

## ОСОБЕННОСТИ ВОЗМУЩЕНИЙ В КОНФОРМНОЙ КОСМОЛОГИИ

*С. А. Миронов* \*

Институт ядерных исследований Российской академии наук, Москва

ВВЕДЕНИЕ	1648
МОДЕЛЬ С КОНФОРМНЫМ СКАТЫВАНИЕМ	1654
Линейное приближение	1654
Влияние инфракрасных радиальных мод на возмущения фазы: первый порядок по $\hbar$	1657
Статистическая анизотропия	1659
Генезис с галилеоном и конформное скатывание	1661
Негауссовость	1665
ПСЕВДОКОНФОРМНАЯ МОДЕЛЬ	1684
Классическое решение	1684
Тензорные возмущения	1689
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	1696
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	1697

---

\*E-mail: sa.mironov\_1@physics.msu.ru

## ОСОБЕННОСТИ ВОЗМУЩЕНИЙ В КОНФОРМНОЙ КОСМОЛОГИИ

*С. А. Миронов* \*

Институт ядерных исследований Российской академии наук, Москва

Обзор посвящен механизмам генерации и свойствам возмущений в моделях ранней Вселенной с конформной симметрией, являющихся альтернативами инфляции. В таких моделях подробно рассмотрены свойства первичных скалярных возмущений: спектр мощности, статистическая анизотропия и негауссовость, а также свойства первичных гравитационных волн.

We consider properties of perturbations in conformal cosmology. We study perturbations in the early Universe in different models with conformal invariance, which could be alternatives to inflation. Here we describe power spectrum, statistical anisotropy and non-Gaussianity of scalar perturbations and power spectrum of tensor modes.

PACS: 98.80.Cq

### ВВЕДЕНИЕ

На нынешнем этапе развития теоретической космологии и наблюдательных методов можно многое с уверенностью сказать не только о современной Вселенной, но и о ее прошлом. Основой космологии служит модель горячего Большого взрыва, которая описывает эволюцию Вселенной, по крайней мере начиная с температур порядка 1 МэВ, и во всем согласуется с экспериментом. Однако, если мы рассматриваем совсем ранние этапы развития Вселенной, в такой модели обнаруживаются внутренние теоретические проблемы, связанные с тонкой подстройкой начальных данных. Во-первых, однородная Вселенная, по крайней мере видимая ее часть, раньше состояла из  $10^{89}$  причинно не связанных областей, так что априори мы должны были бы видеть на небе большое количество сильно непохожих областей. Во-вторых, современная Вселенная плоская, с хорошей точностью, а это значит, что на старте (планковские времена) плоскостность была на уровне  $10^{-60}$ . В-третьих, энтропия

---

\*E-mail: sa.mironov\_1@physics.msu.ru

современной Вселенной превышает  $10^{88}$ , но в теории горячего Большого взрыва эволюция практически равновесная, что означает огромное начальное значение энтропии. Чтобы избежать этих проблем, надо предположить, что начальная стадия эволюции Вселенной сильно отличалась от того, что предполагается в теории горячего Большого взрыва. Более того, и для нас это будет особенно важно, специфическая ранняя стадия необходима для генерации космологических возмущений.

Первичные скалярные возмущения во Вселенной являются практически гауссовыми и имеют почти плоский спектр мощности [1–3]. Первое предполагает, что эти возмущения — усиленные вакуумные флуктуации слабо взаимодействующего квантового поля. Плоскостность же спектра, по-видимому, должна быть следствием какой-либо симметрии. Самый известный вариант — симметрия пространства де Ситтера, описывающего экспоненциальное расширение Вселенной. Это — приближенная симметрия инфляционной Вселенной [4–8], гарантирующая приближенную плоскостность скалярного спектра, получаемого благодаря инфляционному механизму [9–13]. Однако инфляция — не единственный возможный вариант. Плоский спектр, к примеру, получается в модели скалярного поля в плоском пространстве с отрицательным экспоненциальным потенциалом [14–16] (также [17, 18]). Уравнения движения этого поля инвариантны при одновременном растяжении пространства-времени и сдвиге поля. Эта симметрия сохраняется при медленной эволюции Вселенной (экпирозис [19, 20]), и из нее следует плоскостность скалярного спектра. Существуют и другие механизмы получения плоского спектра, например [21–25], причем иногда нет очевидной симметрии, гарантирующей плоскостность, и спектр получается плоским «случайно».

При поиске альтернативных симметрий, стоящих за плоским спектром, естественно обратиться к конформной инвариантности [26, 27]. В моделях, предложенных в [26, 27], предполагается, что до горячей стадии была эпоха, когда действие было конформно-инвариантным. В обеих моделях главной компонентой является скалярное поле, эволюционирующее во Вселенной. В первой модели это комплексное скалярное поле со стандартным кинетическим членом и отрицательным потенциалом четвертой степени, а во второй — два действительных скалярных поля, одно из которых имеет необычный кинетический член с производными второго порядка. В обеих моделях после эпохи конформной эволюции предполагается отскок или разогрев, после которого наступает горячая стадия. В целом концепция похожа на инфляционную, однако и динамика, и, главное, экспериментальные следствия этих моделей сильно отличаются от инфляционных. Столь же естественно, как и в инфляции, в моделях с конформной симметрией возмущения скалярного поля приобретают плоский спектр мощности, причем предполагается, что спектр не искажается на стадии разогрева, при переработке возмущений скалярного поля в адиабатические возмущения. Отличия моделей ранней

Вселенной с конформной инвариантностью от инфляционных заключаются в следующем: во-первых, скалярные возмущения получают негауссовость необычной формы [28, 29]; во-вторых, они становятся анизотропными [30]; в-третьих, в конформных моделях практически не генерируются гравитационные волны [31]. Основной задачей данного обзора является изучение особых свойств первичных возмущений в конформных моделях, которые позволяют отличить эти модели от инфляционных.

Что касается самих моделей с конформной симметрией, то, несмотря на существенное различие в мотивации и динамическом описании, модели работ [26] и [27] приводят к одному и тому же механизму генерации скалярных космологических возмущений. С этой точки зрения все сводится к модели с двумя скалярными полями  $\rho$  и  $\Theta$  с лагранжианом

$$L = L_\rho + \frac{1}{2}\rho^2(\partial_\mu\Theta)^2, \quad (1)$$

где  $L_\rho$  определяет динамику поля  $\rho$ . Требуется, чтобы при растяжениях поле  $\rho$  преобразовывалось следующим образом:  $\rho(x) \rightarrow \lambda\rho(\lambda x)$ ; предполагается, что имеет место нетривиальный фон  $\rho_c$ . Поле  $\Theta$  растягивается тривиально,  $\Theta(x) \rightarrow \Theta(\lambda x)$ ; возмущения поля  $\Theta$  являются предшественниками адиабатических мод. Нужно потребовать, чтобы на протяжении всего периода генерации возмущений  $\Theta$  влияние гравитационных эффектов на динамику этих двух полей было незначительным (это достигается разными путями в [26] и [27]), и предположить пространственную однородность фона  $\rho_c$ . Тогда можно однозначно написать:

$$\rho_c(x_0) = -\frac{1}{x_0}, \quad x_0 < 0, \quad (2)$$

где  $x_0 = \eta$  — конформное время в модели с конформным скатыванием [26] и  $x_0 = t$  — физическое время в модели генезиса [27].

Далее мы подробно сравним две модели и покажем их сходство. Пока, для определенности, будем работать в сценарии [26]. В нем конформная инвариантность дополнена глобальной симметрией, в простейшем случае  $U(1)$ , и включает в себя конформно связанное скалярное поле

$$S[\phi] = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi^* \partial_\nu \phi + \frac{R}{6} \phi^* \phi - V(\phi) \right],$$

эволюционирующее достаточно долго в потенциале

$$V(\phi) = -h^2 |\phi|^4. \quad (3)$$

Модуль этого скалярного поля соответствует полю  $\rho$ , а фаза — полю  $\Theta$  из формулы (1). Предполагается, что  $h \ll 1$ , т. е. теория находится в режиме

слабой связи. Кроме того, пространство-время предполагается однородным, изотропным и пространственно плоским,

$$ds^2 = a^2(\eta)(d\eta^2 - d\mathbf{x}^2).$$

Тогда из-за конформной связи динамика поля  $\chi(\eta, \mathbf{x}) = a\phi$  не зависит от поведения масштабного фактора и сводится к динамике поля в пространстве Минковского. Классическим решением является  $\chi_c(\eta)$  — однородное поле, скатывающееся в потенциале четвертой степени. Его поведение на поздних временах полностью определяется конформной инвариантностью,

$$\chi_c(\eta) = \frac{1}{h(\eta_* - \eta)}, \quad (4)$$

где  $\eta_*$  — произвольный действительный параметр, и без потери общности мы рассматриваем действительное решение. Как будет показано, на ранних временах линейные возмущения над этим решением осциллируют как моды свободного скалярного поля в пространстве Минковского, в то время как на поздних временах возмущения фазы

$$\theta = \sqrt{2} \operatorname{Arg} \phi$$

перестают зависеть от времени. В линейном порядке спектр возмущений фазы плоский,

$$\sqrt{\mathcal{P}_{\delta\theta}} = \frac{h}{2\pi}. \quad (5)$$

В [26] обсуждалось, что это свойство является следствием конформной и глобальной симметрий.

Далее в этом сценарии предполагается, что скалярный потенциал  $V(\phi)$  на самом деле имеет минимум при больших значениях поля и что модуль  $|\phi|$  в итоге в нем заканчивает эволюцию, см. рис. 1. Что касается дальнейшей эволюции, то тут возможны варианты. Наиболее простой случай заключается в том, что возмущения  $\delta\theta$  находятся за космологическим горизонтом к моменту окончания конформной стадии. Мы будем работать в таком предположении. Возмущения фазы остаются замороженными\*, а их спектр плоским. В гораздо более позднюю эпоху эти возмущения фазы переводятся в адиабатические скалярные возмущения с помощью, к примеру, механизма работ [35–38] (в этом случае  $\theta$  будет псевдо-намбу-голдстоуновским бозоном,

---

\*Для сжимающейся Вселенной это свойство загоризонтных мод сохраняется, если доминирующее вещество имеет жесткое уравнение состояния,  $w > 1$ . Это свойство, впрочем, в любом случае необходимо для жизнеспособности сценария с отскоком, см. обсуждения в работах [32–34].

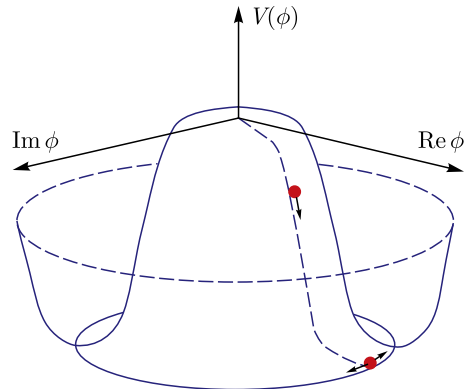


Рис. 1. Скалярный потенциал. Точки показывают эволюцию скалярного поля. Стрелки в конечной точке на дне потенциала показывают, что там имеются возмущения фазы

и переработка возмущений происходит, как в [39]) или механизма модулированного распада [40–42]. В любом случае, спектр мощности не искажается, так что получившиеся адиабатические возмущения имеют изначальный плоский спектр. Если конформная инвариантность не точная на этапе скатывания, то скалярный спектр мощности имеет слабый наклон, зависящий как от отклонения от конформности, так и от эволюции масштабного фактора при скатывании [43].

Своеобразной чертой модели является то, что во время скатывания поля модуль тоже получает возмущения. В поздние времена эти возмущения имеют красный спектр (ниже это будет показано),

$$\sqrt{\mathcal{P}_{|\phi|}(k)} \propto k^{-1}. \quad (6)$$

Следствием этого является наличие возмущений плотности энергии с красным спектром во время скатывания перед тем, как возмущения модуля заморозятся в минимуме потенциала  $V(\phi)$ . Они не опасны, если энергия поля  $\phi$  мала по сравнению с полной энергией на всех временах до заморозки модуля, т. е. космологическая эволюция определяется другой материей в раннюю эпоху. Здесь мы будем использовать именно это предположение.

Другим важным следствием является то, что инфракрасные радиальные моды взаимодействуют с возмущениями фазы, что, в принципе, может оказать большое влияние на последние. Это один из важных вопросов, которые мы будем обсуждать ниже. В работе [30] показано, что в линейном порядке по  $\hbar$  инфракрасные эффекты могут быть сведены к переопределению полей, так что сильного изменения результатов линейного анализа из-за инфракрасных мод не возникает.

Однако совсем пренебречь длинноволновыми модами  $\delta|\phi|$  нельзя. Моды, чьи длины волн сегодня превышают хаббловский размер  $H_0^{-1}$ , индуцируют статистическую анизотропию возмущений фазы  $\delta\theta$  и, следовательно, получающихся адиабатических возмущений: спектр мощности адиабатических возмущений  $\zeta$  имеет следующий вид [30]:

$$\mathcal{P}_\zeta(\mathbf{k}) = \mathcal{P}_0(k) \left( 1 + c_1 h \frac{H_0}{k} \hat{k}_i \hat{k}_j w_{ij} - c_2 h^2 (\hat{\mathbf{k}}\mathbf{u})^2 \right). \quad (7)$$

Первый нетривиальный член, линейный по  $h$ , не содержит инфракрасных эффектов;  $w_{ij}$  — это симметричный бесследовый тензор общего вида, с единичной нормировкой,  $w_{ij}w_{ij} = 1$ ;  $\hat{\mathbf{k}}$  — единичный вектор,  $\hat{\mathbf{k}} = \mathbf{k}/k$ , а  $c_1$  — константа порядка единицы, чье значение не может быть предсказано из-за космической неопределенности. В последнем члене  $\mathbf{u}$  — некоторый единичный вектор, независимый от  $w_{ij}$ , а положительный параметр  $c_2$  логарифмически усилен инфракрасными поправками. Это первое место, где проявляются глубоко инфракрасные моды. Очевидно, этот эффект мал при малых  $h$ .

Статистическая анизотропия в последнем члене в (7) похожа на ту, которая обычно обсуждается в контексте инфляции [44,45]. Именно она генерируется в некоторых конкретных моделях инфляции [46–49]: эта анизотропия ненулевая при больших импульсах и имеет специальную тензорную структуру  $(\hat{\mathbf{k}}\mathbf{u})^2$  с постоянным  $\mathbf{u}$ . С другой стороны, первый нетривиальный член в (7) имеет общую тензорную структуру и уменьшается с импульсом. Последнее свойство похоже на ситуацию с космологическими моделями, включающими анизотропное расширение перед инфляцией [50,51]. В целом статистическая анизотропия (7) может быть весьма существенной, поскольку сильных ограничений на  $h$  поставить нельзя, по крайней мере в рамках механизма модулированного распада для переработки возмущений фазы в адиабатические моды.

Поскольку скалярный потенциал нелинеен, возмущения фазы  $\delta\theta$ , а следовательно и адиабатические моды, в рассматриваемом сценарии получают негауссовость помимо той, которая может генерироваться во время переработки возмущений. Из результата, сформулированного выше, понятно, что негауссовость не связана с инфракрасными эффектами в первом нетривиальном порядке по  $h$ . Поэтому ее невозможно вычислить с помощью градиентных разложений эффективного фонового поля, и приходится проводить прямой расчет. Вычислению негауссовости и посвящена первая часть этого обзора. Благодаря симметрии  $\theta \rightarrow -\theta$  трехточечный коррелятор фазы равен нулю, так что нашей задачей будет расчет четырехточечного коррелятора. Для этого мы будем использовать технику Келдыша–Швингера, позволяющую находить одновременные корреляторы операторов в представлении взаимодействия. Она адекватна для вычисления средних от полей по *начальным*

состояниям. Результаты оказываются громоздкими, однако они упрощаются в пределе малого переданного импульса. Явные выражения в этом случае даются формулой (83).

Кроме того, мы рассмотрим другой важный пример модели псевдоконформного класса. Мы изучим случай, когда нарушенная конформная симметрия приводит к такой же космологической эволюции, как в моделях экпирозиса. Экпирозис — это эпоха очень медленного сжатия, на которой доминирует давление, т. е. реализуется уравнение состояния  $-p \gg \rho > 0$  (кроме того, благодаря такому уравнению состояния Вселенная сама приходит в изотропное состояние). Модель, которую мы будем рассматривать, основана на скалярном поле с отрицательным потенциалом  $\phi^4$ . Этот пример приводился в работе [52], где авторами была рассмотрена экпиротическая стадия и получен плоский спектр скалярных возмущений; кроме того, был написан ответ для тензорного спектра, который генерируется на этой стадии. Здесь мы не будем касаться скалярных возмущений, имея в виду, что их свойства достаточно хорошо изучены.

Итак, мы рассмотрим комплексное скалярное поле  $\phi$  с действием:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{2} |\partial_\mu \phi|^2 + \frac{\lambda}{4} |\phi|^4 \right], \quad (8)$$

причем скатывание начинается из симметричной точки  $\phi = 0$ .

Сначала мы найдем решения классических уравнений, т. е. опишем эволюцию Вселенной, но не только на ранних временах (экпиротическая стадия), а и на поздних, где, как мы увидим, Вселенная быстро коллапсирует. Мы предполагаем, что разогрев (мгновенный отскок) происходит после второй стадии. После этого мы изучим тензорные возмущения, которые генерируются в такой модели и на первой стадии, и на второй. Их спектр оказывается синим, при генерации на первой стадии он имеет вакуумный профиль ( $P \sim 1/k$ ), а на второй — еще синее на одну степень импульса ( $P$  не зависит от  $k$ ). Наконец, мы попытаемся поставить ограничения на параметры модели из рассмотрения гравитационных волн. Эти ограничения оказываются очень слабыми, т. е. гравитационные волны в такой модели практически не генерируются.

## 1. МОДЕЛЬ С КОНФОРМНЫМ СКАТЫВАНИЕМ

**1.1. Линейное приближение.** В эпоху конформного скатывания динамика скалярного поля определяется действием

$$S[\phi] = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi^* \partial_\nu \phi + \frac{R}{6} \phi^* \phi - V(\phi) \right],$$



где скалярный потенциал  $V(\phi)$  отрицателен и имеет конформно-инвариантный вид (3). В терминах поля  $\chi = a\phi$  уравнение поля выглядит следующим образом:

$$\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \chi - 2h^2 |\chi|^2 \chi = 0. \quad (9)$$

Пространственно-однородное классическое решение на больших временах достигает аттрактора (4).

*1.1.1. Возмущения фазы.* На линейном уровне возмущения фазы и модуля  $\phi$  отщепляются друг от друга. Начнем с возмущений фазы или, так как фоновое решение мы выбрали действительным (4), с возмущений мнимой части  $\chi_2 \equiv \text{Im } \chi / \sqrt{2}$ . Они удовлетворяют линеаризованному уравнению

$$(\delta\chi_2)'' - \partial_i \partial_i \delta\chi_2 - 2h^2 \chi_c^2 \delta\chi_2 = 0, \quad (10)$$

где штрих обозначает производную по конформному времени  $\eta$ . Обозначим как  $k$  конформный импульс возмущения. Важным предположением в нашем сценарии будет то, что конформное скатывание начинается достаточно рано, чтобы существовали времена, на которых

$$k(\eta_* - \eta) \gg 1. \quad (11)$$

Поскольку существенные импульсы  $k$  малы (имеют порядок современного параметра Хаббла), это неравенство означает, что длительность скатывания с точки зрения конформного времени больше, чем длительность, скажем, расширения после Большого взрыва до сегодняшнего дня. Единственная возможность для этого — наличие какой-нибудь другой эпохи, предшествующей эпохе горячего Большого взрыва, на которой бы была решена стандартная проблема горизонта; механизм, который мы обсуждаем, работает именно в эту эпоху. Отметим, что последнее свойство присуще почти всем, если не всем, механизмам генерации космологических возмущений.

