_1^*$. Так как

$$\hat{g}(z) = g z^{-\hat{q}} \frac{\mathcal{K}\mathbf{K}(z)}{K_0} \Rightarrow |\hat{g}(z^{(0)})| = g,$$

вблизи $z_{1,2}^{(0)}$ приближенные решения характеристического уравнения при $g \ll 1$ есть

$$z_{1,2} = \exp\left(\pm j2\pi\left(Q_0 - \frac{g|\mathbf{K}(\omega)|}{4\pi K_0} e^{\mp j\Psi}\right)\right) = e^{-\alpha \pm j2\pi\{Q\}}, \quad (26)$$

где введены следующие обозначения [39, 46]:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{g|\mathbf{K}(\omega)|}{2K_0} \varkappa \sin \Psi, & \{Q\} &= \{Q_0\} - \frac{g|\mathbf{K}(\omega)|}{4\pi K_0} \varkappa \cos \Psi, \\ \omega &= (\pm\{Q_0\} + k)\omega_0, & \Psi &= \eta + 2\pi\hat{q}Q_0 - \arg \mathbf{K}(\omega), \\ \mathbf{K}(\omega) &= K_{\text{in}} K_{\text{out}} H(z = e^{j\omega T_0}), & K_0 &= |\mathbf{K}(\Omega_\beta)|, \quad \varkappa \sin \Psi(\Omega_\beta) > 0. \end{aligned} \quad (27)$$

Определяющим параметром в (26) является баланс фаз Ψ , величина которого равна разности набега фазы бетатронных колебаний ($\eta + 2\pi\hat{q}Q_0$) для частицы при ее пролете от датчика положения до дефлектора (с учетом кратности задержки \hat{q}) и изменения фазы детектируемого сигнала $\arg \mathbf{K}(\omega)$ в радиотехнической части цепи обратной связи. Декремент максимален в резонансном случае, когда

$$|\sin \Psi| = 1 \Rightarrow \{Q\} = \{Q_0\}. \quad (28)$$

Таким образом, оптимальные условия для затухания колебаний могут быть получены при $\hat{q} = 0$ не только в случае $|\sin \eta| = 1$, что является обычным требованием при проектировании СП, но и при отклонении от этого условия для набега фазы бетатронных колебаний от датчика положения до дефлектора, если такое отклонение может быть скомпенсировано цифровым фильтром в цепи обратной связи. Вместе с тем необходимо проанализировать последствия подобной компенсации с учетом возможного отклонения рабочей точки по числу бетатронных колебаний от расчетных значений.

1.4. Идеальная система подавления. В простейшем случае, когда передаточная функция цепи обратной связи не зависит от частоты (т. е. $\arg \mathbf{K}(\omega) = 0$) и корректирующее воздействие осуществляется в пределах одного оборота частицы (т. е. кратность задержки $\hat{q} = 0$), максимальный темп затухания когерентных поперечных колебаний достигается в том случае, когда дробная часть набега фазы бетатронных колебаний соответствует четверти длины волны бетатронных колебаний, т. е. при $\eta \equiv \psi_{\text{pd}} = \pm 90^\circ$, что является хорошо известным фактом. СП с такими характеристиками называется идеальной системой подавления когерентных поперечных колебаний. Следует также подчеркнуть, что в идеальной СП погрешность детектирования бетатронных смещений частицы принимается равной нулю (т. е. $\delta x_p = 0$), так что изменение угла наклона траектории частицы $\Delta x'_d(n)$ прямо пропорционально ее

смещению $x(n, s_p)$:

$$\sqrt{\hat{\beta}_p \hat{\beta}_d} \Delta x'_d(n) = g \varkappa x(n, s_p), \quad (29)$$

где знак единичного значения величины \varkappa выбирается таким образом, чтобы выполнялось условие $\varkappa \sin \eta > 0$.

Учитывая тот факт, что идеальная СП часто фигурирует в теоретических рассуждениях, покажем, что характеристическое уравнение для нее может быть получено без применения \mathcal{Z} -преобразования. Действительно [47], подставляя (29) в матричное уравнение (5) при отсутствии возмущающих сил, получаем

$$\widehat{X}(n+1, s) = \widehat{M} \widehat{X}(n, s), \quad \widehat{M} = \widehat{M}(s) + g \varkappa (\hat{\beta}_p \hat{\beta}_d)^{-1/2} \widehat{M}_d \widehat{T} \widehat{M}(s_p | s),$$

где s — произвольная точка на орбите. Затухающие поперечные колебания частиц с отличной от нуля начальной амплитудой возможны, если собственные значения z_r характеристического уравнения

$$\det(z_r \widehat{I} - \widehat{M}) \equiv z_r^2 - z_r \operatorname{tr} \widehat{M} + \det \widehat{M} = 0$$

по абсолютной величине меньше единицы. С учетом конкретных величин в матрицах $\widehat{M}(s)$, $\widehat{M}_d(s + C_0 | s_d)$ и $\widehat{M}(s_p | s)$ характеристическое уравнение принимает вид

$$z_r^2 - (2 \cos \mu + g \varkappa \sin(\mu - \eta)) z_r + 1 - g \varkappa \sin \eta = 0. \quad (30)$$

Данное уравнение совпадает с (23) при замене $\hat{g} = g \varkappa$. В линейном приближении по малому параметру g получается хорошо известный результат: при зафиксированной величине коэффициента обратной связи g максимальный темп подавления когерентных поперечных колебаний отвечает дробной части набега фазы бетатронных колебаний η от детектора до дефлектора, равной $\pm 90^\circ$ (в идеальной СП величина баланса фаз Ψ совпадает с величиной набега фаз $\eta \equiv \psi_{pd}$).

Таким образом, идеальная СП, будучи исключительно теоретической моделью из-за ее чувствительности к δx_p — погрешности измерения бетатронных смещений частицы датчиком положения, будет использоваться в дальнейшем для сравнения с параметрами СП, в которых присутствует цифровой фильтр в цепи обратной связи.

1.5. Реализации цепей обратной связи. В настоящее время в синхротронах используются СП с цифровыми КИХ-фильтрами. Обычно последовательно с узкополосным заграждающим фильтром устанавливается фильтр Гильберта или фильтр первого порядка с конечной импульсной характеристикой (КИХ-фильтр) [25]. Необходимые условия по синхронизации корректирующих воздействий с измеряемыми отклонениями сгустков обеспечиваются

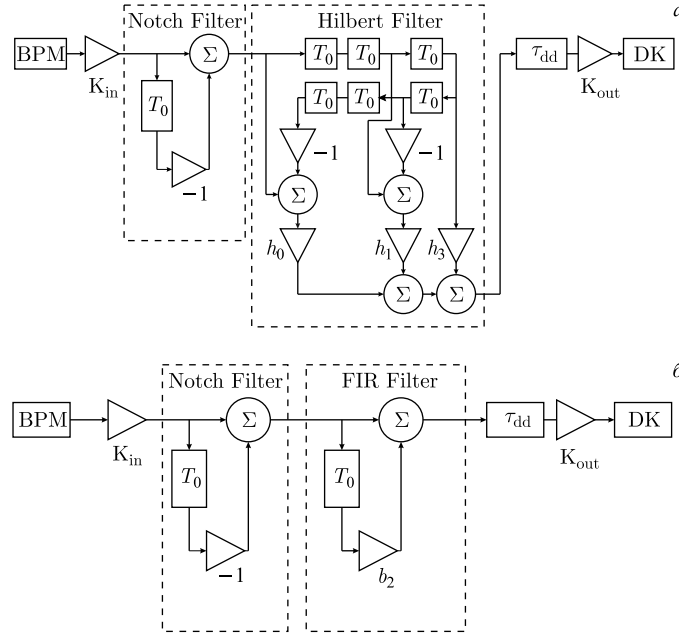


Рис. 3. Схема цепи обратной связи с фильтром Гильберта (а) и КИХ-фильтром (б) [25]

с помощью цифровой задержки τ_{dd} , входящей в состав DSP. В первом случае (см. рис. 3, а) системная функция $H(z)$ цепи обратной связи есть [19]

$$H_{nh}(z) \equiv H_n(z) H_h(z) = (1 - z^{-1})(h_0 z^{-3} + h_1 z^{-2}(1 - z^{-2}) + h_3(1 - z^{-6})) = \\ = (1 - z^{-1}) \left(z^{-3} \cos \varphi + z^{-2}(1 - z^{-2}) \frac{2 \sin \varphi}{\pi} + (1 - z^{-6}) \frac{2 \sin \varphi}{3\pi} \right). \quad (31)$$

Во втором случае (см. рис. 3, б) для $H(z)$ имеем [13]

$$H_{nf}(z) \equiv H_n(z) H_{fl}(z) = (1 - z^{-1})(1 + b_2 z^{-1}). \quad (32)$$

Определим амплитудно-частотную характеристику (АЧХ) цифрового фильтра как $G(Q) \equiv |H(z_Q)/H_0|$, где $z_Q = e^{j2\pi\{Q\}}$ и $|H_0| = |H(z = e^{j2\pi\{Q_0\}})|$. Для фазочастотной характеристики (ФЧХ) используем традиционное определение $\Phi(Q) \equiv \arg H(z_Q)$. Для АЧХ и ФЧХ графики их зависимостей от дробной части числа бетатронных колебаний $\{Q\}$ показаны на рис. 4 для рассматриваемых фильтров при $Q_0 = 59,31$, $\varphi = -59,33^\circ$ и $b_2 = 0,576$. В этом случае $G(Q_0) = 1$ и $\Phi(Q_0) = 0$, за исключением ФЧХ для узкополосного заграждающего фильтра, для которого $\Phi_n(Q_0) = 55,80^\circ$. Таким

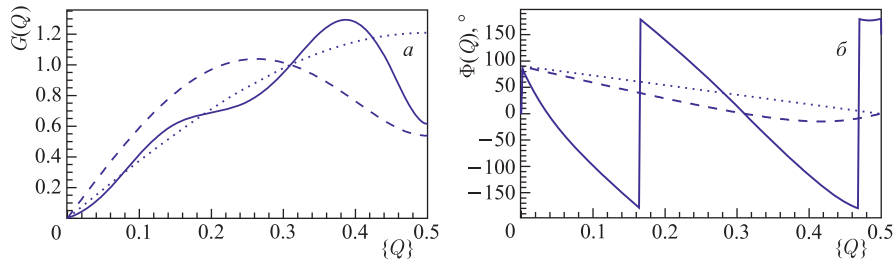


Рис. 4. АЧХ (а) и ФЧХ (б) для СП с системными функциями фильтров $H_{nh}(z)$ (сплошные линии), $H_{nf}(z)$ (штриховые линии) и $H_n(z)$ (пунктирные линии) [25]

образом, введение узкополосного заграждающего фильтра в цепь обратной связи, которое необходимо для исключения влияния δx_p , нарушает баланс фаз Ψ . Нежелательный фазовый сдвиг $\Phi_n(Q_0)$ устраняется подбором параметра φ в фильтре Гильберта или b_2 в КИХ-фильтре (отметим, что параметр b_2 может быть рассчитан по формулам, приведенным в работе [13], что дает численный результат, совпадающий с приведенным выше).

Для расчета декрементов затухающих когерентных поперечных колебаний α необходимо вычислить собственные значения z_r характеристического уравнения (23). Для системной функции $H_n(z)$ имеем алгебраическое уравнение третьей степени, а для $H_{nf}(z)$ — четвертой степени. В этих случаях характеристическое уравнение имеет точные решения в аналитической форме. Для системной функции $H_{nh}(z)$ получается алгебраическое уравнение девятой степени, для которого численные значения девяти корней вычисляются стандартными методами.

В качестве примера на рис. 5 приведены графики зависимостей $|z_r|$ и $\{Q_r\}$ от g при использовании в СП фильтра с системной функцией $H_{nf}(z)$ [39]. Сплошные линии соответствуют собственным значениям $z_{1,2}$ с частотами $\{|Q_{1,2}\}|f_0$, незначительно отличающимся от $\{|Q_0\}|f_0$ при $g < 0,3$. Пунк-

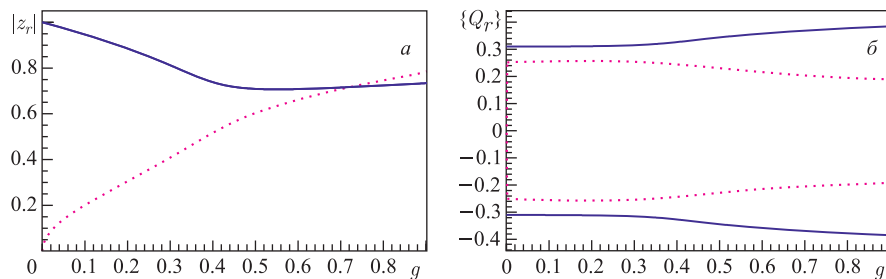


Рис. 5. Графики зависимостей $|z_r|$ (а) и $\{Q_r\}$ (б) от g (системная функция $H_{nf}(z)$) [39]

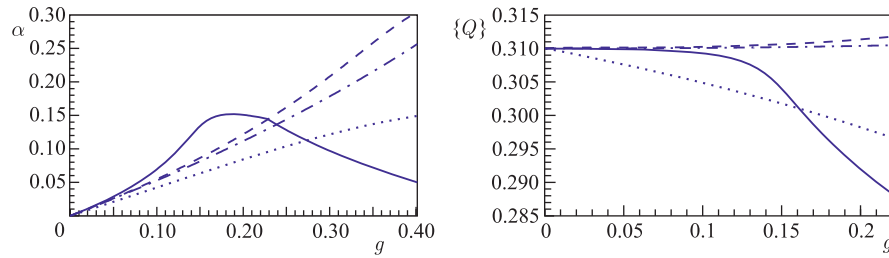


Рис. 6. Зависимости α и $\{Q\}$ от g при $\nu_{pd} = 59,25$ для СП с системными функциями фильтров $H_{nh}(z)$ (сплошные линии), $H_{nf}(z)$ (штриховые линии), $H_n(z)$ (пунктирные линии) и для идеальной СП (штрихпунктирные линии) [39, 47]

тирные линии для $z_{3,4}$ соответствуют быстро затухающим модам колебаний при $g < 0,3$.

На рис. 6 приведены графики зависимостей декремента α от коэффициента обратной связи g при оптимальной расстановке $\nu_{pd} = 59,25$ для различных реализаций цепи обратной связи. Отличия от линейной зависимости α от g заметны уже при $g \cong 0,05$. Следует также подчеркнуть, что отклонение частоты когерентной моды затухающих поперечных колебаний от минимальной моды бетатронной частоты $|\{Q_0\}|f_0$ при росте g сопровождается более резким изменением характера зависимости декремента от g . В результате для СП с фильтром Гильберта имеем $\alpha < 0,16$, причем предельная величина декремента достигается уже при $g \approx 0,20$, в то время как для других типов рассматриваемых СП вплоть до $g \approx 0,40$ рост декрементов сохраняется.

Таким образом, использование линейного приближения для оценок декрементов затухающих колебаний оправдано лишь при $g < 0,04$, т. е. при $T_0/\tau < 0,02$. Как уже отмечалось во введении, работающие на протонных синхротронах системы подавления этому критерию удовлетворяют.

1.6. Влияние взаимодействия ступков. Динамика взаимодействующих ступков в синхротроне для бетатронных смещений i -й частицы $x_i(\hat{s})$ описывается с помощью дифференциальных уравнений [30, 31]

$$\left[\frac{d^2}{d\hat{s}^2} + K(\hat{s}) \right] x_i(\hat{s}) = \frac{1}{m_0 \gamma_0 v_0^2} (F_{bi} + F_{di} + F_{ei}),$$

где переменная $\hat{s} = v_0 t$ может принимать любые значения, не ограниченные интервалом от нуля до C_0 . В приведенном выше уравнении, совпадающем по виду с (1), в компоненте силы F_{bi} учитываются электромагнитные поправки, обусловленные собственным полем ступка, взаимодействием ступков между собой и наведенными полями в стенках вакуумной камеры с конечной проводимостью.

Выполняя процедуру усреднения по N_b частицам в одном m -м сгустке и используя модельное приближение о равенстве дискретных и усредненных непрерывных величин для смещений ($x_m[\hat{s}] = \langle x_i(\hat{s}) \rangle_m$), переходим от уравнения движения отдельной частицы к уравнению движения центра тяжести «жесткого» сгустка:

$$\left[\frac{d^2}{ds^2} + K(s) \right] x_m[n, s] = \frac{1}{m_0 \gamma_0 v_0^2} (\langle F_b \rangle_m + \langle F_d \rangle_m + \langle F_e \rangle_m), \quad (33)$$

где $K(Q_0, s + C_0) = K(Q_0, s)$ описывает фокусирующее действие магнитной системы синхротрона при движении сгустка вдоль расчетной орбиты с периметром C_0 и с числом бетатронных колебаний за оборот Q_0 . Для учета влияния взаимодействия сгустков обычно используется модель, в которой электромагнитные поправки $\langle F_b \rangle_m$, обусловленные собственным полем сгустков, заданы с помощью хвостовых полей [48].

Таким образом, динамика взаимодействующих сгустков в синхротроне для отклонений $x_m[n]$ на каждом n -м обороте ($m \in [1, K_b]$, K_b — число сгустков) описывается с помощью линейных дифференциальных уравнений, а действие системы подавления — линейных разностных уравнений для напряжений $V_m[n]$, возникающих в цифровых фильтрах. Для решения полученной системы линейных уравнений в [49, 50] использован метод \mathcal{Z} -преобразования. Возникающая после \mathcal{Z} -преобразования система линейных уравнений для $\mathbf{x}_m(z) = \mathcal{Z}\{x_m[n]\}$ с постоянными коэффициентами с помощью общеизвестной процедуры [34] приводится к нормальным координатам $\mathbf{v}_m(z)$. В итоге получается характеристическое уравнение для собственных значений z_r :

$$\begin{aligned} z_r^2 - z_r \operatorname{tr} \widehat{\mathbf{M}}(\mathbf{Q}_m, z_r, s) + \det \widehat{\mathbf{M}}(\mathbf{Q}_m, z_r, s) = \\ = z_r^2 - (2 \cos \mu + \hat{g}(z_r) \sin(\mu - \eta)) z_r + 1 - \hat{g}(z_r) \sin \eta = 0, \end{aligned} \quad (34)$$

по форме совпадающее с характеристическим уравнением для «жесткого» сгустка (23), в котором, однако, набег фаз $\mu(\mathbf{Q}_m)$ и $\eta(\mathbf{Q}_m)$ должны быть вычислены с учетом эффективного числа бетатронных колебаний за оборот $\mathbf{Q}_m(z_r) = Q_c + \Delta \mathbf{Q}_m(z_r)$ для конкретной моды колебательного процесса, описываемого с помощью нормальных координат $\mathbf{v}_m(z_r)$ (здесь $Q_c = Q_0 + \Delta Q_0$, где ΔQ_0 — квазистатическая поправка к Q_0). Каждому собственному значению z_r можно сопоставить циклическую частоту $\omega_{(k)}$, так что $j\omega_{(k)} T_0 = j2\pi k + \ln z_r(\mathbf{Q}_m)$, где k — целое число. Поскольку в первом приближении по силе взаимодействия сгустков при выключенной системе подавления имеем $z_r = \exp(\pm j2\pi Q_c)$, то для комплексных поправок $\Delta \mathbf{Q}_m(\omega_{(k)})$ в этом же приближении получаются выражения, совпадающие с известным результатом для неустойчивостей сгустков и сплошного пучка [49] в зависимости от частоты $\omega_{(k)} = (\pm \{Q_c\} + k)\omega_0$. Например, для большого числа

сгустков ($K_b \gg 1$) для высоких частот $\omega_{(k)}$, когда электромагнитное поле не проникает сквозь стенки (толщиной d) вакуумной камеры с апертурой $2b$, имеем

$$\Delta \mathbf{Q} \simeq -\nu_b K_b (1 - j) \frac{\delta}{b}, \quad \nu_b = \frac{r_0 N_b \hat{\beta}_{av}}{2\pi \gamma_0 b^2}, \quad \delta \equiv \sqrt{\frac{2\rho}{\mu_0 \omega_{(k)}}}.$$

Здесь ν_b — параметр, характеризующий взаимодействие сгустков; N_b — число частиц в сгустке; r_0 — классический радиус частицы [31]; $\hat{\beta}_{av}$ — среднее значение $\hat{\beta}$ -функции по длине орбиты [51]; $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м — магнитная постоянная; δ — величина скин-слоя для стенок камеры с удельным электрическим сопротивлением ρ . Для низких частот, когда электромагнитное поле проникает сквозь стенки вакуумной камеры, имеем

$$\Delta \mathbf{Q} \simeq -\frac{2\nu_b K_b}{1 + j\omega_{(k)} T_1},$$

где T_1 — время диффузии поля в проводящие стенки камеры [51].

