

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КОМПАКТНОГО ИЗОХРОННОГО ЦИКЛОТРОНА

В. Л. Смирнов *

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

ВВЕДЕНИЕ	1739
КОМПЬЮТЕРНАЯ МОДЕЛЬ ЦИКЛОТРОНА	1742
РАСЧЕТ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ СТРУКТУРНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ	1744
ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ	1746
СОЗДАНИЕ МОДЕЛИ ПУЧКА МАКРОЧАСТИЦ	1747
ФОРМИРОВАНИЕ УПРАВЛЯЮЩЕГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ. ФАЗОВАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ	1749
ОРБИТАЛЬНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ. ЦЕНТРИРОВАНИЕ	1754
РАСЧЕТ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ЗАРЯДА ПУЧКА	1757
МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЫВОДНОЙ СИСТЕМЫ	1761
ОЦЕНКА ПОТЕРЬ ЧАСТИЦ НА ПОВЕРХНОСТЯХ СТРУКТУРНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ	1764
ОЦЕНКА ПОТЕРЬ ЧАСТИЦ НА ОСТАТОЧНОМ ГАЗЕ	1766
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	1767
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	1768

*E-mail: vsmirnov@jinr.ru

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КОМПАКТНОГО ИЗОХРОННОГО ЦИКЛОТРОНА

*В. Л. Смирнов**

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Приведено описание методов компьютерного моделирования компактного изохронного циклотрона. Рассмотрены определяющие этапы анализа систем ускорительной установки. Описанные методы базируются на теоретических основах циклотронной физики и затрагивают наиболее существенные моменты создания физического проекта компактного циклотрона. Главное внимание уделено анализу динамики частиц, формированию магнитного поля, устойчивости движения и реалистичной оценке интенсивности получаемого пучка частиц. В статье описана последовательность создания компьютерной модели ускорительной установки, аналитические способы оценки параметров ускорителя и основные приемы численного анализа динамики частиц.

The computer modeling methods of a compact isochronous cyclotron are described. The main analysis stages of accelerating setup systems are considered. The described methods are based on theoretical fundamentals of cyclotron physics and mention highlights of creation of the physical project of a compact cyclotron. The main attention is paid to the analysis of the beam dynamics, formation of a magnetic field, stability of the movement and a realistic assessment of intensity of the received bunch of particles. The sequence of creation of the accelerator computer model, analytical ways of an assessment of the accelerator parameters and the main techniques of the numerical analysis of dynamics of the particles are described.

PACS: 29.20.dg

ВВЕДЕНИЕ

Невозможно представить себе современную науку без широкого применения математического моделирования. Сущность этой методологии состоит в замене исходного объекта его «образом» — математической моделью — и в дальнейшем изучении модели с помощью реализуемых на компьютерах вычислительно-логических алгоритмов [1]. Этот метод познания, конструирования, проектирования сочетает в себе многие достоинства как теории,

*E-mail: vsmirnov@jinr.ru

так и эксперимента. Работа не с самим объектом, а с его моделью дает возможность безболезненно, относительно быстро и без существенных затрат исследовать его свойства и поведение в любых мыслимых ситуациях (преимущества теории). В то же время вычислительные эксперименты с моделями объектов позволяют, опираясь на мощь современных вычислительных методов и технических инструментов информатики, подробно и глубоко изучать объекты в достаточной полноте, недоступной чисто теоретическим подходам (преимущества эксперимента).

Сама постановка вопроса о математическом моделировании какого-либо объекта порождает четкий план действий. Его можно условно разбить на три этапа: модель–алгоритм–программа. На первом этапе строится «эквивалент» объекта, отражающий в математической форме важнейшие его свойства — законы, которым он подчиняется, связи, присущие составляющим его частям.

Второй этап — выбор (или разработка) алгоритма для реализации модели на компьютере. Модель представляется в форме, удобной для применения численных методов, определяется последовательность вычислительных и логических операций, которые нужно произвести, чтобы найти искомые величины с заданной точностью. Вычислительные алгоритмы должны не искажать основные свойства модели и, следовательно, исходного объекта, быть экономичными и адаптирующимися к особенностям решаемых задач и используемых компьютеров.

На третьем этапе создаются программы, «переводящие» модель и алгоритм на доступный компьютеру язык. К ним также предъявляются требования экономичности и адаптивности. Их можно назвать «электронным» эквивалентом изучаемого объекта, уже пригодным для непосредственного испытания на «экспериментальной установке» — компьютере.

Создав триаду модель–алгоритм–программа, исследователь получает в руки универсальный, гибкий и недорогой инструмент, который вначале отлаживается, тестируется в «пробных» вычислительных экспериментах. После того как адекватность (достаточное соответствие) триады исходному объекту удостоверена, с моделью проводятся разнообразные и подробные «опыты», дающие все требуемые качественные и количественные свойства и характеристики объекта. Процесс моделирования сопровождается улучшением и уточнением (по мере необходимости) всех звеньев триады.

Ускорительная физика как наука, имеющая дело со сложными и дорогостоящими установками, не может обойтись без компьютерного моделирования, которое на сегодняшний день прочно заняло свое место в ней на этапах проектирования и модернизации ускорительных установок. Численное моделирование является надежным, эффективным, а часто и единственным способом анализа и оптимизации различных систем ускорителей.

Последние десятилетия характеризуются активным созданием, развитием и использованием ускорителей, в большинстве своем компактных циклотронов [2]. Под классификацией «компактный» здесь понимается общепринятое определение циклотронов со сплошным полюсом. Основные области применения таких циклотронов — исследования по ядерной физике, генерация и исследование радиоактивных ионов, прикладные применения, главным образом в медицине и для детектирования взрывчатых веществ, использование циклотронов в качестве инжекторов в другие ускорители. Компактность, простота в обслуживании и сравнительно низкая стоимость явились факторами, приведшими ко всеобщей востребованности циклотронов. По всему миру существуют центры, занимающиеся разработкой, модернизацией и эксплуатацией циклотронов и исследованиями на них.

Независимо от цели применения циклотрона, будь то ядерная физика либо прикладные исследования, ускорительная установка представляет собой сложную систему. Стоимость создания компактного циклотрона на современном уровне оценивается десятками миллионов долларов, и недопустимы ошибки на этапе проектирования ускорителя.