Уравнение (10) совпадает с уравнением для минимально связанного безмассового скалярного поля в пространстве де Ситтера. В дальнейшем нам понадобится его решение в следующем виде:

$$\delta\chi_2(\mathbf{x}, \eta) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2k}} (\delta\chi_2^{(-)}(\mathbf{k}, \mathbf{x}, \eta) \hat{A}_{\mathbf{k}} + \text{h. c.}).$$

Здесь

$$\delta\chi_2^{(-)}(\mathbf{k}, \mathbf{x}, \eta) = e^{i\mathbf{k}\mathbf{x} - ik\eta_*} F(k, \eta_* - \eta), \quad (12)$$

где

$$F(k, \xi) = -\sqrt{\frac{\pi}{2}} k \xi H_{3/2}^{(1)}(k\xi), \quad (13)$$

а  $H_{3/2}^{(1)}$  — функция Ханкеля. На ранних временах мода осциллирует,

$$\delta\chi_2^{(-)}(\mathbf{k}, \mathbf{x}, \eta) = e^{i\mathbf{k}\mathbf{x} - ik\eta}. \quad (14)$$

При этом  $\hat{A}_{\mathbf{k}}$  и  $\hat{A}_{\mathbf{k}}^\dagger$  — операторы рождения и уничтожения, удовлетворяющие стандартным коммутационным соотношениям,  $[\hat{A}_{\mathbf{k}}, \hat{A}_{\mathbf{k}'}^\dagger] = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$ . Как обычно, мы предполагаем, что поле  $\delta\chi_2$  изначально находится в вакуумном состоянии.

На поздних временах, когда  $k(\eta_* - \eta) \ll 1$ , возмущения фазы зависят от времени следующим образом:

$$\delta\theta(\mathbf{x}) = \frac{\delta\chi_2(\mathbf{x}, \eta)}{\chi_c(\eta)} = ih \int \frac{d^3k}{4\pi^{3/2}k^{3/2}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x} - ik\eta_*} \hat{A}_{\mathbf{k}} + \text{h. c.} \quad (15)$$

Это выражение описывает гауссово случайное поле, чей спектр мощности дается выражением (5).

Возмущения фазы могут быть превращены в адиабатические моды по крайней мере двумя способами. Первый работает, если  $\theta$  на самом деле является псевдо-намбу-голдстоуновским полем, которое высаживается на склон потенциала. Этот механизм генерирует негауссовость локального вида в адиабатических возмущениях. Для общих значений фазы, на которую высаживается поле,  $\theta_c \sim \pi/2$ , экспериментальное отсутствие негауссовости [1, 3] предполагает  $\mathcal{P}_{\delta\theta} \lesssim 10^{-4}$  [39], а правильная скалярная амплитуда получается для

$$h \lesssim 10^{-2}. \quad (16)$$

Вообще говоря, такое ограничение не возникает при альтернативном механизме модулированного распада [40–42]. В этом случае, если соответствующий параметр массы или ширины зависит линейно от  $\theta$ , получающийся параметр негауссовости весьма мал (подробности см. в [42, 53]),  $f_{\text{NL}} \sim 1$ , в полном согласии с существующим пределом [1, 3].

*1.1.2. Возмущения модуля.* Рассмотрим теперь радиальные возмущения, или, с учетом нашего соглашения, что классическое решение  $\chi_c$  действительно, возмущения действительной части  $\chi_1 \equiv \text{Re } \chi / \sqrt{2}$ . В линейном порядке они удовлетворяют следующему уравнению на стадии конформного скатывания:

$$(\delta\chi_1)'' - \partial_i \partial_i \delta\chi_1 - 6h^2 \chi_c^2 \delta\chi_1 \equiv (\delta\chi_1)'' - \partial_i \partial_i \delta\chi_1 - \frac{6}{(\eta_* - \eta)^2} \delta\chi_1 = 0.$$

Решение этого уравнения, стремящееся к канонически нормированной моде при  $k(\eta_* - \eta) \rightarrow \infty$ , выглядит следующим образом:

$$\delta\chi_1 = -e^{i\mathbf{k}\mathbf{x} - ik\eta_*} \frac{i}{4\pi} \sqrt{\frac{\eta_* - \eta}{2}} H_{5/2}^{(1)} [k(\eta_* - \eta)] \hat{B}_{\mathbf{k}} + \text{h. c.}$$

где  $\hat{B}_{\mathbf{k}}, \hat{B}_{\mathbf{k}}^\dagger$  — другой набор операторов рождения и уничтожения. На поздних временах, когда  $k(\eta_* - \eta) \ll 1$ , мы получаем

$$\delta\chi_1 = -e^{i\mathbf{k}\mathbf{x} - ik\eta_*} \frac{3}{4\pi^{3/2}} \frac{1}{k^{5/2}(\eta_* - \eta)^2} \hat{B}_{\mathbf{k}} + \text{h. c.}$$

Следовательно, возмущения модуля получают красный спектр мощности (6).

Зависимость  $\delta\chi_1 \propto (\eta_* - \eta)^{-2}$  естественно представлять себе как локальный сдвиг параметра окончания скатывания  $\eta_*$ . Действительно, с учетом фонового решения (4), сумма  $\chi_c + \delta\chi_1/\sqrt{2}$ , т. е. радиальное поле с учетом возмущений, является линеаризацией выражения

$$\chi_c[\eta_*(\mathbf{x}) - \eta] = \frac{1}{h[\eta_*(\mathbf{x}) - \eta]}, \quad (17)$$

где

$$\eta_*(\mathbf{x}) = \eta_* + \delta\eta_*(\mathbf{x}) \quad (18)$$

и

$$\delta\eta_*(\mathbf{x}) = \frac{3h}{4\sqrt{2}\pi^{3/2}} \int \frac{d^3k}{k^{5/2}} (e^{i\mathbf{k}\mathbf{x} - ik\eta_*} \hat{B}_{\mathbf{k}} + \text{h. c.}). \quad (19)$$

Таким образом, инфракрасные радиальные моды модифицируют фоновое решение, превращая параметр окончания скатывания  $\eta_*$  в случайное поле, медленно меняющееся в пространстве, как показывают формулы (17), (18).

Следует отметить, что инфракрасные моды вносят вклад не только в поле  $\delta\eta_*(\mathbf{x})$ , но и в его пространственную производную. Вклад мод, находящихся за горизонтом сегодня, т. е. имеющих импульсы  $k \lesssim H_0$ , в флуктуацию последних дается следующим выражением

$$\langle \partial_i \eta_*(\mathbf{x}) \partial_j \eta_*(\mathbf{x}) \rangle_{k \lesssim H_0} = \delta_{ij} \frac{3h^2}{8\pi} \int_{k \lesssim H_0} \frac{dk}{k} = \delta_{ij} \frac{3h^2}{8\pi} \log \frac{H_0}{\Lambda}, \quad (20)$$

где  $\Lambda$  — инфракрасное обрезание, параметризующее наше незнание динамики в начале стадии конформного скатывания.

**1.2. Влияние инфракрасных радиальных мод на возмущения фазы: первый порядок по  $h$ .** Рассмотрим теперь, как взаимодействие с радиальными модами влияет на свойства возмущений фазы  $\delta\theta$ . Для этого рассмотрим возмущения мнимой части  $\delta\chi_2$ , чьи длины волн гораздо меньше характерного масштаба изменения модуля (подробнее см. [30]). Для них масштабы разделяются, и возмущения  $\delta\chi_2$  могут все еще рассматриваться в линейном приближении, но в поле (17).

Поскольку нас заботит инфракрасная часть  $\eta_*(\mathbf{x})$ , мы используем градиентное разложение, рассматривая пока область вблизи нуля, и запишем

$$\eta_*(\mathbf{x}) = \eta_*(0) - v_i x_i + \dots, \quad (21)$$

где

$$v_i = -\partial_i \eta_*(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=0},$$

а точки обозначают члены высших порядков по  $\mathbf{x}$ . Важно, что поле  $\partial_i \partial_j \eta_*(\mathbf{x})$  имеет синий спектр мощности, так что главный эффект инфракрасных мод приходится на два члена, которые мы выписали явно в (21). Кроме того, мы предполагаем в дальнейшем, что

$$|\mathbf{v}| \ll 1 \quad (22)$$

и опускаем пока поправки порядка  $\mathbf{v}^2$ . Разложение по  $|\mathbf{v}|$  допустимо, поскольку поле  $\mathbf{v}(\mathbf{x})$  имеет плоский спектр мощности, так что разложение по  $|\mathbf{v}|$  является, на самом деле, разложением по  $h$ , с точностью до инфракрасных логарифмов. Далее мы также проведем анализ лидирующих эффектов в порядке  $\mathbf{v}^2$ .

Оставляя в (21) только два члена, мы имеем, вместо формулы (4),

$$\chi_c = \frac{1}{h[\eta_*(0) - \eta - \mathbf{v}\mathbf{x}]}. \quad (23)$$

Это выражение включает комбинацию  $\eta_*(0) - (\eta + \mathbf{v}\mathbf{x})$ . Мы интерпретируем ее как локальный сдвиг времени и лоренцев буст изначального фонового решения (4). Заметим, что поле (23) является решением полевых уравнений (9) в нашем приближении. Такая интерпретация позволяет нам найти решения уравнения (10) с внешним полем (23) и начальным условием (14): они получаются временным сдвигом и лоренцевым поворотом исходного решения (12), (13):

$$\delta\chi_2^{(-)}(\mathbf{k}, \mathbf{x}, \eta) = e^{i\mathbf{q}(\mathbf{x} + \mathbf{v}\eta) - iq\eta_*(0)} F(q, \eta_*(0) - \eta - \mathbf{v}\mathbf{x}), \quad (24)$$

где функция  $F$  также определяется выражением (13) с лоренц-преобразованным импульсом

$$\mathbf{q} = \mathbf{k} + k\mathbf{v}, \quad q = |\mathbf{q}| = k + k\mathbf{v}, \quad (25)$$

где имеется в виду, что членами порядка  $\mathbf{v}^2$  надо пренебречь. Мы рассматриваем поправки к этому решению порядка  $\partial_i \partial_j \eta_*(\mathbf{x})$  и  $\mathbf{v}^2$  далее в пп. 1.3.1 и 1.3.2 соответственно.

Из уравнений (23) и (24) мы получаем, что возмущения фазы снова перестают осциллировать, когда  $k[\eta_*(\mathbf{x}) - \eta] \rightarrow 0$ :

$$\delta\theta(\mathbf{x}) = \frac{\delta\chi_2(\mathbf{x})}{\chi_c(\mathbf{x})} = i \int \frac{d^3k}{\sqrt{k}} \frac{h}{4\pi^{3/2}q} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x} - ik\eta_*(\mathbf{x})} \hat{A}_{\mathbf{k}} + \text{h. c.}, \quad (26)$$

Это означает, что в первом порядке градиентного разложения, которым мы пока ограничились, свойства случайного поля  $\delta\theta$  такие же, как и свойства

поля (15). Действительно, поскольку  $\eta_*(\mathbf{x}) = \eta_*(0) - \mathbf{v}\mathbf{x}$  в (26), инфракрасные эффекты исчезают при переопределении поля,

$$\hat{A}_{\mathbf{q}} = e^{-ik\eta_*(0)} \sqrt{\frac{k}{q}} \hat{A}_{\mathbf{k}}, \quad (27)$$

где  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{q}$  так же связаны уравнением (25). Поскольку мера  $d^3k/k$  лоренц-инвариантна, операторы  $\hat{A}_{\mathbf{q}}$ ,  $\hat{A}_{\mathbf{q}}^\dagger$  подчиняются стандартным коммутационным соотношениям, в то время как в нашем приближении поле (26), записанное через эти операторы, совпадает с линейным полем (15). Итак, инфракрасные радиальные моды, на самом деле, не особенно опасны, так как они качественным образом не меняют свойств поля  $\delta\theta$ .

**1.3. Статистическая анизотропия.** *1.3.1 Первый порядок по  $\hbar$ .* В первом порядке по  $\hbar$  нетривиальное воздействие длинноволновых возмущений  $\delta\eta_*(\mathbf{x})$  на возмущения фазы появляется впервые во втором порядке градиентного разложения, т. е. в порядке  $\partial_i\partial_j\eta_*$ . Здесь мы обратим внимание на эффект от мод  $\delta\eta_*$ , чьи современные длины волн превосходят хаббловский размер. Мы имеем дело с единственной реализацией случайного поля  $\delta\eta_*$ , так что во втором порядке градиентного разложения  $\partial_i\partial_j\eta_*$  — это просто тензор, постоянный во всей видимой Вселенной. В этом подразделе мы приведем вычисление статистической анизотропии, которая связана с этим тензором.

До сих пор мы использовали теорию возмущений по  $\partial_i\partial_j\eta_*$ . Фон (17) больше не является решением полевых уравнений (9) во втором порядке градиентного разложения. Комбинация, входящая в уравнение (10) для возмущений мнимой части, дается теперь выражением [30]

$$2\hbar^2\chi_c^2 = \frac{2}{(\eta_*(\mathbf{x}) - \eta)^2} + \frac{2}{3} \frac{\partial_i\partial_i\eta_*}{\eta_* - \eta}. \quad (28)$$

Решением уравнения (10) на фоне (28) с начальным условием (14) на больших временах является

$$\delta\chi_2^{(-)}(\mathbf{k}, \mathbf{x}, \eta) = \frac{i e^{i\mathbf{k}\mathbf{x} - ik\eta_*(\mathbf{x})}}{q(\eta_* - \eta)} \left( 1 - \frac{\pi}{2k} \frac{k_i k_j}{k^2} \partial_i \partial_j \eta_* + \frac{\pi}{6k} \partial_i \partial_i \eta_* \right).$$

Два нетривиальных члена в скобках определяют поправку к спектру мощности возмущений фазы, вызванную радиальными модами с длинами волн больше современного хаббловского размера. Такую же поправку получают и адиабатические возмущения, так что в итоге мы имеем

$$\mathcal{P}_\zeta = A_\zeta \left[ 1 - \frac{\pi}{k} \frac{k_i k_j}{k^2} \left( \partial_i \partial_j \eta_* - \frac{1}{3} \delta_{ij} \partial_k \partial_k \eta_* \right) \right]. \quad (29)$$

Следует отметить, что среднее по углам от этой поправки зануляется, как и должно быть со статистической анизотропией.

Ни величина, ни точная форма тензора  $\partial_i \partial_j \eta_* - (1/3)\delta_{ij} \partial_k \partial_k \eta_*$  не может быть однозначно предсказана из-за космической неопределенности. Чтобы оценить статистическую анизотропию, рассмотрим следующую величину:

$$\left\langle \left( \partial_i \partial_j \eta_* - \frac{1}{3} \delta_{ij} \partial_k \partial_k \eta_* \right) \left( \partial_i \partial_j \eta_* - \frac{1}{3} \delta_{ij} \partial_k \partial_k \eta_* \right) \right\rangle_{k \lesssim H_0} \simeq \frac{3h^2}{8\pi^2} H_0^2,$$

где обозначения отражают тот факт, что мы рассматриваем только те моды, чьи сегодняшние длины волн превышают хаббловский размер. Таким образом, мы приходим к первому нетривиальному члену в (7). Старшие порядки градиентного разложения дают вклады в статистическую анизотропию, подавленные дополнительными факторами  $H_0/k$ .

*1.3.2. Порядок  $h^2$ : вклад глубоко инфракрасных мод.* Теперь перейдем к рассмотрению статистической анизотропии во втором порядке по  $h$ . Поскольку общий сдвиг времени  $\eta_*(0)$  не важен, главный вклад в этом порядке пропорционален логарифмически усиленной комбинации  $\partial_i \eta_* \partial_j \eta_* \equiv v_i v_j$ . Поэтому мы используем два члена разложения по производным, явно выписанные в формуле (21).

В порядке  $v^2$  функция (23) уже не является решением полевого уравнения (9). Вместо этого решением будет

$$\chi_c = \frac{1}{h\gamma[\eta_*(0) - \eta - \mathbf{v}\mathbf{x}]}, \quad (30)$$

где  $\gamma = (1-v^2)^{-1/2}$ . Мы будем изучать решения уравнения (10) с этим фоном. Несложно увидеть, что решение, удовлетворяющее начальному условию (14), имеет вид

$$\delta\chi_2^{(-)}(\mathbf{k}, \mathbf{x}, \eta) = e^{iq_{||}\gamma(x_{||}+v\eta)+i\mathbf{q}^T\mathbf{x}^T-iq\gamma\eta_*(0)} F[q, \gamma(\eta_*(0) - \eta - \mathbf{v}\mathbf{x})], \quad (31)$$

где лоренц-повернутый импульс, как обычно, равен  $q_{||} = \gamma(k_{||}+kv)$ ,  $\mathbf{q}^T = \mathbf{k}^T$ ,  $q = \gamma(k+k_{||}v)$ , а обозначения  $||$  и  $T$  относятся к компонентам, параллельным и перпендикулярным к  $\mathbf{v}$  соответственно.

Согласно сценарию, которому мы следуем, возмущения фазы  $\delta\theta$  вымощиваются на гиперповерхности  $\eta = \eta_*(0) - \mathbf{v}\mathbf{x} \equiv \eta_*(0) - vx_{||}$ , а потом остаются постоянными во времени. Из (30) и (31) следует, что на поздних временах возмущения фазы выглядят следующим образом:

$$\delta\theta(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3q}{\sqrt{q}} \frac{h}{4\pi^{3/2}q} e^{i\gamma^{-1}q_{||}x_{||}+i\mathbf{q}^T\mathbf{x}^T} \hat{\mathcal{A}}_{\mathbf{q}} + \text{h. c.}, \quad (32)$$

где операторы  $\hat{\mathcal{A}}_{\mathbf{q}}$  определены (27) и удовлетворяют стандартным коммутационным соотношениям; здесь мы отбросили постоянный фазовый множитель, от которого ничто не зависит. Видно, что в порядке  $\mathbf{v}^2$  влияние глубоко инфракрасных мод представлено множителем  $\gamma^{-1}$  в первом члене в экспоненте: импульс возмущения, соответствующего  $\mathbf{q}$ , на самом деле равен  $\mathbf{p} = (\gamma^{-1}q_{||}, \mathbf{q}^T)$ . Соответственно, спектр мощности (помимо поправки, обсуждаемой ранее в п. 1.3.1) дается выражением

$$\mathcal{P}_{\zeta}(\mathbf{k}) = A_{\zeta} \frac{k^3}{[(\gamma k_{||})^2 + (\mathbf{k}^T)^2]^{3/2}} = A_{\zeta} \left( 1 - \frac{3}{2} \frac{(\mathbf{k}\mathbf{v})^2}{k^2} \right).$$

Итак, мы пришли к последнему члену в (7). Опять же, ни направление, ни величина  $\mathbf{v}$  не могут быть однозначно определены из-за космической неопределенности; вспомним, однако, что значение  $|\mathbf{v}|$ , а следовательно, параметра  $c_2$  в (7), логарифмически усилено инфракрасными поправками, см. (20).

Если предположить, что возмущения фазы переводятся в адиабатические возмущения курватонным механизмом, оба члена статистической анизотропии (7) малы из-за условия (16). С другой стороны, эффект может быть сильнее в случае механизма модулированного распада.

**1.4. Генезис с галилеоном и конформное скатывание.** *1.4.1. Явная проверка.* Модель с галилеоном была введена в [54]. Скатывающийся галилеон в ней служит полем  $\rho$ , входящим в (1) и (2). В пространстве Минковского лагранжиан простейшей конформно-инвариантной версии [27] этой модели выглядит следующим образом:

$$L_{\pi} = -f^2 e^{2\pi} \partial_{\mu}\pi\partial^{\mu}\pi + \frac{f^3}{\Lambda^3} \partial_{\mu}\pi\partial^{\mu}\pi\Box\pi + \frac{f^3}{2\Lambda^3} (\partial_{\mu}\pi\partial^{\mu}\pi)^2, \quad (33)$$

где  $\Box = \partial_{\mu}\partial^{\mu}$ . Уравнение поля в пространстве Минковского допускает однородное решение  $\pi_c$  следующего вида:

$$e^{\pi_c} = -\frac{1}{H_* x_0}, \quad (34)$$

где  $x_0 = t < 0$  и

$$H_*^2 = \frac{2\Lambda^3}{3f}.$$

Следовательно, определяем

$$\rho = H_* e^{\pi} \quad (35)$$

так, чтобы фоновое решение давалось (2).