Наряду с периодичностью частот собственных волн, равной $k\omega_0$, для каждого k происходит расщепление $\omega_{(k)}$ на K_b спутников вследствие того, что $\Delta \mathbf{Q}_m$ есть функция от $K_b^{-1} \ln z_r$. Для большого числа сгустков K_b максимальный разброс $\Delta \mathbf{Q}^{(\max)}$ для спутниковых мод возникает в синхротронах с большой протяженностью орбиты в случае проникновения электромагнитного поля сгустков сквозь стенки вакуумной камеры [49]:

$$\Delta \mathbf{Q}^{(\max)}(\omega_{(k)}) = -\frac{2\nu_b K_b}{1 + j\omega_{(k)} T_1}.$$

Таким образом, разброс частот спутниковых мод пропорционален инкременту неустойчивости $\nu_b K_b$. Набег фазы бетатронных колебаний η от датчика до дефлектора зависит от $(Q_c + \text{Re } \Delta \mathbf{Q}^{(\max)}(\omega_{(k)}))$. Поэтому обеспечить строгое выполнение оптимальных условий (28) для подавления всех мод когерентных поперечных колебаний взаимодействующих сгустков одновременно невозможно [49].

1.7. Допуск на отклонение рабочей точки. *1.7.1. Основные соотношения и допущения.* Особенностью бетатронных колебаний нескольких сгустков является возможное отличие продольной энергии конкретного сгустка от расчетного значения. Такие сгустки движутся вдоль орбиты, отличной от расчетной, в результате чего их частота бетатронных колебаний смещается относительно расчетного значения. Такая же ситуация может возникнуть для инжектируемого сгустка при смещении рабочей точки (величины частоты бетатронных колебаний) вследствие неустойчивости ускорительных

циклов или при изменении интенсивности пучка, что приводит к когерентному сдвигу частоты бетатронных колебаний. Таким образом, наряду с зависимостью декремента α от коэффициента обратной связи g возникает зависимость декремента от эффективной величины \tilde{Q} или от мгновенной величины Q при случайном смещении δQ_0 положения рабочей точки относительно расчетной величины Q_0 . Выше было показано, что декременты и сдвиги частот затухающих когерентных поперечных колебаний вычисляются для собственных значений z_r характеристического уравнения, параметрами которого являются коэффициент обратной связи $\hat{g}(z)$ и набег фаз μ и η . Пусть места размещения s_p датчика положения и s_d демпфирующего дефлектора зафиксированы, однако набег фазы бетатронных колебаний за оборот $\mu \equiv \mu(\tilde{Q}) = 2\pi\tilde{Q} = 2\pi(\tilde{Q} - Q_0) + \mu(Q_0)$ отличен от расчетного значения $\mu(Q_0) = 2\pi Q_0$. Тогда $\eta \equiv \eta(\tilde{Q}) = (1 + \delta Q_0/Q_0) \eta(Q_0)$ для небольших вариаций $\delta Q_0 \equiv (\tilde{Q} - Q_0)$.

Для идеальной СП декремент зависит только от набега фазы бетатронных колебаний η между датчиком положения и дефлектором:

$$\alpha \equiv \frac{T_0}{\tau_d} = -\frac{1}{2} \ln(1 - g |\sin \eta(\tilde{Q})|).$$

На рис. 7, а изображен трехмерный график для функциональной зависимости $\alpha(g, \delta Q_0)$ для $Q_0 = 59,31$ и $\Psi(Q_0) = 2\pi \cdot 59,25$, т. е. при оптимальном набеге фазы бетатронных колебаний между датчиком положения и демпфирующим дефлектором на расчетной орбите.

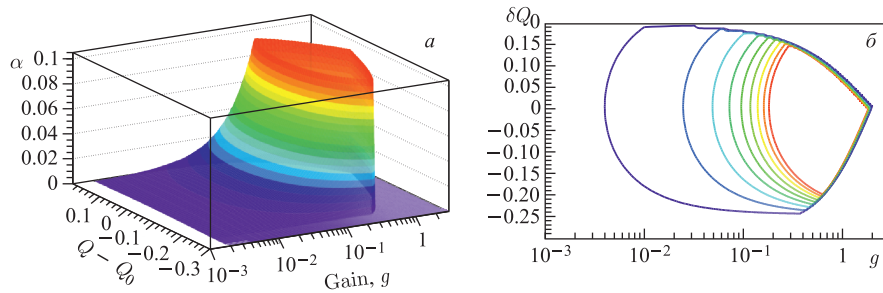


Рис. 7. График для $\alpha(g, \delta Q_0)$ (а) и карта изолиний $\alpha(g, \delta Q_0) = \alpha_l$ (б) [47]

1.7.2. Карта изолиний для декрементов. Зависимость декремента $\alpha(g, \delta Q_0)$ как функции двух переменных можно представить на плоскости $(g, \delta Q_0)$ в виде карты изолиний — семейства линий, для каждой из которых величина декремента имеет постоянное значение α_l [47]. Например, можно выбрать следующее семейство изолиний:

$$\alpha(g, \delta Q_0) = \alpha_l, \quad \alpha_0 = 0,002, \quad \alpha_l = l/80, \quad l \in [1, 8].$$

График таких изолиний $\alpha(g, \delta Q_0) = \alpha_l$ изображен на рис. 7, б. Минимальное значение для α_l выбрано таким образом, чтобы его можно было сопоставить с наблюдаемым декрементом естественного затухания когерентных колебаний за оборот T_0 вследствие фазового перемешивания частиц [47, 52, 53]:

$$\frac{T_0}{\tau_{\text{dec}}} = \frac{T_0}{\tau_{\xi}} + \frac{T_0}{\tau_a} + \dots,$$

величина которого складывается из декрементов, обратно пропорциональных постоянным времени (τ_{ξ} , τ_a , ...) возможных процессов, обусловленных хроматичностью бетатронных колебаний в магнитной структуре синхротрона, зависимостью частоты таких колебаний от их амплитуды (нелинейность колебаний) и другими эффектами. Обычно постоянная времени τ_{dec} фазового перемешивания для когерентных бетатронных колебаний, инициированных толчком, отождествляется с полным разбросом частиц $2\Delta Q_p$ по частотам бетатронных колебаний вследствие их хроматичности $\hat{\xi}_p$ в магнитной структуре синхротрона:

$$\frac{T_0}{\tau_{\text{dec}}} \cong 2 \Delta Q_p, \quad \Delta Q_p = |\hat{\xi}_p| Q_0 2\sigma_p,$$

где σ_p — среднеквадратичный импульсный разброс частиц в пределах ступка. Так, в ЛНС $\sigma_p \cong 2,3 \cdot 10^{-4}$ и $\hat{\xi}_p Q_0 \approx 1,5-2,5$ для протонного пучка при инжекции [44]. Таким образом, τ_{dec} составляет около пятисот оборотов: $\tau_{\text{dec}} \cong 500T_0$. Эта величина будет далее использоваться в качестве оценки минимального темпа затухания когерентных бетатронных колебаний:

$$\frac{T_0}{\tau_d} > \frac{T_0}{\tau_{\text{dec}}} \equiv \alpha_0. \quad (35)$$

Замкнутую кривую $\alpha(g, \delta Q_0) = \alpha_0$ можно рассматривать как линию, разделяющую режимы активного подавления когерентных поперечных колебаний с помощью СП и режимы, где конкурируют процессы, обусловленные фазовым перемешиванием частиц и крайне незначительным демпфированием колебаний с помощью СП. Поэтому эту замкнутую разделительную линию можно отождествлять с сепаратрисой для декрементов затухающих когерентных поперечных колебаний стабильного пучка. Внутри сепаратрисы малые когерентные бетатронные колебания являются затухающими. Например, постоянная времени $\tau_d \leq 10T_0$ для таких колебаний отвечает значениям g и δQ_0 , которые лежат внутри замкнутой кривой, соответствующей индексу $l = 8$ (минимальная область на рис. 7, б). Здесь, например, $|\delta Q_0| < 0,14$ при $g = 0,3$. Следует отметить, что в соответствии с характеристическим уравнением (30) вертикальный размер сепаратрисы ограничен величинами $\{\tilde{Q}\} = 0,5$ и $\delta Q_0 > -0,25$ при $\{Q_0\} > 0,25$ (или $\{\tilde{Q}\} = 0$ и $\delta Q_0 < 0,25$ при $\{Q_0\} < 0,25$), причем размер по δQ_0 максимален при $|\sin \Psi| = 1$.

При анализе решений характеристического уравнения (23) для СП с цифровыми фильтрами в цепи обратной связи следует учитывать зависимость декремента от параметров фильтра. Так, если в качестве цифрового фильтра используется последовательная цепь из узкополосного заграждающего фильтра и фильтра Гильберта (системная функция фильтра $H_{nh}(z)$, см. (31)), то декремент α зависит от коэффициента обратной связи g , числа бетатронных колебаний \tilde{Q} , набега фазы бетатронных колебаний $\Psi(\tilde{Q})$ от датчика положения до дефлектора и параметра фильтра φ , т. е. $\alpha = f(g, \delta Q_0; \Psi(\tilde{Q}), \varphi)$. Если в качестве цифрового фильтра используется последовательная цепь из узкополосного заграждающего фильтра и КИХ-фильтра первого порядка (системная функция фильтра $H_{nf}(z)$, см. (32)), то $\alpha = f(g, \delta Q_0; \Psi(\tilde{Q}), b_2)$. Выше было получено, что для каждой расстановки датчиков положения и дефлекторов, приводящей к набегу фаз Ψ , можно подобрать параметры цифрового фильтра таким образом, чтобы баланс фаз Ψ был оптимальным ($|\sin \Psi| = 1$), а декремент — максимальным. Пусть эти фазовые соотношения обеспечиваются для рассматриваемых цифровых фильтров $H_{nh}(z)$ или $H_{nf}(z)$ на расчетной орбите при $Q_0 = 59,31$ для набега фаз $\Psi = 2\pi \cdot 59,25$, что достигается при $\varphi = -59,33^\circ$ или $b_2 = 0,576$. При изменении \tilde{Q} в интервале $|\tilde{Q} - Q_0| < 0,1$ имеем $|\Delta\mu| < 36^\circ$, в то время как $|\Phi(\tilde{Q}) - \Phi(Q_0)| < 130^\circ$ для $H_{nh}(z)$ и $|\Phi(\tilde{Q}) - \Phi(Q_0)| < 25^\circ$ для $H_{nf}(z)$ (см. графики ФЧХ на рис. 4). Следствием такого поведения ФЧХ является сильная зависимость высоты сепаратрисы для декрементов затухающих когерентных поперечных колебаний ступков от величины вариации \tilde{Q} при фиксированных параметрах рассматриваемых фильтров (φ или b_2). Графики изолиний для декрементов $\alpha(g, \delta Q_0)$ подтверждают данное утверждение (см. рис. 8). Так, для СП с цифровым фильтром $H_{nh}(z)$ постоянная времени затухания $\tau_d \leq 10T_0$ обеспечивается в интервале $0 < \tilde{Q} - Q_0 < 0,02$ при $g = 0,15$ (наименьшая область внутри замкнутой кривой с индексом $l = 8$ на рис. 8, *a*). Если $\tau_d \leq 40T_0$, то $-0,022 < \tilde{Q} - Q_0 < 0,035$ при $g = 0,1$ (область внутри замкнутой кривой с индексом $l = 2$, т. е. третья кривая на рис. 8, *a*). С другой стороны, для СП с цифровым фильтром $H_{nf}(z)$ наименьшая область внутри замкнутой кривой с

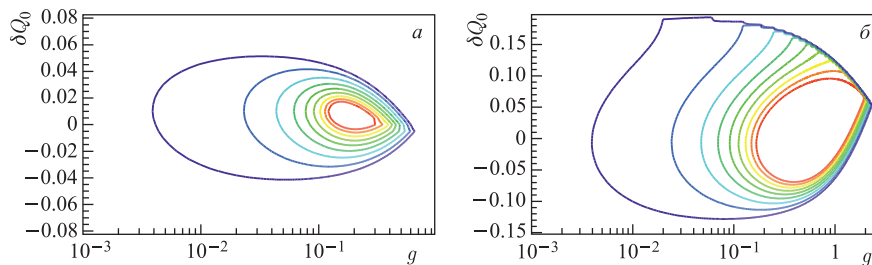


Рис. 8. Графики изолиний для декрементов $\alpha(g, \delta Q_0)$: $H_{nh}(z)$ (*a*) и $H_{nf}(z)$ (*b*) [47]

индексом $l = 8$ на рис. 8, б, где $\tau_d \leq 10T_0$, отвечает допуску $|\tilde{Q} - Q_0| < 0,065$ для $g = 0,3$. Таким образом, высота сепаратрисы для декрементов наименьшая для СП, в которой используется фильтр Гильберта. Высота сепаратрисы для декрементов для СП, в которой используется КИХ-фильтр первого порядка, будучи большей величиной по сравнению с СП с фильтром Гильберта, меньше для идеальной СП.

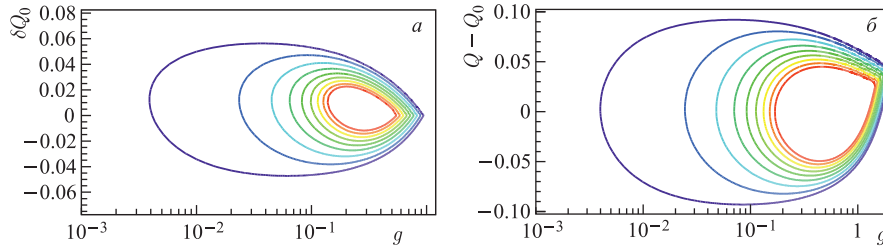


Рис. 9. Графики изолиний для декрементов $\alpha(g, \delta Q_0)$: $H_{nh}(z)$ (а) и $H_{nf}(z)$ (б)

Вместе с тем необходимо подчеркнуть, что высота сепаратрисы для декрементов максимальна при $|\sin \Psi| = 1$. Это утверждение является фактом для идеальной СП и может быть легко подтверждено расчетами для изолиний для рассматриваемых СП. На рис. 9 приведены графики изолиний при $\Psi = 2\pi \cdot 59,1$. Оптимальный баланс фаз $|\sin \Psi| = 1$ достигается при $\varphi = 66^\circ$ для $H_{nh}(z)$ или $b_2 = 2,518$ для $H_{nf}(z)$. Таким образом, подбирая параметр цифрового фильтра φ или b_2 , можно обеспечить максимальный темп подавления когерентных поперечных колебаний даже в том случае, когда расстановка ВРМ и ДК отлична от оптимальной. При этом высота сепаратрисы для декрементов остается практически неизменной для СП с фильтром Гильберта и уменьшается до $|\tilde{Q} - Q_0| < 0,1$ при использовании КИХ-фильтра в цепи обратной связи. Однако даже это минимальное значение превосходит высоту сепаратрисы для декрементов $|\tilde{Q} - Q_0| < 0,05$ при использовании СП с фильтром Гильберта.

1.8. Отклик пучка на дельта-импульс. 1.8.1. Основные соотношения. Соответствие расчетных и измеренных декрементов затухающих когерентных поперечных колебаний можно установить, выявляя экспоненциальный закон затухания сигнала с ВРМ для остаточных колебаний после инжекции. Пример сигнала с ВРМ после инжекции сгустка в ЛНС приведен на рис. 10, а при энергии протонов 450 ГэВ [15]. В течение нескольких оборотов после инжекции сигнал с ВРМ зависит не только от начальных условий $\hat{X}[0, s]$, но и от погрешности измерения δx_p бетатронных смещений колеблющейся частицы в месте расположения ВРМ, что следует из выражения для $\hat{X}(z, s)$. Вследствие этого форма сигнала зависит от процессов в цифровом фильтре при переходе от нулевых начальных условий к реальным, отвечающим δx_p .

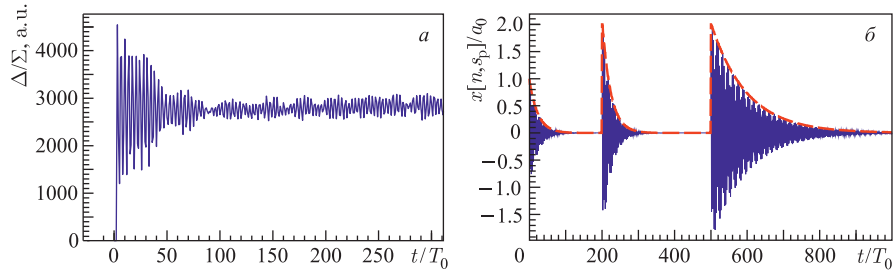


Рис. 10. Сигнал с ВРМ после инъекции [15] (а) и отклик пучка на два толчка [39] (б)

В работе [54] предложена процедура, позволяющая учесть этот переходной процесс. Однако точность определения декрементов, к сожалению, недостаточна для качественной настройки СП.

Внешнее воздействие в виде дельта-импульса приводит к появлению в выражении для $\hat{\mathbf{X}}(z, s)$ слагаемого, пропорционального $\mathcal{Z}\{\Delta x'_e[n]\}$:

$$\mathcal{Z}\{\Delta x'_e[n]\} = \frac{a_e z^{-n_e}}{(\hat{\beta}_p \hat{\beta}_d)^{1/2}}.$$

Пользуясь теоремой для вычетов, получаем, что затухающие колебания, обусловленные этим слагаемым, возникают в момент времени $n_e T_0$ и имеют те же декременты и частоты, что и остаточные колебания сгустка после инъекции, однако форма сигнала с ВРМ не зависит от δx_p .

Пример расчетной зависимости сигнала с ВРМ от $n = t/T_0$ показан на рис. 10, б [39]. Здесь первый ВЧ-импульс соответствует остаточным колебаниям после инъекции, а второй и третий — затухающим колебаниям после толчков, инициированных дельта-импульсом. Затухание колебаний, обусловленных остаточными колебаниями и первым толчком в момент времени $100T_0$, соответствует коэффициенту обратной связи $g = 0,08$. Из (23) имеем $\alpha_{\min} = -\ln |z_r^{(\max)}| = T_0/\tau = 0,0429$, что отвечает более высокому темпу подавления когерентных колебаний по сравнению с $g/2$, получающимся в линейном приближении (27). Для второго толчка при $t = 400T_0$, где $g = 0,02$, имеем $\alpha_{\min} = 0,01$ из (23), что согласуется с (27). Огибающие ВЧ-сигналов (штриховые линии) вычислены согласно величинам $\alpha_{\min}(g)$ и хорошо их аппроксимируют.