Несомненно, важным и актуальным является создание максимально приближенных к реальности компьютерных моделей установок и моделирование циклотрона как целого в комплексе с системами инжекции и вывода пучка. При расчетах динамики пучка необходимо учитывать реалистичные трехмерные электромагнитные поля структурных элементов установки и влияние собственного поля частиц. Для того чтобы иметь качественный пучок с достаточной интенсивностью, в анализ динамики частиц необходимо включать расчеты центрирования ускоренных орбит, вычисление частот бетатронных колебаний и учет потерь частиц на структурных элементах установки. Существуют как коммерческие, так и авторские программные комплексы, предназначенные для моделирования различных систем компактного циклотрона: линии инжекции, центральной зоны, зоны ускорения и вывода. Эти программы базируются на физических основах движения заряженной частицы в электромагнитных полях и имеют различные подходы к описанию такого движения, начиная с матричного и заканчивая численным интегрированием уравнений движения. Работа ведется как с электромагнитными полями, заданными аналитически, так и с трехмерными картами полей, рассчитанными в сторонних программах. Все существующие и проектируемые ускорительные установки имеют «виртуальные» модели, с помощью которых с определенной степенью реалистичности можно провести их моделирование. Программы, подготовленные для моделирования динамики пучка [3–6], могут быть как написаны на универсальных языках программирования, так и базироваться на известных программных пакетах, таких как MatLaB, Mathematica, Borland. Хотя в большинстве своем имеющиеся программы созданы для конкретных ускорителей, тем не менее методы моделирования, являющиеся их

основой, носят общий характер. Данная работа содержит описание методов моделирования, применимых к компактному циклотрону [7–9], как на этапе проектирования ускорителя, так и при модернизации уже существующей установки.

1. КОМПЬЮТЕРНАЯ МОДЕЛЬ ЦИКЛОТРОНА

Для того чтобы иметь возможность детально анализировать динамику частиц в циклотроне, необходимо создать реалистичную компьютерную модель ускорительной установки, которая описывала бы ее основные характеристики. Такая модель должна, по сути, повторять в цифровом коде реально существующий ускоритель и включать в себя следующие элементы:

- электромагнитные поля структурных элементов установки;
- параметры режима ускорения;
- модель пучка частиц как физического объекта с набором соответствующих характеристик;
- математическое обеспечение, имитирующее движение ускоряемых частиц в установке;
- программное обеспечение для моделирования реальных систем диагностики пучка, имеющихся на ускорителе;
- геометрическую структуру установки для учета потерь частиц.

Как правило, ускорительная установка содержит помимо основного магнита циклотрона и системы ускоряющих дуантов следующие элементы формирования и управления пучком:

- электростатические и магнитные квадруполи, применяемые для фокусировки пучка в линии инжекции и при выводе;
- электростатические дефлекторы (в том числе сферические) для поворота и фокусировки пучка при его инжекции в циклотрон;
- высокочастотные банчеры, расположенные в линии инжекции и группирующие ионы пучка в продольном направлении для получения большей плотности частиц в рабочем диапазоне фаз волны высокочастотного напряжения на дуантах (далее фаз ВЧ);
- соленоиды, используемые для управления поперечными размерами пучка в линии инжекции, а также для его согласования с центральной областью циклотрона;
- спиральный электростатический инфлектор, необходимый для перевода пучка из плоскости аксиальной линии инжекции в медианную плоскость циклотрона;
- фазовые щели, расположенные в центральной зоне ускорителя в области первых оборотов и служащие преградой для ионов, которые в результате

недобора энергии после прохождения первых оборотов находятся в «хвостах» распределений частиц по фазам ускоряющего ВЧ-поля;

— корректирующие токовые обмотки, необходимые для формирования изохронного магнитного поля;

— гармонические обмотки, расположенные, как правило, вблизи центра и конечного радиуса, нужные для введения дополнительных гармоник к основному магнитному полю, необходимых при выводе пучка и коррекции низших гармоник ошибок магнитного поля;

— элементы для корректировки отрицательного градиента основного магнитного поля в области вывода частиц (далее градиент-корректоры);

— электростатические дефлекторы и магнитные каналы, составляющие систему вывода ионов из циклотрона.

Все имеющиеся на ускорительной установке структурные элементы должны быть включены в состав ее компьютерной модели. Каждый элемент представляется трехмерной (в некоторых случаях двумерной) картой поля, полученной расчетным путем или из измерений [10]. В случаях полей, имеющих различного рода симметрии, необходимо для экономии машинной памяти импортировать только периодическую часть карты поля. Например, в случае соленоида достаточно иметь двумерную карту магнитного поля в координатах r, z , где ось соленоида совпадает с осью z , r — координата вдоль радиуса соленоида. Если доступно лишь распределение поля основного магнита в медианной плоскости, то с помощью соответствующих процедур можно восстановить трехмерную карту поля магнита [11].

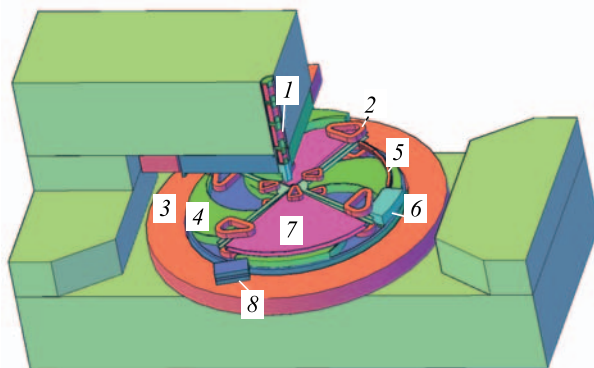


Рис. 1. Компьютерная модель компактного циклотрона: 1 — соленоиды; 2 — гармонические катушки; 3 — основная обмотка; 4 — сектор, формирующий магнитное поле; 5 — электростатический дефлектор; 6 — магнитный канал; 7 — ускоряющие дуанты; 8 — корректор спада магнитного поля

Для учета потерь частиц на поверхностях структурного элемента необходимо ввести в программу расчета описание его геометрии либо аналитическими поверхностями, либо путем экспорта соответствующей геометрии из программы для построения трехмерных тел.

Пример компьютерной модели компактного циклотрона показан на рис. 1.

Важная особенность построенной модели — возможность регулировки параметров режима ускорения: тока в обмотках, амплитуды напряжения на электрических элементах и т. д. Должна быть также возможность регулировки положения структурных элементов, если это предусмотрено в реальной установке.

Следующим элементом компьютерной модели является сам объект моделирования — пучок ионов, который заменяется распределением макрочастиц, описывающим его физические характеристики: эмиттанс, скорость, заряд, интенсивность и т. д. Естественно, важно наличие программных комплексов с соответствующим математическим обеспечением, которые могли бы промоделировать динамику пучка в суперпозиции электромагнитных полей с учетом таких особенностей, как, например, пространственный заряд пучка. Возможность моделирования систем диагностики, таких как фазовые пробники и измерительные пробники тока пучка, позволяет провести калибровку созданной модели и удостовериться в ее соответствии реально существующей установке. Такая процедура должна быть проведена для того, чтобы иметь уверенность в достоверности данных, получаемых расчетным путем.