Запишем квадратичное действие для возмущений над этим решением:

$$S_{\delta\pi} = \frac{f^2}{H_*^2} \int d^4x \left\{ \frac{1}{x_0^2} [(\partial_0\delta\pi)^2 - (\partial_i\delta\pi)^2] + \frac{4}{x_0^4} \delta\pi^2 \right\}.$$

Удобно ввести переменную  $\delta\rho = -x_0^{-1}\delta\pi$ . Из (35) следует, что  $\delta\rho$  — возмущение поля  $\rho$  над фоном  $\rho_c = -x_0^{-1}$ . Его действие:

$$S_{\delta\rho} = \frac{2f^2}{H_*^2} \int d^4x \frac{1}{2} \left[ (\partial_0\delta\rho)^2 - (\partial_i\delta\rho)^2 + \frac{6}{x_0^2}(\delta\rho)^2 \right].$$

Уравнение поля имеет простую форму:

$$\partial_0^2\delta\rho - \Delta\delta\rho - \frac{6}{x_0^2}\delta\rho = 0. \quad (36)$$

Канонически нормированное решение с импульсом  $\mathbf{k}$  дается следующим выражением:

$$\delta\rho = h e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} \frac{i}{4\pi} \sqrt{\frac{-t}{2}} H_{5/2}^{(1)}(-kx_0) \hat{B}_{\mathbf{k}} + \text{h. c.}, \quad (37)$$

где  $\hat{B}_{\mathbf{k}}^\dagger$  и  $\hat{B}_{\mathbf{k}}$  — операторы рождения и уничтожения, удовлетворяющие стандартным коммутационным соотношениям  $[\hat{B}_{\mathbf{k}}, \hat{B}_{\mathbf{q}}^\dagger] = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{q})$ , а

$$h = \frac{H_*}{\sqrt{2}f}. \quad (38)$$

Эта теория находится в режиме слабой связи в интересном диапазоне импульсов, если  $h \ll 1$ .

Мода (37) осциллирует на ранних временах, когда  $k|x_0| \gg 1$ , а на поздних временах ведет себя следующим образом:

$$\delta\rho = h e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} \frac{3}{4\pi^{3/2}} \frac{1}{k^{5/2}x_0^2} \hat{B}_{\mathbf{k}} + \text{h. c.}$$

Это поведение также можно интерпретировать как локальный сдвиг времени [26, 27]. Действительно, для сдвинутого решения для галилеона (34) мы имеем

$$e^{\pi_c + \delta\pi} = e^{\pi_c} (1 + \delta\pi) = -\frac{1}{H_*(x_0 + \delta x_0)} = -\frac{1}{H_*x_0} + \frac{\delta x_0}{H_*x_0^2}.$$

Следовательно,

$$\delta x_0 = -x_0\delta\pi = x_0^2\delta\rho.$$

таким образом,  $\delta x_0(\mathbf{x})$  не зависит от времени на поздних временах и имеет красный спектр мощности:

$$\mathcal{P}_{\delta x_0} = \frac{9h^2}{4\pi^2} \frac{1}{k^2}. \quad (39)$$



В сценарии с галилеоном поле  $\Theta$  вводится как дополнительное поле, именно с целью генерации космологических возмущений. Благодаря конформной инвариантности квадратичный лагранжиан для этих возмущений имеет форму второго члена в (1). В поле  $\rho_c = -x_0^{-1}$  они себя ведут следующим образом:

$$\Theta = e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} \frac{1}{4\sqrt{2}\pi} (-x_0)^{3/2} H_{3/2}^{(1)}(-kx_0) \hat{A}_{\mathbf{k}} + \text{h. c.}, \quad (40)$$

где  $\hat{A}_{\mathbf{k}}^\dagger$  и  $\hat{A}_{\mathbf{k}}$  — другой набор операторов рождения и уничтожения. На ранних временах поле  $\Theta$  находится в режиме ВКБ, а когда  $k|x_0| \ll 1$ , мода не зависит от времени. В результате на поздних временах спектр мощности плоский,

$$\mathcal{P}_\Theta = \frac{1}{4\pi^2}. \quad (41)$$

Этот результат верен в линейном приближении. Низший порядок взаимодействия полей  $\Theta$  и  $\delta\rho$  определяется гамильтонианом взаимодействия, чья плотность (в представлении взаимодействия)

$$\mathcal{H}_I = -L_{\text{int}} = -\rho_c \delta\rho (\partial_\mu \Theta)^2. \quad (42)$$

Именно это взаимодействие ответственно за негауссовость, которую мы позже найдем.

В проведенных рассуждениях мы пренебрегли влиянием гравитации. Это законно в таком сценарии на ранних этапах, когда плотность энергии поля галилеона мала, а остальные поля вообще, как предполагается, несущественны. Последнее предположение имеется и в сценарии с конформным скатыванием, но, в отличие от галилеона, в модели с конформным скатыванием есть скалярный потенциал. Напомним, что конформная симметрия диктует его вид:  $V(\phi) = -h^2|\phi|^4$ . Используем параметризацию

$$\phi = \frac{\rho}{h} \exp\left(i \frac{h\Theta}{\sqrt{2}}\right). \quad (43)$$

Тогда фоновое поле  $\rho_c$  скатывается согласно (2), где  $x_0 = \eta$  — теперь *конформное* время [26]. Лагранжиан для  $\Theta$  совпадает со вторым членом в (1), а возмущения  $\delta\rho$  снова подчиняются уравнению (36). Канонически нормированное решение для поля  $\Theta$  и возмущения  $\delta\rho$  совпадает с (40) и (37) соответственно, только  $h$  — константа самодействия, а  $x_0 = \eta$ . Таким образом, динамика возмущений в модели с конформным скатыванием идентична модели с галилеоном.

1.4.2. *Общее доказательство.* Убедимся, что форма уравнения (36), определяющего возмущения  $\delta\rho$  в линейном порядке, полностью определяется конформной инвариантностью. А именно, рассмотрим теорию, в которой классическое уравнение поля для  $\rho$  имеет второй порядок по производным, действие для  $\rho$  локально и инвариантно относительно пространственных сдвигов и вращений, временных сдвигов, растяжений

$$\rho(x) \rightarrow \lambda\rho(\lambda x)$$

и инверсии

$$\rho(x^\mu) \rightarrow \frac{1}{x^2}\rho\left(\frac{x^\mu}{x^2}\right).$$

В такой теории автоматически имеется решение  $\rho_c = -x_0^{-1}$  (общую константу всегда можно сделать равной единице переобозначением поля). Это решение инвариантно относительно и растяжения, и инверсии. Таким образом, квадратичное действие для возмущений  $\delta\rho$  над этим решением тоже должно быть инвариантно. Запишем для квадратичного действия:

$$S^{(2)} = h^{-2} \int d^4x \delta\rho \mathcal{L} \delta\rho, \quad (44)$$

где  $\mathcal{L}$  — дифференциальный оператор второго порядка, а  $h$  — некоторая константа, выбор которой будет определен ниже. Поскольку фон зависит только от времени, оператор  $\mathcal{L}$  не содержит явно пространственных координат, но может содержать время. Он также инвариантен относительно пространственных вращений.

Инвариантность относительно растяжений означает, что с точностью до общей константы часть  $\mathcal{L}$ , включающая производные, имеет вид

$$\mathcal{L} \supset -\partial_0^2 + v_s^2 \Delta, \quad (45)$$

где  $v_s$  не зависит от времени. Мы можем выбрать константу  $h$  в (44) таким образом, чтобы член с двумя производными по времени входил с коэффициентом  $-1$ . Масштабной инвариантности не достаточно\* для того, чтобы получить  $v_s = 1$ . Однако требование инвариантности относительно инверсии однозначно определяет  $v_s = 1$ . Член без производных практически однозначно определяется из условия инвариантности относительно растяжения и инверсии,

$$\mathcal{L} \supset \frac{c}{x_0^2}, \quad (46)$$

---

\*Простой способ это увидеть — рассмотреть модификацию модели галилеона, в которой коэффициенты при втором и третьем членах в (33) независимы.

где  $c$  — пока произвольная константа. Наконец, инвариантность исходного действия относительно временных сдвигов означает, что  $\delta\rho = \dot{\rho}_c = x_0^{-2}$  должно быть решением уравнения  $\mathcal{L}\delta\rho = 0$ . Это дает  $c = 6$ . Таким образом, все квадратичное действие для возмущений однозначно определяется конформной инвариантностью с точностью до общего постоянного множителя, а линейное уравнение для  $\delta\rho$  имеет один и тот же вид в целом классе конформно-инвариантных моделей с лагранжианами общего вида (1). В лидирующем *нелинейном* порядке свойства возмущений  $\Theta$  идентичны в этих моделях, так как они определяются гамильтонианом взаимодействия (42).

**1.5. Негауссовость.** Теперь перейдем к обсуждению негауссовости. Поскольку модель инвариантна относительно замены  $\theta \rightarrow -\theta$ , трехточка полей фазы равна нулю. Поэтому низшей не исчезающей корреляционной функцией будет четырехточечная. В этом подразделе мы найдем четырехточечную корреляционную функцию  $\langle \theta(x)\theta(y)\theta(z)\theta(w) \rangle$  и изложим метод, которым это сделано, так называемый  $\langle \text{In-In} \rangle$ -формализм. Для произвольного оператора  $\mathcal{O}$  запишем:

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \left\langle \left[ \bar{T} \exp \left( i \int_{-\infty}^0 dx_0 H_I \right) \right] \mathcal{O}_{(I)} \left[ T \exp \left( -i \int_{-\infty}^0 dx_0 H_I \right) \right] \right\rangle, \quad (47)$$

где  $\mathcal{O}_{(I)}$  — оператор  $\mathcal{O}$  в представлении взаимодействия. Поскольку нам потребуется гамильтониан взаимодействия, мы его аккуратно вычислим.

*1.5.1. Гамильтониан.* Нас будут интересовать члены взаимодействия первого порядка по  $\hbar$ , поэтому для поля  $\chi$  запишем

$$\chi = \left( \frac{\rho_c}{\hbar} + \frac{\rho}{\sqrt{2}} \right) \exp \left[ i \frac{\hbar\theta}{\sqrt{2}} \right],$$

где

$$\rho_c = \frac{1}{\eta_* - \eta} \equiv \frac{1}{\xi} \equiv -\frac{1}{x_0}$$

— классическое решение уравнений поля, умноженное на  $\hbar$ ; мы используем здесь обозначение  $\rho$  для возмущений модуля. Тогда

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \rho)^2 + \frac{1}{2} \left( \rho_c + \frac{\hbar\rho}{\sqrt{2}} \right)^2 (\partial_\mu \theta)^2 + 3\rho_c^2 \rho^2 + \sqrt{2}\hbar\rho_c \rho^3 + \frac{\hbar^2}{4}\rho^4. \quad (48)$$

Из (48) находим канонически сопряженные переменные

$$\pi_\theta = \dot{\theta} \left( \rho_c + \frac{\hbar\rho}{\sqrt{2}} \right)^2, \quad \pi_\rho = \dot{\rho} \quad (49)$$

и плотность гамильтониана

$$\mathcal{H} = \frac{\pi_{\dot{\theta}}^2}{2 \left( \rho_c + \frac{h\rho}{\sqrt{2}} \right)^2} + \frac{1}{2} \left( \rho_c + \frac{h\rho}{\sqrt{2}} \right)^2 (\partial_i \theta)^2 + \mathcal{H}_\rho; \quad (50)$$

здесь  $\mathcal{H}_\rho$  содержит только  $\rho$  и  $\rho_c$ .

Теперь перейдем к представлению взаимодействия. Для этого разложим гамильтониан (50) на квадратичную часть  $\mathcal{H}_0$  и член взаимодействия  $\mathcal{H}_I$

$$\mathcal{H}_0(\theta, \pi_\theta) = \frac{\pi_{\dot{\theta}}^2}{2\rho_c^2} + \frac{1}{2}\rho_c^2(\partial_i \theta)^2, \quad (51)$$

$$\mathcal{H}_I(\theta, \pi_\theta) = -\frac{\pi_{\dot{\theta}}^2}{2\rho_c^2} \left[ \frac{\left( \rho_c + \frac{h\rho}{\sqrt{2}} \right)^2 - \rho_c^2}{\left( \rho_c + \frac{h\rho}{\sqrt{2}} \right)^2} \right] + \frac{1}{2} \left[ \left( \rho_c + \frac{h\rho}{\sqrt{2}} \right)^2 - \rho_c^2 \right] (\partial_i \theta)^2.$$

Введем переменные в представлении взаимодействия  $\theta_{(I)}$  и  $\pi_{\theta(I)}$ . Они по определению удовлетворяют свободным уравнениям

$$\dot{\theta}_{(I)} = i[\mathcal{H}_0(\theta_{(I)}, \pi_{\theta(I)}), \theta_{(I)}], \quad \dot{\pi}_{\theta(I)} = i[\mathcal{H}_0(\theta_{(I)}, \pi_{\theta(I)}), \pi_{\theta(I)}] \quad (52)$$

с вакуумными начальными условиями. Как и должно быть, уравнения (52) эквивалентны свободным уравнениям, вытекающим из (48):

$$\begin{aligned} \partial_\mu^2 \theta_{(I)} + 2 \frac{\dot{\rho}_c}{\rho_c} \dot{\theta}_{(I)} &= 0, \\ \partial_\mu^2 \rho_{(I)} - 6 \rho_c^2 \rho_{(I)} &= 0 \end{aligned}$$

с решениями

$$\rho_{(I)} = -\frac{i}{4\pi} \int \frac{d^3 k}{\sqrt{k}} \sqrt{\frac{k\xi}{2}} H_{5/2}^{(1)}(k\xi) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} B_{\mathbf{k}} + \text{h. c.}, \quad (53)$$

$$\theta_{(I)} = -\frac{1}{4\pi\rho_c} \int \frac{d^3 k}{\sqrt{k}} \sqrt{\frac{k\xi}{2}} H_{3/2}^{(1)}(k\xi) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} A_{\mathbf{k}} + \text{h. c.} \quad (54)$$

Путем стандартных манипуляций получаем гамильтониан взаимодействия (51) в представлении взаимодействия  $\mathcal{H}_I(\theta_{(I)}, \pi_{\theta(I)})$ . Соответственно, первое уравнение в (52) дает

$$\pi_{\theta(I)} = \rho_c^2 \dot{\theta}_{(I)},$$

так что

$$\mathcal{H}_I(\theta_{(I)}, \pi_{\theta_{(I)}}) = -\frac{\dot{\theta}_{(I)}^2 \rho_c^2}{2} \left[ \frac{\left( \rho_c + \frac{h\rho_{(I)}}{\sqrt{2}} \right)^2 - \rho_c^2}{\left( \rho_c + \frac{h\rho_{(I)}}{\sqrt{2}} \right)^2} \right] + \frac{1}{2} \left[ \left( \rho_c + \frac{h\rho_{(I)}}{\sqrt{2}} \right)^2 - \rho_c^2 \right] (\partial_i \theta_{(I)})^2.$$

Разлагая это выражение по  $h$  и  $\rho_{(I)}$  до первого порядка, получаем гамильтониан взаимодействия в представлении взаимодействия (для упрощения обозначений индекс  $(I)$  у полей будем опускать)

$$\mathcal{H}_I = \frac{h\rho_c\rho}{\sqrt{2}} ((\partial_i \theta)^2 - \dot{\theta}^2) = -\mathcal{L}_{\text{int}}, \quad (55)$$

именно его мы будем использовать в (47).

1.5.2. *Спаривание и  $T$ -произведение.* Ниже нам понадобятся следующие функции:

$$\theta(x)\theta(y) =: \theta(x)\theta(y) : + D(x, y), \quad \rho(x)\rho(y) =: \rho(x)\rho(y) : + D_\rho(x, y). \quad (56)$$

Используя (53), (54), получаем

$$D(x, y) = \frac{1}{32\pi^2} \int \frac{d^3k}{[\rho_c(x)\rho_c(y)]^{3/2}} H_{3/2}^{(1)}(-kx_0) H_{3/2}^{(2)}(-ky_0) e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{y})}, \quad (57)$$

$$D_\rho(x, y) = \frac{1}{32\pi^2} \int \frac{d^3k}{[\rho_c(x)\rho_c(y)]^{1/2}} H_{5/2}^{(1)}(-kx_0) H_{5/2}^{(2)}(-ky_0) e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{y})}. \quad (58)$$

Легко проверить, что любая из функций спаривания  $D$  удовлетворяет условию

$$D_{(\rho)}(x, y) = D_{(\rho)}^*(y, x). \quad (59)$$

Кроме того, нам понадобится (анти) $T$ -произведение полей  $\rho$ . А именно,

$$\begin{aligned} \overline{T}_{xy} + T_{xy} &\equiv \langle \overline{T}(\rho_x \rho_y) \rangle + \langle T(\rho_x \rho_y) \rangle = \Theta(x_0 - y_0) D_\rho(y, x) + \\ &+ \Theta(y_0 - x_0) D_\rho(x, y) + \Theta(x_0 - y_0) D_\rho(x, y) + \Theta(y_0 - x_0) D_\rho(y, x) = \\ &= D_\rho(x, y) + D_\rho(y, x) = 2 \operatorname{Re} (D_\rho(x, y)) \end{aligned} \quad (60)$$

и

$$\overline{T}_{xy} - T_{xy} = -\varepsilon(x_0 - y_0) [D_\rho(x, y) - D_\rho(y, x)] = -2i\varepsilon(x_0 - y_0) \operatorname{Im} (D_\rho(x, y)). \quad (61)$$

1.5.3. *4-точечные функции. Координатное представление.* Найдем коррелятор  $\langle \theta(x)\theta(y)\theta(z)\theta(w) \rangle$ , который в дальнейшем мы будем для простоты часто обозначать  $\theta^4$ . Нам интересен вклад порядка  $h^2$ . Подставим (55) в (47). В корреляторе будет два типа вкладов. Первый соответствует разложению и левой, и правой экспоненты до первого порядка. В этом случае (анти)T-произведение нам не понадобится, единственная возможность — спарить  $\rho$ , приходящие из двух гамильтонианов, друг с другом, а  $\theta$  из обоих гамильтонианов — с  $\theta$  из  $\theta^4$ . Итак, используя (47), (55) и (56), получаем для вклада первого типа

$$\begin{aligned} & \left\langle i \left( \int d^4x' \mathcal{H}_I(x') \right) \theta^4(-i) \left( \int d^4x'' \mathcal{H}_I(x'') \right) \right\rangle = \\ & = \left\{ 2h^2 \int d^4x' d^4x'' \rho_c(x') \rho_c(x'') \left[ \partial'_\mu D(x', x) \partial'_\mu D(x', y) \partial''_\nu D(z, x'') \partial''_\nu \times \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \times D(w, x'') D_\rho(x', x'') + \left( \begin{array}{c} x \leftrightarrow z \\ y \leftrightarrow w \end{array} \right) \right] \right\} + \{y \leftrightarrow z\} + \{y \leftrightarrow w\}. \quad (62) \end{aligned}$$

Определим еще две функции:

$$\begin{aligned} R(x'; x, y) &\equiv R_{x'xy} \equiv \text{Re} [\partial'_\mu D(x', x) \partial'_\mu D(x', y)], \\ Q(x'; x, y) &\equiv Q_{x'xy} \equiv \text{Im} [\partial'_\mu D(x', x) \partial'_\mu D(x', y)]. \end{aligned} \quad (63)$$

Принимая во внимание (59), получим

$$\partial''_\nu D(z, x'') \partial''_\nu D(w, x'') = \partial''_\nu D^*(x'', z) \partial''_\nu D^*(x'', w) = R_{x''zw} - iQ_{x''zw}.$$

Сделав замену  $x' \leftrightarrow x''$  во втором члене в квадратных скобках (62), получим (для выражения в квадратных скобках):

$$\begin{aligned} & (R_{x'xy} + iQ_{x'xy})(R_{x''zw} - iQ_{x''zw}) D_\rho(x', x'') + \\ & = (R_{x'xy} - iQ_{x'xy})(R_{x''zw} + iQ_{x''zw}) D_\rho(x'', x') = \\ & = (R_{x'xy} R_{x''zw} + Q_{x'xy} Q_{x''zw}) [D_\rho(x', x'') + D_\rho(x'', x')] + \\ & + i(Q_{x'xy} R_{x''zw} - R_{x'xy} Q_{x''zw}) [D_\rho(x', x'') - D_\rho(x'', x')]. \quad (64) \end{aligned}$$