Таким образом, осуществляя «подгонку» (фитирование) расчетных кривых под экспериментальные данные для колебаний, инициированных дельта-импульсом, можно оценить величину декремента. Эта процедура использовалась на коллайдере ЛНС для определения декрементов затухающих колебаний протонного сгустка при энергии инъекции 450 ГэВ [15] и после ускорения при энергии 3,5 ТэВ [55].

1.8.2. *Сравнение с экспериментальными результатами.* Для системы подавления когерентных поперечных колебаний протонного пучка в LHC рабочий режим при демпфировании остаточных колебаний после инжекции продекларирован с постоянной затухания $\tau = 40T_0$ [44, 56].

Пример расчетных величин декрементов α приведен на рис. 11, а [39] для одного из четырех каналов от двух BPM до двух секций ДК в одной плоскости колебаний (всего в СП на LHC используются 16 каналов для DSP: в горизонтальной и вертикальной плоскостях колебаний на двух кольцах коллайдера [15]). Приведенные на рис. 11, а четыре расчетные зависимости для вертикальных колебаний вычислены согласно (23) для реальных параметров СП в LHC, где используется цифровой фильтр Гильберта. Видно, что зависимости для декрементов совпадают при $g < 0,09$, но различаются при $g > 0,1$.

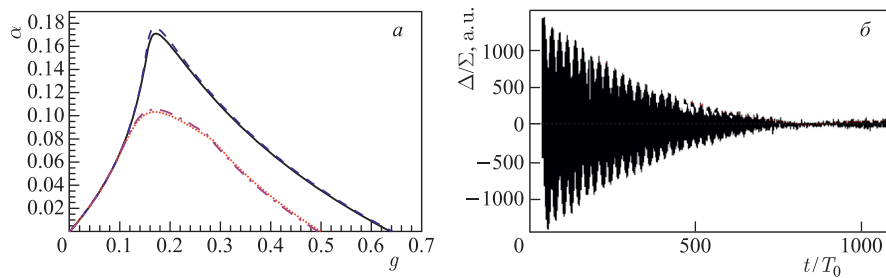


Рис. 11. Декременты α в зависимости от g [39] (а) и сигнал с BPM при энергии протонов 3,5 ТэВ [55] (б)

Экспериментально измеренные величины декрементов в зависимости от коэффициента передачи $|\mathbf{K}(\omega)|$ радиотехнической части цепи обратной связи приведены в работе [55]. Измерения были выполнены при энергии протонного пучка 3,5 ТэВ для одного сгустка номинальной интенсивности 10^{11} частиц. Пример сигнала с датчика положения BPM при энергии протонов 3,5 ТэВ и $g \approx 0,01$ приведен на рис. 11, б [55]. Сравнение расчетных зависимостей и измеренных величин декрементов $\alpha = T_0/\tau$ от коэффициента обратной связи g показано на рис. 12 [39, 46].

Для расчетных зависимостей использовались экспериментальные величины для φ , что объясняет разброс этих зависимостей. Для всех расчетных зависимостей отчетливо прослеживается отличие от линейного приближения $g/2$ при возрастании g . Экспериментально наблюдаемые при этом декременты колебаний хорошо согласуются с расчетом для коэффициентов обратной связи $0,004 < g < 0,08$.

Для всех электростатических дефлекторов используется одно и то же отклоняющее напряжение на их пластинах, однако величины $\hat{\beta}$ -функций в местах расположения дефлекторов отличаются друг от друга. Максималь-

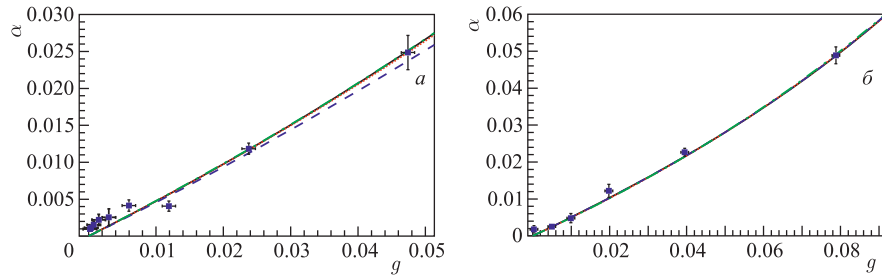


Рис. 12. Расчетные декременты (кривые) и результаты измерений декрементов горизонтальных (а, пучок 1) и вертикальных (б, пучок 2) когерентных поперечных колебаний [39,46]

ная величина $\hat{\beta}$ -функций соответствует расположению дефлекторов, которые используются для подавления вертикальных когерентных поперечных колебаний протонного пучка, вращающегося против часовой стрелки (пучок 2). На рекордной в мире энергии протонного пучка 3,5 ТэВ получен расчетный декремент $\alpha = 0,025$, а для одного из пучков (вертикальные колебания, пучок 2) величина декремента составляла $\alpha = 0,05$, что в два раза превышает проектную величину.

Поскольку сила демпфирующего воздействия в ДК ограничена мощностью оконечных усилителей в СП, то продвинуться в область $g > 0,08$ для более качественной настройки СП не представляется возможным. Следует также отметить, что фитирование экспериментальных данных для сигнала с измерительного датчика при высоких темпах затухания требует более аккуратного учета вклада всех гармоник собственных частот в форму сигнала. Это существенно ограничивает область применения метода возбуждения когерентных колебаний дельта-импульсом для настройки СП, который, однако, является наиболее удобным методом установления областей параметров СП, где обеспечивается затухание когерентных поперечных колебаний.

1.9. Отклик пучка на гармоническое воздействие. 1.9.1. Резонансная кривая. Поскольку СП обеспечивает демпфирование когерентных поперечных колебаний, то можно исследовать реакцию пучка на ограниченное во времени гармоническое воздействие. На рис. 13, а приведена расчетная зависимость смещений сгустка $x[n, s_p]$ от n для реального варианта СП на ЛНС при подавлении когерентных вертикальных колебаний ($Q_0 = 59,32$) в пучке 2 при столкновении сгустков [47]. Соответствующие графики для декрементов приведены на рис. 11. Оптимальные фазовые соотношения обеспечиваются с помощью фильтра Гильберта. Расчет проведен по формулам (5), (11), (13) и (8) для гармонического возбуждения с $Q_e = 0,316$, которое включается в момент времени $t = n_e T_0 = 100T_0$ и выключается через 300 оборотов ($a_e = a_0$, $\phi_e = 0$, $g = 0,08$, набег фазы бетатронных колебаний от ВРМ до

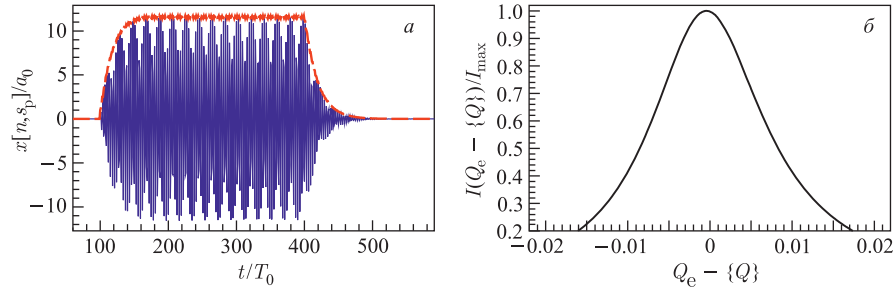


Рис. 13. Зависимость смещений $x[n, s_p]$ от $n = t/T_0$ (а) и резонансная кривая [47] (б)

толкателя К выбран равным $\psi_{pe} = 2\pi \cdot 58,3$). Видно, что через 100 оборотов после включения внешнего возбуждения устанавливается режим с амплитудой колебаний, примерно в 12 раз превосходящей амплитуду возбуждения $a_e = a_0$ (огibaющая ВЧ-сигнала — штриховая линия на рис. 13, а). Изменяя Q_e , получаем набор зависимостей амплитуд колебаний $a(n, Q_e - \{Q_0\})$ от n и $(Q_e - \{Q_0\})$ при фиксированных величинах коэффициента обратной связи g , Q_0 , коэффициентов $h[i]$ цифрового фильтра и прочих параметров СП. Хотя амплитуда вынужденного колебания и возрастает при приближении Q_e к $\{Q_0\}$, она не обращается в бесконечность, как это происходит при резонансе в отсутствие СП.

Когда ступок совершает вынужденные колебания, то в области установившихся колебаний его поперечная энергия $I(Q_e)$ в среднем остается неизменной: на каждом обороте ступок получает дополнительный поперечный импульс после пролета толкателя, который компенсируется после пролета демфирующего дефлектора. Величина $I(Q_e)$ пропорциональна квадрату амплитуды установившихся колебаний. Поэтому для резонансной кривой имеем согласно (20) и (14) [39]

$$\frac{I(Q_e)}{I_{\max}} = \frac{1}{I_{\max}} \left| \det \left(z_e \hat{I} - \widehat{\mathbf{M}}(z_e) \right) \right|^{-2}, \quad z_e = e^{j2\pi\{Q_e\}}, \quad (36)$$

где $I_{\max} = I(Q_e^{\max})$. Пример резонансной кривой (36) приведен на рис. 13, б для тех же параметров СП, что и на рис. 13, а ($g = 0,08$).

1.9.2. Коэффициент резонансного усиления. Используя метод \mathcal{Z} -преобразования, нетрудно решить разностное уравнение (6) с учетом выражений (9) для начальных условий, уравнений (11) и (13) для демфирующих воздействий и уравнения (8) для возмущающей силы. В итоге для установившихся колебаний в месте расположения датчика положения вблизи резонансного значения (в соответствии с (27) в линейном приближении $g \ll 1$) имеем

$$x[n] \Big|_{n-n_e \gg 1/\alpha} = a_e R_e u[n - n_e] \sin(2\pi n Q_e - \delta_e - \eta_e),$$

где

$$R_e = \frac{1}{2\sqrt{4\pi^2(\{Q\} - \{Q_e\})^2 + \alpha^2}}, \quad \operatorname{tg} \delta_e = \frac{\alpha}{2\pi(\{Q\} - \{Q_e\})}.$$

Максимальная величина коэффициента резонансного усиления амплитуды вынужденных колебаний есть

$$R_e^{(\max)} = \frac{1}{2\alpha}. \quad (37)$$

Таким образом, при увеличении демпфирующих свойств системы подавления (при росте декремента α) пучок становится менее податливым по отношению к внешним поперечным возмущающим факторам. В результате для (36) получается следующее выражение:

$$\frac{I(Q_e)}{I_{\max}} = \left(\frac{R_e}{R_e^{(\max)}} \right)^2 = \frac{\alpha^2}{4\pi^2(\{Q_e\} - \{Q\})^2 + \alpha^2}.$$

Эта функция совпадает с резонансной кривой [34], которая обычно используется для анализа вынужденных колебаний при наличии трения. Полученная функция имеет максимум при

$$\{Q_e^{(\max)}\} = \{Q\} = \{Q_0\} - \frac{g|\mathbf{K}(\omega)|}{4\pi K_0} \varkappa \cos \Psi.$$

Таким образом, максимум резонансной кривой смещается относительно бетатронной частоты при нарушении баланса фаз. Одинаковые уровни амплитуд установившихся колебаний соответствуют смещению резонансной кривой. Полуширина резонансной кривой на ее полувысоте равна примерно $\alpha/2\pi$. График, представленный на рис. 13, б, подтверждает эти выводы.

1.9.3. Сравнение с экспериментальными результатами. Поскольку смещение частоты когерентных поперечных колебаний в синхротронах с системой обратной связи пропорционально $g \varkappa \cos \Psi$, данный эффект был использован для тонкой настройки баланса фаз Ψ системы подавления когерентных поперечных колебаний пучка в ЛНС [57, 58]. Действительно, при заданном режиме динамики частиц пучка по числу бетатронных колебаний Q_0 и при фиксированном размещении демпфирующего дефлектора относительно детектора можно в небольших пределах изменить параметры цифрового фильтра с целью проверки факта оптимальности величины Ψ . Например, в системе подавления когерентных поперечных колебаний пучка в ЛНС для установления оптимального баланса фаз используется фильтр Гильберта, для которого АЧХ и ФЧХ зависят от фазового параметра φ . Пусть величине φ_0 отвечает оптимальный баланс фаз $\Psi(Q_0, \varphi_0)$:

$$\varkappa \sin \Psi(Q_0, \varphi_0) = 1, \quad \Psi(Q_0, \varphi_0) = \eta(Q_0) + 2\pi \hat{q} Q_0 - \psi_f(Q_0, \varphi_0),$$

где $\psi_f \equiv \arg(H(Q_0, \varphi))$ — фазовый сдвиг, возникающий при прохождении сигнала по радиотехнической цепи обратной связи. Тогда при небольших отклонениях $\delta\varphi_0$ от оптимального значения φ_0 получаем

$$\Psi(Q_0, \varphi = \varphi_0 + \delta\varphi_0) = \Psi(Q_0, \varphi_0) + \delta\psi_f(\varphi),$$

где

$$\delta\psi_f(\varphi) \equiv \psi_f(Q_0, \varphi_0) - \psi_f(Q_0, \varphi = \varphi_0 + \delta\varphi_0).$$

Отсюда следует

$$\Delta Q = -\frac{g\kappa}{4\pi} \cos \Psi(Q_0, \varphi_0 + \delta\varphi_0) = \frac{g}{4\pi} \sin(\delta\psi_f(\varphi)).$$

Таким образом, изменение частоты бетатронных колебаний при отклонении от оптимального режима пропорционально коэффициенту обратной связи g и приросту фазового набега $\delta\psi_f$. В оптимальном режиме частота бетатронных колебаний не зависит от g . Измерим величину Q_0 при отключенной системе подавления. Включив систему подавления и установив небольшую величину g , можно измерить постоянную времени затухания когерентных колебаний $\tau_d = T_0/\alpha = 2T_0/g$, тем самым задав коэффициент наклона исследуемой зависимости. Затем можно измерить зависимость частоты бетатронных колебаний от величины фазового параметра φ фильтра Гильберта. Если исходный режим при Q_0 был оптимальным, то изменение частоты вблизи Q_0 должно отвечать линейной зависимости от φ , а декремент иметь максимальную величину.

На рис. 14 приведена расчетная зависимость числа $\{Q\} \equiv \{Q_0\} + \Delta Q$ для когерентных бетатронных колебаний от фазового параметра φ фильтра Гильберта. При выключенной системе подавления положению рабочей точки по Q_0 отвечает величина $\{Q_0\} = 0,2785$. Этому значению согласно расчетной зависимости, приведенной на графике рис. 14, *a*, отвечает величина $\varphi = -100^\circ$. При этом измеренная величина постоянной времени затухания

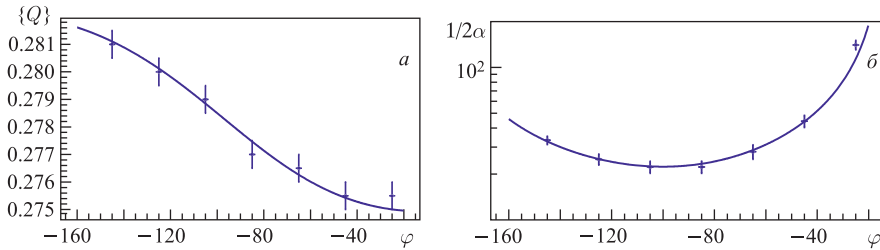


Рис. 14. Расчетные зависимости величины $\{Q\}$ (*a*) и коэффициента резонансного усиления (*b*) от фазового параметра φ фильтра Гильберта (сплошные линии) [59] в сопоставлении с результатами экспериментальных измерений [57]

составляла $\tau_d = 44,64 T_0$, т. е. $g = 0,045$. Таким образом, все параметры расчетной зависимости заданы своими экспериментально наблюдаемыми величинами. Приведенные результаты измерений частот бетатронных колебаний в заданном диапазоне величин φ указывают на хорошее соответствие расчетных и экспериментальных данных. Бетатронные частоты регистрировались с использованием метода высокочувствительных измерений бетатронных колебаний, инициированных внутренними шумами различных ускорительных систем [60].

В соответствии с (37) максимальный отклик на внешнее возбуждение зависит от декремента затухающих когерентных колебаний, для которого согласно (27) имеем

$$\alpha = \frac{g}{2} \kappa \sin \Psi(Q_0, \varphi_0 + \delta\varphi_0) = \frac{g}{2} \cos(\delta\psi_f(\varphi)).$$

Отсюда для коэффициента резонансного усиления получаем

$$R_e^{(\max)} = \frac{1}{2\alpha} = \frac{1}{g \cos(\delta\psi_f(\varphi))}.$$

Зависимость коэффициента резонансного усиления от фазового параметра φ фильтра Гильберта приведена на рис. 14, б. Здесь же представлены экспериментальные данные, хорошо согласующиеся с расчетными. Минимальному значению этой кривой отвечает $\varphi = -100^\circ$, что согласуется с данными рис. 14, а.

Таким образом, совместные измерения частоты бетатронных колебаний и коэффициента резонансного усиления позволяют обеспечить высокую точность настройки баланса фаз. Приведенные экспериментальные данные подтверждают наличие линейной поправки к частоте когерентных бетатронных колебаний при отклонении баланса фаз от оптимального режима.

1.10. Особенность решений характеристического уравнения вблизи полуцелого числа бетатронных колебаний Q_0 . Устойчивость пучка при наличии системы подавления когерентных поперечных колебаний и значениях Q_0 , близких к полуцелому числу, была исследована экспериментально на синхротроне SPS (ЦЕРН) [61]. Было обнаружено, что для величин коэффициента обратной связи, превышающих инкремент неустойчивости, пучок устойчив при $Q_0 = 26,582$, причем постоянная затухания уменьшается с ростом g , а стабильность пучка в целом улучшается (см. рис. 15, а). Такое поведение пучка согласуется с теоретическими предсказаниями. Однако при $Q_0 = 26,536$ диапазон величин g , при которых захваченный пучок был устойчив, резко сокращался. Еще уже данный диапазон был при $Q_0 = 26,522$, причем, начиная с некоторых значений g , не удавалось сохранить пучок даже после инъекции.