Таким образом, при наличии описанных выше элементов на ЭВМ воссоздается «копия» реально существующей ускорительной установки с теми отличиями, что управление параметрами режима ускорения осуществляется не поворотами «ручек» на пульте, а нажатием клавиш компьютерной мыши. Существенно при этом то, что расчеты ведутся в идеализированной системе, свободной от неточностей сборки, шумов и других неопределенностей. Однако созданная максимально реалистичная компьютерная модель является надежным инструментом при проектировании ускорителя.

Программное обеспечение, являющееся неотъемлемой частью компьютерной модели и отвечающее за имитацию физических процессов, происходящих в ускорителе, должно быть удобным в использовании, гибким с оптимальным использованием ресурсов ПК и наглядным представлением получаемых результатов [3].

2. РАСЧЕТ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ СТРУКТУРНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Для достижения максимальной реалистичности проводимых расчетов динамики частиц они должны быть проведены с использованием трехмерных распределений электрических и магнитных полей структурных элементов

ускорительной установки. Возможно использование измеренных карт полей, если таковые имеются. Однако самый вероятный и распространенный вариант предусматривает проведение расчета электромагнитных полей с помощью одной из множества имеющихся для этих целей профессиональных программ, таких как Opera-Tosca [12], Mermaid [13], КОМРОТ [14], Poisson-Superfish [15], которые позволяют производить расчет электромагнитных полей в статическом приближении. При расчете высокочастотного поля ускоряющих дуантов нужно принять во внимание тот факт, что амплитуда напряжения в ускоряющем зазоре может иметь определенную зависимость от радиуса, учет которой требуется в некоторых случаях при моделировании зоны ускорения и вывода. Для моделирования высокочастотных ускоряющих систем можно воспользоваться одной из специализированных программ, таких как CST Studio Suite [16].

Первым этапом работы при расчете электромагнитных полей с помощью названных программ является разработка трехмерной механической модели системы. Эта задача решается за счет детального описания геометрической формы элементов конструкции. Следующий этап заключается в выборе шага сетки, отдаленности границ области для выставления соответствующих граничных условий, разбиении основной области на подобласти, где наиболее часто будут вноситься изменения в геометрию задачи, и тому подобные операции. При разбиении области расчета следует уменьшать шаг сетки в местах со сложной конфигурацией и малыми размерами геометрической структуры. Так, при расчете магнитного поля основного магнита следует особое внимание уделять области центральной кольцевой шиммы. При создании модели ускоряющих дуантов целесообразно создать две отдельные модели для центральной зоны, содержащей наконечники, и для зоны ускорения. В первом случае наиболее мелкий шаг конечноэлементной сетки задается в области расположения первых ускоряющих зазоров. Если ведется расчет центральной области, содержащий внутренний источник ионов, то отдельно выделяется область между щелью источника и вытягивающим электродом. Следует обратить внимание на то, что внешняя поверхность плазмы, заполняющей источник ионов, находится под потенциалом источника, поэтому при создании модели источника в программе расчета электрического поля следует ввести «мнимое» заполнение внутренней его части с заданным потенциалом источника [17]. В модели для расчета электрического поля в зоне ускорения целесообразно увеличить количество элементов в области ускоряющих зазоров и уменьшить их количество внутри дуанта. При расчете магнитоэлектростатических задач использование линейных и квадратичных элементов для расчета поля дает отличные друг от друга результаты. При использовании квадратичных элементов полученное поле является более сглаженным, хотя при этом время, требуемое на один расчет, значительно увеличивается. На сегодняшний день расчеты электромагнитных полей на ЭВМ достигли такой точности, что за-

частую не требуется сооружение натуральных моделей. При этом с большой точностью можно считать результаты анализа динамики пучка, проведенного в расчетных полях, достоверными.

3. ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ

Так как в состав ускорительной установки помимо самого циклотрона входят аксиальная линия инжекции и линия транспортировки выведенного пучка, то целесообразно для универсальности проводимых расчетов интегрировать уравнения движения в декартовой системе координат. Движение частицы с зарядом e в электрическом поле с напряженностью \mathbf{E} и наложенном на него магнитном поле с индукцией \mathbf{B} описывается уравнением Ньютона–Лоренца [18]

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = e(\mathbf{E} + [\mathbf{v} \times \mathbf{B}]), \quad (1)$$

в котором правая часть представляет собой силу Лоренца. Здесь m — масса; e — заряд и \mathbf{v} — скорость частицы.

Дифференцируя уравнение (1) и принимая во внимание, что частица релятивистская, получаем уравнения движения:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \frac{e}{m} \sqrt{1 - \beta^2} \left[+ \left(1 - \frac{v_x^2}{c^2} \right) Fx - \frac{v_x v_y}{c^2} Fy - \frac{v_x v_z}{c^2} Fz \right], \\ \ddot{y} &= \frac{e}{m} \sqrt{1 - \beta^2} \left[- \frac{v_x v_y}{c^2} Fx + \left(1 - \frac{v_y^2}{c^2} \right) Fy - \frac{v_y v_z}{c^2} Fz \right], \\ \ddot{z} &= \frac{e}{m} \sqrt{1 - \beta^2} \left[- \frac{v_x v_z}{c^2} Fx - \frac{v_y v_z}{c^2} Fy + \left(1 - \frac{v_z^2}{c^2} \right) Fz \right], \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} Fx &= v_y B_z - v_z B_y + E_x, \\ Fy &= v_z B_x - v_x B_z + E_y, \\ Fz &= v_x B_y - v_y B_x + E_z. \end{aligned}$$

Здесь $v_x, v_y, v_z, E_x, E_y, E_z, B_x, B_y, B_z$ — компоненты скорости частицы, напряженности электрического и индукции магнитного полей в декартовой системе координат.

Эти уравнения, описывающие движение частицы, справедливы в любом электромагнитном поле. При их выводе не было сделано никаких упрощающих предположений. Программа анализа динамики заряженной частицы может быть основана на этих уравнениях. Методом интегрирования может быть выбран метод Рунге–Кутты 4-го порядка точности. В случае использования

модельных частиц одного типа (с одинаковым отношением заряда к массе) можно выбрать время в качестве независимой переменной в методе интегрирования. Если же пучок состоит из ионов разного типа, то для удержания в процессе трассировки таких частиц вместе, что необходимо для учета сил пространственного заряда пучка, в качестве независимой переменной интегрирования стоит выбрать расстояние.