Теперь обсудим второй тип вкладов. Он отвечает разложению только одной экспоненты, но до второго порядка:

$$\begin{aligned}
& \left\langle \left( \frac{i^2}{2} \int d^4x' d^4x'' \bar{T} \mathcal{H}_I(x') \mathcal{H}_I(x'') \right) \theta^4 \right\rangle + \\
& \quad + \left\langle \theta^4 \left( \frac{(-i)^2}{2} \int d^4x' d^4x'' T \mathcal{H}_I(x') \mathcal{H}_I(x'') \right) \right\rangle = \\
& = \left\{ -2h^2 \int d^4x' d^4x'' \rho_c(x') \rho_c(x'') [\partial'_\mu D(x', x) \partial'_\mu D(x', y) \partial''_\nu D(x'', z) \partial''_\nu \times \right. \\
& \quad \times D(x'', w) \bar{T}_{x'x''} + \partial'_\mu D(x, x') \partial'_\mu D(y, x') \partial''_\nu D(z, x'') \partial''_\nu D(w, x'') T_{x'x''}] \left. \right\} + \\
& \quad + \{y \leftrightarrow z\} + \{y \leftrightarrow w\}. \quad (65)
\end{aligned}$$

Используя (60), (61) и (63), получаем выражение в квадратных скобках предыдущей формулы:

$$\begin{aligned}
& (R_{x'xy} R_{x''zw} - Q_{x'xy} Q_{x''zw}) [D_\rho(x', x'') + D_\rho(x'', x')] - \\
& - i\varepsilon(x'_0 - x''_0) (Q_{x'xy} R_{x''zw} + R_{x'xy} Q_{x''zw}) [D_\rho(x', x'') - D_\rho(x'', x')]. \quad (66)
\end{aligned}$$

Подставляя (66) в (65) и (64) в (62), получаем в итоге

$$\begin{aligned}
\langle \theta_x \theta_y \theta_z \theta_w \rangle = & 4h^2 \int d^4x' d^4x'' \rho_c(x') \rho_c(x'') [Q_{x'xy} Q_{x''zw} (D_\rho(x', x'') + \\
& + D_\rho(x'', x')) + i(D_\rho(x', x'') - D_\rho(x'', x')) \{ \Theta(x'_0 - x''_0) Q_{x'xy} R_{x''zw} - \\
& - \Theta(x''_0 - x'_0) R_{x'xy} Q_{x''zw} \}] + [y \leftrightarrow z] + [y \leftrightarrow w]. \quad (67)
\end{aligned}$$

*1.5.4. 4-точечные функции. Импульсное представление. Лидирующий вклад.* Лидирующий вклад, на самом деле, дает последний член, явно выписанный в (67). Позже мы это увидим. Нас интересует формальный предел  $x_0 = y_0 = z_0 = w_0 \rightarrow 0$ , что отвечает поздним временам. Спаривание  $D$  регулярно в этом пределе. Поэтому мы кладем время равным нулю прямо в формуле (57):

$$D(x', \mathbf{x}, x_0 = 0) = \frac{i}{32\pi^2 \rho_c(\xi)^{3/2}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int \frac{d^3k}{k^{3/2}} H_{3/2}^{(1)}(k\xi) e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x}' - \mathbf{x})}. \quad (68)$$

Здесь и ниже мы используем обозначения  $\xi = -x'_0$  и  $\chi = -x''_0$ . Найдем\* функции  $R_{x'xy}$  и  $Q_{x'xy}$ . Для этого рассмотрим

$$\begin{aligned} \partial'_\mu D(x', \mathbf{x}) \partial'_\mu D(x', \mathbf{y}) &= -\frac{1}{(32\pi^2)^2} \frac{2}{\pi} \int \frac{d^3 k_1 d^3 k_2}{k_1^{3/2} k_2^{3/2}} e^{i\mathbf{k}_1(\mathbf{x}'-\mathbf{x})+i\mathbf{k}_2(\mathbf{x}'-\mathbf{y})} \times \\ &\times \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} (\xi^{3/2} H_{3/2}^{(1)}(k_1 \xi)) \frac{\partial}{\partial \xi} (\xi^{3/2} H_{3/2}^{(1)}(k_2 \xi)) + \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 \xi^3 H_{3/2}^{(1)}(k_1 \xi) H_{3/2}^{(1)}(k_2 \xi) \right]. \end{aligned} \quad (69)$$

Разделим выражение в квадратных скобках (69) на действительную

$$\begin{aligned} \tilde{R}(k_1, k_2, k_{12}, \xi) &\equiv \pi(k_1 k_2)^{3/2} \operatorname{Re}[\dots] = \\ &= \cos(\xi(k_1 + k_2)) [\xi^2 k_1 k_2 (k_{12}^2 - (k_1 + k_2)^2) + k_1^2 + k_2^2 - k_{12}^2] + \\ &+ \sin(\xi(k_1 + k_2)) \xi(k_1 + k_2) (k_1^2 + k_2^2 - k_{12}^2) \end{aligned} \quad (70)$$

и мнимую части

$$\begin{aligned} \tilde{Q}(k_1, k_2, k_{12}, \xi) &\equiv \pi(k_1 k_2)^{3/2} \operatorname{Im}[\dots] = \\ &= \sin(\xi(k_1 + k_2)) [\xi^2 k_1 k_2 (k_{12}^2 - (k_1 + k_2)^2) + k_1^2 + k_2^2 - k_{12}^2] - \\ &- \cos(\xi(k_1 + k_2)) \xi(k_1 + k_2) (k_1^2 + k_2^2 - k_{12}^2), \end{aligned} \quad (71)$$

где

$$\mathbf{k}_{12} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2. \quad (72)$$

Мы учли, что интеграл

$$\int d^3 k e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} f(k)$$

действителен для произвольной действительной функции  $f(k)$ . Из (63), (68), (69) получаем

$$\begin{aligned} R_{x'xy} &= -\frac{1}{8(2\pi)^6} \int \frac{d^3 k_1 d^3 k_2}{k_1^3 k_2^3} e^{i[(\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2)\mathbf{x}'-\mathbf{k}_1\mathbf{x}-\mathbf{k}_2\mathbf{y}]} \tilde{R}(k_1, k_2, k_{12}, \xi), \\ Q_{x'xy} &= -\frac{1}{8(2\pi)^6} \int \frac{d^3 k_1 d^3 k_2}{k_1^3 k_2^3} e^{i[(\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2)\mathbf{x}'-\mathbf{k}_1\mathbf{x}-\mathbf{k}_2\mathbf{y}]} \tilde{Q}(k_1, k_2, k_{12}, \xi). \end{aligned} \quad (73)$$

\*Кажется заманчивым избавиться от производных в (67) с помощью уравнений движения и интегрирования по частям. Несмотря на то, что получившееся выражение выглядит проще, этот подход бесполезен из-за появляющегося граничного члена, а главное, из-за сингулярности при  $\xi \rightarrow 0$ , которая отсутствует в исходной формуле (67).



Теперь найдем четырехточечную функцию в импульсном представлении. Рассмотрим сначала вклад первого члена в квадратных скобках (67). Принимая во внимание (59), подставляем (58) и (73) в (67) и интегрируем по  $\mathbf{x}', \mathbf{x}''$ . В результате мы получаем две  $\delta$ -функции, первая из которых дает (72), где  $\mathbf{k}_{12}$  — импульс  $D_\rho$ , а вторая отвечает закону сохранения полного импульса. Итак, мы получаем

$$\begin{aligned} \langle \theta^4 \rangle_{1.c} &= 8h^2 \int dx' dx'' \rho_c(x') \rho_c(x'') Q_{x'xy} Q_{x''zw} \operatorname{Re}(D_\rho(x', x'')) = \\ &= \frac{h^2}{64(2\pi)^8} \int \frac{d^3 k_1 d^3 k_2 d^3 p_1 d^3 p_2}{k_1^3 k_2^3 p_1^3 p_2^3} \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) e^{i[\mathbf{k}_1 \mathbf{x} + \mathbf{k}_2 \mathbf{y} + \mathbf{p}_1 \mathbf{z} + \mathbf{p}_2 \mathbf{w}]} \times \\ &\quad \times \int_0^\infty d\xi d\chi \sqrt{\rho_c(\xi) \rho_c(\chi)} \tilde{Q}(k_1, k_2, k_{12}, \xi) \tilde{Q}(p_1, p_2, k_{12}, \chi) \times \\ &\quad \times [Y_{5/2}(k_{12}\xi) Y_{5/2}(k_{12}\chi) + J_{5/2}(k_{12}\xi) J_{5/2}(k_{12}\chi)]. \quad (74) \end{aligned}$$

Определим в импульсном представлении  $n$ -точечную функцию следующим образом:

$$(2\pi)^3 \delta\left(\sum_{i=1}^n \mathbf{k}_i\right) G_n(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n) = \int \prod_{i=1}^n \{d^3 x_i e^{-i\mathbf{k}_i \mathbf{x}_i}\} G_n(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n),$$

тогда для четырехточки имеем

$$\begin{aligned} \theta_{4(1.c)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) &= \frac{h^2 \pi}{32} \frac{1}{k_1^3 k_2^3 p_1^3 p_2^3} \times \\ &\quad \times \int_0^\infty d\xi d\chi \sqrt{\rho_c(\xi) \rho_c(\chi)} \tilde{Q}(k_1, k_2, k_{12}, \xi) \tilde{Q}(p_1, p_2, k_{12}, \chi) \times \\ &\quad \times [Y_{5/2}(k_{12}\xi) Y_{5/2}(k_{12}\chi) + J_{5/2}(k_{12}\xi) J_{5/2}(k_{12}\chi)]. \quad (75) \end{aligned}$$

Видно, что интегралы по  $\xi$  и  $\chi$  разделяются на произведение двух интегралов, каждый из которых берется явно. При помощи компьютерных программ (Mathematica, Maple), а также используя стандартные методы интегрирования, получаем следующий результат:

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}(k_1, k_2, k_{12}) &\equiv \int_0^\infty d\xi \tilde{Q}(k_1, k_2, k_{12}, \xi) \sqrt{\rho_c(\xi)} Y_{5/2}(k_{12}\xi) = \\ &= -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{k_{12}^{5/2}} [3(k_1^2 - k_2^2)^2 - 2(k_1^2 + k_2^2)k_{12}^2 - k_{12}^4], \quad (76) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}(k_1, k_2, k_{12}) &\equiv \int_0^\infty d\xi \tilde{Q}(k_1, k_2, k_{12}, \xi) \sqrt{\rho_c(\xi)} J_{5/2}(k_{12}\xi) = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}k_{12}^{5/2}} \left[ k_{12}(k_{12}^2 - 3(k_1 - k_2)^2)(k_1 + k_2) + (3(k_1^2 - k_2^2)^2 - \right. \\
&\quad \left. - 2(k_1^2 + k_2^2)k_{12}^2 - k_{12}^4) \operatorname{arctanh} \frac{k_{12}}{k_1 + k_2} \right]. \quad (77)
\end{aligned}$$

Теперь выделим лидирующий порядок. Нам интересна следующая конфигурация:

$$\mathbf{X} = \frac{\mathbf{x} + \mathbf{y}}{2}, \quad \mathbf{Z} = \frac{\mathbf{z} + \mathbf{w}}{2}, \quad \varepsilon = \mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{z} - \mathbf{w}, \quad (78)$$

соответственно,

$$\begin{aligned}
\mathbf{x} &= \mathbf{X} + \frac{\varepsilon}{2}, & \mathbf{z} &= \mathbf{Z} + \frac{\varepsilon}{2}, \\
\mathbf{y} &= \mathbf{X} - \frac{\varepsilon}{2}, & \mathbf{w} &= \mathbf{Z} - \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Из (78) следует, что

$$\mathbf{L} \equiv \mathbf{X} - \mathbf{Z} = \mathbf{x} - \mathbf{z} = \mathbf{y} - \mathbf{w}.$$

В дальнейшем интересным для нас режимом будет

$$L \gg \varepsilon. \quad (79)$$

Через новые переменные показатель экспоненты в (74) выражается следующим образом:

$$\mathbf{X}(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) + \mathbf{Z}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) + \frac{\varepsilon}{2}(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) + \frac{\varepsilon}{2}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2). \quad (80)$$

Или, вводя новые переменные (мы учитываем  $\delta$ -функцию в (74)),

$$\begin{aligned}
\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 &= \mathbf{k}_{12}, & \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 &= -\mathbf{k}_{12}, \\
\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 &= 2\mathbf{Q}, & \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 &= 2\mathbf{P}, \\
\mathbf{k}_1 &= \frac{\mathbf{k}_{12}}{2} + \mathbf{Q}, & \mathbf{k}_2 &= \frac{\mathbf{k}_{12}}{2} - \mathbf{Q}, \\
\mathbf{p}_1 &= -\frac{\mathbf{k}_{12}}{2} + \mathbf{P}, & \mathbf{p}_2 &= -\frac{\mathbf{k}_{12}}{2} - \mathbf{P},
\end{aligned}$$

получаем в показателе экспоненты

$$\mathbf{L}\mathbf{k}_{12} + \varepsilon(\mathbf{Q} + \mathbf{P}). \quad (81)$$

Это означает, что в режиме (79)

$$Q \sim P \sim \frac{1}{\varepsilon} \gg k_{12} \sim \frac{1}{L}.$$

Используя (76), (77), находим лидирующее поведение функций  $\mathcal{Y}$  и  $\mathcal{J}$  при малых  $k_{12}$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}(\mathbf{Q}, \mathbf{k}_{12}) &= \sqrt{\frac{2\pi}{k_{12}}} Q^2 \left[ 1 - 3 \left( \frac{\mathbf{k}_{12} \mathbf{Q}}{k_{12} Q} \right)^2 + \mathcal{O}(k_{12}^2/Q^2) \right], \\ \mathcal{J}(\mathbf{Q}, \mathbf{k}_{12}) &= \mathcal{O}(k_{12}^{5/2}). \end{aligned} \quad (82)$$

Отметим, что лидирующие члены порядка  $1/k_{12}^{5/2}$  и  $1/k_{12}^{3/2}$ , которые мы бы наивно ожидали в (76), сократились.

Итак, подставляя (82) в (75), получаем (поскольку функция  $\mathcal{J}$  регулярна, она не дает лидирующего вклада):

$$\theta_{4(l.c)}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, \mathbf{k}_{12}) = \frac{h^2 \pi^2}{16} \frac{1}{k_{12} Q^4 P^4} \left[ 1 - 3 \left( \frac{\mathbf{k}_{12} \mathbf{Q}}{k_{12} Q} \right)^2 \right] \left[ 1 - 3 \left( \frac{\mathbf{k}_{12} \mathbf{P}}{k_{12} P} \right)^2 \right] \quad (83)$$

В режиме малых  $k_{12}$  второй член в квадратных скобках (67) не имеет сингулярности. После перехода в импульсное представление из (70), (71), (73) видно, что функции  $R$  и  $Q$  регулярны при  $k_{12} \rightarrow 0$ . Фактор  $D_\rho(x', x'') - D_\rho(x'', x') = 2i \operatorname{Im}(D_\rho(x', x''))$  включает произведение функций Бесселя и Неймана  $J_{3/2}(k_{12}\xi) Y_{3/2}(k_{12}\chi)$  и, следовательно, тоже конечен. Соответственно, интеграл по  $\xi$  и  $\chi$  также не имеет сингулярности. Получаем, что вклад от второго слагаемого в (67) конечен при малых  $k_{12}$  и, следовательно, подавлен по сравнению с (83).

Перекрестные слагаемые (в третьей строчке в формуле (67)) тоже подавлены по сравнению с лидирующим вкладом. Для определенности рассмотрим слагаемое  $y \leftrightarrow z$ . Из (74) следует, что это отвечает замене  $\mathbf{k}_2 \leftrightarrow \mathbf{p}_2$  в экспоненте, а  $\mathbf{k}_{12}$  в (74) остается в этом случае неизменным (72). Таким образом, получаем, что выражение в показателе экспоненты (80) остается верным, с заменой  $\mathbf{k}_2 \leftrightarrow \mathbf{p}_2$ , и уравнение (81) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_1 + \mathbf{p}_1 &= \tilde{\mathbf{k}}_{12}, & \mathbf{k}_2 + \mathbf{p}_2 &= -\tilde{\mathbf{k}}_{12}, \\ \mathbf{k}_1 - \mathbf{p}_1 &= 2\mathbf{Q}, & \mathbf{k}_2 - \mathbf{p}_2 &= 2\mathbf{P}. \end{aligned} \quad (84)$$

Что касается уравнения (81), то оно тоже остается, но с заменой  $\mathbf{k}_{12} \leftrightarrow \tilde{\mathbf{k}}_{12}$ . Это означает, что в данном случае малым становится  $\tilde{\mathbf{k}}_{12}$ , а не  $\mathbf{k}_{12}$ . Но функции  $\mathcal{Y}$  и  $\mathcal{J}$  все еще зависят от  $k_{12}$ , а не от  $\tilde{k}_{12}$ , и поэтому инфракрасное

усиление (сингулярность), такое, как было в (83), в перекрестном члене отсутствует.

Итак, в древесном приближении лидирующий вклад в пределе  $k_{12} \rightarrow 0$  имеет вид (83). В работе [55] показано, что имеется важный однопетлевой вклад

$$\theta_{4(1.c)}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, \mathbf{k}_{12}) \simeq \frac{h^4}{\pi^2} \frac{1}{P^3 Q^3 k_{12}^3} \ln \frac{k_{12}}{\Lambda},$$

он подавлен, по сравнению с древесным вкладом, фактором  $h^2$ , однако усилен в режиме малого переданного импульса фактором  $1/k_{12}^2$ . Таким образом, при определенных условиях петлевой вклад может быть существенным, и даже преобладать над древесным.

*1.5.5. Формы негауссовости.* Вычисление вклада (65) проведено в п. 1.5.6, где также приведен полный результат для четырехточки. Мы определяем четырехточку, или триспектр  $\mathcal{T}$  в нашем случае, следующим образом:

$$G_4(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4) = \frac{h^2}{\prod_{i=1}^4 k_i^3} \mathcal{T}(k_1, k_2, k_3, k_4, k_{12}, k_{14}),$$

где  $\mathbf{k}_{14} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_4$ . Комбинации  $k_{13} = |\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_3|$  и  $k_{24} = |\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_4|$  не являются независимыми, так как

$$k_{13} = k_{24} = \sqrt{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_4^2 - k_{12}^2 - k_{14}^2}.$$

Для иллюстрации удобно разложить триспектр на часть  $\mathcal{T}_s$ , сингулярную при  $k_{12} \rightarrow 0$ ,  $k_{13} \rightarrow 0$  или  $k_{14} \rightarrow 0$ , и на регулярную часть  $\mathcal{T}_r$ ,

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}_s + \mathcal{T}_r.$$

Сингулярная часть получается\* из (83),

$$\mathcal{T}_s = \frac{\pi}{32} [\mathcal{Y}_s(k_1, k_2, k_{12}) \mathcal{Y}_s(k_3, k_4, k_{12}) + (\mathbf{k}_2 \leftrightarrow \mathbf{k}_3) + (\mathbf{k}_2 \leftrightarrow \mathbf{k}_4)], \quad (85)$$

тогда как остальная часть находится из (96) и (97). Важно отметить, что никакой другой сингулярности в  $\mathcal{T}$  нет: можно проверить, что логарифмические расходимости, появляющиеся в промежуточных формулах, сокращаются при учете всех вкладов.

Как и авторы [56], мы будем сравнивать наш триспектр с триспектрами локального вида. Последние получаются из анзаца в координатном пространстве [57, 58]

$$\zeta(\mathbf{x}) = \zeta_g + \frac{3}{5} f_{\text{NL}} (\zeta_g^2 - \langle \zeta_g^2 \rangle) + \frac{9}{25} g_{\text{NL}} (\zeta_g^3 - 3 \langle \zeta_g^2 \rangle \zeta_g), \quad (86)$$

\*Произведение  $\mathcal{Y}_s \mathcal{Y}_r$  регулярно в пределе  $k_{12} \rightarrow 0$ .