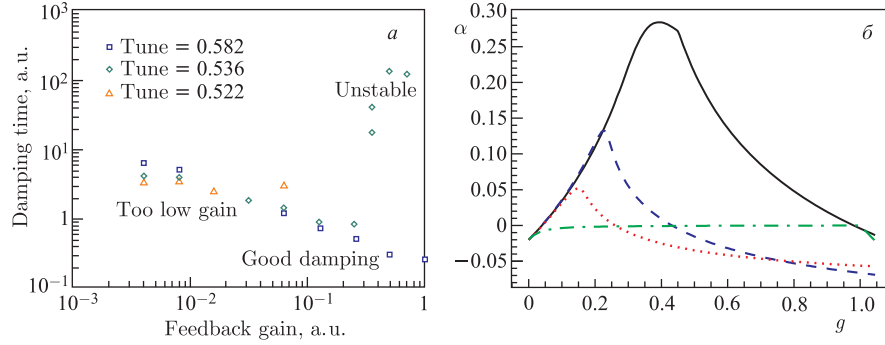


Рис. 15. Результаты измерений постоянной затухания [61] (а) и расчетные величины [62] декрементов α в зависимости от g для значений Q_0 : 26,582 (сплошная линия), 26,536 (штриховая), 26,522 (пунктирная), 26,500 (штрихпунктирная) (б)

Специфическое поведение решений z_r характеристического уравнения для значений Q_0 , близких к полужелтому числу, нетрудно установить при разложении решений для z_r по малому параметру $\tilde{\delta} = |\{Q_0\}| - 0,5$. Действительно, если $|\{Q_0\}| \rightarrow 0,5$, то даже в идеальном случае (оптимальная расстановка $|\sin \eta| = 1$ и идеальная цепь обратной связи $\arg \mathbf{K} = 0$) имеем из точного уравнения (30)

$$z_{1,2} = -\left(1 - \frac{g\kappa}{2}\right) \cos(2\pi\tilde{\delta}) \pm j\sqrt{\left(1 - \frac{g\kappa}{2}\right)^2 \sin^2(2\pi\tilde{\delta}) - \frac{g^2}{4}}.$$

Таким образом, при $\tilde{\delta} \rightarrow 0$ одно из решений z_r может стать незатухающим колебанием ($|z_r| = 1$). Для высокоинтенсивных сгустков, как это было показано выше, необходимо заменить Q_0 на $(Q_0 + \Delta Q + \Delta Q_n^{(0)})$. В результате в значении для Q_0 возникает мнимая добавка ($j \operatorname{Im} Q$), пропорциональная инкременту неустойчивости. Поэтому, заменяя Q_0 на $(Q_0 + j \operatorname{Im} Q)$ в выражении для $z_{1,2}$, при $|\{Q_0\}| \rightarrow 0,5$ получаем

$$z_{1,2} = -\left(1 - \frac{g\kappa}{2}\right) \operatorname{ch}(2\pi \operatorname{Im} Q) \pm \sqrt{\left(1 - \frac{g\kappa}{2}\right)^2 \operatorname{sh}^2(2\pi \operatorname{Im} Q) + \frac{g^2}{4}},$$

т. е. одна из мод колебаний z_r становится неустойчивой, поскольку $|z_r| > 1$.

Физическая интерпретация закономерностей, полученных из приближенных результатов, предельно ясна. Действительно, если $|\{Q_0\}| \rightarrow 0,5$, то траектория сгустка после инъекции длительное время определена своими начальными условиями. Если в месте расположения датчика положения ВРМ сгусток пролетает его без смещения, то отсутствует корректирующий сигнал с ВРМ и, следовательно, на дефлекторе отсутствует корректирующий

импульс. В результате динамика высокоинтенсивного пучка определяющим образом подвержена влиянию собственных электромагнитных полей сгустка и его электромагнитного взаимодействия с проводящей вакуумной камерой. В отсутствие корректирующего воздействия СП пучок в такой ситуации становится неустойчивым.

На рис. 15, б представлены расчетные зависимости декрементов $\alpha = T_0/\tau_d$ от величины коэффициента обратной связи g для пучка в синхротроне SPS (ЦЕРН) при наличии классической системы подавления. В этой системе до ее модернизации в 2000 г. для вертикальной моды колебаний использовались следующие спецификации [61,62]: $\hat{q} = 0$ и $\eta = 73,44^\circ$ при $Q_0 = 26,582$. Расчетные зависимости приведены для максимальной интенсивности пучка, когда по оценкам $\tau_{\text{inst}} = 50 T_0$. Представленные расчетные зависимости находятся в хорошем согласии с результатами экспериментальных измерений. Действительно, во всем диапазоне по $g > 0,04$ пучок устойчив при $Q_0 = 26,582$. При $Q_0 = 26,536$ устойчивость сохраняется до величин $g < 0,4$, а при больших значениях g пучок неустойчив, что согласуется с экспериментальными данными на рис. 15, а.

Следует подчеркнуть, что ограничение по диапазону величины коэффициента обратной связи возникло со стороны больших значений g (правая граница на рис. 15, б). Поскольку при $Q_0 \leq 26,582$ абсолютная величина $|\{Q_0\}| \geq 0,418 > 0,25$, то увеличение g сопровождается увеличением когерентной частоты, пропорциональной $|\{Q\}|$, которая вследствие этого стремится к полуполому числу. Эта зависимость усугубляется тем, что при $\mu \equiv 2\pi Q_0 = 2\pi \cdot 26,582$ набег фазы $\eta = 73,44^\circ$ меньше оптимальной величины 90° . Поэтому при уменьшении μ возникает сильная зависимость для $\{Q\}$, следствием чего является сильная зависимость декрементов от g , что подтверждается графическими зависимостями на рис. 15, б.

Таким образом, область устойчивости пучка по диапазону допустимых величин коэффициента обратной связи при приближении числа бетатронных колебаний к полуполому числу существенно сокращается в соответствии с теоретическими предсказаниями, подтвержденными экспериментальными измерениями.

2. МНОГОКАНАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ПОДАВЛЕНИЯ КОГЕРЕНТНЫХ ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ

Поскольку положение рабочей точки по Q_0 в синхротронах зачастую выбирается при отклонениях от полуполого значения в пределах 0,1, например, в коллайдере комплекса NICA [20, 21], то построение СП по одноканальной схеме не является универсальным решением. Другим основанием для проведения исследований динамики пучка в синхротроне с многоканальными

системами подавления когерентных поперечных колебаний пучка заряженных частиц является необходимость поиска конфигураций систем подавления, приводящих к более быстрому затуханию когерентных колебаний.

2.1. Дискретная модель многоканальной системы. *2.1.1. Базовые уравнения.* В рамках модельного приближения о равенстве дискретных и усредненных непрерывных величин бетатронных смещений «жестких» сгустков ($x_k[n, s] = \langle x_k(\hat{s}) \rangle$) в качестве базовых уравнений можно использовать дифференциальные уравнения (33). При конкретизации силы $\langle F_d(\hat{s}) \rangle_k$, описывающей действие системы подавления на сгусток, обычно считается, что на ускорителе имеется N_d цепей обратной связи к демпфирующим дефлекторам от N_p датчиков положения:

$$\frac{1}{m_0 \gamma_0 v_0^2} \langle F_d(\hat{s}) \rangle_k = \sum_{i=1}^{N_d} \sum_{l=0}^n \Delta x'_k[n-l, s_{d_i}] \delta((n-l)C_0 + (s-s_{d_i})),$$

где

$$\Delta x'_k[n, s_{d_i}] = S_i^{(\text{out})} K_i^{(\text{out})} \sum_{j=1}^{N_p} \varkappa_{ij} V_{ij}^{(\text{out})}[n],$$

$$V_{ij}^{(\text{out})}[n] = \varkappa_{ij} V_{ij}^{(\text{ftr})}[n-\hat{q}] u[n-\hat{q}],$$

$$V_{ij}^{(\text{ftr})}[n] = \sum_{m=0}^{N_f} b_{ij}[m] V_{ij}^{(\text{in})}[n-m] u[n-m] + \sum_{m=1}^{N_r} c_{ij}[m] V_{ij}^{(\text{ftr})}[n-m] u[n-m],$$

$$V_{ij}^{(\text{in})}[n] = (x_k[n, s_{p_j}] + \delta x_k[s_{p_j}]) S_j^{(\text{in})} K_{ij}^{(\text{in})} u[n].$$

Здесь $\varkappa_{ij} = \pm 1$ — коэффициент, учитывающий полярность подаваемого на дефлектор управляющего напряжения; \hat{q} — кратность задержки, величина которой во всех каналах принимается одинаковой с целью упрощения; s_{d_i} — точка расположения i -го дефлектора на орбите; s_{p_j} — точка расположения j -го датчика положения на орбите; индексы i и j пробегают, соответственно, значения от единицы до N_d и N_p . Таким образом, в системе подавления когерентных поперечных колебаний с несколькими цепями обратной связи изменение наклона траектории пучка $\Delta x'_k[n, s_{d_i}]$ после прохождения i -го дефлектора связано со смещением центра тяжести сгустка $x_k[n, s_{p_j}]$ в j -м датчике положения с учетом погрешности измерения $\delta x_k[s_{p_j}]$.

Выше было показано, что определяющие закономерности для систем подавления выявляются при выключенном взаимодействии между сгустками. Выполняя в этом случае \mathcal{Z} -преобразование для исходных дифференциальных уравнений, описывающих динамику частиц или «жестких» сгустков, и

для набора линейных разностных уравнений, характеризующих цепи обратной связи, нетрудно получить систему матричных линейных уравнений для функций-изображений $\widehat{\mathbf{X}}_k(z, s)$. Соответствующее характеристическое уравнение для собственных значений z_r принимает следующий вид:

$$\det(z_r \widehat{I} - \widehat{\mathbf{M}}(\tilde{Q}, z_r, s)) = 0,$$

где матрица $\widehat{\mathbf{M}}$ есть

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{M}} &\equiv \widehat{\mathbf{M}}(\tilde{Q}, z, s) = \\ &= \widehat{M}(s) + \sum_{i=1}^{N_d} \sum_{j=1}^{N_p} \frac{\hat{g}_{ij}(z)}{(\hat{\beta}_{d_i} \hat{\beta}_{p_j})^{1/2}} \widehat{M}(s + C_0 |s_{d_i}) \widehat{T} \widehat{M}(s_{p_j} |s), \end{aligned} \quad (38)$$

а функции $\hat{g}_{ij}(z)$ имеют вид

$$\hat{g}_{ij}(z) = z^{-\hat{q}} \kappa_{ij} \mathbf{K}_{ij}(z) S_i^{(\text{out})} S_j^{(\text{in})} \sqrt{\hat{\beta}_{d_i} \hat{\beta}_{p_j}}, \quad \mathbf{K}_{ij}(z) \equiv (\mathbf{K}_{\text{in}} \mathbf{K}_{\text{out}})_{ij} H_{ij}(z).$$

Пусть первый дефлектор расположен после последнего датчика положения:

$$s_{d_{N_d}} > \dots > s_{d_1} \geq s_e > s_{p_{N_p}} > \dots > s_{p_1}.$$

Это условие естественным образом выполняется при использовании цепей обратной связи с передачей сигнала «назад» — навстречу пучку. Далее всегда будет считаться, что данное условие о расстановке ВРМ и ДК выполнено. Тогда характеристическое уравнение для собственных значений z_r принимает вид

$$\begin{aligned} \det(z_r \widehat{I} - \widehat{\mathbf{M}}(\tilde{Q}, z_r, s)) &= z_r^2 - z_r \text{tr} \widehat{\mathbf{M}}(\tilde{Q}, z_r, s) + \det \widehat{\mathbf{M}}(\tilde{Q}, z_r, s) = \\ &= z_r^2 - \left(2 \cos(2\pi \tilde{Q}) + \sum_{i=1}^{N_d} \sum_{j=1}^{N_p} \hat{g}_{ij}(z_r) \sin(2\pi \tilde{Q} - \psi(s_{d_i} |s_{p_j})) \right) z_r + \\ &\quad + 1 - \sum_{i=1}^{N_d} \sum_{j=1}^{N_p} \hat{g}_{ij}(z_r) \sin(\psi(s_{d_i} |s_{p_j})) + \det \widehat{\mathbf{M}}_T(z_r) = 0, \end{aligned} \quad (39)$$

где квадратная матрица смешивания $\widehat{\mathbf{M}}_T(z)$ есть

$$\widehat{\mathbf{M}}_T(z) = \begin{pmatrix} m_{11} & \tilde{Q}^{-1} m_{12} \\ \tilde{Q} m_{21} & m_{22} \end{pmatrix},$$

причем

$$\begin{aligned}
 m_{11}(z) &= \sum_{i=1}^{N_d} \sum_{j=1}^{N_p} \hat{g}_{ij}(z) \sin \left(2\pi\tilde{Q} - \psi(s_{d_i}|s_{p_1}) \right) \cos \left(\psi(s_{p_j}|s_{p_1}) \right), \\
 m_{12}(z) &= \sum_{i=1}^{N_d} \sum_{j=1}^{N_p} \hat{g}_{ij}(z) \sin \left(2\pi\tilde{Q} - \psi(s_{d_i}|s_{p_1}) \right) \sin \left(\psi(s_{p_j}|s_{p_1}) \right), \\
 m_{21}(z) &= \sum_{i=1}^{N_d} \sum_{j=1}^{N_p} \hat{g}_{ij}(z) \cos \left(2\pi\tilde{Q} - \psi(s_{d_i}|s_{p_1}) \right) \cos \left(\psi(s_{p_j}|s_{p_1}) \right), \\
 m_{22}(z) &= \sum_{i=1}^{N_d} \sum_{j=1}^{N_p} \hat{g}_{ij}(z) \cos \left(2\pi\tilde{Q} - \psi(s_{d_i}|s_{p_1}) \right) \sin \left(\psi(s_{p_j}|s_{p_1}) \right).
 \end{aligned}$$

Из полученного выражения для характеристического уравнения (39) видно, что при различных расстановках датчиков положения и дефлекторов, а также связях между ними, включая перекрестные, корни характеристического уравнения для собственных значений зависят от набегов фаз бетатронных колебаний между датчиками и дефлекторами, но не зависят от параметров матрицы Твисса $\hat{\beta}$ и $\hat{\alpha}$ в местах их расположения.

2.2. Быстрая система подавления. В качестве базовой конфигурации системы подавления когерентных поперечных колебаний пучка в синхротроне или накопителе обычно рассматривается классическая система (см. рис. 1). Эта система широко применяется на различных ускорителях для подавления резистивной неустойчивости и остаточных когерентных поперечных колебаний пучка после инъекции.

Возможны другие комбинации датчиков и дефлекторов в составе системы подавления. В наиболее распространенной модификации СП в каждом из двух направлений поперечных колебаний пучка в горизонтальной и вертикальной плоскостях используются два датчика положения и один дипольный корректор-дефлектор, функционально обеспечивающие необходимые фазовые соотношения для демпфирования когерентных колебаний за счет смешивания сигналов с ВРМ1 и ВРМ2 (система подавления с виртуальным датчиком положения).

Также экспериментально опробованы СП, состоящие в каждом из двух направлений поперечных колебаний пучка в горизонтальной и вертикальной плоскостях из двух пар датчиков положения (ВРМ1, ВРМ2) и дипольных корректоров-дефлекторов (ДК1, ДК2), соединенных цепями обратной связи. Такая система подавления (см. рис. 16) была предложена для проекта синхротрона ИФВЭ [35,63] и реализована на синхротроне SPS в ЦЕРН [61]. Данная система называется быстрой системой подавления когерентных поперечных колебаний [63].

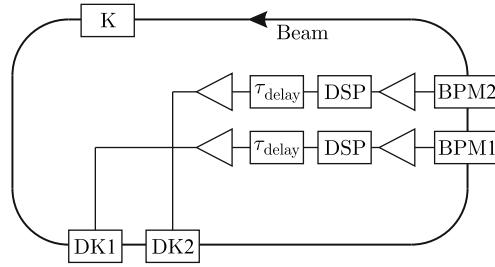


Рис. 16. Структурная схема быстрой системы подавления [63]

Проведем исследование характеристического уравнения (39) для быстрой системы. Обозначим набег фазы бетатронных колебаний от BPM1 до DK1 как η на расчетной орбите:

$$\eta \equiv \eta(Q_0) \equiv \psi(s_{d_1}|s_{p_1}) = \psi(s_{d_1}) - \psi(s_{p_1}).$$

Тогда для набега фазы бетатронных колебаний от BPM2 до DK2 имеем

$$\psi(s_{d_2}|s_{p_2}) = \psi(s_{d_2}) - \psi(s_{p_2}) = \eta + \psi_d - \psi_p,$$

где ψ_p — набег фазы от BPM1 до BPM2; ψ_d — набег фазы от DK1 до DK2. В быстрой системе отсутствуют перекрестные связи BPM1–DK2 и BPM2–DK1. Также считается, что передаточные функции цепей обратной связи BPM1–DK1 и BPM2–DK2 совпадают: $\hat{g}_{11}(z) = \hat{g}_{22}(z) = \hat{g}(z)$. Это условие легко обеспечить при идентичных цепях обратной связи, подстраивая у применяемых усилителей коэффициенты усиления. В результате уравнение (39) принимает вид

$$\begin{aligned} & \left(z_r - \cos(2\pi Q_0) - \frac{1}{2} \hat{g}(z_r) (\sin(2\pi Q_0 - \eta) + \sin(2\pi Q_0 - \eta - \psi_d + \psi_p)) \right)^2 + \\ & + \left(\sin(2\pi Q_0) - \frac{1}{2} \hat{g}(z_r) (\cos(2\pi Q_0 - \eta) + \cos(2\pi Q_0 - \eta - \psi_d + \psi_p)) \right)^2 - \\ & - \hat{g}^2(z_r) \cos^2 \left(\frac{\psi_p + \psi_d}{2} \right) = 0. \end{aligned}$$

Вполне естественно считать, что набег фаз бетатронных колебаний в промежутках BPM1–BPM2 и DK1–DK2 одинаковые и равны $\pi/2$ рад: $\psi_p = \psi_d = \pi/2$. Это можно обеспечить при соответствующей расстановке датчиков и дефлекторов. Тогда получим уравнение для собственных значений в следующем виде:

$$z_r^2 - 2 [\cos(2\pi Q_0) + \hat{g}(z_r) \sin(2\pi Q_0 - \eta)] z_r + 1 - 2\hat{g}(z_r) \sin(\eta) + \hat{g}^2(z_r) = 0.$$

Это уравнение, в свою очередь, распадается на два:

$$z_r - \left[1 - \hat{g}(z_r) \exp \left(\pm j \left(\frac{\pi}{2} - \eta \right) \right) \right] \exp(\pm j 2\pi Q_0) = 0. \quad (40)$$

Как уже отмечалось, конкретный вид $\hat{g}(z)$ зависит от системной функции фильтра $H_{ij}(z)$. Выше уже отмечалось, что в радиотехническом смысле цепь устойчива по входу-выходу, если полюсы $H_{ij}(z_r)$ находятся внутри круга $|z_r| \leq 1$. Пусть это условие выполнено. В нулевом приближении по \hat{g} решение (40) есть $z_r^{(0)} = \exp(\pm j 2\pi Q_0)$. Если $|\partial \hat{g} / \partial z| \ll 1$, то можно использовать метод Эйлера для нахождения линейных поправок к $z_r^{(0)}$ по малому параметру \hat{g} для вычисления решения уравнения (40). В результате получим

$$z_{1,2} \cong \exp \left(\pm j 2\pi \left(Q_0 - \frac{g \varkappa |\mathbf{K}(\omega)|}{2\pi K_0} e^{\mp j \Psi} \right) \right) = e^{-\alpha \pm j 2\pi \{Q\}}, \quad (41)$$

где баланс фаз Ψ вычисляется на циклической частоте ω , а декремент α в два раза больше, чем при использовании классической системы подавления:

$$\alpha = \frac{g |\mathbf{K}(\omega)|}{K_0} \varkappa \sin \Psi, \quad \{Q\} = \{Q_0\} - \frac{g |\mathbf{K}(\omega)|}{2\pi K_0} \varkappa \cos \Psi,$$

$$\omega = (\pm \{Q_0\} + k) \omega_0, \quad \Psi = \eta + 2\pi \hat{q} Q_0 - \arg \mathbf{K}(\omega),$$

$$\mathbf{K}(\omega) = K_{\text{in}} K_{\text{out}} H(z = e^{j\omega T_0}), \quad K_0 = |\mathbf{K}(\Omega_\beta)|, \quad \varkappa \sin \Psi(\Omega_\beta) > 0.$$

Напомним, что $\Omega_\beta \equiv |\{Q_0\}| \omega_0$. Решение (41) полностью характеризует динамику пучка в синхротроне при наличии системы подавления с двумя идентичными цепями обратной связи с широкополосными усилителями. Максимальный темп подавления поперечных колебаний при малых g будет при

$$|\sin \Psi| = 1 \Rightarrow \{Q\} = \{Q_0\}.$$

Таким образом, оптимальные условия для затухания колебаний при использовании быстрой системы подавления совпадают с оптимальными условиями (28) для классической СП.