4. СОЗДАНИЕ МОДЕЛИ ПУЧКА МАКРОЧАСТИЦ

Для оценки интенсивности пучка, получаемой на ускорительной установке, одночастичного приближения недостаточно и требуется расчет трассировки набора макрочастиц. Вопрос генерации пучка модельных ионов с характеристиками, наиболее приближенными к реальным, требует отдельного рассмотрения. При использовании внешнего источника ионов обычно имеются данные об измерениях поперечных эмиттансов инжектируемого пучка и энергии ионов. В таком случае достаточно лишь выбрать способ заполнения 6-мерного объема пучка, заданного величиной эмиттансов на его проекциях. Помимо равномерного заполнения распространены две основные модели распределения пучка: гауссово и распределение Капчинского–Владимирского (КВ). В первом случае заполнение объема пучка ведется отдельно в каждой из двумерных плоскостей — проекциях 6-мерного пространства с плотностью

$$I(x, x') = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_{x'}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{\sigma_x^2} + \frac{x'^2}{\sigma_{x'}^2} \right) \right],$$

где σ_x и $\sigma_{x'}$ — стандартные отклонения распределения в x и x' направлениях.

Распределение КВ имеет постоянную зависимость плотности частиц внутри фазового эллипса и задается следующим образом:

$$I(x, x') = \begin{cases} \frac{1}{\pi\varepsilon}, & \text{если } \gamma x^2 + 2\alpha x x' + \beta x'^2 \leq \varepsilon, \\ 0 & \text{в других случаях,} \end{cases}$$

где α , β , γ , ε — твист-параметры эллипса.

Из анализа плотностей следует, что в четырех стандартных среднеквадратичных отклонениях содержится 100 % пучка, распределенного по закону КВ, и 86 % частиц для случая гауссова распределения. При генерации продольного распределения в случае отсутствия зависимости продольной плотности пучка от времени (DC beam) достаточно создать пучок размером в 360° ВЧ и выставить граничные условия равенства нулю сил пространственного заряда пучка в продольном направлении. Если имеется зависимость потока движущихся частиц от времени (CW beam), то для более точного расчета

сил собственного поля пучка можно сгенерировать пучок длиной в три банча ($3 \times 360^\circ$ ВЧ) и использовать такой пучок при трассировке, а для анализа выбирать внутренний банч.

При создании начального распределения пучка, инжектируемого из внутреннего источника, следует учитывать зависимость вытягиваемой интенсивности от амплитуды вытягивающего напряжения, которая подчиняется закону Чайлда–Ленгмюра [19]

$$I = \text{const} \sqrt{\frac{q}{m}} \frac{\cos^{3/2}(\theta)}{d^2},$$

где q — заряд иона; m — масса; d — эффективное расстояние между щелью источника и вытягивающим электродом, которое учитывает и электрическое поле, распространяющееся внутрь аксиального зазора электрода.

Таким образом, модельное начальное распределение пучка на щели внутреннего источника может выглядеть следующим образом (рис. 2):

— области внутри заданных эллипсов на фазовых плоскостях (R, Pr) , (Z, Pz) и в конфигурационном пространстве (R, Z) заполнены с равномерным распределением;

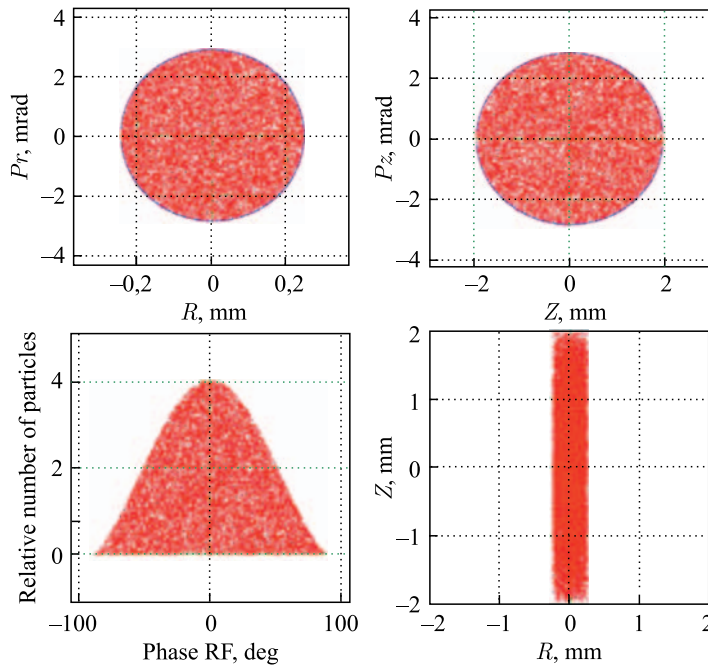


Рис. 2. Начальное распределение частиц на щели внутреннего источника

— в продольном направлении задана зависимость количества модельных частиц от фазы вытягиваемого ВЧ-напряжения;

— частицы пучка начинают движение в зависимости от своей начальной фазы ВЧ.

При анализе распределения пучка в различных точках ускорителя для вычисления качественных характеристик можно использовать процедуру восстановления фазового эллипса по известному распределению частиц [20], следуя которой эмиттанс пучка можно вычислить по формуле

$$\varepsilon = \sqrt{\langle x^2 \rangle \cdot \langle x'^2 \rangle - \langle x \cdot x' \rangle^2},$$

где x и x' — координаты частицы в фазовой плоскости (x, x') .

Тwiss-параметры пучка вычисляются из эмиттанса:

$$\alpha = -\frac{\langle x \cdot x' \rangle}{\varepsilon}, \quad \beta = \frac{\langle x^2 \rangle}{\varepsilon}, \quad \gamma = \frac{\langle x'^2 \rangle}{\varepsilon}.$$

5. ФОРМИРОВАНИЕ УПРАВЛЯЮЩЕГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ. ФАЗОВАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ

Процесс проектирования циклотрона целесообразно начать с выбора уровня основного магнитного поля. Для современных ускорителей, как правило, исходят из требования минимизации размеров и массы ускорителя. Поэтому при выборе уровня и формы магнитного поля стараются максимально приблизиться либо к границе технических возможностей, либо к физическому пределу устойчивости движения частиц. Так, при создании «теплых» (работающих при комнатной температуре) машин поле выбирается максимально высоким с точки зрения достижимой плотности тока в токопроводе. В сверхпроводящих ускорителях доминируют другого рода ограничители. На первое место здесь при работе в высоких магнитных полях ($> 3\text{--}4$ Тл) выходит ограничение, связанное с трудностью создания ускорителя с растущим по радиусу магнитным полем и обеспечения при этом устойчивого аксиального движения частиц. Такое ограничение связано с тем, что величина магнитного флаттера оказывается недостаточна для компенсации индекса роста поля. Частично проблему удастся решить, используя для создания пространственной вариации магнитного поля спиральные шиммы с большим углом спирали (больше 60°). Если отбросить эффекты, связанные с нелинейностью магнитного поля, то практически реализуемыми оказываются компактные изохронные циклотроны с уровнем поля в центре до 4,5 Тл при использовании спиральных шимм до 75° [21]. Как правило, в качестве зависимости угла спирали от радиуса выбирается спираль Архимеда, при использовании которой угол спирали растет от центра к конечному радиусу. Существуют, однако, случаи, когда критическим фактором становится малость либо отсутствие аксиальной фокусировки на начальных радиусах.