где  $\zeta_g$  — гауссово поле, а  $f_{\text{NL}}$  и  $g_{\text{NL}}$  — константы. Мы имеем [56]:

$$G_{4,\text{loc}}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4) = \frac{\text{const}}{\prod_{i=1}^4 k_i^3} (f_{\text{NL}}^2 \mathcal{T}_{\text{loc1}} + g_{\text{NL}} \mathcal{T}_{\text{loc2}}),$$

где две локальные формы — следующие:

$$\mathcal{T}_{\text{loc1}} = \frac{9}{50} \left( \frac{k_1^3 k_3^3 + k_1^3 k_4^3 + k_2^3 k_3^3 + k_2^3 k_4^3}{k_{12}^3} + \{\mathbf{k}_2 \leftrightarrow \mathbf{k}_3\} + \{\mathbf{k}_2 \leftrightarrow \mathbf{k}_4\} \right), \quad (87)$$

$$\mathcal{T}_{\text{loc2}} = \frac{27}{100} \sum_{i=1}^4 k_i^3. \quad (88)$$

Определим величину негауссовости. Стандартная оценка  $t_{\text{NL}}$  связана с четырехточечной функцией в пределе тетраэдра,  $k_i = k_{12} = k_{14} \equiv k$ ,

$$\langle \zeta_{\mathbf{k}}^4 \rangle_{k_i=k_{12}=k_{14} \equiv k} = (2\pi)^9 \mathcal{P}_{\zeta}^3 \delta \left( \sum_{i=1}^4 \mathbf{k}_i \right) \frac{1}{k^9} t_{\text{NL}}. \quad (89)$$

Отметим, что стандартное определение включает  $\mathcal{P}_{\zeta}^3$  в правой части. Это имеет смысл для локального анзаца (86), и величины в локальных моделях следующие [56]:

$$t_{\text{NL}}^{\text{loc1}} = 2,16 f_{\text{NL}}^2, \quad t_{\text{NL}}^{\text{loc2}} = 1,08 g_{\text{NL}}.$$

С другой стороны, величина, которую мы можем явно найти в нашей модели, это

$$\langle \theta_{\mathbf{k}}^4 \rangle_{k_i=k_{12}=k_{14} \equiv k} = (2\pi)^9 \mathcal{P}_{\theta}^3 \delta \left( \sum_{i=1}^4 \mathbf{k}_i \right) \frac{1}{k^9} t_{\text{NL}}^{(\theta)},$$

где  $\mathcal{P}_{\theta} = 1/(4\pi^2)$ , согласно (41). Величина негауссовости для  $\theta$  в нашей модели получается из (96) и (97),

$$t_{\text{NL}}^{(\theta)} = 2,87 h^2. \quad (90)$$

Адиабатические возмущения  $\zeta$  пропорциональны  $\theta$ , а именно,

$$\zeta = r \frac{\theta}{\bar{\theta}}, \quad (91)$$

где  $\bar{\theta}$  — однородное фоновое значение скалярного поля и  $r \lesssim 1$  — ослабляющий фактор, не зависящий от  $k$  ни для курватонного механизма перевода возмущений  $\theta$  в адиабатические, ни для механизма модулированного распада\*.

---

\*Напомним, что мы не учитываем негауссовость, которая может генерироваться во время переработки возмущений. Таким образом, использование линейной связи между  $\zeta$  и  $\theta$  оправданно.

Поэтому в нашей модели величина негауссовости адиабатических возмущений следующая:

$$t_{\text{NL}} = \frac{\mathcal{P}_\theta}{\mathcal{P}_\zeta} t_{\text{NL}}^{(\theta)} = 2,87 \frac{h^2}{4\pi^2 \mathcal{P}_\zeta}.$$

Так же, как и в инфляционных моделях с такими механизмами переработки возмущений, в нашей модели мы можем получить  $t_{\text{NL}} \gg 1$ . Как уже обсуждалось, никаких модельно-независимых ограничений на  $\bar{\theta}$  и  $h$  нет, так что внутренняя негауссовость, о которой идет речь, вполне может преобладать над негауссовостью, связанной с переходом от возмущений  $\theta$  к адиабатическим возмущениям, и быть достаточной для экспериментального наблюдения.

Отметим, однако, что в сценарии с конформным скатыванием [26] спектр мощности адиабатических возмущений сам пропорционален  $h^2$ . Причина этого в том, что  $\theta$  — поле фазы в рассматриваемой модели. С нашей нормировкой его фоновое значение ограничено сверху, это видно из формулы (43),

$$|\bar{\theta}| \leq \frac{\sqrt{2}\pi}{h},$$

и если не предполагать тонкой подстройки, то  $|\bar{\theta}| \sim \pi/h$ . Формула (91) тогда дает

$$\mathcal{P}_\zeta \geq \frac{r^2 h^2}{8\pi^4},$$

так что

$$t_{\text{NL}} \leq 2,87 \frac{2\pi^2}{r^2}.$$

Поэтому внутренняя негауссовость может быть значительной только для небольших факторов ослабления  $r$ . Если возмущения  $\theta$  переводятся в адиабатические моды с помощью курватонного механизма, негауссовость, связанная с переходом, большая для малых  $r$ ,  $f_{\text{NL}} \sim r^{-1}$  [59–62], так что ее вклад в триспектр, грубо говоря, одного порядка с внутренней негауссовостью. В этом случае вопрос возможности наблюдения внутренней негауссовости заслуживает отдельного изучения. Это относится и к основной массе моделей модулированного распада, в которых тоже  $f_{\text{NL}} \sim r^{-1}$  [63, 64]. Есть, однако, исключение [65]: если ширина распадающихся частиц  $\Gamma(\theta)$  линейна по  $\theta$  или имеет вид  $\Gamma(\theta) = (\gamma_0 + \gamma_1 \theta)^2$  (что более правдоподобно с точки зрения физики частиц), то  $f_{\text{NL}}$ ,  $g_{\text{NL}}$  будут, грубо говоря, порядка единицы даже для малых  $r \sim \gamma_1/\gamma_0$  и, следовательно, больших  $t_{\text{NL}}$ . В целом можно сказать, что в сценарии с конформным скатыванием доминирование и детектируемость внутренней негауссовости возможны, но только в некоторых случаях.

Как упоминалось ранее, существенный вклад в негауссовость дает также петлевая диаграмма (в петле бежит модуль поля). Благодаря специальной зависимости от импульса этот вклад позволяет легко ограничить конс-

танту  $h$  [55]. Ограничения, однако, остаются слишком слабыми (слабее, чем ограничения из амплитуды спектра).

Теперь перейдем к обсуждению различных форм негауссовости. Чтобы их сравнивать, мы задаем

$$\frac{h^2}{4\pi^2\mathcal{P}_\zeta} = f_{\text{NL}} = g_{\text{NL}} = 1;$$

тогда величины четырехточек во всех моделях схожи.

Мы будем рассматривать различные пределы для функции  $\mathcal{T}$ . Мы пользуемся номенклатурой, примененной в [56, 66]. Графики *a–в* на рис. 2, 3,

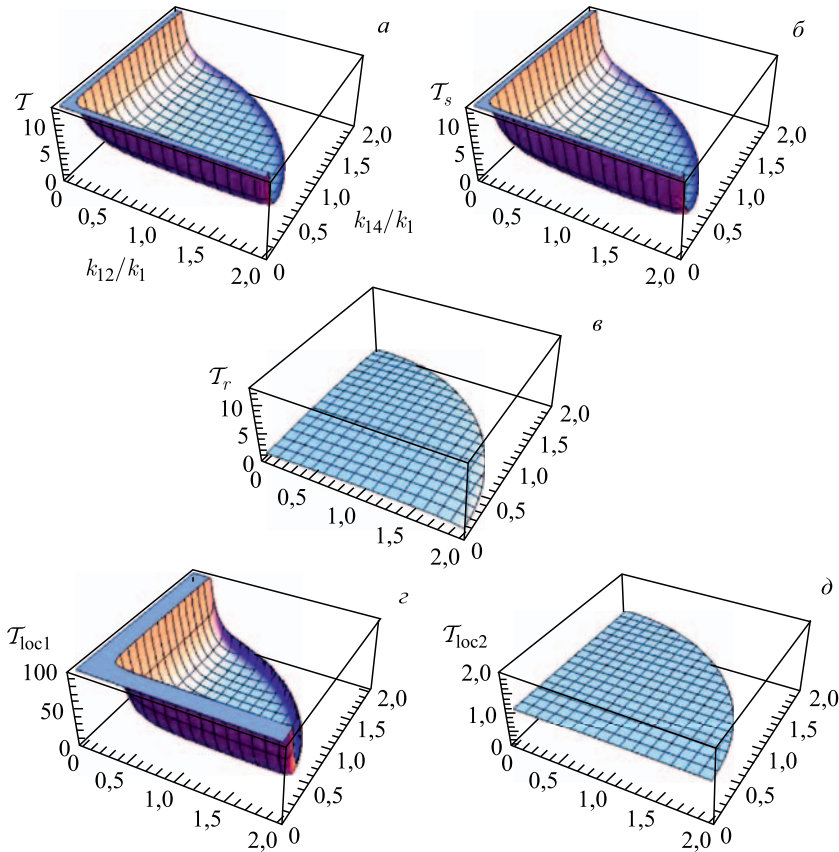


Рис. 2. Полный триспектр  $\mathcal{T}$  (а), его сингулярная часть  $\mathcal{T}_s$  (б), его регулярная часть  $\mathcal{T}_r$  (в), триспектр локального вида  $\mathcal{T}_{\text{loc1}}$  (г) и другой триспектр локального вида  $\mathcal{T}_{\text{loc2}}$  (д) в *равностороннем пределе*. Определения даны в п. 1.5.5. Напомним, что вертикальные масштабы на нижних двух графиках отличаются

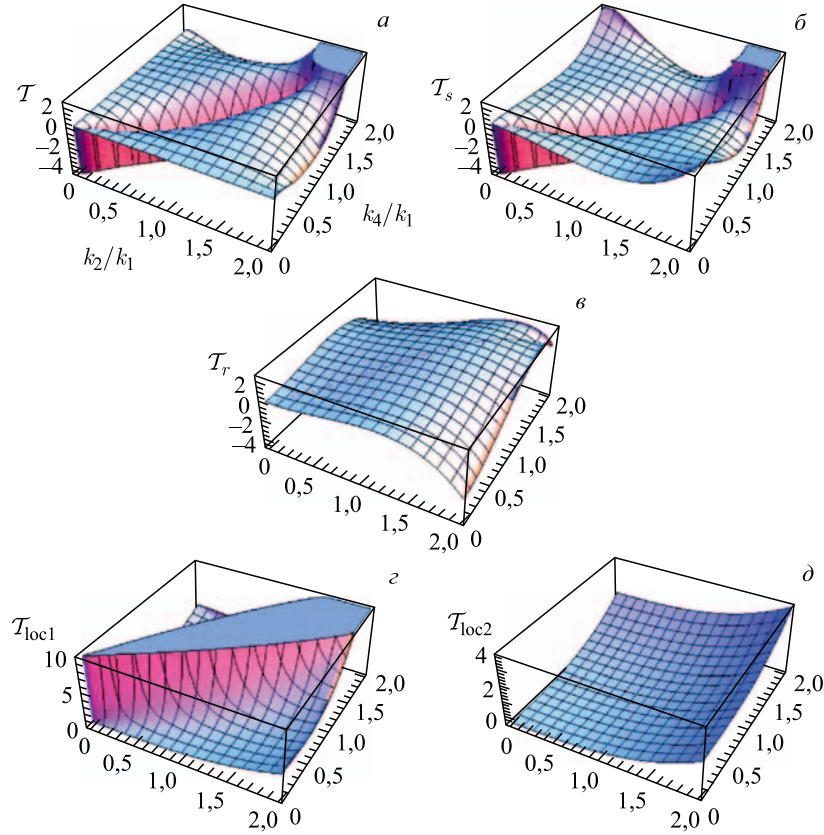


Рис. 3. Те же графики, что и на рис. 2, но в специальном планарном пределе

4 и 5 показывают: полный триспектр  $\mathcal{T}$ , сингулярный вклад  $\mathcal{T}_s$  и регулярную часть  $\mathcal{T}_r$  в нашей модели соответственно. Графики г и д показывают два локальных триспектра  $\mathcal{T}_{loc1}$  и  $\mathcal{T}_{loc2}$ . Отметим, что вертикальные масштабы в последних двух графиках различаются между собой и отличаются от вертикального масштаба первых трех графиков. Области определения на этих графиках ограничены различными неравенствами, которым подчиняются импульсы. В частности,

$$k_{12}^2 + k_{14}^2 \leq \sum_{i=1}^4 k_i^2,$$

$$\sqrt{k_1^2 + k_4^2 - 2k_1k_4} \leq k_{14} \leq \sqrt{k_1^2 + k_4^2 + 2k_1k_4}.$$



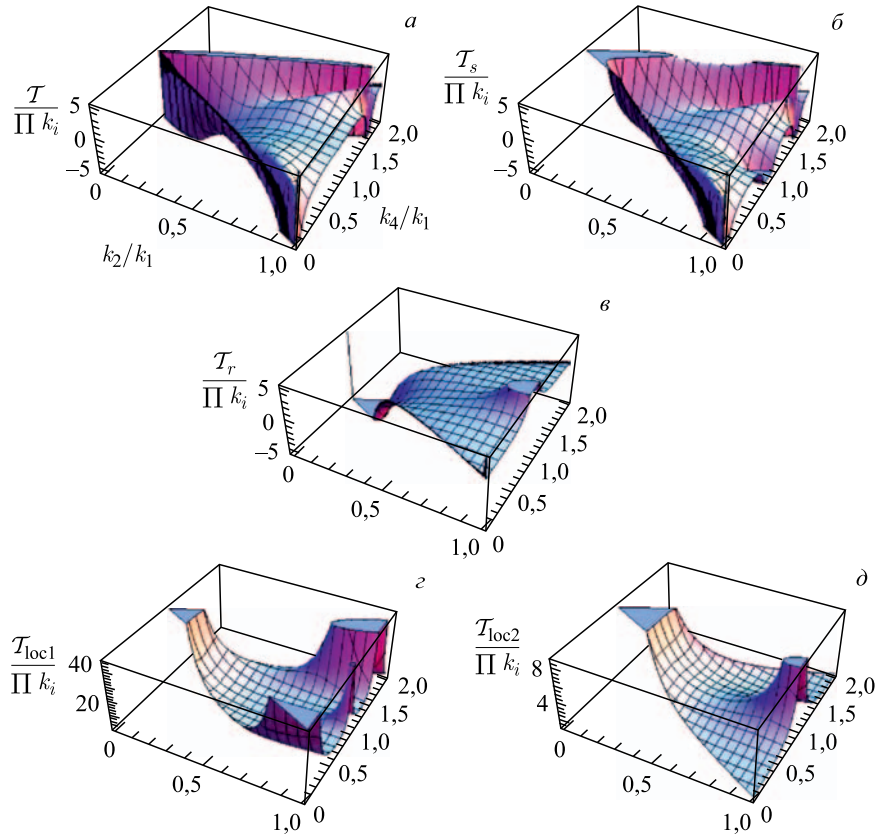
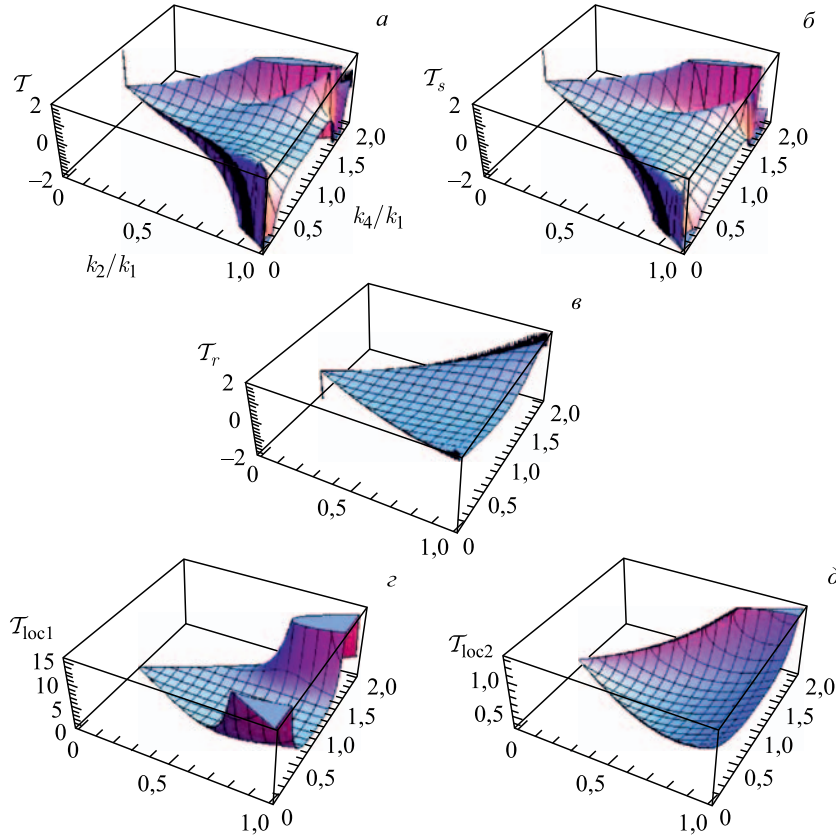


Рис. 4. Дважды сжатый предел. Показаны комбинации  $T / \left( \prod_{i=1}^4 k_i \right)$  для тех же три-спектров, что и на рис. 2

Мы рассматриваем следующие пределы.

1. Равносторонний предел,  $k_1 = k_2 = k_3 = k_4$ . Мы представляем на рис. 2 четырехточку как функцию  $k_{12}/k_1$  и  $k_{14}/k_1$ . Сразу видна особенность  $\mathcal{T} \propto k_{12}^{-1}, k_{14}^{-1}$  в нашем триспектре и его сингулярной части, а также сингулярность более высокого порядка  $\mathcal{T}_{\text{loc1}} \propto k_{12}^{-3}, k_{14}^{-3}$  в первом локальном триспектре. Как ранее было отмечено, инфляционные модели с одним полем инфлатона имеют триспектр, регулярный в точках  $k_{12} \rightarrow 0$  и  $k_{14} \rightarrow 0$  [56, 66–80]. Таким образом, сингулярность, вызванная инфракрасным усилением радиальных мод  $\delta\rho$ , является отличительной чертой конформных моделей.

Рис. 5. Дважды сжатый предел. То же, что и на рис. 4, но для самих триспектров  $\mathcal{T}$ 

2. Специальный планарный предел,  $k_1 = k_3 = k_{14}$  и

$$k_{12} = \left[ k_1^2 + \frac{k_2 k_4}{2k_1^2} \left( k_2 k_4 + \sqrt{(4k_1^2 - k_2^2)(4k_1^2 - k_4^2)} \right) \right]^{1/2}.$$

Четырехточки на рис. 3 показаны как функции  $k_2/k_1$  и  $k_4/k_1$ . Структуры на диагонали опять появляются из-за сингулярности, теперь при  $k_{13} \rightarrow 0$ , что соответствует  $k_2 \rightarrow k_4$ . Отметим, что полный триспектр зануляется на границах  $k_2 = 0$  и  $k_4 = 0$  (это может быть получено аналитически). Последняя черта схожа со многими инфляционными моделями [56, 66], однако отсутствует в  $\mathcal{T}_{loc1}$  в  $\mathcal{T}_{loc2}$ .

3. Дважды сжатый предел,  $k_3 = k_4 = k_{12}$ . На рис. 4 показаны следующие комбинации:

$$\frac{\mathcal{T}}{\prod_{i=1}^4 k_i},$$

а на рис. 5 сами триспектры  $\mathcal{T}$  как функции  $k_2/k_1$  и  $k_4/k_1$ . Очевидно, наш триспектр сильно отличается от локальных в таком пределе.

1.5.6. *Четырехточка без приближений.* Проведем явное вычисление четырехточки. Как ни странно, это можно сделать полностью аналитически.