Для идеальной цепи обратной связи $\arg \mathbf{K}(\omega) = 0$ и $\hat{q} = 0$. В этом случае оптимальные условия получаются при такой расстановке датчиков положения и дефлекторов, когда набег фазы бетатронных колебаний η между первым датчиком ВРМ1 и первым дефлектором ДК1 равен нечетному числу $\pi/2$ рад. Этот результат достаточно очевиден из простых физических соображений. Действительно, если в месте расположения первого датчика положения ВРМ1 пучок имеет максимальное смещение от равновесной орбиты и, следовательно, нулевой угол наклона траектории, то пучок получит толчок только в месте расположения первого дефлектора ДК1 для выбранной схемы

системы подавления. Максимальное изменение угла наклона траектории будет в DK1 тогда, когда пучок пересекает равновесную орбиту, т. е. имеет нулевое смещение. Но для этого необходимо, чтобы набег фазы бетатронных колебаний между BPM1 и DK1 был равен нечетному числу $\pi/2$ рад.

Отметим еще одно существенное отличие быстрой системы от классической. Легко видеть из (40), что при расстановке $|\sin \eta| = 1$ и идеальной цепи обратной связи ($\arg \mathbf{K} = 0$) имеем

$$z_r = (1 - g) \exp(\pm j2\pi Q_0).$$

Поэтому при выполнении условия $g = 1$ получаем, что быстрая система с широкополосным усилителем в цепи обратной связи обеспечивает подавление остаточных колебаний после инжекции за один оборот независимо от фаз сигналов с BPM1 и BPM2. При использовании классической системы полное подавление остаточных колебаний после инжекции возможно лишь при оптимальной расстановке и такой фазе сигнала в датчике положения, когда пучок имеет максимальное отклонение в месте его расположения. Поскольку пучок после инжекции может иметь как смещение, так и угол наклона траектории пучка к равновесной орбите, т. е. произвольную фазу, то независимость темпа подавления колебаний от фазы сигнала в месте расположения датчиков положения при использовании быстрой системы является ее основным и важнейшим преимуществом перед классической системой подавления. Этот же результат получен в [37] при использовании стандартного подхода к решению исходного дифференциального уравнения методом сшивания решений.

Полученные результаты легко обобщаются при включении взаимодействия между густками. Учитывая результаты, представленные выше, можно утверждать, что в линейном приближении по малому параметру ν_b решения будут иметь вид (41), однако в них необходимо заменить Q_0 на $(Q_0 + \Delta Q_0 + \Delta \mathbf{Q}_n)$, т. е. на эффективное число бетатронных колебаний за оборот, которое есть комплексная величина. Поэтому вблизи решений (41) когерентные колебания будут затухающими при выполнении условия (35), что приводит к следующему требованию для величины коэффициента обратной связи g при наличии неустойчивости с инкрементом T_0/τ_{inst} :

$$\alpha = \frac{g |\mathbf{K}(\omega)|}{K_0} \times \sin(\operatorname{Re} \Psi(\omega_{(k)})) > \frac{T_0}{\tau_{\text{inst}}} + \frac{T_0}{\tau_{\text{dec}}},$$

$$\omega_{(k)} = (k \pm (\{Q_0\} + \Delta Q_0 + \operatorname{Re} \Delta \mathbf{Q}_n^{(0)})) \omega_0,$$

где $\Delta \mathbf{Q}_n^{(0)}$ вычисляется в линейном приближении по ν_b , например, согласно [49] для идентичных эквидистантных густков. Таким образом, наиболее эффективно неустойчивость подавляется при оптимальной расстановке датчиков положения и дефлекторов. В этом случае для идеальной цепи обратной

связи ($\arg \mathbf{K} = 0$) из уравнения (40) следует более точная оценка для подавления неустойчивости с максимальным инкрементом $T_0/\tau_{\text{inst}} = 2\pi|\text{Im } Q|$:

$$g > 1 - \exp(-2\pi|\text{Im } Q|),$$

которая, естественно, совпадает с приближенной формулой $\alpha > 2\pi|\text{Im } Q|$, приведенной выше в линейном приближении по g и ν_b .

Подводя итог исследования устойчивости пучка в синхротроне с быстрой системой подавления, можно сделать вывод, что введение цепи отрицательной обратной связи приводит при определенных условиях к подавлению более сильной неустойчивости и увеличению декремента возможных мод когерентных поперечных колебаний по сравнению с классической СП. Максимальный темп подавления для всех мод колебаний достигается при оптимальной расстановке датчиков и дефлекторов, когда набег фазы бетатронных колебаний между BPM1 и DK1 кратен нечетному числу $\pi/2$ рад, а датчики положения и дефлекторы смещены друг относительно друга на $\pi/2$ рад.

Быстрая система подавления, предложенная в [35] и детально изученная в [42] в связи с исследованиями по подавлению сильной резистивной неустойчивости, сохраняет свою эффективность в случаях, когда рабочая точка по Q находится вблизи полуцелого числа. Поскольку такая ситуация возникла в SPS (ЦЕРН), то для подавления неустойчивости пучка с ростом его интенсивности была реализована быстрая система подавления [61]. Ограниченные возможности по размещению дополнительного демпфирующего дефлектора на функционирующем ускорителе позволили установить дефлектор в свободном от оборудования коротком прямолинейном промежутке таким образом, что набег фазы бетатронных колебаний между дефлекторами составлял $\psi_d \approx 300^\circ$ [61]. В каждую радиотехническую цепь обратной связи между датчиком положения и соответствующим ему дефлектором был установлен аналоговый фильтр, состоящий из соединенных последовательно узкополосного заграждающего фильтра и фильтра Гильберта. При этом параметр фильтра Гильберта φ в каждой цепи был подобран таким образом, чтобы обеспечить оптимальные условия затухания когерентных колебаний. В данной конфигурации быстрая система подавления успешно работает на SPS (ЦЕРН), обеспечивая демпфирование остаточных колебаний сгустков после инъекции и подавление когерентных поперечных неустойчивостей высокоинтенсивного протонного пучка.

3. СГЛАЖЕННОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ДЛЯ ОПИСАНИЯ ДИНАМИКИ ПУЧКА В СИНХРОТРОНЕ С СИСТЕМОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ

В предыдущих разделах получены аналитические решения системы линейных разностных уравнений, описывающих динамику «жесткого» сгустка в синхротроне с системой подавления его когерентных поперечных колебаний.

При этом использовался метод \mathcal{Z} -преобразования, приводящий к точным решениям для декрементов и сдвигов частот когерентных колебаний во всем диапазоне допустимых величин коэффициента обратной связи g . В данном разделе показано, что использование дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом [64] также позволяет описать динамику пучка в синхротронах с системами обратной связи в рамках «сглаженного» приближения, традиционно используемого в теоретических исследованиях [13, 65, 66] и заключающегося в замене локального демпфирующего воздействия непрерывно действующей корректирующей силой.

3.1. Основные уравнения. Пусть x — смещение частицы от равновесной орбиты. Тогда сглаженное уравнение для поперечной динамики заряженных частиц в синхротроне с системой обратной связи имеет следующий вид [28, 31, 59, 66]:

$$\ddot{x}(t) + \Omega^2 x(t) = \frac{g\kappa\Omega}{T_0} x(t - \tau) u(t - \tau) \equiv gF(x; \tau), \quad (42)$$

где $\tau > 0$ — величина задержки сигнала в цепи обратной связи, а обозначения Ω , T_0 , g и κ соответствуют введенным выше определениям. В уравнении (42) считается, что пучок инжектирован в синхротрон в нулевой момент времени, так что все функциональные зависимости заданы при $t \geq 0$. Данное начальное условие учитывается с помощью функции Хевисайда $u(t - \tau)$ [33].

Уравнения (42) относятся к линейным дифференциальным уравнениям с отклоняющимся аргументом с постоянными коэффициентами [64]. Действительно, фокусирующая сила, приводящая к слагаемому $\Omega^2 x$, зависит от величины отклонения частицы от ее равновесного состояния в данный момент времени t , а корректирующая сила $F(x, \tau)$ — от величины такого же отклонения в (42) в моменты времени $(t - \tau)$, которые совпадают с моментом измерения отклонения детектором. Другие параметры (Ω , T_0 , g) являются в синхротроне постоянными на плато магнитного поля при инжекции частиц или изменяющимися достаточно медленно в процессе ускорения по сравнению с переменной во времени величиной x . Следовательно, эти параметры можно считать постоянными. Запаздывание τ в синхротронах с системой обратной связи есть необходимый промежуток времени для реагирования на входной импульс в системе автоматического регулирования. В настоящем разделе в качестве исходного приближения будет предполагаться, что запаздывание τ постоянно.

Пусть необходимо исследовать асимптотическую устойчивость решений уравнений (42) для частицы, инжектированной в синхротрон в начальный момент времени t_0 , когда ее начальное состояние есть (x_0, \dot{x}_0) . Поскольку левая часть уравнений (42) вычисляется в момент времени t , а в правую часть тех же уравнений входят значения аргумента в предшествующие моменты времени, то для построения решений уравнений (42) необходимо знать на-

чальную функцию (x_0, \dot{x}_0) для всех моментов времени $t \in (t_0 - \tau, t_0]$. В самом деле, при $t = t_0$ в правую часть уравнений (42) войдут значения x в предшествующий момент времени, которые должны быть определены. Таким образом, чтобы найти решения уравнений (42), проходящих через точку (t_0, x_0, \dot{x}_0) , необходимо знать начальное множество исходных значений в предшествующие моменты времени. Это начальное множество называют начальной функцией [64].

Если начальная функция задана, то для нахождения решения $x(t)$ обычно используется метод шагов (или метод последовательного интегрирования) [64]. Однако для приближенного нахождения решения линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и с постоянным отклоняющимся аргументом и для выяснения его асимптотических свойств можно использовать метод интегральных преобразований [64]: преобразование Лапласа или одностороннее преобразование Фурье. Следует также подчеркнуть, что в ускорительной физике практический интерес представляют решения при малых величинах коэффициента обратной связи g . Возникающее при использовании метода интегральных преобразований характеристическое уравнение можно исследовать методом последовательных приближений, считая малым параметром величину коэффициента обратной связи g . Метод разложения по степеням малого параметра является общепринятым для нахождения периодических решений квазилинейных уравнений с отклоняющимся аргументом [64] и является, в конечном счете, модификацией асимптотических методов нелинейной механики Крылова–Боголюбова–Митропольского [67].

3.2. Методы решения. *3.2.1. Метод интегральных преобразований.* В качестве первого примера для выявления условий асимптотической устойчивости решений уравнений динамики пучка в синхротроне при наличии системы обратной связи рассмотрим уравнение для поперечной динамики (42). Выполняя в (42) одностороннее преобразование Фурье [33] для $x(t)$ и $x(t - \tau)$, получаем следующее характеристическое уравнение [59]:

$$-\omega^2 + \Omega^2 - \frac{g\kappa\Omega}{T_0} e^{-j\omega\tau} = 0,$$

которое является трансцендентным. Оно имеет бесконечное число решений для собственных частот ω_r , которые также называются собственными значениями характеристического уравнения. В ускорительной физике для выявления асимптотических свойств решения уравнения (42) необходимо установить свойства собственных значений ω_r характеристического уравнения вблизи циклической частоты свободных колебаний $\Omega \equiv Q_0\omega_0$. При $g = 0$ собственные значения есть $\omega_r = \pm\Omega$. Используя метод Эйлера [33], в линейном приближении при $g \ll 1$ получаем [59]

$$\omega_r = \Omega - \frac{g\kappa}{2T_0} e^{-j\Omega\tau} = \Omega + \omega_0\Delta Q + j\frac{\alpha}{T_0},$$

где

$$\alpha = \frac{g}{2} \varkappa \sin(\Omega\tau), \quad \Delta Q = -\frac{g}{4\pi} \varkappa \cos(\Omega\tau). \quad (43)$$

Таким образом, свойства решения уравнения (42) определяющим образом зависят от набега фазы $\eta \equiv \Omega\tau$ бетатронных колебаний частицы при пролете от детектора до дефлектора. Затухание колебаний возникает, если $\varkappa \sin \eta > 0$. Данное условие может быть выполнено в широком диапазоне частот Ω и величин задержек сигнала τ . Действительно, имеем $\Omega\tau = 2\pi Q_0\tau/T_0$. Поскольку для дробной части числа бетатронных колебаний можно использовать оценку $|\{Q_0\}| \simeq 0,3$, то $\tau < T_0$. Сигнал обратной связи можно направить от детектора к дефлектору навстречу вращающимся частицам пучка и обеспечить расстановку устройств обратной связи таким образом, чтобы $|\sin \eta| = 1$. В этом случае воздействие системы обратной связи на колебательный процесс имеет резонансный характер ($\Delta Q = 0$), поскольку $\cos \eta = 0$. Таким образом, оптимальный режим для системы обратной связи обеспечивается в том случае, когда между точками наблюдения и коррекции укладывается нечетное число четвертей длин волн бетатронных колебаний, что является хорошо известным результатом.

Следует также подчеркнуть, что при $\Omega\tau = \pi m$, где m — целое число, в (43) имеем $\alpha = 0$ и $4\pi\Delta Q = -g\varkappa$, что естественным образом получается при решении уравнения (42) при $m = 0$ как линейного дифференциального уравнения без задержки τ .

Таким образом, выражения (43) для собственных значений удовлетворяют принципу соответствия (частные случаи для $\Omega\tau = (2m+1)\pi/2$ и $\Omega\tau = \pi m$), а также указывают на дополнительные закономерности, связанные с линейным сдвигом для ΔQ вблизи оптимального режима затухания колебаний, когда $\Omega\tau \simeq (2m+1)\pi/2$.

3.2.2. Метод Крылова–Боголюбова–Митропольского. При $g \ll 1$, как указано в [64], для установления асимптотических свойств решений дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, содержащих малый параметр, можно использовать метод усреднения Крылова–Боголюбова–Митропольского (КБМ). При этом появляется возможность исследования уравнений (42) в более общем случае, когда в правую часть этих уравнений входят нелинейные по x малые поправки. Следует подчеркнуть, что метод усреднения КБМ является эффективным методом нахождения решения уравнений с малым параметром. В том числе он может быть использован для нахождения решения линейного уравнения малых колебаний при наличии трения, что продемонстрировано в книге [67]. Универсальность метода усреднения КБМ является основанием для его применения к решению уравнений (42) с тем, чтобы сопоставить возникающие результаты с приближенными решениями, полученными в предыдущих разделах.

Использование метода усреднения КБМ для уравнения поперечной динамики (42) приводит к следующим выражениям [59]:

$$\begin{aligned} \dot{a} &= -\alpha a/T_0, & \alpha &= \frac{g}{2} \varkappa \sin(\Omega\tau), & a &= a_0 e^{-\alpha t/T_0}, \\ \dot{\psi} &= (Q_0 + \Delta Q)\omega_0, & \Delta Q &= -\frac{g}{4\pi} \varkappa \cos(\Omega\tau), & \psi &= (Q_0 + \Delta Q)\omega_0 t + \phi_0. \end{aligned}$$

Этот результат для α и ΔQ совпадает с приближенными решениями (43). Сглаженные решения также совпадают с соответствующими выражениями для идеальной системы подавления, полученными с помощью метода \mathcal{Z} -преобразования или в рамках матричного формализма. Следует подчеркнуть, что учет задержки сигнала приводит не только к условию на декремент, но и к сдвигу частоты в линейном приближении. Если использовать широко распространенную в литературе замену функции $f(x(t - \tau))$ на скорость $\dot{x}(t)$, то для декремента получается выражение как для идеальной системы подавления. Однако небольшой отрицательный сдвиг частоты в этом случае пропорционален g^2 в соответствии с точным решением уравнения малых колебаний с затуханием [34] или приближенным решением в методе Крылова–Боголюбова–Митропольского [67]. Таким образом, корректные решения для описания динамики пучка в синхротроне с системой подавления возможны только при решении уравнений с задержкой сигнала. Метод усреднения КБМ позволяет в линейном приближении по малому параметру g выявить основные закономерности для декремента и сдвига частоты затухающих колебаний, совпадающие с аналогичными характеристиками, полученными при анализе приближенных собственных значений характеристического уравнения.

3.3. Системы обратной связи с цифровым фильтром. В синхротроне с системой обратной связи с простейшим цифровым фильтром для уравнения (42) имеем [13, 28, 39, 59]

$$\begin{aligned} \ddot{x}(t) + \Omega^2 x(t) &= \\ &= \frac{g\varkappa\Omega}{T_0 H_0} \sum_{m=0}^{N_f} b[m] (x(t - \tau - (m + \hat{q})T_0) + \delta x_0) u(t - \tau - (m + \hat{q})T_0), \end{aligned} \quad (44)$$

где, напомним, δx_0 — статическая погрешность измерения отклонения центра тяжести пучка от равновесной орбиты, H_0 — нормировочная постоянная, а обозначения \hat{q} , N_f и $b[m]$ соответствуют введенным выше определениям. Постоянная составляющая в решении исключается, если выполняется условие (25). Используя укороченные уравнения согласно методу усреднения КБМ, получаем для основной гармоники [59]

$$\begin{aligned} \dot{a} &= -\alpha a/T_0, & \dot{\psi} &= (Q_0 + \Delta Q)\omega_0, \\ \alpha &= \frac{g}{2} \frac{|H(\Omega)|}{H_0} \varkappa \sin \Psi, & \Delta Q &= -\frac{g}{4\pi} \frac{|H(\Omega)|}{H_0} \varkappa \cos \Psi, \end{aligned} \quad (45)$$

где величина баланса фаз есть

$$\Psi(\Omega) = \eta + 2\pi\hat{q}Q_0 - \arg H(\Omega), \quad \eta \equiv \Omega\tau = 2\pi Q_0\tau/T_0.$$

Здесь $H(\Omega)$ — передаточная характеристика фильтра:

$$H(\Omega) = \sum_{m=0}^{N_f} b[m] e^{-jm\Omega T_0}, \quad m\Omega T_0 \equiv 2\pi m Q_0.$$

В отсутствие фильтра ($\arg H = 0$, $|H| = H_0 = 1$) и дополнительной задержки ($\hat{q} = 0$) для поправки ΔQ к числу когерентных поперечных колебаний за оборот и для декремента α выражения (45) совпадают с (43).

За счет подбора коэффициентов $b[m]$ можно сформировать величину $\arg H(\Omega)$ таким образом, чтобы величина баланса фаз Ψ была оптимальной ($\cos \Psi = 0$) даже в том случае, если набег фазы бетатронных колебаний η не оптимален ($\cos \eta \neq 0$). Таким образом, применение цифрового фильтра в цепи обратной связи позволяет обеспечить оптимальную величину баланса фаз ($\cos \Psi = 0$), в результате чего декремент максимален ($\propto \sin \Psi = 1$) и колебательный процесс имеет резонансный характер ($\Delta Q = 0$).