В таких случаях целесообразно использовать логарифмическую зависимость угла спирали от радиуса.

При выборе периодичности магнитной структуры руководствуются правилом, при котором величина магнитного флаттера падает с ростом числа периодов структуры. Так, при небольших конечных энергиях частиц при использовании высокого магнитного поля чаще используется формирование поля с помощью трех секторных шимм. При создании циклотрона на большие энергии на первый план выходят ограничения, связанные с пересечением опасных резонансов — в основном структурного резонанса $2Qr = N$, где N — число периода структуры. При этом увеличение номера периода позволяет продвинуться в область больших энергий.

Использование внешней аксиальной инжекции пучка — дополнительное ограничение, накладываемое на верхнюю границу величины магнитного поля в центре, которое связано с трудностью инжекции частиц в ускоритель с помощью спирального электростатического инфлектора. В случае наличия слишком высокого магнитного поля не представляется возможным совершить первый оборот в магнитном поле, не потеряв полностью пучок. При использовании экзотических способов инжекции пучка с помощью спирального инфлектора [22] доступными становятся поля в 4–4,5 Тл.

На начальном этапе выбора магнитной структуры целесообразно использовать методику, основанную на аналитических выражениях и изложенную в работе [23], где показано, что амплитуда вариации магнитного поля системы спиральных шимм достаточно хорошо описывается выражением, полученным из рассмотрения поля от бесконечной системы прямолинейных шимм:

$$H_{mN}(r) = \frac{8M}{m} \sin\left(mN\frac{\alpha}{2}\right) \left[\exp\left(-m\frac{h_1}{\lambda_{\text{eff}}(r)}\right) - \exp\left(-m\frac{h_2}{\lambda_{\text{eff}}(r)}\right) \right], \quad (2)$$

где $4\pi M$ — намагниченность шимм в состоянии полного насыщения; N — периодичность магнитной структуры; h_1 и h_2 — расстояния до поверхностей, ограничивающих шиммы в аксиальном направлении; α — азимутальная протяженность спиральной шиммы (угол боковыми образующими);

$\lambda_{\text{eff}}(r) = \frac{\lambda(r)}{\sqrt{1 + \left(\frac{N\lambda(r)}{r}\right)^2}}$, $\lambda(r) = \frac{r}{N \operatorname{tg}(\xi)}$; ξ — угол между касательной к

спирали и радиусом; $m = 1, 2, 3, \dots$

Зная амплитуду вариации магнитного поля, полученную в (2), можно вычислить глубину вариации магнитного поля (флаттер):

$$F(r) = \sum_m \frac{1}{2} \left(\frac{H_{mN}}{B(r)} \right)^2,$$

где $B(r)$ — среднее магнитное поле.

Форма магнитного поля выбирается такой, чтобы была обеспечена устойчивость фазового движения частиц. В циклотронах, предназначенных для ускорения ионов до энергии больше 16–20 МэВ/нуклон, для обеспечения качественного пучка на конечном радиусе целесообразно формировать среднее магнитное поле с отклонением от изохронного поля не более $(5-10) \cdot 10^{-4}$. Формирование магнитного поля ведется либо за счет изменения азимутального размера шимм, либо с помощью изменения аксиального зазора между шиммами или полюсами. В циклотронах с несколькими режимами ускорения для формирования изохронного поля предусмотрены корректирующие обмотки. Такие обмотки могут быть расположены в долинах магнита, над секторами, между секторами и полюсными наконечниками в виде колец определенного радиуса. Иногда обмотки устанавливаются вокруг секторов. В проектах циклотронов для ускорения только одного типа ионов на фиксированную энергию обычно не предусматриваются корректирующие обмотки. При расчете динамики частиц возникает необходимость в изменении режима ускорения с перестройкой ведущего магнитного поля. Задание необходимого магнитного поля ведется с помощью токов основной и корректирующих обмоток. Поэтому при построении компьютерной модели циклотрона необходимо вычислять наряду с картой поля «железа» (имеется в виду расчет магнитного поля с включенной только основной обмоткой) и вклады корректирующих обмоток для различных уровней основного магнитного поля. После того как распределения полей получены, проводится сравнение рассчитанных данных с измеренными, если таковые имеются. Неполное соответствие компьютерной модели циклотрона реально существующей установке, недостаточность данных, неопределенность в кривых намагниченности элементов обычно приводят к тому, что существует несоответствие расчетных полей измеренным. Для того чтобы минимизировать эту разницу, вводятся так называемые калибровочные коэффициенты к уровню поля, создаваемого обмотками, которые, как правило, невелики и составляют $\sim 1-2\%$ от величины тока.

После того как калибровка уровня полей от обмоток проведена и получено достаточное соответствие между измеренными и расчетными картами полей, для моделирования конкретного режима ускорения можно использовать значения величин токов, взятых непосредственно из эксперимента. В таком случае расчет динамики частиц ведется в магнитном поле, соответствующем полю в эксперименте с достаточно хорошей точностью.

Показателем изохронности магнитного поля может служить зависимость фазы ВЧ при прохождении частицами ускоряющих зазоров (либо центральной линии ускоряющих дуантов) от радиуса. Если провести сравнение расчетной фазы, полученной при трассировке частиц в исследуемом магнитном поле, с показаниями фазовых пробников, которые, как правило, присутствуют на всех циклотронах, то можно убедиться в соответствии созданной модели реальной установке. На практике невозможно добиться точного совпадения

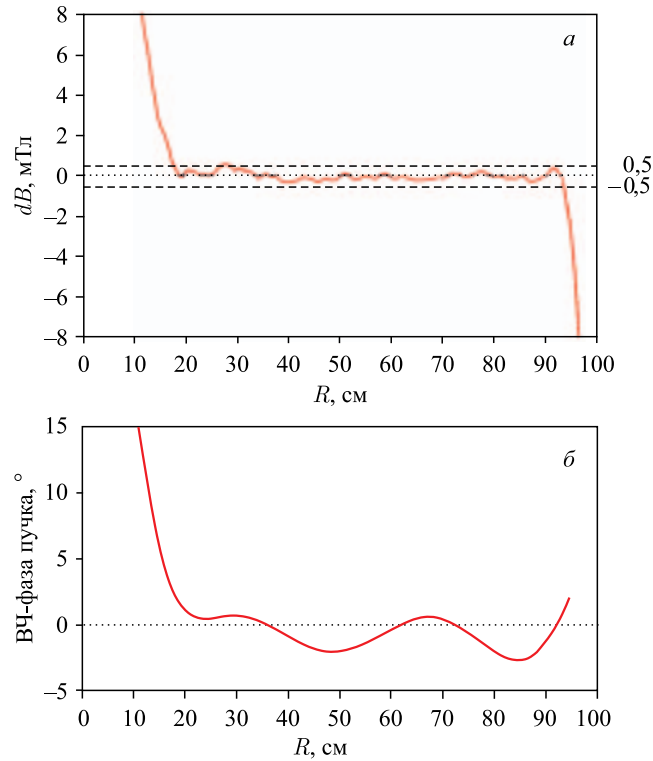


Рис. 3. Отклонение среднего поля от изохронного (*а*) и фазовое движение центральной частицы пучка в таком поле (*б*)

реального поля с изохронным. Поэтому имеет место отклонение фаз от заданной величины. Так, например, если для типичного «теплого» протонного компактного циклотрона на энергию 30 МэВ [8] поле сформировано таким образом, что отклонение от изохронного на всех радиусах не более 5 Гс, то это соответствует отклонению ВЧ-фазы пучка не более чем на 5° (рис. 3).