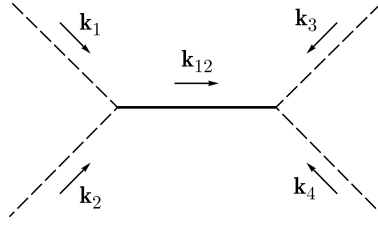


Рис. 6.  $s$ -канальный вклад в триспектр. Штриховая и сплошная линии отвечают двухточечным функциям полей  $\theta$  и  $\delta\rho$  соответственно

Вычисления удобнее проводить в терминах симметричных полиномов. В  $s$ -канале (диаграмма на рис. 6) это комбинации

$$K_1 = k_1 + k_2, \quad K_2 = k_1 k_2, \quad P_1 = k_3 + k_4, \quad P_2 = k_3 k_4. \quad (92)$$

В дальнейшем нам будет удобно использовать обозначения

$$\begin{aligned} Z_{K_1, K_2} &= K_1(3K_1^2 - 12K_2 - k_{12}^2), \\ X_{K_1, K_2} &= k_{12}^4 + 2k_{12}^2(K_1^2 - 2K_2) + 12K_1^2 K_2 - 3K_1^4. \end{aligned}$$

В этих терминах выражения (70) и (71) переписываются:

$$\begin{aligned} \tilde{R} &= [K_1^2 - 2K_2 - k_{12}^2 - K_2(K_1^2 - k_{12}^2)\xi^2] \cos(K_1\xi) + \\ &\quad + K_1(K_1^2 - 2K_2 - k_{12}^2)\xi \sin(K_1\xi), \\ \tilde{Q} &= [K_1^2 - 2K_2 - k_{12}^2 - K_2(K_1^2 - k_{12}^2)\xi^2] \sin(K_1\xi) - \\ &\quad - K_1(K_1^2 - 2K_2 - k_{12}^2)\xi \cos(K_1\xi). \end{aligned}$$

Члены (65) дают следующий вклад в четырехточечную функцию:

$$G_{4T\bar{T}} = \frac{h^2}{4} \frac{\pi}{32} \frac{1}{\prod_{i=1}^4 k_i^3} [\mathcal{U}(k_1, k_2, k_3, k_4, k_{12}) + 2 \text{ permutations}],$$

где, в очевидных обозначениях,

$$\mathcal{U}(k_1, k_2, k_3, k_4, k_{12}) = \frac{32}{\pi} \int_0^{\infty} d\xi U(k_1, k_2, k_3, k_4, k_{12}; \xi)$$

и

$$U(k_1, k_2, k_3, k_4, k_{12}; \xi) = \int_0^{\xi} \frac{d\chi}{\sqrt{\xi\chi}} (J_{5/2}(k_{12}\xi) Y_{5/2}(k_{12}\chi) - Y_{5/2}(k_{12}\xi) J_{5/2}(k_{12}\chi)) (\tilde{Q}_{k_1, k_2, k_{12}}(\xi) \tilde{R}_{k_3, k_4, k_{12}}(\chi) + \tilde{Q}_{k_3, k_4, k_{12}}(\xi) \tilde{R}_{k_1, k_2, k_{12}}(\chi)).$$

Прямое вычисление последнего интеграла дает

$$U = U_0 + U_I,$$

где

$$\begin{aligned} U_0 &= \frac{\tilde{Q}_{k_3, k_4, k_{12}}(\xi)}{2\pi k_{12}^5 \xi^3} (2k_{12}^3 \xi \cos(K_1 \xi) (2K_2 k_{12}^2 \xi^2 - 3(K_1^2 - 4K_2 + k_{12}^2)) - \\ &\quad - 2K_1 k_{12} \sin(K_1 \xi) (2k_{12}^4 \xi^2 + 3k_{12}^2 + 36K_2 - 9K_1^2)) + \{k_1, k_2 \leftrightarrow k_3, k_4\}, \\ U_I &= \frac{\tilde{Q}_{k_3, k_4, k_{12}}(\xi) X_{K_1, K_2}}{2\pi k_{12}^5 \xi^3} ([(k_{12}^2 \xi^2 - 3) \sin(k_{12} \xi) + 3k_{12} \xi \cos(k_{12} \xi)] \times \\ &\quad \times [\text{Ci}((K_1 - k_{12})\xi) + \text{Ci}((K_1 + k_{12})\xi)] + [(k_{12}^2 \xi^2 - 3) \cos(k_{12} \xi) - 3k_{12} \xi \sin(k_{12} \xi)] \times \\ &\quad \times [\text{Si}((K_1 - k_{12})\xi) - \text{Si}((K_1 + k_{12})\xi)]) + \{k_1, k_2 \leftrightarrow k_3, k_4\}. \end{aligned} \quad (93)$$

Отметим, что  $U_0$  содержит только тригонометрические функции и степени  $\xi$ . Таким образом, интегрирование  $U_0$  по  $\xi$  громоздкое, но простое\*. С другой стороны,  $U_I$  включает интегральный косинус и синус (Ci и Si), так что его интегрирование нетривиально. Последнее интегрирование мы проводим, используя интегральное представление функций Si и Ci и изменяя порядок интегрирования, т. е. мы сначала интегрируем по  $\xi$ , а потом по  $\chi$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_I &= \frac{32}{\pi} \int_0^{\infty} d\xi U_I(\xi) = \frac{32}{\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{\cos(K_1 \chi) d\chi}{\chi} \int_0^{\chi} d\xi \frac{\tilde{Q}_{k_3, k_4, k_{12}}(\xi) X_{K_1, K_2}}{k_{12}^5 \xi^3} \times \\ &\quad \times ([(3 - k_{12}^2 \xi^2) \sin(k_{12} \xi) - 3k_{12} \xi \cos(k_{12} \xi)] \cos(k_{12} \chi) - [(3 - k_{12}^2 \xi^2) \cos(k_{12} \xi) + \\ &\quad + 3k_{12} \xi \sin(k_{12} \xi)] \sin(k_{12} \chi)) + \{k_1, k_2 \leftrightarrow k_3, k_4\} = \mathcal{U}_{I0} + \mathcal{U}_{II}. \end{aligned}$$

\*В точке  $\xi \rightarrow 0$  исходный интеграл сходится. Тем не менее, некоторые отдельные члены могут давать расходимости (например,  $U_0$  содержит  $\cos(K_1 \xi)/\xi$ ). Чтобы регуляризовать эти расходимости, мы интегрируем по  $\xi$  от  $\alpha > 0$  и берем предел  $\alpha \rightarrow 0$  в конце вычисления.

Внутреннее интегрирование по  $\xi$  трудоемкое, но снова простое. Оно дает два вида вкладов: первый не содержит интегральных синусов и косинусов,

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{I0} = & \frac{16X_{K_1, K_2}}{\pi^2 k_{12}^4} \int_0^\infty \frac{\cos(K_1 \chi) d\chi}{\chi^2} (2P_1(k_{12}^2 - 3P_2)\chi \cos(P_1 \chi) + \\ & + P_1(k_{12}^2 + 12P_2 - 3P_1^2)\chi \cos(k_{12} \chi) + [3P_1^2 - 6P_2 - k_{12}^2(3 - 2P_2 \chi^2)] \times \\ & \times \sin(P_1 \chi)) + \{k_1, k_2 \leftrightarrow k_3, k_4\}, \quad (94) \end{aligned}$$

а второй содержит Si и Ci в подынтегральном выражении,

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{II} = & \frac{8X_{K_1, K_2} X_{P_1, P_2}}{\pi^2 k_{12}^5} \int_0^\infty \frac{\cos(K_1 \chi) d\chi}{\chi} (\cos(k_{12} \chi) \left[ \text{Ci}((P_1 + k_{12})\chi) - \right. \\ & - \text{Ci}((P_1 - k_{12})\chi) - \log\left(\frac{P_1 + k_{12}}{P_1 - k_{12}}\right) \left. \right] + \sin(k_{12} \chi) [\text{Si}((P_1 + k_{12})\chi) + \\ & + \text{Si}((P_1 - k_{12})\chi)]) + \{k_1, k_2 \leftrightarrow k_3, k_4\}. \quad (95) \end{aligned}$$

Тем не менее, оба эти интеграла могут быть вычислены аналитически, соответствующие формулы имеют вид

$$\begin{aligned} S_i(a, b, c) = & \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_0^\infty dx e^{-\epsilon x} \frac{\sin(ax) \text{Si}(bx)}{x} + \{b \rightarrow c\} = \\ = & \frac{1}{4} [\Theta(b-a) L_2^*(b/a) + \Theta(a-b) L_2(b/a) - 2L_2(-b/a) + L_2(b/a)] + \{b \rightarrow c\}, \\ C_i(a, b, c) = & \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_0^\infty dx e^{-\epsilon x} \frac{\cos(ax) [\text{Ci}(bx) - \text{Ci}(cx) - \log(b/c)]}{x} = \\ = & \frac{1}{8} \left\{ \log\left(\frac{b^2}{c^2}\right) \log\left(\frac{(ia)^2}{bc}\right) + L_2\left(\frac{b^2}{a^2}\right) - L_2\left(\frac{a^2}{b^2}\right) - L_2\left(\frac{c^2}{a^2}\right) + L_2\left(\frac{a^2}{c^2}\right) \right\}, \end{aligned}$$

где  $L_2$  — функция дилогарифм. Таким образом, мы получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{U} = & \frac{1}{8\pi k_{12}^4} \left( Z_{k_1, k_2} X_{k_3, k_4} \log\left[\frac{(P_1^2 - k_{12}^2)^2}{(K_1 + P_1)^4}\right] + Z_{k_3, k_4} X_{k_1, k_2} \times \right. \\ & \times \log\left[\frac{(K_1^2 - k_{12}^2)^2}{(K_1 + P_1)^4}\right] + \frac{k_{12}^2}{(K_1 + P_1)^3} [\mathcal{G}_2 + k_{12}^2 \mathcal{G}_4 + k_{12}^4 \mathcal{G}_6] \left. \right) + \\ & + \frac{1}{8\pi k_{12}^5} X_{k_1, k_2} X_{k_3, k_4} [C_i(K_1 + k_{12}, P_1 + k_{12}, P_1 - k_{12}) + \\ & + C_i(K_1 - k_{12}, P_1 + k_{12}, P_1 - k_{12}) + S_i(K_1 + k_{12}, P_1 + k_{12}, P_1 - k_{12}) - \\ & - S_i(K_1 - k_{12}, P_1 + k_{12}, P_1 - k_{12}) + \{k_1, k_2 \leftrightarrow k_3, k_4\}]. \end{aligned}$$

Первые две строчки возникают из интегрирования  $U_0$ , формулы (93) и из (94), а остальное — из (95). Используются следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_2(k_1, k_2, k_3, k_4) &= -12(K_1 + P_1)^4(K_1^2 - 4K_2)(P_1^2 - 4P_2), \\ \mathcal{G}_4(k_1, k_2, k_3, k_4) &= 32K_2P_2(K_1^2 + K_1P_1 + P_1^2) - 16P_2(K_1 + P_1) \times \\ &\times (K_1^3 + 2K_1^2P_1 - 3K_1P_1^2 - 3P_1^3) - 16K_2(K_1 + P_1)(P_1^3 + 2P_1^2K_1 - 3P_1K_1^2 - 3K_1^3) - \\ &\quad - 4(K_1 + P_1)^2(3K_1^4 - 2K_1^2P_1^2 + 3P_1^4), \\ \mathcal{G}_6(k_1, k_2, k_3, k_4) &= -32K_2P_2 - 16(K_1 + P_1)[K_2(K_1 + 2P_1) + P_2(P_1 + 2K_1)] + \\ &\quad + 4(K_1 + P_1)^2(3K_1^2 + 2K_1P_1 + 3P_1^2). \end{aligned}$$

Мы добавляем часть из (62), которая отвечает  $s$ -канальной диаграмме на рис. 6 и дается выражением (75), и получаем полный вклад  $s$ -канальной диаграммы:

$$\begin{aligned} S(k_1, k_2, k_3, k_4, k_{12}) &= \frac{h^2}{4} \frac{\pi}{\prod_{i=1}^4 k_i^3} 32 [\mathcal{Y}(k_1, k_2, k_{12})\mathcal{Y}(k_3, k_4, k_{12}) + \\ &\quad + \mathcal{J}(k_1, k_2, k_{12})\mathcal{J}(k_3, k_4, k_{12}) + \mathcal{U}(k_1, k_2, k_3, k_4, k_{12})]. \quad (96) \end{aligned}$$

Вместе с перекрестными членами это дает окончательный результат

$$\begin{aligned} G_4(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4) &= \frac{h^2}{4} \frac{\pi}{\prod_{i=1}^4 k_i^3} T(k_1, k_2, k_3, k_4, k_{12}, k_{14}) = \\ &= S(k_1, k_2, k_3, k_4, k_{12}) + S(k_1, k_3, k_2, k_4, k_{13}) + S(k_1, k_4, k_3, k_2, k_{14}). \quad (97) \end{aligned}$$

Исследование этой формулы приведено в п. 1.5.5.

## 2. ПСЕВДОКОНФОРМНАЯ МОДЕЛЬ

**2.1. Классическое решение.** Теперь перейдем к рассмотрению псевдоконформной модели. Напомним, мы рассматриваем следующее действие для скалярного поля:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{2} |\partial_\mu \phi|^2 + \frac{\lambda}{4} |\phi|^4 \right]. \quad (98)$$

Начнем с решений классических уравнений поля. Эволюция однородной Вселенной описывается уравнением для поля  $\phi$

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} = \lambda\phi^3 \quad (99)$$

и уравнением Фридмана

$$H^2 = \frac{8\pi}{3M_{\text{pl}}^2} \left( \frac{1}{2} |\dot{\phi}|^2 - \frac{\lambda}{4} |\phi|^4 \right). \quad (100)$$

На ранних временах мы пренебрегаем хаббловским трением в первом уравнении и пишем

$$\ddot{\phi} = \lambda\phi^3. \quad (101)$$

В этом случае плотность энергии во Вселенной пренебрежимо мала,  $E = \frac{\dot{\phi}^2}{2} - \frac{\lambda\phi^4}{4} = 0$ , а однородное решение выглядит следующим образом:

$$\phi = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\lambda(t_{**} - t)}}. \quad (102)$$

Поскольку при подстановке  $\phi$  во второе уравнение мы получаем нуль ( $H^2$  пропорционален плотности энергии во Вселенной), мы используем другое уравнение для нахождения  $H$ . Параметр Хаббла и масштабный фактор находим из уравнения

$$\frac{2\ddot{a}}{a} + \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 \approx 2\dot{H} = -\frac{8\pi}{M_{\text{pl}}^2} \left( \frac{|\dot{\phi}|^2}{2} + \frac{\lambda|\phi|^4}{4} \right). \quad (103)$$

На самом деле можно было использовать стандартное уравнение Фридмана, но рассмотреть следующий порядок по  $M_{\text{pl}}^{-2}$ . Технически удобнее использовать уравнение с давлением. Итак, мы находим параметр Хаббла:

$$H = -\frac{8\pi}{3\lambda M_{\text{pl}}^2} \frac{1}{(t_{**} - t)^3}. \quad (104)$$

Это поведение отвечает уравнению состояния

$$\frac{p}{\rho} \rightarrow \infty. \quad (105)$$

Из уравнения (104) находим масштабный фактор

$$a = a_{**} \left( 1 - \frac{4\pi}{3\lambda M_{\text{pl}}^2} \frac{1}{(t_{**} - t)^2} \right). \quad (106)$$

Таким образом, на ранних временах мы получили экпиротический режим медленного сжатия. Наше приближение работает до тех пор, пока второй член много меньше первого, т. е.  $(t_{**} - t)^2 \gg \frac{4\pi}{3\lambda M_{\text{pl}}^2}$ .

Теперь рассмотрим решение на поздних временах. Мы решим уравнение движения и уравнение Фридмана, пренебрегая потенциалом, но оставляя хаббловское трение:

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} = 0, \quad (107)$$

$$H = -\frac{2\sqrt{\pi}}{\sqrt{3}M_{\text{pl}}}\dot{\phi}. \quad (108)$$

Подставляя  $H$  в первое уравнение, получаем

$$\ddot{\phi} = \frac{\sqrt{12\pi}}{M_{\text{pl}}}\dot{\phi}^2. \quad (109)$$

Его решением будет

$$\phi = -\frac{M_{\text{pl}}}{\sqrt{12\pi}} \ln(\mu(t_* - t)). \quad (110)$$

Мы действительно видим, что потенциал удовлетворяет условиям малости  $\lambda\phi^4 \ll \dot{\phi}^2$  и  $\lambda\phi^3 \ll \ddot{\phi}$ , поскольку  $\phi$  — логарифмическая функция, а  $\dot{\phi}$  и  $\ddot{\phi}$  — степенные. Здесь  $\mu$  — независимый параметр, который не может быть определен из системы (107), (108). Зная поведение  $\phi$ , находим следующее решение для  $H$ :

$$H = -\frac{1}{3(t_* - t)}. \quad (111)$$

Это поведение отвечает уравнению состояния

$$p = \rho. \quad (112)$$

Из (111) определяем масштабный фактор:

$$a = a'_*(t_* - t)^{1/3} = a_*(\eta_* - \eta)^{1/2}. \quad (113)$$

Теперь мы должны сшить два режима, чтобы определить коэффициенты. Предполагается, что первый (106) и второй (113) режимы сшиваются в точке, где потенциал того же порядка, что и хаббловское трение (это время обозначим как  $t_L$ ):

$$\lambda\phi^3 = 3H\dot{\phi}. \quad (114)$$

В это уравнение подставляем решение для  $\phi$ . При этом мы можем использовать любое из решений ( $\phi$  на ранних временах или на поздних), поскольку и поле  $\phi$ , и его производная  $\dot{\phi}$  сами должны быть сшиты в этой точке. Условия сшивки выглядят следующим образом:

$$\phi : \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\lambda}(t_{**} - t_L)} = -\frac{M_{\text{pl}}}{\sqrt{12\pi}} \ln(\mu(t_* - t_L)), \quad (115)$$

$$\dot{\phi} : \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\lambda}(t_{**} - t_L)^2} = \frac{1}{\sqrt{12\pi}} \frac{M_{\text{pl}}}{t_* - t_L}. \quad (116)$$



Кроме того, мы, разумеется, будем требовать сшивки решений для  $H$  и  $a$ :

$$H : \frac{1}{3(t_* - t_L)} = \frac{8\pi}{3\lambda M_{\text{pl}}^2 (t_{**} - t_L)^3}, \quad (117)$$

$$a : a_{**} = a'_*(t_* - t_L)^{1/3}. \quad (118)$$

Эти уравнения позволяют выразить все параметры через один, например через  $a_*$ :

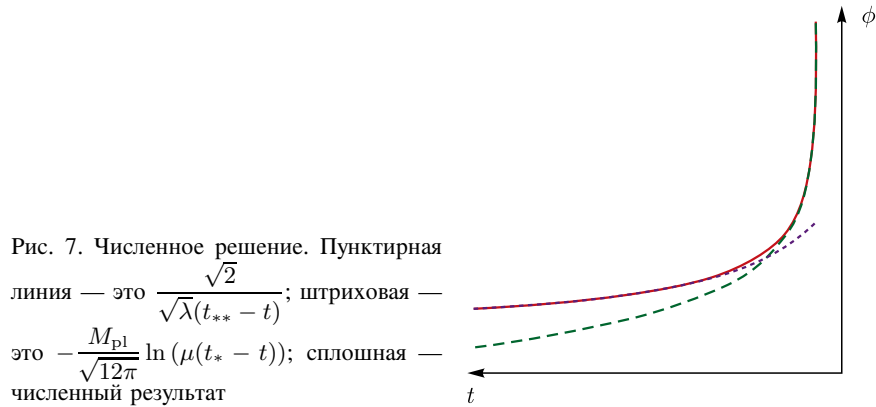
$$a_{**} = \left( \frac{a_*^2}{M_{\text{pl}} \sqrt{\lambda}} \right)^{1/3}, \quad (119)$$

$$\eta_* = \left( \frac{a_{**}}{a_*} \right)^2, \quad (120)$$

$$t_{**} - t_L = \frac{\sqrt{4\pi}}{\sqrt{\lambda} M_{\text{pl}}}. \quad (121)$$

Теперь перейдем к численному решению уравнений: решим систему (99), (100) и изучим ее асимптотики. Это является необходимой проверкой, поскольку мы, на самом деле, не знаем, связаны ли два найденных решения между собой. Действительно, система (99), (100) нелинейна, а значит, может иметь несколько решений. Могло бы случиться, что найденное решение первого режима на поздних временах переходило бы в неизвестное другое решение.

Численное решение системы (99), (100) приведено на рис. 7. Изучая две его асимптотики, мы приходим к выводу, что были правы: первое найденное решение  $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\lambda}(t_{**} - t)}$  переходит во второе  $-\frac{M_{\text{pl}}}{\sqrt{12\pi}} \ln(\mu(t_* - t))$ .