Следует подчеркнуть, что выражения (45), полученные методом усреднения КБМ, есть первое приближение по малому параметру g . Если использовать метод одностороннего преобразования Фурье для решения уравнения (44), то возникает следующее характеристическое уравнение [59]:

$$-\omega^2 + \Omega^2 - \frac{g\kappa\Omega}{T_0 H_0} H(\omega) e^{-j(\tau + \hat{q}T_0)\omega} = 0.$$

Данное уравнение, будучи трансцендентным, имеет бесконечное множество решений. Однако при слабой зависимости передаточной характеристики фильтра от частоты, когда

$$\frac{\Omega}{|H(\Omega)|} \left| \frac{dH(\omega)}{d\omega} \right|_{\omega=\Omega} \ll 1,$$

можно воспользоваться методом Эйлера для решения характеристического уравнения, что в первом приближении по малому параметру g для собственных значений ω_r вблизи Ω приведет к выражениям (45) для α и ΔQ .

Необходимо также отметить следующую особенность решений (45). Для числа Q_0 бетатронных колебаний имеем $Q_0 = N_Q + \{Q_0\}$, где N_Q — целая часть числа бетатронных колебаний, $\{Q_0\}$ — дробная часть числа бетатронных колебаний ($-0,5 < \{Q_0\} \leq 0,5$). Поэтому можно ввести обозначение $\Omega_\beta = |\{Q_0\}| \omega_0$ для минимальной моды частоты бетатронных колебаний. Нетрудно видеть, что передаточная характеристика выбранного фильтра имеет

периодичность по частоте: $H(\Omega_\beta + m\omega_0) = H(\Omega_\beta)$ для любых целых величин m . Поэтому правомерно определить H_0 следующим образом:

$$H_0 \equiv |H(\Omega_\beta)|.$$

Тогда выражения (45) и (43) для α и ΔQ совпадают для всех собственных мод когерентных бетатронных колебаний ($\Omega_\beta + m\omega_0$). Данный выбор для величин Ψ и H_0 имеет простой физический смысл. Изменение амплитудно-частотной ($H(\Omega)/H_0$) и фазо-частотной ($\arg H(\Omega)$) характеристик фильтра с циклической частотой Ω приводит к изменению декрементов α и сдвигов когерентных частот $\omega_0\Delta Q$ для циклических частот ($\Omega_\beta + m\omega_0$), отвечающих собственным частотам когерентных колебательных мод частиц. Поэтому величины баланса фаз $\Psi(\Omega)$ должны быть такими, чтобы колебания были затухающими, причем данное требование должно выполняться в максимально возможной полосе частот. При этом на минимальной частоте бетатронных колебаний величина баланса фаз должна быть оптимальной:

$$\cos \Psi(\Omega_\beta) = 0 \quad \text{или} \quad |\sin \Psi(\Omega_\beta)| = 1.$$

Таким образом, определяющим параметром асимптотических свойств колебательных мод является величина баланса фаз, численно равная разности между набегом фазы когерентных колебаний частицы ($\eta + 2\pi\hat{q}Q_0$) при пролете от детектора до демпфирующего дефлектора и изменением фазы $\arg H(\Omega)$ детектируемого сигнала в цепи обратной связи.

Завершая данный раздел, следует подчеркнуть, что выражения (45) для α и ΔQ совпадают с соответствующими выражениями (27), полученными в рамках оригинальной дискретной модели [28, 39], описывающей динамику когерентных поперечных колебаний сгустков заряженных частиц в синхротронах с системой обратной связи с помощью линейных разностных уравнений, в которых учтен локальный характер корректирующего воздействия, синхронизованного с локальным измерением в детекторе.

4. СИСТЕМЫ ПОДАВЛЕНИЯ КОГЕРЕНТНЫХ ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ С НЕЛИНЕЙНОЙ ПЕРЕДАТОЧНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ ЦЕПИ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ

В системах подавления с цифровыми методами обработки сигналов возможна организация вычислительного процесса, приводящего к нелинейным зависимостям выходного сигнала от входного. В результате возникает новая экспериментальная возможность для функционирования системы подавления с нелинейной передаточной характеристикой цепи обратной связи. Экспериментальные данные, полученные на SPS в ЦЕРН [68], указывают

на увеличение темпа подавления когерентных поперечных колебаний сгустков непосредственно после их инжекции в некоторых нелинейных режимах. Аналогичные указания получены в численных расчетах (см., например, [69]).

В настоящем разделе представлены основные результаты аналитического подхода к решению задачи о подавлении остаточных колебаний сгустков после инжекции [41, 70–72] на основе сведения ее к разностным нелинейным уравнениям динамики пучка и последующего применения приближенного подхода для их решения, аналогичного методу Крылова–Боголюбова–Митропольского для нелинейных дифференциальных уравнений.

4.1. Дискретная модель системы подавления с нелинейной передаточной характеристикой цепи обратной связи. *4.1.1. Базовое разностное уравнение.* Выше было получено разностное уравнение (6), которое для смещений «жесткого» сгустка в датчике положения на трех последовательных оборотах ($x[n+2]$, $x[n+1]$ и $x[n]$) при наличии корректирующего демпфирующего воздействия $\Delta x'_d[n]$ в отсутствие внешнего воздействия толкателя ($\Delta x'_e[n] = 0$) имеет вид

$$\begin{aligned} x[n+2] - 2 \cos(\mu) x[n+1] + x[n] = \\ = \sqrt{\hat{\beta}_p \hat{\beta}_d} (\sin(\mu - \eta) \Delta x'_d[n+1] + \sin(\eta) \Delta x'_d[n]). \end{aligned} \quad (46)$$

В предыдущих разделах было показано, что при линейной зависимости демпфирующего воздействия $\Delta x'_d[n]$ от смещения $x[n]$ основные закономерности затухания когерентных поперечных колебаний связаны с величиной баланса фаз Ψ , где определяющими параметрами являются набег фаз μ и η . С целью исключения громоздких выкладок и выявления основных эффектов, связанных с нелинейной характеристикой цепи обратной связи, примем

$$\sqrt{\hat{\beta}_d \hat{\beta}_p} \Delta x'_d[n] = \epsilon f(x[n]), \quad \epsilon = g \varkappa,$$

где $f(x[n])$ есть нелинейная функция от $x[n]$. В простейшем случае обычно рассматривают комбинацию линейного и кубического членов

$$f(x[n]) = x[n] + (x[n])^3 g_3,$$

где g_3 — малый постоянный коэффициент, описывающий вклад кубической поправки. Поскольку $g \ll 1$, то вполне естественно применить метод Крылова–Боголюбова–Митропольского [67, 73], широко используемый для решения нелинейных дифференциальных уравнений с малым параметром, к решению линейных разностных уравнений с нелинейной передаточной функцией цепи обратной связи с малым параметром ϵ , равным коэффициенту обратной связи.

4.1.2. Модификация метода Крылова–Боголюбова–Митропольского для решения разностных уравнений. Уравнение (46) в нулевом приближении по g

имеет решение

$$x[n] \equiv x_n = a \sin \psi, \quad \psi = n\mu + \phi,$$

где a — начальная амплитуда; ϕ — начальная фаза. При построении приближенных решений уравнения (46) по малому параметру $\epsilon = g\mathcal{K}$ по аналогии с методом Крылова–Боголюбова–Митропольского следует считать [67, 74]

$$x_n = a_n \sin(\psi_n) + \sum_{m=1}^{\infty} \epsilon^m x_m(a_n, \psi_n), \quad \psi_n = n\mu + \phi_n, \quad (47)$$

где амплитуда a_n и приращение фазы ϕ_n зависят от n :

$$\frac{da_n}{dn} = \epsilon A_1(a_n) + \epsilon^2 A_2(a_n) + \dots = \sum_{m=1}^{\infty} \epsilon^m A_m(a_n), \quad (48)$$

$$\frac{d\phi_n}{dn} = \epsilon \Phi_1(a_n) + \epsilon^2 \Phi_2(a_n) + \dots = \sum_{m=1}^{\infty} \epsilon^m \Phi_m(a_n). \quad (49)$$

Неизвестные функции x_m есть периодические функции ψ_n :

$$x_m(a_n, \psi_n) = \nu_{m0}(a_n) + \sum_{k=2}^{\infty} [\nu_{mk}(a_n) \cos k\psi_n + \gamma_{mk}(a_n) \sin k\psi_n], \quad (50)$$

причем $\nu_{m1} = \gamma_{m1} = 0$, поскольку амплитуда a_n является полной амплитудой основной гармоники на любом шаге (обороте) n . Принципиально важно, что все гармоники являются на шаге (обороте) n периодическими функциями одной фазы ψ_n , на шаге $(n+1)$ — фазы ψ_{n+1} и так далее. При этом фазы ψ_n и ψ_{n+1} могут различаться на величину, отличную от μ , так как через Φ_m они зависят от a_n . Подставляя (47) с учетом (48), (49) и (50) в уравнение (46), в линейном приближении по g нетрудно получить эквивалентное уравнение для поправок ϵA_1 к амплитуде и приращению фазы $\epsilon \Phi_1$, для амплитуд ν_{1m} и γ_{1m} комбинационных гармоник:

$$\begin{aligned} & [A_1(a_n) \sin 2\mu - \Phi_1(a_n) a_n 2 \sin^2 \mu] \cos \psi_n - \\ & - [A_1(a_n) 2 \sin^2 \mu + \Phi_1(a_n) a_n \sin 2\mu] \sin \psi_n + 4\nu_{10}(a_n) \sin^2 \frac{\mu}{2} - \\ & - 4 \sum_{k=2}^{\infty} \sin \left(\frac{(k+1)\mu}{2} \right) \sin \left(\frac{(k-1)\mu}{2} \right) \left[\nu_{1k}(a_n) \cos k\mu + \right. \\ & \left. + \gamma_{1k}(a_n) \sin k\mu \right] \cos k\psi_n + [-\nu_{1k}(a_n) \sin k\mu + \gamma_{1k}(a_n) \cos k\mu] \sin k\psi_n \Big] = \\ & = f(a_n \sin \psi_n) \sin \eta + f(a_n \sin(\psi_n + \mu)) \sin(\mu - \eta). \quad (51) \end{aligned}$$

Отсюда для амплитуды и фазы основной гармоники получаются укороченные уравнения

$$\frac{da_n}{dn} = \frac{g\chi}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a_n \sin \psi_n) \cos(\psi_n + \eta) d\psi_n, \quad (52)$$

$$\frac{d\phi_n}{dn} = -\frac{g\chi}{2\pi a_n} \int_0^{2\pi} f(a_n \sin \psi_n) \sin(\psi_n + \eta) d\psi_n. \quad (53)$$

Эти выражения по форме совпадают с укороченными уравнениями для нелинейного дифференциального уравнения, в которых фазовый сдвиг $\eta \equiv \psi_{pd}$, связанный с задержкой демпфирующего сигнала, присутствует в явном виде (следует напомнить, что $x_n = a_n \sin \psi_n$ есть смещение в месте расположения датчика положения, а функция $f(x_n)$ описывает действие дефлектора).

Если $f(x_n)$ есть передаточная функция цепи обратной связи с линейной характеристикой ($f(x_n) = x_n$), то с помощью укороченных уравнений (52) и (53) нетрудно получить

$$\begin{aligned} a_n &= a_0 \exp(-n\alpha), & \psi_n &= 2\pi Qn + \phi, \\ \alpha &= \frac{g\chi}{2} \sin \Psi, & Q &= Q_0 - \frac{g\chi}{4\pi} \cos \Psi, \end{aligned} \quad (54)$$

где $\Psi = \eta$. Выражения для декремента α и числа колебаний Q зависят от баланса фаз $\Psi = \eta$ и совпадают с приближенными решениями (27), полученными при решении линейных разностных уравнений с помощью метода \mathcal{Z} -преобразования для идеальной системы подавления с линейной передаточной функцией.

Следует также отметить, что в общем случае для нелинейных передаточных функций цепи обратной связи решения для гармоник ν_{1m} и γ_{1m} возможны согласно уравнению (51) только при $(k \pm 1)Q_0 \neq n$, где k и n — произвольные целые числа. Данное условие совпадает с требованием размещения рабочей точки по числу бетатронных колебаний вне линейных резонансов [31].

Таким образом, метод КБМ, модифицированный для решения разностных уравнений системы подавления, приводит в случае линейной передаточной характеристики цепи обратной связи к результатам, совпадающим с аналитическими решениями тех же уравнений с помощью метода \mathcal{Z} -преобразования. При этом следует подчеркнуть, что в последнем случае получаются решения для произвольных величин коэффициента обратной связи g , в то время как метод КБМ позволяет получить лишь приближенные решения при $g \ll 1$.

4.2. Примеры систем подавления с нелинейной передаточной характеристикой цепи обратной связи. 4.2.1. *Кубическая нелинейность.* При отсутствии цифрового фильтра в цепи обратной связи передаточная характеристика с кубической нелинейностью в нулевом приближении имеет вид

$$f(x_n = a_n \sin \psi_n) = x_n + g_3 x_n^3 = a_n \sin \psi_n + a_n^3 \frac{g_3}{4} (3 \sin \psi_n - \sin 3\psi_n).$$

Для основной гармоники из укороченных уравнений (52) и (53) получаем

$$\frac{da_n}{dn} = -\frac{g\kappa \sin \eta}{2} \left(a_n + \frac{3g_3}{4} a_n^3 \right), \quad \frac{d\phi_n}{dn} = -\frac{g\kappa \cos \eta}{2} \left(1 + \frac{3g_3}{4} a_n^2 \right). \quad (55)$$

Отсюда для изменения амплитуды колебаний в сглаженном приближении имеем

$$a_n = \frac{a_0 \exp(-n\alpha)}{\sqrt{1 + (3g_3 a_0^2/4)(1 - \exp(-2n\alpha))}}, \quad \alpha = \frac{g\kappa}{2} \sin \eta. \quad (56)$$

Это выражение для зависимости амплитуды колебаний от времени совпадает с хорошо известным результатом для нелинейного дифференциального уравнения вида $\ddot{x} + \omega^2 x = -2(\epsilon/T_0)(\dot{x} + \epsilon_3 \dot{x}^3)$ для осциллятора со слабым трением ($\epsilon \ll 1$), зависящим от скорости и ее кубической поправки [67]. В представляющем интерес практическом случае с малым коэффициентом нелинейности ($3|g_3|a_0^2/4 \ll 1$) колебания затухают с декрементом α , который возникает в синхротронах с системой подавления с линейной передаточной характеристикой цепи обратной связи. Для величины отношения амплитуд линейных и нелинейных колебаний получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n(\text{linear})}{a_n(\text{nonlinear})} = \sqrt{1 + 3g_3 a_0^2/4}.$$

Таким образом, «жесткая» нелинейность ($g_3 > 0$) приводит к небольшому увеличению скорости убывания амплитуды когерентных поперечных колебаний, причем этот эффект квадратичным образом зависит от начальной амплитуды колебаний a_0 . В случае «мягкой» нелинейности ($g_3 < 0$) возникает небольшое уменьшение скорости убывания амплитуды колебаний.

Поправки в частоту когерентных колебаний также зависят от малого коэффициента нелинейности $3g_3 a_0^2/4$, но затухают с декрементом 2α . Однако следует избегать влияния нелинейностей на поправки от частоты, для чего необходимо обеспечивать оптимальный режим подавления колебаний, когда $\cos \eta = 0$.

Из (51) ясно, что кубический удар возбуждает третью гармонику колебаний:

$$\begin{aligned} & 4 \sin 2\mu \sin \mu [\nu_{13} \cos 3\mu + \gamma_{13} \sin 3\mu] \cos 3\psi_n - \\ & - [\nu_{13} \sin 3\mu - \gamma_{13} \cos 3\mu] \sin 3\psi_n = \\ & = a_n^3 \frac{g_3}{4} (\sin \eta \sin 3\psi_n + \sin (\mu - \eta) \sin (3\psi_n + 3\mu)). \end{aligned}$$

В итоге в первом приближении общее решение при $n \geq 1$ есть

$$\begin{aligned} x[n] = & a_n \sin \psi_n + \\ & + \left(\frac{g_3 a_n^3}{16} \right) \frac{\sin \eta \sin (3\psi_n - 3\mu) + \sin (\mu - \eta) \sin 3\psi_n \cos 3\mu}{\sin 2\mu \sin \mu}, \end{aligned}$$

где амплитуда a_n и фаза ψ_n заданы в (56) и (55). Возбуждение третьей гармоники может оказаться неблагоприятным эффектом вследствие проявления линейных резонансов.

4.2.2. *Кулоновское трение.* В нелинейной механике кулоновским трением называют силу трения, которая постоянна по величине, не зависит от скорости и действует в направлении, противоположном скорости [67]. Аналогичная ситуация может возникнуть, когда в синхротроне имеется система подавления со следующей передаточной характеристикой:

$$f_n(x_n) = \begin{cases} g_3 a_k & \text{при } x_n > 0, \\ -g_3 a_k & \text{при } x_n < 0, \end{cases}$$

где a_k — эквивалентная величина демпфирующего толчка (в единицах смещения частицы). Здесь также предполагается, что распознавание знака смещения возможно при сколь угодно малой величине смещения. Это означает, что в укороченных уравнениях в нулевом приближении $x_n = a_n \sin \psi_n$ можно считать, что

$$f_n(x_n) = \begin{cases} a_k & \text{при } 0 < \psi_n < \pi, \\ -a_k & \text{при } \pi < \psi_n < 2\pi. \end{cases}$$

Поэтому

$$\frac{da_n}{dn} = -\frac{2g_3 a_k}{\pi} \varkappa \sin \eta, \quad \frac{d\psi_n}{dn} = -\frac{2g_3 a_k}{\pi} \varkappa \cos \eta.$$

Таким образом, амплитуда колебаний уменьшается по линейному закону при $\varkappa \sin \eta > 0$. Поскольку $2g_3/\pi = 0,6366g > g/2$, то на начальном этапе подавления остаточных колебаний возникает небольшой выигрыш в убывании амплитуды колебаний. Однако надо учитывать, что при использовании данной передаточной функции возникают нечетные гармоники. Например, для третьей гармоники при $\varkappa \sin \eta = 1$ имеем

$$g_3 x_1 \propto \frac{g_3 a_k}{3\pi} \sin 3\psi_n.$$

Появление незатухающей гармоники следует из простых физических соображений, поскольку при малых амплитудах колебаний, когда $t > \pi a_0 / 2ga_k$, невозможно идеальное согласование импульсного толчка с шагом ga_k с возникающей наблюдаемой амплитудой колебаний, изменяющейся с шагом $2ga_k/\pi$.

4.2.3. *Нелинейный режим с ограничением силы коррекции.* Для систем подавления с ограничением силы коррекции (с передаточной характеристикой цепи обратной связи, получившей название «bang-bang») [75] зависимость между силой корректирующего толчка и смещением задана следующей нелинейной функцией:

$$gf(x) = \begin{cases} ga_n & \text{при } -a_c \leq x_n \leq a_c, \\ ga_l & \text{при } x_n > a_c, \\ -ga_l & \text{при } x_n < -a_c. \end{cases} \quad (57)$$

Для основной гармоники из (51) при $x \sin \eta = 1$ имеем

$$-A_1(a_n) = \frac{1}{2\pi} \left((4a_l - 2a_c) \sin \psi_c + (\pi - 2\psi_c) a_n \right), \quad (58)$$

$$\Phi_1(a_n) = 0, \quad (59)$$

где

$$\cos \psi_c = \frac{a_c}{a_n} \quad \text{при } a_n > a_c \quad \text{и} \quad \psi_c = 0 \quad \text{при } a_n < a_c. \quad (60)$$

В отличие от режима с кубической нелинейностью наряду с основной гармоникой будут возникать не только третья, но и более высокие гармоники, что типично для решений нелинейных уравнений. Из (59) также ясно, что в отношении фазы колебаний для СП с ограничением силы коррекции справедливы те же утверждения, что и приведенные в разделе для режима с кубической нелинейностью.