Отсутствие флаттера в центральной части циклотрона компенсируется созданием в этой части всплеска магнитного поля, что приводит к двум основным положительным эффектам. Во-первых, среднее магнитное поле становится спадающим по радиусу, что приводит к устойчивому аксиальному движению частиц. Во-вторых, магнитное поле выше изохронного приводит к смещению фазы пучка в отрицательную сторону. Таким образом, частицы «проходят» первые ускоряющие зазоры при положительной ВЧ-фазе поля, затем смещаются на ноль, что приводит к дополнительной фокусировке частиц в аксиальном направлении на первых оборотах высокочастотным элек-

трическим полем. В зависимости от конфигурации центральной области циклотрона уровень магнитного поля в центре поднимают на величину от нескольких десятков до нескольких сотен гаусс.

В случае проектирования изохронного циклотрона на небольшую энергию возможно формирование квазиизохронного или даже спадающего по радиусу среднего магнитного поля. Так как конечная энергия мала, то ВЧ-фаза пучка не успевает уйти за пределы области ускорения. В первую очередь максимальная энергия, которую можно получить в таком ускорителе, зависит от набора энергии частицей за оборот. Так, при наличии одного ускоряющего дуанта и напряжении в 70 кВ можно ускорить протоны в спадающем магнитном поле до энергии 9 МэВ [24]. При ускорении в сильных магнитных полях, где существует недостаток величины вариации магнитного поля, для аксиальной фокусировки частиц возможно создание растущего среднего магнитного поля с коэффициентом роста поля меньше изохронного. Величина роста поля выбирается такой, чтобы обеспечить аксиальную фокусировку и не допустить при этом уход ВЧ-фазы пучка за пределы области ускорения.

ВЧ-фазу частицы в процессе ускорения можно рассчитать аналитически, используя следующее выражение [27]:

$$\sin \varphi(E) = \sin \varphi_i + \frac{2\pi h}{qV} \int \left(\frac{\omega_i}{\omega} - 1 \right) dE,$$

где φ_i — стартовая фаза; h — гармоника ускоряющего поля; q — заряд частицы; V — амплитуда ускоряющего напряжения; ω — частота обращения частицы в магнитном поле.

Для вычисления частоты обращения частицы можно в линейном приближении вычислить средний радиус равновесной орбиты [25]:

$$r = R - \frac{\varepsilon^2 R}{2(N^2 - 1 - n)(1 + n)} \left(2 - \frac{N^2}{2(N^2 - 1 - n)} + n + R \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right),$$

где R — энергетический радиус частицы; $n = -\frac{dB}{dR} \frac{R}{B}$ — индекс роста магнитного поля; ε — глубина вариации магнитного поля, т.е. отношение амплитуды N -й гармоники магнитного поля к среднему значению поля на заданном радиусе.

Период обращения частицы на замкнутой орбите определяется выражением

$$T = 2\pi r + \frac{R_a}{N} [\sin(N(2\pi - \text{tg}(\alpha))) + \sin(N \text{tg}(\alpha))],$$

$$R_a(r) = \frac{r\varepsilon}{N^2 - 1 - n}.$$

Здесь α — магнитная спиральность, которая отличается от геометрической спиральности, определяемой секторными шиммами и равной углу между радиусом-вектором и касательной к спирали. Искомая величина может быть вычислена из гармонического анализа распределения магнитного поля.

6. ОРБИТАЛЬНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ. ЦЕНТРИРОВАНИЕ

Частоты бетатронных колебаний можно рассчитать, используя приближенные аналитические выражения [26]

$$Q_z = \sqrt{n + F(1 + 2 \operatorname{tg}^2 \xi) \frac{N^2}{N^2 - 1}},$$

$$Q_r = \sqrt{1 - n + F(1 + 2 \operatorname{tg}^2 \xi) \frac{3N^2}{(N^2 - 1)(N^2 - 4)}},$$

где $F = \frac{\langle B(\theta)^2 \rangle - \langle B(\theta) \rangle^2}{\langle B(\theta) \rangle^2}$.

Другой способ оценки частот, основанный на трассировке частиц, может быть реализован, например, с помощью известного алгоритма программы *Suclops* [27]. Использование описанных способов дает схожие результаты расчета частот вплоть до конечных радиусов, где имеет место некоторое различие. Это обусловлено тем, что орбиты частиц частично попадают в зону краевого магнитного поля установки, что приводит к изменению эффективного градиента поля на орбитах и, соответственно, изменению динамических характеристик орбит.

Альтернативным способом расчета частот бетатронных колебаний является метод, следующий классическому определению частот как количества колебаний вокруг равновесной орбиты за один оборот, совершенный частицей в магнитном поле. Следуя сказанному, достаточно с помощью любой из программ трассировки частиц найти равновесную орбиту. Затем от стартовых координат равновесной орбиты задается малое отклонение по радиусу (аксиальной координате) или радиальному (аксиальному) углу, и путем трассировки частицы вычисляется дополнительная траектория. Затем для расчета, скажем, радиальной бетатронной частоты достаточно вычесть из координат орбиты с начальным отклонением по радиусу координаты равновесной орбиты и вычислить количество полученных колебаний. Аналогично вычисляется частота Q_z . Для того чтобы уменьшить погрешности в вычислении частот данным методом, желательно при вычислении орбит совершить несколько десятков оборотов в магнитном поле, на количество которых нужно поделить полученное количество бетатронных колебаний. Такой способ хо-

рош тем, что при его использовании автоматически учитываются нелинейности магнитного поля.