Теперь нам надо выразить  $a_*$  через физические величины. Как уже упоминалось, мы будем работать в приближении мгновенного разогрева. Используя уравнение Фридмана для горячей (радиационно-доминированной) стадии, во время разогрева получим

$$|H_c| = \frac{T_{\text{reh}}^2}{M_{\text{pl}}^*}. \quad (122)$$

Запишем еще закон сохранения энтропии в сопутствующем объеме

$$\frac{a_c}{a_0} = \frac{T_0}{T_{\text{reh}}} \left( \frac{g_{*0}}{g_{*\text{reh}}} \right)^{1/3}. \quad (123)$$

Индекс 0 здесь отвечает произвольному моменту на горячей стадии (радиационно-доминированной), а индекс  $c$  — моменту отскока.  $g_*$  — количество эффективных степеней свободы в соответствующий момент времени. Перед отскоком параметр Хаббла равен

$$H_c = -\frac{1}{2a_*(\eta_* - \eta_c)^{3/2}}. \quad (124)$$

Мы считаем, что  $|H_c|$  одинаков до и после отскока и сразу после отскока реализуется горячая стадия. Сравнивая формулы (122) и (124), получаем ( $a_c$  берем из уравнения (113))

$$\frac{T_{\text{reh}}^2}{M_{\text{pl}}^*} = \frac{1}{2a_*(\eta_* - \eta_c)^{3/2}} = \frac{1}{2a_c(\eta_* - \eta_c)} \quad (125)$$

и выражаем конформное время

$$\eta_* - \eta_c = \frac{1}{2a_c} \frac{M_{\text{pl}}^*}{T_{\text{reh}}^2} = \frac{M_{\text{pl}}^* g_{*\text{reh}}^{1/3}}{2a_0 T_0 T_{\text{reh}} g_{*0}^{1/3}}. \quad (126)$$

После подстановки  $a_c$  в (123) получаем следующее выражение:

$$\frac{a_*(\eta_* - \eta_c)^{1/2}}{a_0} = \frac{T_0 g_{*0}^{1/3}}{T_{\text{reh}} g_{*\text{reh}}^{1/3}}, \quad (127)$$

и, подставляя конформное время, получаем

$$a_* = a_0 \frac{T_0}{T_{\text{reh}}} \left( \frac{2a_0 T_0 T_{\text{reh}}}{M_{\text{pl}}} \frac{1,66 g_{*0}}{\sqrt{g_{*\text{reh}}}} \right)^{1/2}. \quad (128)$$

Коэффициент  $a_{**}$  после выражения через физические величины выглядит как

$$a_{**} = \left( \frac{2a_0^3 T_0^3}{T_{\text{reh}} M_{\text{pl}}^2 \sqrt{\lambda}} \left( \frac{1,66g_{*0}}{\sqrt{g_{*\text{reh}}}} \right) \right)^{1/3}. \quad (129)$$

Теперь перейдем к обсуждению тензорных возмущений.

**2.2. Тензорные возмущения.** Тензорные моды, к изучению которых мы сейчас приступим, удовлетворяют стандартному уравнению, такому же, как и свободное скалярное поле. Это уравнение имеет вид

$$\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} + \frac{k^2}{a^2}\varphi = 0, \quad (130)$$

или, после перехода к конформному времени:

$$\varphi'' + 2\frac{a'}{a}\varphi' + k^2\varphi = 0. \quad (131)$$

Упростим это уравнение, сделав замену  $\varphi = \chi/a$ :

$$\chi'' - \frac{a''}{a}\chi + \frac{k^2}{a^2}\chi = 0, \quad (132)$$

где  $\varphi = \sqrt{\frac{M_{\text{pl}}^2}{32\pi}}h$  с учетом различия в нормировке между канонически нормированным скалярным полем и амплитудой тензорных возмущений.

Мы снова рассматриваем два режима: ранние времена, на которых масштабный фактор  $a$  практически постоянный, и поздние времена, на которых он меняется как  $a \propto (t_* - t)^{1/3}$ . Как мы знаем, характер эволюции любой моды зависит от момента времени, когда она выходит за горизонт, а значит, от импульса моды.

Рассмотрим вначале возмущение с малым импульсом, которое пересекает горизонт на ранних временах. Напомним, что масштабный фактор в это время эволюционирует следующим образом:

$$a \approx a_{**} \left( 1 - \frac{c}{(\eta_{**} - \eta)^2} \right), \quad c = \frac{4\pi}{3\lambda M_{\text{pl}}^2 a_{**}^2}. \quad (133)$$

Малость импульса означает, что во время всей эволюции под горизонтом и во время выхода за горизонт реализуется именно такое поведение масштабного фактора. Используя условие пересечения горизонта  $k/a \sim H$  и условие применимости приближения, мы получаем следующее ограничение на импульсы:

$$k \ll \frac{3}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\lambda} M_{\text{pl}} a_{**} = \frac{3}{\sqrt{2\pi}} M_{\text{pl}}^{2/3} \lambda^{1/3} a_{**}^{2/3}. \quad (134)$$

Для таких импульсов уравнение имеет вид

$$\chi'' + \frac{6c}{(\eta_{**} - \eta)^4} \chi + k^2 \chi = 0. \quad (135)$$

Это уравнение не решается в явном виде. Поэтому нам придется использовать теорию возмущений. Асимптотикой при больших  $-\eta$  должна быть обычная волна  $\chi^{(\pm)} = e^{\pm ik\eta}$ . На поздних временах, после выхода за горизонт, но до включения второго режима асимптотика решения будет следующей:

$$\begin{aligned} \varphi &= C_1 + C_2 \int_{t_X}^t \frac{dt}{a^3} = C_1 + \frac{C_2}{a_{**}^2} \left( \eta - \frac{2c}{\eta} \right), \\ \chi &= \varphi \cdot a = C_1 a_{**} \left( 1 - \frac{c}{\eta^2} \right) + \frac{C_2}{a_{**}} \left( \eta - \frac{3c}{\eta} \right), \end{aligned} \quad (136)$$

где  $t_X$  — время пересечения горизонта. Задача теперь состоит в том, чтобы сшить эти две асимптотики, для того чтобы найти  $\chi^{(+)}$  и  $\chi^{(-)}$  после пересечения горизонта.

Для этого уравнение (135) мы будем решать по теории возмущений, разлагая вокруг точки пересечения горизонта. В первом режиме, а мы именно его сейчас рассматриваем, имеется условие:  $c/\eta^2 \ll 1$ , причем момент пересечения горизонта соответствует равенству двух членов в (135):  $k^2 = 6c/\eta^4$ . Получаем, что вблизи этой точки должно выполняться условие  $k^2 \eta^2 \sim c/\eta^2 \ll 1$ . Мы находим решение в виде ряда по двум малым параметрам:  $c/\eta^2 \ll 1$  и  $k^2 \eta^2 \ll 1$ . Общее решение имеет вид  $\chi = C_1 \chi_{(1)} + C_2 \chi_{(2)}$ , где

$$\begin{aligned} \chi_{(1)} &= 1 - \frac{c}{\eta^2} - \alpha_1 k^2 \eta^2 + \tilde{\alpha}_1 \frac{c^2}{\eta^4} + \beta_1 k^2 \eta^2 \frac{c}{\eta^2} \ln(\eta) + \gamma_1 k^4 \eta^4 + \dots, \\ \chi_{(2)} &= \eta - \frac{\alpha_2 c}{\eta} - \beta_2 k^2 \eta^3 + \tilde{\alpha}_2 \frac{c^2}{\eta^3} + \tilde{\beta}_2 k^2 c \eta \ln(\eta) + \gamma_2 k^4 \eta^5. \end{aligned} \quad (137)$$

Теперь мы подставляем это разложение в (135) и получаем в первом порядке, что  $\alpha_1 = 1/2$ ,  $\alpha_2 = 3$ ,  $\beta_2 = 1/6$ . Теперь в пределе  $c/\eta^2 \ll k^2 \eta^2 \ll 1$  видно, что  $\chi_{(1)} \rightarrow \cos(k\eta)$ , а  $\chi_{(2)} \rightarrow \sin(k\eta)/k$ . А поскольку мы знаем, что  $\chi^{(+)} \sim e^{ik\eta}$ , решение можно переписать через  $\chi_{(1)}$  и  $\chi_{(2)}$ :

$$\chi^{(+)} = \chi_{(1)} + ik\chi_{(2)}. \quad (138)$$

Теперь, устремив  $k^2 \eta^2$  к нулю и используя  $k^2 \eta^2 \ll c/\eta^2 \ll 1$ , мы должны получить решение (136):

$$\chi^{(+)} = C_1 a_{**} \chi_{(1)} + \frac{C_2}{a_{**}} \chi_{(2)}. \quad (139)$$

Поэтому  $C_1 = 1/a_{**}$ ,  $C_2 = ik a_{**}$  и общее решение (даже после смены классического режима) будет следующим:

$$\varphi^{(+)} = \frac{1}{a_{**}} + ik a_{**} \int_{\eta_x}^{\eta} \frac{d\eta}{a^2(\eta)}. \quad (140)$$

Сделаем проверку: решим уравнение (135) в пределе  $c/\eta^2 \ll 1$  явно.

$$\chi = e^{ik\eta}(1 + f(\eta, k)), \quad f \ll 1. \quad (141)$$

Это выражение подставляем в (135):

$$f'' + 2ikf' + \frac{6c}{\eta^4}(1 + f) = 0, \quad (142)$$

причем в первом порядке пренебрегаем  $f$ :

$$u' + 2iku + \frac{6c}{\eta^4} = 0, \quad (143)$$

здесь  $u = f'$ . Решение этого уравнения будет следующим:

$$f = \int_{-\infty}^{\eta} e^{-2ik\eta'} \int_{-\infty}^{\eta'} -\frac{6c}{\eta'^4} e^{2ik\eta''} d\eta'' d\eta'. \quad (144)$$

Изменяя порядок интегрирования, берем интеграл явно,

$$f = \int_{-\infty}^{\eta} -\frac{6c}{\eta'^4} e^{2ik\eta''} \int_{\eta''}^{\eta} e^{-2ik\eta'} d\eta' d\eta'' = \int_{-\infty}^{\eta} \left( -\frac{6c}{\eta'^4} \right) (e^{-2ik(\eta-\eta')} - 1) d\eta'. \quad (145)$$

Интегрируя три раза по частям, получаем ответ:

$$-\frac{c}{\eta^2} - \frac{2ikc}{\eta} + \int_{-\infty}^{\eta} \frac{c}{\eta'} e^{-2ik(\eta-\eta')} (2ik)^2 d\eta'. \quad (146)$$

Следовательно, в пределе  $k\eta \ll 1$

$$\chi = e^{ik\eta} \left( 1 - \frac{c}{\eta^2} - \frac{2ikc}{\eta} + \dots \right) = 1 - \frac{c}{\eta^2} - \frac{2ikc}{\eta} + ik\eta - ik\frac{c}{\eta} + \dots \quad (147)$$

Мы, действительно, получили такой же ответ, как и в (137). Сшивая теперь два решения вместе

$$\chi = \varphi \cdot a = 1 - \frac{c}{\eta^2} + ik\eta - 3\frac{ikc}{\eta} = \left( C_1 + \frac{C_2}{a_{**}^2} \eta - 2\frac{C_2}{a_{**}^2} \frac{c}{\eta} \right) \left( 1 - \frac{c}{\eta^2} \right) a_{**}, \quad (148)$$

мы определяем в первом порядке коэффициенты  $C_1 = 1$  и  $C_2 = ik$ . Итак,

$$\varphi^{(+)} = \frac{1}{a_{**}} + ik a_{**} \int_{\eta_x}^{\eta} \frac{d\eta}{a^2(\eta)}, \quad \chi^{(+)} = \varphi^{(+)} a(\eta), \quad (149)$$

что подтверждает (140). В результате, с учетом нормировки, решение будет следующим:

$$\varphi^{(+)} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2k}} \left( \frac{1}{a_{**}} + ik a_{**} \int_{\eta_x}^{\eta} \frac{d\eta}{a^2(\eta)} \right). \quad (150)$$

В пределе малых  $\eta$  (т.е. уже во втором режиме) выражение для поля запишется как

$$\varphi^{(+)} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2k}} \left( \frac{1}{a_{**}} + ik a_{**} \left[ \frac{\sqrt[4]{6c/k^2}}{a_{**}^2} - \frac{t_{**} - t_L}{a_{**}^3} + \frac{2c}{a_{**}(t_{**} - t_L)} - \frac{2c}{a_{**}^2 \sqrt[4]{6c/k^2}} - \frac{1}{a_{**}^2} \ln \left( \frac{\eta_* - \eta}{\eta_*} \right) \right] \right).$$

С учетом уравнений (119)–(121) (условий сшивки) и условия малости импульса в первом режиме (134) основной вклад дает первый, константный член:

$$\varphi^{(+)} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2k}} \left( \frac{M_{\text{pl}} \sqrt{\lambda}}{a_*^2} \right)^{1/3}.$$

Получаем, что спектр мощности приближенно равен

$$P_\varphi(k) \approx \frac{1}{2k a_{**}^2} = \frac{1}{2k} \left( \frac{M_{\text{pl}} \sqrt{\lambda}}{a_*^2} \right)^{2/3}, \quad (151)$$

где

$$\langle \varphi(x, t) \varphi(x, t) \rangle = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} P_\varphi(k), \quad \mathcal{P}_\varphi = \frac{k^3 P_\varphi(k)}{2\pi^2}. \quad (152)$$

Теперь вспомним, что мы имеем дело с тензорными модами, и поменяем нормировку:

$$P_h = P_\varphi \frac{32\pi}{M_{\text{pl}}^2} = \frac{16\pi}{k} \left( \frac{\sqrt{\lambda}}{M_{\text{pl}}^2 a_*^2} \right)^{2/3}. \quad (153)$$

Выразим спектр мощности через физические величины. Для этого мы используем приближение мгновенного разогрева (128). Получим для спектра следующее выражение:

$$P_h = \frac{2^{1/3} 8\pi T_{\text{reh}}^{2/3} \lambda^{1/3}}{M_{\text{pl}}^{2/3} a_0^2 T_0^2 k} \left( \frac{\sqrt{g_{*\text{reh}}}}{1,66 g_{*0}} \right)^{2/3}. \quad (154)$$

Заметим, что  $P_h$  не зависит от выбора момента времени  $t_0$ , как и должно быть, поскольку величина  $a_0 T_0 g_{*0}^{1/3}$  сохраняется.

Теперь поставим ограничения на параметры теории исходя пока только из первого режима. Будем использовать условие из первичного нуклеосинтеза: предполагаем, что дополнительное количество релятивистских степеней свободы — это на самом деле гравитоны. Мы применяем известные ограничения на плотность энергии релятивистской материи, а также выражение для энергии через спектр мощности [81, 82]:

$$\rho_\Gamma < \frac{\pi^2}{30} T^4, \quad (155)$$

$$\rho_\Gamma = \int \frac{k^2}{a^2} \langle \varphi^2(k) \rangle d^3k = \int \frac{k^2}{a_0^2} P_\varphi(k) \left( \frac{a_X}{a_0} \right)^2 \left( \frac{g_{*0}}{g_{*X}} \right)^{1/3} d^3k. \quad (156)$$

Здесь индекс 0 отвечает моменту нуклеосинтеза, а индекс  $X$  — моменту, когда соответствующая мода входит под горизонт. Пересечение горизонта, как обычно, означает равенство  $H = k/a$  ( $k$  — импульс моды). Выразим  $a_X$ , используя  $H \sim a^{-2}$  на радиационно-доминированной стадии:

$$a_X = \frac{a_0^2 H_0}{k}. \quad (157)$$

Пределы интегрирования в (156) следующие:  $k_{\text{min}} = a_0 H_0$  и  $k_{\text{max}} = \frac{3}{\sqrt{2\pi}} a_0 \times$

$T_0 \left( \frac{M_{\text{pl}} \lambda}{T_{\text{reh}}} \right)^{1/3} \left( \frac{2g_{*0} \cdot 1,66}{\sqrt{g_{*\text{reh}}}} \right)^{1/3}$ . Последнее выражение — это максимальный импульс моды на первом режиме (применена формула (128) в условии (134)). Используя выражение  $H = T^2/M_{\text{pl}}^*$ , получаем ограничение (с точностью до численного множителя порядка единицы):

$$\lambda < \frac{\overline{g_{*X}}^{1/3}}{g_{*0}^{4/3}}. \quad (158)$$

Правая часть здесь мало отличается от единицы, т. е. параметр  $\lambda$  может принимать почти произвольные значения в области  $\lambda < 1$ .

Другой способ ограничить параметры модели — использовать результаты прямого поиска гравитационных волн (эксперименты LIGO и VIRGO). Для этого найдем величину  $\Omega_{\text{GW,log}}$ , выражающую логарифмический вклад в  $\Omega_{\text{GW}}$ :  $\Omega_{\text{GW}} = \int \frac{dk}{k} \Omega_{\text{GW,log}}$ . Так как плотность энергии падает пропорционально  $1/a^4$ , умножим выражение (155) на  $\left(\frac{a_0}{a_{\text{today}}}\right)^4$  и получим формулу

$$\rho_{\text{today}} = \int \frac{dk}{k} \frac{H_0^2 k^2 T_{\text{today}}^2}{T_0^4 a_{\text{today}}^2} \left(\frac{g_{*\text{today}}}{g_{*0}}\right)^{2/3} \left(\frac{g_{*0}}{g_{*X}}\right)^{1/3} \times \\ \times M_{\text{pl}}^{4/3} T_{\text{reh}}^{2/3} \lambda^{1/3} \frac{1}{2^{5/3}} \left(\frac{\sqrt{g_{*\text{reh}}}}{1,66 g_{*0}}\right)^{2/3}. \quad (159)$$

После упрощений получаем

$$\rho_{\text{today}} = \int \frac{dk}{k} k_{\text{phys}}^2 \frac{T_{\text{today}}^2 T_{\text{reh}}^{2/3} \lambda^{1/3}}{M_{\text{pl}}^{2/3}} \frac{g_{*\text{today}}^{2/3} g_{*\text{reh}}^{1/3}}{g_{*X}^{1/3}} \frac{(1,66)^{4/3}}{2^{5/3}}. \quad (160)$$

С точностью до численных множителей

$$\Omega_{\text{GW,log}} = k_{\text{phys}}^2 \frac{T_{\text{today}}^2 T_{\text{reh}}^{2/3} \lambda^{1/3}}{\rho_c M_{\text{pl}}^{2/3}}. \quad (161)$$

И даже если мы предположим  $T_{\text{reh}}/M_{\text{pl}} \sim 1$  и  $\lambda \sim 1$ , результат будет далеко за границами экспериментальных возможностей:

$$\Omega_{\text{GW,log}} \approx 10^{-27}. \quad (162)$$

Теперь обратимся ко второму режиму. Уравнение для возмущений выглядит следующим образом:

$$\chi'' + \frac{1}{4} \frac{\chi}{(\eta_* - \eta)^2} + k^2 \chi = 0. \quad (163)$$

Его решением является

$$C_1 \sqrt{\eta_* - \eta} J_0((\eta_* - \eta)k) + C_2 \sqrt{\eta_* - \eta} N_0((\eta_* - \eta)k). \quad (164)$$

Соответственно,  $\chi^{(+)}$  — решение с положительно-частотной асимптотикой — будет равно  $C \sqrt{\eta_* - \eta} H_0^{(1)}((\eta_* - \eta)k)$ . Его асимптотика при больших  $-\eta$ , как



обычно, должна иметь вид

$$\chi^{(+)} \rightarrow \frac{1}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2k}} e^{ik\eta}. \quad (165)$$

Это означает, что  $C = 1/4\sqrt{2}\pi$ , а решение можно записать в виде

$$\chi^{(+)} = \frac{1}{4\sqrt{2}\pi} \sqrt{\eta_* - \eta} H_0^{(1)}((\eta_* - \eta)k). \quad (166)$$

После выхода за горизонт у этой моды будет два решения: постоянное и логарифмически растущее. При этом зависимость от  $k$  тоже всего лишь логарифмическая. При  $\eta \rightarrow \eta_*$  мы раскладываем решение следующим образом:

$$\varphi^{(+)} = \frac{\chi^{(+)}}{a} = \frac{\pi + 2i \ln \left( \frac{k(\eta_* - \eta)}{2} \right) + 2i\gamma}{4\sqrt{2}a_*\pi^2}. \quad (167)$$

Найдем теперь выражение для спектра мощности во втором режиме больших импульсов. Из уравнений (167) и (128) мы получаем

$$P_\varphi(k) = \frac{\pi^2 + 4 \left( \gamma + \ln \left( \frac{k(\eta_* - \eta_C)}{2} \right) \right)^2}{4\pi a_*^2}. \quad (168)$$

Вспоминая тензорную нормировку, имеем

$$P_h = \frac{8 \left( \pi^2 + 4 \left( \gamma + \ln \left( \frac{k(\eta_* - \eta_C)}{2} \right) \right)^2 \right)}{M_{\text{pl}}^2 \pi a_*^2}. \quad (169)$$

Выразим спектр через физические величины:

$$P_h = 4 \left( \pi^2 + 4 \left( \gamma + \ln \left( \frac{k(\eta_* - \eta_C)}{2} \right) \right)^2 \right) \frac{T_{\text{reh}}}{M_{\text{pl}} a_0^3 T_0^3} \frac{\sqrt{g_{*\text{reh}}}}{1,66g_{*0}}. \quad (170)$$

Аналогично первому режиму поставим ограничение из первичного нуклеосинтеза. В данном случае пределы интегрирования будут  $k_{\text{min}} = a_0 H_0$  и  $k_{\text{max}} = \frac{T_{\text{reh}} a_0 T_0}{M_{\text{pl}}} 1,66g_{*0}^{1/3} g_{*\text{reh}}^{1/6}$ . Последнее выражение отвечает последней моде, выходящей когда-либо за горизонт (сопоставлены уравнения  $k/a_{\text{reh}} = H_c$  и  $H_c = T_{\text{reh}}^2/M_{\text{pl}}^*$ ). Используя (155) и (157), приходим к выражению

$$T_{\text{reh}} < M_{\text{pl}} \frac{\overline{g_{*X}}^{1/3}}{g_{*0}^{4/3} g_{*\text{reh}}}. \quad (171)$$

Таким образом, мы вновь получаем, что ограничения на параметры модели практически отсутствуют.