Из (58) с учетом (52) нетрудно найти темп изменения амплитуды со временем. Если $a_n \leq a_c$, то зависимость амплитуды a_n от n совпадает с (54). При $a_n \gg a_c$ получаем

$$a_n \simeq a_0 - \frac{2ga_l}{\pi} n. \quad (61)$$

Таким образом, для малых амплитуд колебаний (при $a_n \leq a_c$) динамика пучка в точности соответствует линейному режиму, что вполне естественно, поскольку корректирующий импульс толкателя $\Delta x'_n$ линейно зависит от отклонения сгустка x_n при $a_n \leq a_c$. Когда начальная амплитуда колебаний соответствует нелинейному режиму (при $a_0 \gg a_c$), то в первом приближении амплитуда a_n зависит линейно от времени до тех пор, пока корректирующий импульс толкателя постоянен по величине. Отметим, что линейная зависимость амплитуды от времени была также получена в численных расчетах в работе [69].

Отношение изменений амплитуд за оборот в линейном и нелинейном режимах есть

$$\frac{\Delta a_n (\text{при } a_n \leq a_c)}{\Delta a_n (\text{при } a_n > a_c)} \simeq \frac{\pi}{4} \frac{a_0}{a_l}.$$

Следовательно, при $a_0 \simeq a_l$ изменение амплитуды за оборот в первом приближении больше в нелинейном режиме, чем в линейном, так что в режиме «bang-bang» с начальным значением коэффициента передачи ga_l за несколько оборотов произойдет большее изменение амплитуды основной гармоники, чем за тот же промежуток времени в линейном режиме. Этот эффект может быть использован для ускорения темпа подавления остаточных колебаний сгустков непосредственно после их инжекции в синхротрон.

5. О РОСТЕ ЭМИТТАНСА ПУЧКА В СИНХРОТРОНЕ ВСЛЕДСТВИЕ ОШИБОК ИНЖЕКЦИИ ПРИ НАЛИЧИИ СИСТЕМЫ ПОДАВЛЕНИЯ

Систематическая реакция на случайные флуктуации величин смещений макрообъекта относительно равновесного состояния, результатом которой становится стохастический процесс, сопровождающийся уменьшением дисперсии функции распределения частиц в сгустке, приводит к уменьшению линейных размеров пучка в его сечении и повышению фазовой плотности. Такой процесс, происходящий с частицами пучка в синхротроне, называется стохастическим охлаждением [76–78]. Его постоянная времени обычно сопоставима с десятками тысяч периодов обращения. В то же время для постоянной времени процессов фазового перемешивания частиц характерна величина до тысячи периодов обращения. Поэтому рост эмиттанса вследствие ошибок инжекции следует соотносить с процессами фазового перемешивания частиц в сгустке.

В данном разделе приведено описание оригинальной аналитической модели [79, 80], позволяющей рассчитать рост эмиттанса пучка вследствие ошибок инжекции в синхротрон при наличии системы подавления когерентных поперечных колебаний с линейной и нелинейной передаточной характеристикой цепи обратной связи с учетом процессов неустойчивости пучка.

5.1. Физико-математическая модель. Возникающие при инжекции пучка в синхротрон ошибки, связанные с небольшим отличием импульса инжектируемых частиц от расчетного значения или со смещениями частиц относительно расчетной орбиты, приводят к росту эмиттанса пучка вследствие процессов фазового перемешивания. Хорошо известно, что этот рост эмиттанса вследствие ошибки \bar{a}_ε есть [11, 81]

$$\varepsilon = \left(1 + \frac{\bar{a}_\varepsilon^2}{2\sigma_0^2} \right) \varepsilon_0, \quad (62)$$

где ε_0 — начальный эмиттанс пучка, который определен среднеквадратичными параметрами инжектируемых сгустков [30, 40]. Далее будет использоваться обычное предположение о том, что среднеквадратичный размер σ_0 сгустка соответствует нормальному распределению (распределению Гаусса).

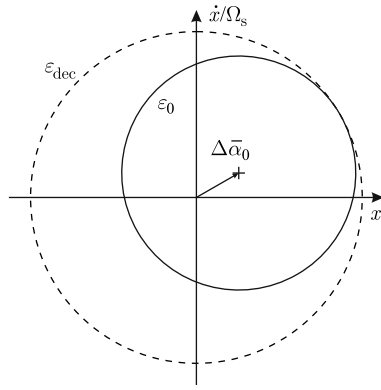


Рис. 17. Расплывание эмиттанса ε_0 инжектируемого пучка до равновесного значения ε_{dec} вследствие ошибки $\Delta\bar{\alpha}_0$ и процессов фазового перемешивания на фазовой плоскости $(x, \dot{x}/\Omega)$ [11]

Следует подчеркнуть, что в отсутствие демпфирующих процессов входящая в уравнение (62) величина начальной ошибки $\bar{\alpha}_\varepsilon$ есть заданное начальными условиями постоянное значение. При наличии системы подавления когерентных колебаний возникающее быстрое уменьшение их амплитуды в присутствии медленных процессов фазового перемешивания должно приводить к величине эмиттанса, меньшей ε_{dec} .

Амплитуда когерентных колебаний сгустка $\bar{a}(t)$ в присутствии только процессов фазового перемешивания, характеристикой которых является постоянная времени τ_{dec} , удовлетворяет дифференциальному уравнению [79]

$$\frac{d\bar{a}(t)}{dt} = -\frac{\bar{a}(t)}{\tau_{\text{dec}}}. \quad (63)$$

В начальный момент времени $\bar{a}(t=0) = \Delta\bar{\alpha}_0$. Следовательно, измерительный датчик системы подавления будет фиксировать экспоненциально уменьшающиеся величины смещений пучка.

Демпфирующий дефлектор системы подавления обеспечивает локальное изменение амплитуды колебаний сгустка в соответствии с величиной его же смещения в измерительном датчике в предшествующий момент времени. Так происходит на каждом обороте. Поскольку измерение величины смещения сгустка происходит однократно и локально на каждом обороте, то возникает некорректируемая погрешность измерения вследствие непрерывно происходящего процесса фазового перемешивания частиц. Эта некорректируемая погрешность пропорциональна «мгновенной» (на каждом обороте) амплитуде

В уравнении (62) предполагается, что все частицы инжектируемого пучка с эмиттансом ε_0 распределяются (см. рис. 17) на большую фазовую площадь ε_{dec} в течение промежутка времени, зависящего от постоянной времени τ_{dec} перехода когерентных колебаний в некогерентные. Фазовая площадь задана как $(x, \dot{x}/\Omega)$, где x — смещение центра тяжести сгустка относительно равновесной орбиты. Здесь Ω — циклическая частота малых поперечных (бетатронных) колебаний.

Следует подчеркнуть, что в отсутствие демпфирующих процессов входящая в уравнение (62) величина начальной ошибки $\bar{\alpha}_\varepsilon$ есть заданное начальными условиями постоянное значение. При наличии системы подавления когерентных колебаний возникающее быстрое уменьшение их амплитуды в присутствии медленных процессов фазового перемешивания должно приводить к величине эмиттанса, меньшей ε_{dec} .

колебаний сгустка. Поэтому фигурирующее в уравнении (62) мгновенное значение величины \bar{a}_ε можно отождествлять с функцией $\bar{a}_\varepsilon(t) = \Delta\bar{a}_0 - a(t)$, причем

$$\frac{d\bar{a}_\varepsilon(t)}{dt} = \frac{\bar{a}(t)}{\tau_{\text{dec}}} \quad (64)$$

с начальным условием $\bar{a}_\varepsilon(t=0) = 0$.

В общем случае динамики сгустков в синхротроне следует изменить дифференциальное уравнение (63), включив в него вклад $d\bar{a}_d(t)/dt$ процессов, обусловленных демпфирующим воздействием системы подавления, и учесть рост амплитуды колебаний с постоянной времени τ_{inst} из-за неустойчивости пучка:

$$\frac{d\bar{a}(t)}{dt} = -\frac{\bar{a}(t)}{\tau_{\text{dec}}} + \frac{d\bar{a}_d(t)}{dt} + \frac{\bar{a}(t)}{\tau_{\text{inst}}}. \quad (65)$$

Пусть найдено решение дифференциального уравнения (65). Его можно использовать для решения дифференциального уравнения (64). Тогда величина амплитуды колебаний, ответственная за рост эмиттанса, есть

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{a}_\varepsilon(t) = F_\varepsilon \cdot \Delta\bar{a}_0, \quad (66)$$

где F_ε — формфактор. Так, $F_\varepsilon = 1$ при наличии только процессов фазового перемешивания и $F_\varepsilon < 1$ при учете действия системы подавления. Следовательно, относительное изменение эмиттанса можно представить следующей формулой:

$$\frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon_0} = \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon_0} = \frac{(\Delta\bar{a}_0)^2}{2\sigma_0^2} F_\varepsilon^2. \quad (67)$$

5.2. Система подавления с линейной передаточной характеристикой.

При наличии системы подавления с линейной передаточной характеристикой имеем

$$\frac{d\bar{a}_d(t)}{dt} = -\frac{\bar{a}(t)}{\tau_d}, \quad (68)$$

где τ_d — постоянная времени затухания когерентных колебаний вследствие демпфирующего воздействия системы подавления. Подставляя (68) в (65), получаем следующее дифференциальное уравнение для $\bar{a}(t)$:

$$\frac{d\bar{a}(t)}{dt} = -\frac{\bar{a}(t)}{\tau_{\text{dec}}} - \frac{\bar{a}(t)}{\tau_d} + \frac{\bar{a}(t)}{\tau_{\text{inst}}} = -\frac{\bar{a}(t)}{\tau_o}. \quad (69)$$

Суммарная величина постоянной времени τ_o наблюдаемого процесса изменения $\bar{a}(t)$ есть

$$\frac{1}{\tau_o} = \frac{1}{\tau_{\text{dec}}} + \frac{1}{\tau_d} - \frac{1}{\tau_{\text{inst}}}. \quad (70)$$

Колебания будут затухающими, если $\tau_d < \tau_{\text{inst}} < \tau_{\text{dec}}$. В этом случае решение (69) есть

$$\bar{a}(t) = \Delta\bar{a}_0 \exp(-t/\tau_o), \quad (71)$$

а решение уравнения (64) с учетом решения (71) для $\bar{a}(t)$ имеет вид

$$\bar{a}_\varepsilon(t) = \frac{\tau_o}{\tau_{\text{dec}}} (1 - \exp(-t/\tau_o)) \Delta\bar{a}_0. \quad (72)$$

В итоге, согласно (66), формфактор F_ε есть

$$F_\varepsilon = \frac{1}{\Delta a_0} \lim_{t \rightarrow \infty} \bar{a}_\varepsilon(t) = \frac{\tau_o}{\tau_{\text{dec}}} = \left(1 + \frac{\tau_{\text{dec}}}{\tau_d} - \frac{\tau_{\text{dec}}}{\tau_{\text{inst}}}\right)^{-1}. \quad (73)$$

Отсюда величина относительного роста эмиттанса согласно (67) есть

$$\frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon_0} = \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon_0} = \frac{(\Delta\bar{a}_0)^2}{2\sigma_0^2} F_\varepsilon^2, \quad F_\varepsilon = \left(1 + \frac{\tau_{\text{dec}}}{\tau_d} - \frac{\tau_{\text{dec}}}{\tau_{\text{inst}}}\right)^{-1}. \quad (74)$$

Если $\tau_{\text{inst}} = \tau_d$ или $\tau_{\text{inst}} > \tau_d \rightarrow \infty$, то $F_\varepsilon = 1$ и (74) совпадает с (62), т. е. $\bar{a}_\varepsilon = \Delta\bar{a}_0$. Если $\tau_{\text{inst}} \rightarrow \infty$, то

$$\varepsilon = \left(1 + \frac{(\Delta\bar{a}_0)^2}{2\sigma_0^2} \left(1 + \frac{\tau_{\text{dec}}}{\tau_d}\right)^{-2}\right) \varepsilon_0. \quad (75)$$

Это выражение совпадает с формулой для роста эмиттанса из работы [12].

Из формул (74) и (75) ясно, что чем быстрее происходит процесс фазового перемешивания (меньше величина τ_{dec}) при фиксированной величине τ_d , тем больше отличие конечной величины эмиттанса от его начального значения для инжектируемого пучка (см. рис. 18). Следует также подчеркнуть, что величина формфактора F_ε существенно зависит от τ_d . Так, если $\tau_d \rightarrow \tau_{\text{inst}}$, т. е. τ_d незначительно отличается от τ_{inst} , то $F_\varepsilon \rightarrow 1$ и следствием начальной ошибки $\Delta\bar{a}_0$ становится рост эмиттанса до максимального значения ε_{dec}

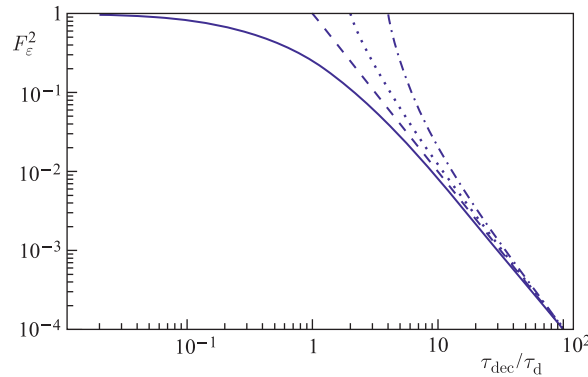


Рис. 18. График зависимости F_ε^2 от τ_{dec}/τ_d без неустойчивости (сплошная линия), при $\tau_{\text{inst}} = \tau_{\text{dec}}$ (штриховая), $\tau_{\text{inst}} = \tau_{\text{dec}}/2$ (пунктирная), $\tau_{\text{inst}} = \tau_{\text{dec}}/4$ (штрихпунктирная) [80]

(т. е. до величины, получающейся при наличии только процессов фазового перемешивания). Поэтому должно выполняться строгое неравенство

$$\frac{1}{\tau_d} - \frac{1}{\tau_{\text{inst}}} \geq \frac{\kappa}{\tau_{\text{dec}}}.$$

Значение $\kappa = 1$ уже неоднократно использовалось для оценок превышения декремента T_0/τ_d над инкрементом неустойчивости T_0/τ_{inst} или декрементом фазового перемешивания T_0/τ_{dec} , например, в определении сепаратрисы для декрементов. В согласии с формулами (74) получаем, что относительный рост эмиттанса $\Delta\varepsilon/\varepsilon$ при $\kappa = 1$ составляет 12,5 %, если $\Delta\bar{a}_0 \simeq \sigma_0$. Такую величину прироста эмиттанса можно оценивать как предельно допустимое значение. С учетом полученных результатов оценку для κ можно уточнить. Действительно, при проектировании инжекционной системы для величин остаточных колебаний $\Delta\bar{a}_0$ обычно используется следующая оценка: $\Delta\bar{a}_0 \simeq \sigma_0$. При этом предполагается, что относительный рост эмиттанса $\Delta\varepsilon/\varepsilon$ должен быть не более 5 %, т. е. $F_\varepsilon^2 < 0,1$. Отсюда получаем, что $\kappa \geq 2$.

5.3. Система подавления с нелинейной передаточной характеристикой.

Дифференциальное уравнение для $\bar{a}(t)$ в случае системы подавления с нелинейной передаточной характеристикой (кубическая нелинейность) после подстановки (55) в (65) имеет следующий вид:

$$\frac{d\bar{a}(t)}{dt} = -\frac{\bar{a}(t)}{\tau_{\text{dec}}} - \frac{\bar{a}(t)}{\tau_d} - \frac{3g_3 \bar{a}^3(t)}{4 \tau_d} + \frac{\bar{a}(t)}{\tau_{\text{inst}}} = -\frac{\bar{a}(t)}{\tau_o} - \frac{3g_3 \bar{a}^3(t)}{4 \tau_d}, \quad (76)$$

где для τ необходимо использовать (70). Решение дифференциального уравнения (76) есть

$$\bar{a}(t) = \frac{\Delta\bar{a}_0 \exp(-t/\tau_o)}{\sqrt{1 + \xi(1 - \exp(-2t/\tau_o))}}, \quad (77)$$

где

$$\xi = \frac{3g_3 \tau_o}{4 \tau_d} (\Delta\bar{a}_0)^2. \quad (78)$$

После решения уравнения (64) для $\bar{a}_\varepsilon(t)$ с выражением $\bar{a}(t)$, приведенным в (77), и подстановки $\bar{a}_\varepsilon(t)$ в уравнение (66) нетрудно получить, что формфактор F_ε может быть рассчитан в соответствии со следующей формулой [79]:

$$F_\varepsilon = \frac{1}{\Delta\bar{a}_0} \lim_{t \rightarrow \infty} \bar{a}_\varepsilon(t) = \frac{\tau_o}{\tau_{\text{dec}} \sqrt{|\xi|}} \begin{cases} \arcsin \left(\sqrt{\frac{|\xi|}{1 + \xi}} \right), & \forall g_3 > 0, \\ \ln \left| \sqrt{\frac{|\xi|}{1 + \xi}} + \sqrt{1 + \frac{|\xi|}{1 + \xi}} \right|, & \forall g_3 < 0. \end{cases} \quad (79)$$

Если $|\xi| \ll 1$, то для F_ε в (79) получаем

$$F_\varepsilon = \frac{\tau_0}{\tau_{\text{dec}} \sqrt{1 + \xi}}. \quad (80)$$

Сопоставляя (80) с формулой для формфактора (73), можно заключить, что в случае нелинейной передаточной характеристики цепи обратной связи значение формфактора F_ε вследствие его зависимости от ξ зависит от величин ошибок при инжекции. Это совпадает с хорошо известным фактом: линейные преобразования функцию распределения не изменяют. Однако при нелинейной передаточной функции цепи обратной связи конечная функция распределения отличается от начальной. Так, «сглаживающий» эффект возникает при $g_3 > 0$. Если $g_3 < 0$, то возникает дополнительное «разбухание» поперечного сечения пучка.

Обычно в системах подавления все устройства в цепи обратной связи выполняются с высокой степенью линейности их передаточных характеристик. Так, типичный датчик положения имеет линейную характеристику $V_{\text{in}}(x_b)$ для зависимости регистрируемого напряжения V_{in} от смещения пучка x_b вплоть до величин отклонений $|x_b| = 6\sigma_0$ [82], в то время как максимальный допуск по уходам пучка от центра датчика, даже с учетом ошибок из-за несовпадения импульса инжектируемых частиц с расчетным значением, обычно не превосходит $\pm 4\sigma_0$ [56]. Отклоняющее электромагнитное поле в дефлекторе обычно однородное. В качестве аналоговых радиотехнических устройств в цепи обратной связи используются высококачественные широкополосные малошумящие усилители. При настройке с пучком линейность характеристики цепи обратной связи специально проверяется, причем особое внимание уделяется ее динамическому диапазону (примерно в пределах $|x_b| \leq 4\sigma_0$). В результате динамика сгустка соответствует закономерностям, характерным для малых линейных колебаний точечных объектов. С помощью компьютерных методов обработки цифрового сигнала можно изменить передаточную характеристику цепи обратной связи, сделав ее, например, нелинейной. В настоящем разделе показано, что возникающие при этом количественные и качественные закономерности соответствуют результатам нелинейной динамики точечных объектов. Следует вновь подчеркнуть, что сгусток является макрообъектом. Воздействие в дефлекторе на все частицы сгустка одинаковое, а регистрируемый датчиком положения сигнал пропорционален смещению центра тяжести сгустка. Результирующая же зависимость воздействия на макрообъект (сгусток) от вызывающего его смещения может быть сформирована как нелинейная функция.