Конечной целью расчета частот бетатронных колебаний является анализ движения рабочей точки на операционной диаграмме. Магнитная система конструируется таким образом, чтобы рабочая точка находилась вдали от линий опасных резонансов. Одними из самых опасных резонансов являются $Q_r = 1$ и $2Q_z = 1$. Пересечение с первым из них часто имеет место в начале ускорения в области первых оборотов. Данный резонанс возбуждается первой гармоникой магнитного поля и вызывает искажение ускоренной орбиты. Для анализа его опасности и формулирования требований на максимальную амплитуду первой гармоники проводятся расчеты динамики пучка с присутствием первой гармоники магнитного поля. Первая гармоника задается аналитически и может иметь зависимость, например, аналогичную приведенной на рис. 4, которая в основном отражает типичное поведение амплитуды первой гармоники в центральной зоне, обычно наблюдаемое в измерениях магнитного поля. Амплитуда максимума гармоники обычно варьируется от 0 до 10–15 Гс, что соответствует измерениям уровня первой гармоники в компактном циклотроне (см., например, [28]). Фаза максимума гармоники задается постоянной на некотором выделенном азимуте.

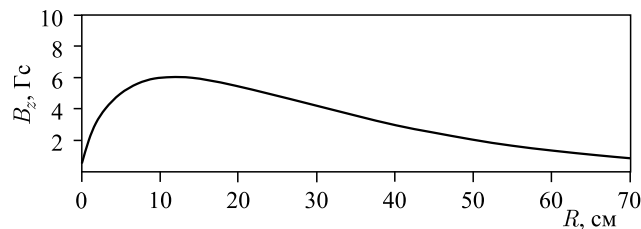


Рис. 4. Зависимость амплитуды первой гармоники магнитного поля от радиуса

Существует несколько способов вычисления амплитуд радиальных колебаний частицы в процессе ускорения. Так, численно величину амплитуд можно найти следующим образом [29]. В процессе ускорения при пересечении модельной частицей выбранного азимута в массив памяти заносятся координаты точки пересечения и скорости частицы. Затем каждый такой отчет становится стартовыми данными для расчета траектории частицы. При этом ускоряющее напряжение не учитывается, и частица, стартуя с ускоренной орбиты, совершает обороты в магнитном поле, не увеличивая при этом свою энергию. При совершении оборотов частица описывает эллипс в пространстве $(R; Pr)$, полуось которого и определяет величину амплитуды радиальных колебаний частицы. Для циклотронов, в которых отсутствует азимутальная вариация магнитного поля, более удобным является метод, осно-

ванный на вычислении в процессе ускорения в каждой точке ускоренной орбиты мгновенных окружностей, касательной к которым является траектория. Центры таких окружностей для центрированной орбиты будут совпадать с центром системы координат ускорителя. Для траекторий частиц, имеющих радиальные колебания, расстояние от центра циклотронной системы координат до центра полученной окружности и есть величина амплитуды колебания.

Центрирование является важным параметром, влияющим на конечные размеры пучка. Величина центрирования связана непосредственно с величиной амплитуд когерентных радиальных колебаний частиц. Существует ряд факторов, определяющих уровень центрирования орбит в циклотроне. Важнейший из них — это конструкция центральной зоны циклотрона, которая определяет уровень центрирования ускоренной орбиты. В случае использования внутреннего источника ионов на величину центрирования орбиты кроме положения источника влияют также положения первых ускоряющих зазоров и напряжение на ускоряющих электродах. При использовании внешней инжекции ионов в циклотрон электростатический спиральный инфлектор, который переводит пучок частиц из вертикальной (в ряде случаев горизонтальной) плоскости в горизонтальную (вертикальную), определяет параметры траектории инжектируемой частицы. Именно конструкция инфлектора на начальном этапе во многом влияет на величину отклонения траектории частицы от центрированной орбиты. Соответствующим подбором геометрии инфлектора и величины напряжения на его пластинах можно изменять величину центрирования [30]. Значение фазы ВЧ, при которой частица проходит первые ускоряющие зазоры, также непосредственно влияет на величину центрирования. Основным определяющим фактором здесь является геометрия центральной части ускоряющих электродов.

Для того чтобы определить оптимальную структуру центральной области, часто используется так называемый backward tracking [31]. Суть метода состоит в том, что определяется идеально центрированная орбита на конечном радиусе, с которой стартует частица. Напряжение на ускоряющих электродах меняет знак, и частица с уменьшением энергии приходит в центральную зону ускорителя. Таким образом моделируется процесс замедления частицы, имеющей хорошо центрированную ускоренную орбиту. Затем, имея траекторию входа частицы в центральную область, можно подобрать такую геометрию ускоряющих электродов в центре и такие параметры инфлектора (положение внутреннего источника), чтобы обеспечить согласование инжектируемой траектории частицы с центрированной, определенной из описанной процедуры.

Эффективным способом управления величиной центрирования в процессе ускорения является вариация напряжений на ускоряющих электродах (дуантах). Вводя ту или иную асимметрию амплитуд напряжений на

дуантах, возможно в разы уменьшить величины амплитуд радиальных колебаний частиц.

Гармонические обмотки, предназначенные для увеличения эффективности вывода, также могут быть использованы в качестве инструмента для улучшения центрирования. Особенно эффективными в этом отношении являются обмотки, расположенные в области инжекции пучка, в центральной области циклотрона. Вводя гармоники магнитного поля (обычно первую) в центре ускорителя, влияют на величину когерентных амплитуд радиальных колебаний частиц в процессе ускорения. Для увеличения эффективности вывода используют такую настройку гармонических обмоток, при которой амплитуды когерентных радиальных колебаний увеличиваются. При этом возникают области перекрытия соседних ускоренных орбит, ВЧ-фаза частицы сдвигается, и наблюдается увеличение количества оборотов, совершаемых частицами для достижения заданной номинальной энергии. Но суть метода заключается в том, что в таком случае наряду с областями перекрытия соседних орбит имеют место области с большой разреженностью орбит. И если подобрать параметры режима ускорения таким образом, чтобы область с большим расстоянием между соседними орбитами находилась в месте расположения элементов выводной системы, то возможно получить увеличение коэффициента вывода пучка.

7. РАСЧЕТ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ЗАРЯДА ПУЧКА

После того как завершена работа по настройке параметров режима ускорения, основанная на моделировании инжекции, ускорения и вывода центральной частицы, следует этап анализа движения пучка частиц. При расчете динамики пучка в современных ускорителях недостаточно одночастичного приближения, при котором учитывают только внешние поля. Необходим учет эффектов пространственного заряда ускоряемого пучка.