Итак, в модели псевдоконформного экипирозиса генерируются гравитационные волны с синим спектром мощности. При этом амплитуды этих гравитационных волн настолько малы, что их рассмотрение не приводит к сколько-нибудь серьезным ограничениям на параметры модели.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итак, мы рассмотрели свойства возмущений в ранней Вселенной. В разд. 1 мы подробно изучили свойства скалярных возмущений в модели с конформным скатыванием, в частности, спектры мощности полей фазы и модуля, статистическую анизотропию возмущений фазы. Кроме того, мы провели сравнение модели с конформным скатыванием и модели генезиса: показали, что при адекватном соотношении динамических переменных возмущения генерируются идентично в этих двух моделях, а их свойства одинаковы. Этот результат обобщается на любые конформно-инвариантные модели.

Кроме того, в обзоре важное место уделено вычислению негауссовости. Для расчета триспектра использована техника Келдыша–Швингера, позволяющая находить одновременные корреляторы операторов в представлении взаимодействия. В этом разделе мы получили триспектр в режиме малого переданного импульса, а также полный ответ без каких-либо приближений.

В разд. 2 мы рассмотрели псевдоконформную модель ранней Вселенной. Мы вывели классические режимы эволюции: медленный режим сжатия, аналогичный модели экипирозиса, и быстрый режим коллапса, а также провели вычисление спектров мощности тензорных возмущений в обоих режимах. На их основе мы поставили ограничения на параметры модели. При этом были использованы ограничения на дополнительные релятивистские степени свободы, получаемые из нуклеосинтеза, а также результаты прямого поиска гравитационных волн.

В заключение автор хотел бы выразить свою искреннюю признательность научному руководителю В. А. Рубакову за внимание к работе, постоянную поддержку и критические замечания, а также М. В. Либанову за плодотворную совместную работу.

Автор благодарен всем сотрудникам и аспирантам отдела теоретической физики Института ядерных исследований РАН за уникальную творческую атмосферу и доброжелательность.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 14-22-00161. Автор выражает благодарность фонду «Династия».

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Komatsu E. et al.* Seven-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Cosmological Interpretation // *Astrophys. J. Suppl.* 2011. V. 192. P. 18; arXiv:1001.4538.
2. *Ade P. A. R. et al. (Planck Collab.)*. Planck 2013 Results. XVI. Cosmological Parameters. arXiv:1303.5076.
3. *Ade P. A. R. et al. (Planck Collab.)*. Planck 2013 Results. XXIV. Constraints on Primordial Non-Gaussianity. arXiv:1303.5084.
4. *Старобинский А. А.* Спектр реликтового гравитационного излучения и начальное состояние Вселенной // *Письма в ЖЭТФ*. 1979. Т. 30. С. 719–723 (*JETP Lett.* 1979. V. 30. P. 682).
5. *Starobinsky A. A.* A New Type of Isotropic Cosmological Models without Singularity // *Phys. Lett. B.* 1980. V. 91. P. 99.
6. *Guth A. H.* The Inflationary Universe: A Possible Solution to the Horizon and Flatness Problems // *Phys. Rev. D.* 1981. V. 23. P. 347.
7. *Linde A. D.* A New Inflationary Universe Scenario: A Possible Solution of the Horizon, Flatness, Homogeneity, Isotropy and Primordial Monopole Problems // *Phys. Lett. B.* 1982. V. 108. P. 389.
8. *Albrecht A., Steinhardt P. J.* Cosmology for Grand Unified Theories with Radiatively Induced Symmetry Breaking // *Phys. Rev. Lett.* 1982. V. 48. P. 1220.
9. *Муханов В. Ф., Чибисов Г. В.* Квантовые флуктуации и «несингулярная» Вселенная // *Письма в ЖЭТФ*. 1981. Т. 33. С. 549–553 (*JETP Lett.* 1981. V. 33. P. 532).
10. *Hawking S. W.* The Development of Irregularities in a Single Bubble Inflationary Universe // *Phys. Lett. B.* 1982. V. 115. P. 295.
11. *Starobinsky A. A.* Dynamics of Phase Transition in the New Inflationary Universe Scenario and Generation of Perturbations // *Ibid.* V. 117. P. 175.
12. *Guth A. H., Pi S. Y.* Fluctuations in the New Inflationary Universe // *Phys. Rev. Lett.* 1982. V. 49. P. 1110.
13. *Bardeen J. M., Steinhardt P. J., Turner M. S.* Spontaneous Creation of Almost Scale-Free Density Perturbations in an Inflationary Universe // *Phys. Rev. D.* 1983. V. 28. P. 679.
14. *Lehners J. L. et al.* Generating Ekpyrotic Curvature Perturbations before the Big Bang // *Phys. Rev. D.* 2007. V. 76. P. 103501; arXiv:hep-th/0702153.
15. *Buchbinder E. I., Khoury J., Ovrut B. A.* New Ekpyrotic Cosmology // *Phys. Rev. D.* 2007. V. 76. P. 123503; arXiv:hep-th/0702154.
16. *Creminelli P., Senatore L.* A Smooth Bouncing Cosmology with Scale Invariant Spectrum // *JCAP.* 2007. V. 0711. P. 010; arXiv:hep-th/0702165.
17. *Notari A., Riotto A.* Isocurvature Perturbations in the Ekpyrotic Universe // *Nucl. Phys. B.* 2002. V. 644. P. 371; arXiv:hep-th/0205019.

18. *Di Marco F., Finelli F., Brandenberger R.* Adiabatic and Isocurvature Perturbations for Multifield Generalized Einstein Models // *Phys. Rev. D.* 2003. V. 67. P. 063512; arXiv:astro-ph/0211276.
19. *Khoury J. et al.* The Ekpyrotic Universe: Colliding Branes and the Origin of the Hot Big Bang // *Phys. Rev. D.* 2001. V. 64. P. 123522; arXiv:hep-th/0103239.
20. *Khoury J. et al.* From Big Crunch to Big Bang // *Phys. Rev. D.* 2002. V. 65. P. 086007; arXiv:hep-th/0108187.
21. *Wands D.* Duality Invariance of Cosmological Perturbation Spectra // *Phys. Rev. D.* 1999. V. 60. P. 023507; arXiv:gr-qc/9809062.
22. *Finelli F., Brandenberger R.* On the Generation of a Scale-Invariant Spectrum of Adiabatic Fluctuations in Cosmological Models with a Contracting Phase // *Phys. Rev. D.* 2002. V. 65. P. 103522; arXiv:hep-th/0112249.
23. *Allen L. E., Wands D.* Cosmological Perturbations through a Simple Bounce // *Phys. Rev. D.* 2004. V. 70. P. 063515; arXiv:astro-ph/0404441.
24. *Brandenberger R. H.* Cosmology of the Very Early Universe // *AIP Conf. Proc.* 2010. P. 1268, 3; arXiv:1003.1745.
25. *Mukohyama S.* Scale-Invariant Cosmological Perturbations from Horava–Lifshitz Gravity without Inflation // *JCAP.* 2009. V. 0906. P. 001; arXiv:0904.2190.
26. *Rubakov V. A.* Harrison–Zeldovich Spectrum from Conformal Invariance // *JCAP.* 2009. V. 0909. P. 030; arXiv:0906.3693.
27. *Creminelli P., Nicolis A., Trincherini E.* Galilean Genesis: An Alternative to Inflation // *JCAP.* 2010. V. 1011. P. 021; arXiv:1007.0027.
28. *Libanov M., Mironov S., Rubakov V.* Properties of Scalar Perturbations Generated by Conformal Scalar Field // *Prog. Theor. Phys. Suppl.* 2011. V. 190. P. 120–134; arXiv:1012.5737.
29. *Libanov M., Mironov S., Rubakov V.* Non-Gaussianity of Scalar Perturbations Generated by Conformal Mechanisms // *Phys. Rev. D.* 2011. V. 84. P. 083502; arXiv:1105.6230.
30. *Libanov M., Rubakov V.* Cosmological Density Perturbations from Conformal Scalar Field: Infrared Properties and Statistical Anisotropy // *JCAP.* 2010. V. 1011. P. 045; arXiv:1007.4949.
31. *Mironov S.* Pseudo-Conformal Universe: Late-Time Contraction and Generation of Tensor Modes // *Phys. Rev. D.* 2013. V. 87. P. 043526; arXiv:1211.0262.
32. *Erickson J. K. et al.* Kasner and Mixmaster Behavior in Universes with Equation of State  $w \geq 1$  // *Phys. Rev. D.* 2004. V. 69. P. 063514; arXiv:hep-th/0312009.
33. *Garfinkle D. et al.* Evolution to a Smooth Universe in an Ekpyrotic Contracting Phase with  $w > 1$  // *Phys. Rev. D.* 2008. V. 78. P. 083537; arXiv:0808.0542.
34. *Lehners J. L.* Ekpyrotic and Cyclic Cosmology // *Phys. Rep.* 2008. V. 465. P. 223; arXiv:0806.1245.

35. *Linde A. D., Mukhanov V. F.* Non-Gaussian Isocurvature Perturbations from Inflation // *Phys. Rev. D.* 1997. V. 56. P. 535; arXiv:astro-ph/9610219.
36. *Enqvist K., Sloth M. S.* Adiabatic CMB Perturbations in Pre-Big-Bang String Cosmology // *Nucl. Phys. B.* 2002. V. 626. P. 395; arXiv:hep-ph/0109214.
37. *Lyth D. H., Wands D.* Generating the Curvature Perturbation without an Inflaton // *Phys. Lett. B.* 2002. V. 524. P. 5; arXiv:hep-ph/0110002.
38. *Moroi T., Takahashi T.* Effects of Cosmological Moduli Fields on Cosmic Microwave Background // *Phys. Lett. B.* 2001. V. 522. P. 215; arXiv:hep-ph/0110096.
39. *Dimopoulos K. et al.* The Curvaton as a Pseudo-Nambu–Goldstone Boson // *JHEP.* 2003. V. 0307. P. 053; arXiv:hep-ph/0304050.
40. *Dvali G., Gruzinov A., Zaldarriaga M.* A New Mechanism for Generating Density Perturbations from Inflation // *Phys. Rev. D.* 2004. V. 69. P. 023505; arXiv:astro-ph/0303591.
41. *Kofman L.* Probing String Theory with Modulated Cosmological Fluctuations. arXiv: astro-ph/0303614.
42. *Dvali G., Gruzinov A., Zaldarriaga M.* Cosmological Perturbations from Inhomogeneous Reheating, Freezeout, and Mass Domination // *Phys. Rev. D.* 2004. V. 69. P. 083505; arXiv:astro-ph/0305548.
43. *Rubakov V., Osipov M.* Scalar Tilt from Broken Conformal Invariance // *Pis'ma ZhETF.* 2011. V. 93. P. 56–59 (JETP Lett. 2011. V. 93. P. 52–55); arXiv:1007.3417.
44. *Ackerman L., Carroll S. M., Wise M. B.* Imprints of a Primordial Preferred Direction on the Microwave Background // *Phys. Rev. D.* 2007. V. 75. P. 083502; arXiv: astro-ph/0701357.
45. *Pullen A. R., Kamionkowski M.* Cosmic Microwave Background Statistics for a Direction-Dependent Primordial Power Spectrum // *Phys. Rev. D.* 2007. V. 76. P. 103529; arXiv:0709.1144.
46. *Watanabe M. A., Kanno S., Soda J.* Inflationary Universe with Anisotropic Hair // *Phys. Rev. Lett.* 2009. V. 102. P. 191302; arXiv:0902.2833.
47. *Watanabe M. A., Kanno S., Soda J.* The Nature of Primordial Fluctuations from Anisotropic Inflation // *Prog. Theor. Phys.* 2010. V. 123. P. 1041; arXiv:1003.0056.
48. *Dulaney T. R., Gresham M. I.* Primordial Power Spectra from Anisotropic Inflation // *Phys. Rev. D.* 2010. V. 81. P. 103532; arXiv:1001.2301.
49. *Gumrukcuoglu A. E., Himmetoglu B., Peloso M.* Scalar–Scalar, Scalar–Tensor, and Tensor–Tensor Correlators from Anisotropic Inflation // *Phys. Rev. D.* 2010. V. 81. P. 063528; arXiv:1001.4088.
50. *Gumrukcuoglu A. E., Contaldi C. R., Peloso M.* CMB Anomalies from Relic Anisotropy. arXiv:astro-ph/0608405.
51. *Gumrukcuoglu A. E., Contaldi C. R., Peloso M.* Inflationary Perturbations in Anisotropic Backgrounds and Their Imprint on the CMB // *JCAP.* 2007. V. 0711. P. 005; arXiv:0707.4179.

52. *Hinterbichler K., Khoury J.* The Pseudo-Conformal Universe: Scale Invariance from Spontaneous Breaking of Conformal Symmetry // JCAP. 2012. V.1204. P.023; arXiv:1106.1428.
53. *Vernizzi F.* Cosmological Perturbations from Varying Masses and Couplings // Phys. Rev. D. 2004. V. 69. P.083526; arXiv:astro-ph/0311167.
54. *Nicolis A., Rattazzi R., Trincherini E.* The Galileon as a Local Modification of Gravity // Phys. Rev. D. 2009. V. 79. P.064036; arXiv:0811.2197.
55. *Creminelli P. et al.* // JCAP. 2013. V. 1304. P.020; arXiv:1212.3329.
56. *Chen X. et al.* Large Primordial Trispectra in General Single Field Inflation // JCAP. 2009. V. 0908. P.008; arXiv:0905.3494.
57. *Okamoto T., Hu W.* The Angular Trispectra of CMB Temperature and Polarization // Phys. Rev. D. 2002. V. 66. P.063008; arXiv:astro-ph/0206155.
58. *Kogo N., Komatsu E.* Angular Trispectrum of CMB Temperature Anisotropy from Primordial Non-Gaussianity with the Full Radiation Transfer Function // Phys. Rev. D. 2006. V. 73. P.083007; arXiv:astro-ph/0602099.
59. *Lyth D.H., Ungarelli C., Wands D.* The Primordial Density Perturbation in the Curvaton Scenario // Phys. Rev. D. 2003. V. 67. P.023503; arXiv:astro-ph/0208055.
60. *Bartolo N., Matarrese S., Riotto A.* On Non-Gaussianity in the Curvaton Scenario // Phys. Rev. D. 2004. V. 69. P.043503; arXiv:hep-ph/0309033.
61. *Lyth D.H., Rodriguez Y.* The Inflationary Prediction for Primordial Non-Gaussianity // Phys. Rev. Lett. 2005. V. 95. P.121302; arXiv:astro-ph/0504045.
62. *Sasaki M., Valiviita J., Wands D.* Non-Gaussianity of the Primordial Perturbation in the Curvaton Model // Phys. Rev. D. 2006. V. 74. P.103003; arXiv:astro-ph/0607627.
63. *Zaldarriaga M.* Non-Gaussianities in Models with a Varying Inflaton Decay Rate // Phys. Rev. D. 2004. V. 69. P.043508; arXiv:astro-ph/0306006.
64. *Suyama T., Yamaguchi M.* Non-Gaussianity in the Modulated Reheating Scenario // Phys. Rev. D. 2008. V. 77. P.023505; arXiv:0709.2545.
65. *Ichikawa K. et al.* Primordial Curvature Fluctuation and Its Non-Gaussianity in Models with Modulated Reheating // Phys. Rev. D. 2008. V. 78. P.063545; arXiv:0807.3988.
66. *Bartolo N. et al.* Large Non-Gaussianities in the Effective Field Theory Approach to Single-Field Inflation: The Trispectrum // JCAP. 2010. V. 1009. P.035; arXiv:1006.5411.
67. *Seery D., Lidsey J.E., Sloth M.S.* The Inflationary Trispectrum // JCAP. 2007. V.0701. P.027; arXiv:astro-ph/0610210.
68. *Chen X., Huang M.X., Shiu G.* The Inflationary Trispectrum for Models with Large Non-Gaussianities // Phys. Rev. D. 2006. V. 74. P.121301; arXiv:hep-th/0610235.
69. *Seery D., Lidsey J.E.* Non-Gaussianity from the Inflationary Trispectrum // JCAP. 2007. V.0701. P.008; arXiv:astro-ph/0611034.

70. *Arroja F., Koyama K.* Non-Gaussianity from the Trispectrum in General Single Field Inflation // *Phys. Rev. D.* 2008. V. 77. P. 083517; arXiv:0802.1167.
71. *Byrnes C. T., Choi K. Y., Hall L. M. H.* Large Non-Gaussianity from Two-Component Hybrid Inflation // *JCAP.* 2009. V. 0902. P. 017; arXiv:0812.0807.
72. *Gao X., Li M., Lin C.* Primordial Non-Gaussianities from the Trispectra in Multiple Field Inflationary Models // *JCAP.* 2009. V. 0911. P. 007; arXiv:0906.1345.
73. *Langlois D., Sorbo L.* Primordial Perturbations and Non-Gaussianities from Modulated Trapping // *JCAP.* 2009. V. 0908. P. 014; arXiv:0906.1813.
74. *Izumi K., Kobayashi T., Mukohyama S.* Non-Gaussianity from Lifshitz Scalar // *JCAP.* 2010. V. 1010. P. 031; arXiv:1008.1406.
75. *Gao X., Lin C.* On the Primordial Trispectrum from Exchanging Scalar Modes in General Multiple Field Inflationary Models // *JCAP.* 2010. V. 1011. P. 035; arXiv:1009.1311.
76. *Senatore L., Zaldarriaga M.* The Effective Field Theory of Multifield Inflation // *JHEP.* 2012. V. 1204. P. 024; arXiv:1009.2093.
77. *Mizuno S., Koyama K.* Trispectrum Estimator in Equilateral Type Non-Gaussian Models // *JCAP.* 2010. V. 1010. P. 002; arXiv:1007.1462.
78. *Creminelli P. et al.* Galilean Symmetry in the Effective Theory of Inflation: New Shapes of Non-Gaussianity // *JCAP.* 2011. V. 1102. P. 006; arXiv:1011.3004.
79. *Seery D., Sloth M. S., Vernizzi F.* Inflationary Trispectrum from Graviton Exchange // *JCAP.* 2009. V. 0903. P. 018; arXiv:0811.3934.
80. *Arroja F. et al.* On the Full Trispectrum in Single Field DBI-Inflation // *Phys. Rev. D.* 2009. V. 80. P. 043527; arXiv:0905.3641.
81. *Gorbunov D., Rubakov V.* Introduction to the Theory of the Early Universe: Hot Big Bang Theory. Hackensack, USA: World Sci., 2011. 473 p.
82. *Gorbunov D., Rubakov V.* Introduction to the Theory of the Early Universe: Cosmological Perturbations and Inflationary Theory. Hackensack, USA: World Sci., 2011. 489 p.