Учитывая сказанное выше, необходимо подчеркнуть, что интеграция традиционных подходов, применяемых в системах подавления с линейной передаточной характеристикой, и компьютерных методов обработки цифровых сигналов в цепи обратной связи, позволяющих формировать нелинейную зави-

симость между измеряемым сигналом и демпфирующим воздействием, открывает новые возможности для исследования линейной и нелинейной динамики пучка в ускорительной физике.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящем обзоре последовательно изложены методы анализа движения заряженного сгустка в фокусирующем магнитном поле синхротрона (периодический процесс в пространстве), подвергающегося демпфирующему воздействию системы подавления (периодический процесс во времени), которое пропорционально смещению этого сгустка в предшествующие моменты времени. Систематизированы и уточнены имеющиеся данные и приведены закономерности и ограничения для декрементов и сдвигов частот затухающих когерентных поперечных колебаний пучка в синхротронах с цифровыми широкополосными системами обратной связи, подтвержденные в экспериментах с протонным пучком на ЛНС.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Vos L. Damping of Coherent Oscillations // Nucl. Instr. Meth. A. 1997. V. 391. P. 56–63. CERN–SL–96–066–AP, Geneva, CERN, December 1996.
2. Höfle W. Progress in Transverse Feedbacks and Related Diagnostics for Hadron Machines // Proc. of the 4th Intern. Particle Accel. Conf. «IPAC-2013», Shanghai, China, May 12–17, 2013. Phys. Rev. Special Topics — Accel. Beams (PRST-AB). 2013. P. 3990–3994.
3. Thorndahl L., Vaughan A. Transverse Feedback for the ISR // Proc. of the 5th IEEE Particle Accel. Conf., San Francisco, CA, USA, March 5–7, 1973. IEEE Trans. Nucl. Sci. V. 20, No. 3. 1973. P. 807–808.
4. Балбеков В. И., Герцев К. Ф., Лебедев О. П. Системы подавления поперечных дипольных колебаний пучка в ускорителе ИФВЭ. Препринт ИФВЭ 84-23. Серпухов, 1984.
5. Адо Ю. А. и др. Широкополосная система подавления поперечных дипольных колебаний пучка в ускорителе ИФВЭ // Тр. X Совещ. по ускорителям заряженных частиц, Дубна, 21–23 окт. 1986 г. Т. I. Дубна, 1987. С. 375–378.
6. Bossart R. et al. The Damper for the Transverse Instabilities of the SPS // Proc. of the 1979 Particle Accel. Conf., San Francisco, CA, USA, March 12–14, 1979. V. NS-26, No. 3. IEEE Trans. Nucl. Sci., 1979. P. 3284–3286.
7. Lebedev O. et al. Transverse Feedbacks in the U70 Proton Synchrotron of IHEP // Proc. of XXII Rus. Part. Accel. Conf. «RuPAC-2010», Protvino, Russia, Sept. 27–Oct. 1, 2010. Protvino: IHEP, 2010. P. 239–241.

8. *Ebert E., Heins D., Klute J. et al.* Transverse and Longitudinal Multi-Bunch Feedback Systems for PETRA. DESY 91-036. Hamburg, 1991. 18 p.
9. *Heins D. et al.* Wide Band Multi-Bunch Feedback Systems for PETRA. DESY 89-157. Hamburg, 1989. 15 p.
10. *Дементьев Е. Н. и др.* Запуск систем обратной связи на электрон-позитронном коллайдере ВЭПП-4М // Письма в ЭЧАЯ. 2010. Т. 7, вып. 7(163). С. 765–773.
11. *Möhl D.* Sources of Emittance Growth // Proc. of the CAS. Specialised CAS Course on Small Accelerators, Zeegse, The Netherlands, May 24–June 2, 2005. CERN 2006-012. 2006. P. 45–69.
12. *Vos L.* Transverse Emittance Blow-up from Dipole Errors in Proton Machines // Proc. of the Sixth Eur. Part. Accel. Conf., Stockholm, June 22–26, 1998. Inst. Phys., 1998. P. 1365–1367.
13. *Lonza M.* Multi-Bunch Feedback System // CAS–CERN Accelerator School: Digital Signal Processing. Sigtuna, Sweden, May 31–June 9, 2007, CERN-2008-003. Geneva, 2008. P. 285–330.
14. *Lebedev O. et al.* Digital Delay-Line Periodic FIR Filter Layout of Transverse Feedback in the U70 // Proc. Of XXIII Rus. Part. Accel. Conf. «RuPAC-2012», St. Petersburg, Russia, Sept. 24–28, 2012. St. Petersburg State Univ., 2012. P. 647–649.
15. *Zhabitsky V. M. et al.* Beam Tests of the LHC Transverse Feedback System // Proc. of XXII Rus. Part. Accel. Conf. «RuPAC-2010», Protvino, Russia, Sept. 27–Oct. 1, 2010. Protvino: IHEP, 2010. P. 275–279.
16. *Гоноровский И. С.* Радиотехнические цепи и сигналы. М.: Сов. радио, 1977. 608 с.
17. *Baudrenghien P. et al.* Digital Signal Processing for the Multi-Bunch LHC Transverse Feedback System // Proc. of the 11th Eur. Part. Accel. Conf., Genoa, June 23–27, 2008. The Eur. Phys. Soc. Accel. Group (EPS-AG), 2008. P. 3269–3271.
18. *Boussard D.* Evaluation of Transverse Emittance Growth from Damper Noise in Collider. SL/Note 92-79, LHC Note 218. Geneva, 1992.
19. *Rossi V.* Digital Signal Processing. Applications and Implementation for Accelerators. Digital Notch Filter with Programmable Delay and Betatron Phase Adjustment for the PS, SPS & LHC Transverse Dampers // Workshop on DSP Applications in the SL Division. Nov. 5, 2001. CERN-SL-2002-047 (HRF). Geneva, 2002. 48 p.
20. *Agapov N. et al.* NICA Project at JINR // Proc. of XXIII Rus. Part. Accel. Conf. «RuPAC-2012», St. Petersburg, Russia, Sept. 24–28, 2012. St. Petersburg State Univ., 2012. P. 5–8.
21. *Kozlov O. et al.* Collider of the NICA Accelerator Complex: Optical Structure and Beam Dynamics // Ibid. P. 278–280.
22. *Gorbachev E., Lebedev N., Zhabitsky V.* Implementing Elements of Digital Transverse Feedback System in Altera FPGA // Proc. of the XXI Rus. Part. Accel. Conf. «RuPAC-2008», Zvenigorod, Russia, Sept. 28–Oct. 3, 2008. M., 2008. P. 6–8.

23. *Blas A., Gilardoni S., Sterbini G.* Beam Tests and Plans for the CERN PS Transverse Damper System // Proc. of 4th Intern. Part. Accel. Conf. «IPAC-2013», Shanghai, China, May 12–17, 2013. Phys. Rev. Special Topics — Accel. Beams (PRST-AB). 2013. P. 2947–2949.
24. *Смалюк В. В.* Поперечная когерентная неустойчивость сгустка заряженных частиц // ЭЧАЯ. 2012. Т. 43, вып. 2. С. 400–450.
25. *Жабицкий В. М.* Устойчивость ионного пучка в синхротронах с цифровыми системами подавления когерентных поперечных колебаний // Письма в ЭЧАЯ. 2010. Т. 7, № 7(163). С. 742–747.
26. *Zhabitsky V. M.* Transverse Feedback System with a Digital Filter // Nucl. Instr. Meth. A. 1997. V. 391. P. 96–99.
27. *Zhabitsky V. M., Korenev I. L., Yudin L. A.* Transverse Feedback System with Digital Filter // Proc. of the 1993 Particle Accel. Conf., Washington, May 17–20, 1993. IEEE. 1993. P. 2543–2545.
28. *Жабицкий В. М.* Применение Z -преобразования для решения задачи о подавлении свободных колебаний пучка в ускорителе. Сообщ. ОИЯИ Р9-91-91. Дубна, 1991. 18 с.
29. *Courant E. D., Snyder H. S.* Theory of the Alternating-Gradient Synchrotron // Ann. Phys. 2000. V. 281. P. 360–480.
30. *Брук Г.* Циклические ускорители заряженных частиц. М.: Атомиздат, 1970. 312 с.
31. *Лебедев А. Н., Шальнов А. В.* Основы физики и техники ускорителей. М.: Энергоатомиздат, 1991. 528 с.
32. *Rossbach J., Schmäser P.* Basic Course on Accelerator Optics // CAS–CERN Accelerator School: Fifth General Accel. Phys. Course, University of Jyväskylä, Finland, Sept. 7–18, 1992, CERN 94-01. V. I. Geneva, 1994. P. 17–88.
33. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1978. 832 с.
34. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Механика. М.: Наука, 1973. Т. I. 208 с.
35. *Балбеков В. И., Герцев К. Ф.* Системы подавления когерентной поперечной неустойчивости пучка в УНК. Препринт ИФВЭ 87-120. Серпухов, 1987.
36. *Lebedev V. et al.* Emittance Growth due to Noise and Its Suppression with the Feedback System in Large Hadron Colliders. SSCL-Preprint-188. Superconducting Super Collider Lab. 1993. 26 p.
37. *Tsyganov E. et al.* The SSC Damper System. SSCL-Preprint-202. Superconducting Super Collider Lab. 1993. 5 p.
38. *Byrd J.* Simulations of the PEP-II Transverse Coupled-Bunch Feedback System // Proc. of the 1995 Part. Accel. Conf., Dallas, USA, May 1–5, 1995. IEEE, 1995. P. 2684–2686.
39. *Жабицкий В. М.* Отклик пучка на переходный процесс в синхротронах с цифровой системой подавления когерентных поперечных колебаний // Письма в ЭЧАЯ. 2013. Т. 10, № 1(178). С. 120–129.

40. Handbook of Accelerator Physics and Engineering / Ed. by A. Chao, M. Tinger. World Sci., 1999. 740 p.
41. *Жабицкий В. М.* Нелинейный режим подавления остаточных колебаний пучка после инжекции в синхротрон // XVI Совещ. по ускорителям заряженных частиц, Протвино, 20–22 окт. 1998 г. Т. 2. ИФВЭ, 1999. С. 134–139.
42. *Жабицкий В. М. и др.* Подавление резистивной неустойчивости в I ступени УНК при цифровой обработке сигнала в цепи обратной связи. Сообщ. ОИЯИ Р9-91-99. Дубна, 1991. 12 с.
43. *Сиберт У. М.* Цепи, сигналы, системы. Книга первая. М.: Мир, 1988. 336 с.
44. The LHC Design Report / Ed. by O. S. Brüning. CERN-2004-003. Geneva: CERN, 2004. 548 p.
45. *Zhabitsky V. M.* Beam Stability in Synchrotrons with Digital Filters in the Feedback Loop of a Transverse Damper // Proc. of the 11th Intern. Conf. on Heavy Ion Accelerator Technology, Venezia, Italy, June 8–12, 2009. Istituto Nazionale di Fisica Nucleare (INFN). 2009. P. 306–310.
46. *Zhabitsky V. M.* Transient Response of a Digital Transverse Feedback System in Synchrotrons // Proc. of XXIII Rus. Part. Accel. Conf. «RuPAC-2012», St. Petersburg, Russia, Sept. 24–28, 2012. St. Petersburg State Univ., 2012. P. 73–75.
47. *Жабицкий В. М.* Устойчивость пучка в синхротронах с цифровой системой подавления когерентных поперечных колебаний в зависимости от частоты бетатронных колебаний // Письма в ЭЧАЯ. 2012. Т. 9, № 4–5(174–175). С. 563–568.
48. *Rangarajan G., Chan K. C. D.* Transverse Resistive Wall Effects on the Dynamics of a Bunched Electron Beam // Phys. Rev. A. 1989. V. 39. P. 4749–4757.
49. *Жабицкий В. М., Корнев И. Л., Юдин Л. И.* Подавление резистивной неустойчивости сгруппированного пучка с использованием цепей обратной связи. Сообщ. ОИЯИ Р9-92-309. Дубна, 1992. 20 с.
50. *Zhabitsky V. M.* Theory of Multi-Bunch Resistive Wall Instability Damping Using Feedback System with a Digital Filter // Proc. of the Fourth Eur. Part. Accel. Conf., London, June 27–July 1, 1994. World Sci., 1994. P. 1090–1092.
51. *Балбеков В. И.* Эффекты пространственного заряда в УНК // XIX Совещ. по ускорителям заряженных частиц, Дубна, 16–18 окт. 1984 г. Т. 2. Дубна: ОИЯИ, 1985. С. 360–367.
52. *Meller R. et al.* Decoherence of Kicked Beams. SSC-N-360. SSCL. Superconducting Super Collider Lab. 1997. 16 p.
53. *Brouzet E. et al.* A Damper for the \bar{p} Injection Oscillations in the PS Machine // IEEE Trans. Nucl. Sci. 1985. V. NS-32, No. 5. P. 2135–2137. CERN-PS-85-26-PSR. Presented at: 11th IEEE Part. Accel. Conf., Vancouver, Canada, May 13–16, 1985.
54. *Vendramini V.* Traitement du signal numérique pour le système de contre-réaction transverse utilisant un seul pick-up avec application dans le SPS et dans le LHC. SL-Note-2002-046 (HRF). Geneva: CERN, 2002. 14 p.

55. *Wienands U., Höfle W., Valuch D.* Gain Measurements of the LHC Transverse Feedback System at 3.5 TeV Beam Energy. CERN-ATS-Note-2011-131. Geneva, 2011. P. 1–7.
56. *Gorbachev E. V. et al.* LHC Transverse Feedback System: First Results of Commissioning // Proc. of the XXI Rus. Part. Accel. Conf. «RuPAC-2008», Zvenigorod, Russia, Sept. 28–Oct. 3, 2008. M., 2008. P. 97–100.
57. *Höfle W. et al.* LHC Transverse Damper Observations versus Expectations // Proc. of the LHC Beam Operation Workshop, Evian, France, Dec. 7–9, 2010. CERN-ATS-2011-017. 2011. P. 107–114.
58. *Höfle W. et al.* LHC Damper Beam Commissioning in 2010 // Proc. of the Second Intern. Part. Accel. Conf. «IPAC-2011», San Sebastian, Spain, Sept. 4–9, 2011. The Eur. Phys. Soc. Accel. Group (EPS-AG). 2011. P. 505–507; CERN-ATS-2011-033. Geneva, 2011.
59. *Жабицкий В. М.* Динамика пучка в синхротронах с системами обратной связи // Письма в ЭЧАЯ. 2013. Т. 10, № 6(183). С. 947–957.
60. *Gasior M.* FARADAY CUP AWARD: High Sensitivity Tune Measurement Using Direct Diode Detection. CERN-ATS-2012-246. Geneva, 2012. 7 p.
61. *Höfle W.* Progress with the SPS Damper // Proc. of Chamonix XI, Jan. 2001. Geneva: CERN, 2001. CERN-SL-2001-003 DI. P. 117–124.
62. *Zhabitsky V. M., Höfle W., Kotzian G.* Beam Stability in Synchrotrons with Notch and All-Pass Filters in the Feedback Loop of a Transverse Damper. CERN-BE-2009-013. Geneva, 2009. 12 p.
63. *Ivanov I. N. et al.* Requirements to the Feedback System to Damp Resistive Instability (I Stage UNK) // Proc. of the XV Intern. Conf. on High Energy Accel., Hamburg, Germany, July 20–24, 1992. V. II. World Sci., 1993. P. 1034–1036.
64. *Эльсгольц Л. Э., Норкин С. Б.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука, 1971. 296 с.
65. *Kohaupt R. D.* Theory of Multi-Bunch Feedback Systems. DESY 91-071. Hamburg, 1991. 22 p.
66. *Myers S.* A First Look at the Requirements for Transverse Feedback for the LEP Main Ring. LEP Note 436. Geneva: CERN, 1983. 11 p.
67. *Боголюбов Н. Н.* Собр. науч. тр.: В 12 т. М.: Наука, 2005. Т. III. 605 с.
68. *Höfle W. et al.* Suggestion to Increase the Transverse Damper Efficiency // Part. Accel. 1997. V. 58. P. 281–286.
69. *Melnikov V.* Possibilities of Technical Implementation of Nonlinear Damping of Transversal Coherent Oscillations of a Beam // Nucl. Instr. Meth. A. 1997. V. 391. P. 93–95.
70. *Zhabitsky V. M.* Theory of a Transverse Feedback System with a Nonlinear Transfer Function // Proc. of the Sixth Eur. Part. Accel. Conf., Stockholm, June 22–26, 1996. Inst. of Phys., 1998. P. 1380–1382.

71. *Zhabitsky V. M.* Nonlinear Damping of Injection Oscillations // Proc. of the 1999 Particle Accel. Conf., New York, USA, March 29–Apr. 2, 1999. IEEE, 1999. P. 1222–1224.
72. *Zhabitsky V. M.* Nonlinear Damping of Injection Oscillations // Proc. of the Seventh Eur. Part. Accel. Conf., Vienna, June 26–30, 2000. Eur. Phys. Soc. Interdivisional Group on Accel. (EPS-IGA). 2000. P. 1933–1935.
73. *Боголюбов Н. Н.* Собр. научн. тр.: В 12 т. М.: Наука, 2005. Т. II. 828 с.
74. *Jackson E. Atlee.* Perspectives of Nonlinear Dynamics. Cambridge Univ. Press, 1989. V. 1. 496 p.
75. *Zhabitsky V. M.* Damping Parameters of a Transverse Feedback System with a «Bang-Bang» Transfer Function // Proc. of the XVII Intern. Conf. on High Energy Accel. (HEACC 98), Dubna, Sept. 7–12, 1998. Dubna: JINR, 1998. P. 391–393.
76. *ван дер Meer С.* Стохастическое охлаждение и накопление антипротонов // УФН. 1985. Т. 147, вып. 2. С. 405–420.
77. *Blaskiewicz M., Fischer W.* 3D Cooling for Uranium Collisions at RHIC // CERN Courier. 2012. V. 52, No. 8. P. 17–19.
78. *Trubnikov G.* Nuclotron Tests Out Stochastic Cooling in Dubna // CERN Courier. 2013. V. 53, No. 5. P. 19–20.
79. *Жабицкий В. М.* О росте эмиттанса пучка вследствие ошибок инжекции в синхротронах с нелинейными системами подавления когерентных поперечных колебаний // Письма в ЭЧАЯ. 2008. Т. 5, № 1(143). С. 86–93.
80. *Жабицкий В. М.* О росте продольного эмиттанса ступков из-за ошибок инжекции в синхротронах с системой демпфирования когерентных продольных колебаний // Письма в ЭЧАЯ. 2013. Т. 10, № 2(179). С. 236–244.
81. *Hereward H. G.* How Good Is the R.M.S. As a Measure of a Beam Size? CERN/MPS/DL 69-15. Geneva, 1969. 21 p.
82. *Gorski A., Lill R.* Construction and Measurement Technologies for the APS LEUTL Project RF Beam Position Monitor // Proc. of the 1999 Part. Accel. Conf., New York, USA, March 29–Apr. 2, 1999. IEEE, 1999. P. 1411–1413.