Так как учет сил пространственного заряда способом непосредственного вычисления сил, действующих на частицы (метод Particle-to-Particle), требует слишком много вычислительных затрат, появился целый ряд моделей, используемых для численных расчетов собственного поля пучка. Каждая из таких моделей имеет свои недостатки, и точность вычислений ограничена требованием приемлемого времени расчета эффекта. Наиболее распространенной численной моделью является Particle-in-Cell (частица в ячейке) [32]. В данном методе используется формализм близкодействия и уравнения поля для потенциала. В результате сила вычисляется гораздо быстрее, но обычно менее точно, чем при использовании метода Particle-to-Particle. Полевые величины, определенные во всем пространстве физической системы, приближенно представляются значениями в регулярно расположенных узлах сетки,

которая охватывает область, занимаемую частицами. Дифференциальные операторы, такие как лапласиан ∇^2 , заменяются конечно-разностными аппроксимациями на этой сетке. Потенциалы и силы в месте расположения частицы вычисляются посредством интерполяции по массиву сеточных значений. Сеточные плотности рассчитываются с помощью обратной процедуры раздачи характеристик частицы (например, заряда) в ближайшие узлы сетки для того, чтобы получить сеточные значения (например, плотность заряда). Расчет силы в методе состоит из трех этапов:

- 1) раздача заряда на сетку;
- 2) решение на этой сетке уравнения Пуассона;
- 3) вычисление сил по сеточному потенциалу и интерполяция сил в точке расположения частиц.

Методы Particle-in-Cell характеризуются тем, что эволюция системы частиц на каждом временном шаге разбивается на два этапа. На одном из них при фиксированном положении частиц предварительно вычисляется результат их взаимодействия. Расчет ведется на неподвижной («эйлеровой») сетке. Поэтому этот этап называется эйлеровым. На другом, лагранжевом, этапе выполняется интегрирование на очередной временной шаг динамической системы, правая часть которой вычисляется на эйлеровом этапе.

Если заданы потенциалы на границах и распределение плотности заряда внутри расчетной области (области пространства, охватываемой вычислительной моделью), то уравнение Пуассона (1) полностью определяет потенциал

$$\nabla^2 \varphi = -\rho/\varepsilon_0, \quad (3)$$

где φ — потенциал; ρ — плотность заряда.

Для того чтобы представить уравнение (3) в удобной для численного решения форме, необходимо воспользоваться конечными разностями. Производная в одномерном случае определяется выражением

$$\frac{d}{dx} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(x + h/2) - f(x - h/2)}{h} \right\}. \quad (4)$$

В конечно-разностной аппроксимации h не устремляется к нулю, а принимает некоторое конечное значение, которое выбирается из соображений достаточной точности и приемлемых вычислительных затрат. Плотность заряда, потенциал и электрические поля представляются набором значений, расположенных с постоянным шагом h во всей расчетной области. Точки, в которых записываются величины, являются узлами сетки.

В результате конечно-разностные уравнения для поля и напряженности приобретают вид

$$\frac{\varphi_{p+1} - 2\varphi_p + \varphi_{p-1}}{h^2} = -\frac{\rho_p}{\varepsilon_0}, \quad E_p = \frac{\varphi_{p-1} - \varphi_{p+1}}{2h}. \quad (5)$$

Пусть одномерный аналог плотности заряда имеет вид

$$\rho(x) = \sum_{j=1}^{N_p} q_j R(x - x_j), \quad (6)$$

где q — заряд частицы; суммирование ведется по всем частицам, находящимся в расчетной области.

Простой пример одномерного ядра

$$R(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\Delta}, & |x| \leq \Delta, \\ 0, & |x| > \Delta. \end{cases} \quad (7)$$

Ядро в форме (7) описывает частицу шириной 2Δ с равномерным распределением плотности. Плотность, полученная по формуле (6), будет в этом случае кусочно-постоянной функцией. При $\Delta = h/2$ это ядро соответствует одномерной модели PIC.

Значения ρ_α в узлах сетки определяются с помощью формулы

$$\rho_\alpha = \sum_{j=1}^{N_p} q_j \bar{R}(x_\alpha - x_j), \quad (8)$$

где сеточное ядро есть

$$\bar{R}(x_\alpha - x_j) = \frac{1}{h} \int_{x_\alpha - h/2}^{x_\alpha + h/2} R(x - x_j) dx.$$

Для точечной частицы с сингулярным ядром $R(x - x_p) = \delta(x - x_p)$, где x_p — положение частицы, получаем

$$\begin{aligned} \bar{R}(x_\alpha - x_p) &= \frac{1}{h} \int_{x_\alpha - h/2}^{x_\alpha + h/2} \delta(x - x_p) dx = \\ &= \frac{1}{h} \int_{x_\alpha - x_p - h/2}^{x_\alpha - x_p + h/2} \delta(y) dy = \begin{cases} \frac{1}{h}, & |x_\alpha - x_p| \leq \frac{h}{2}, \\ 0, & |x_\alpha - x_p| > \frac{h}{2}. \end{cases} \quad (9) \end{aligned}$$

Это ядро представляет одномерную NGP-модель (Nearest Grid Point Model).

В формуле (8) суммирование производится по всем частицам. Однако вклад в сеточную плотность в узле дают только частицы, находящиеся в

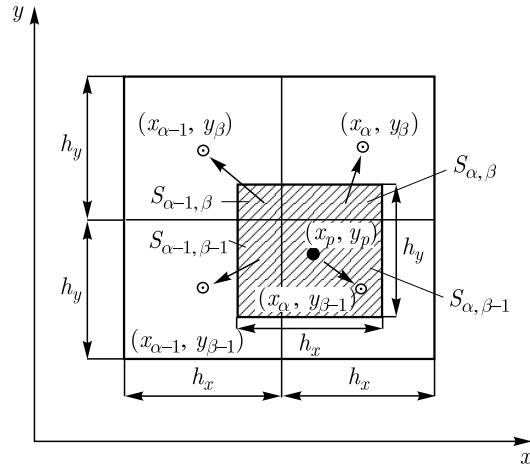


Рис. 5. Исходное ядро двумерной модели PIC. Схема интерполяции переносимого признака на эйлерову сетку

некоторой окрестности этого узла. В модели PIC вклад в данный узел дают частицы, отстоящие от него меньше, чем на h , т.е. каждая частица может дать вклад в два ближайших узла.

В двумерном случае частица в модели PIC имеет форму прямоугольника со сторонами h_x , h_y , параллельными осям координат (x, y) (рис. 5). Ее лебегова мера — площадь $s_p = h_x h_y$, на которой переносимый частицей признак распределен равномерно с плотностью $\rho_p = q_p/s_p$. Соответствующее сеточное ядро, аналогичное сеточному ядру (9), имеет вид

$$\bar{R}(x_\alpha - x_p, y_\beta - y_p) = \begin{cases} \frac{1}{h_x h_y} \left(1 - \frac{|x_\alpha - x_p|}{h_x}\right) \left(1 - \frac{|y_\beta - y_p|}{h_y}\right), \\ |x_\alpha - x_p| \leq h_x, & |y_\beta - y_p| \leq h_y, \\ 0, & |x_\alpha - x_p| > h_x, \quad |y_\beta - y_p| > h_y. \end{cases}$$

В двумерной модели PIC плотность каждой частицы распределяется с помощью обратной билинейной интерполяции между четырьмя ближайшими узлами сетки.

Решение уравнения Пуассона для расчета обобщенных полей на эйлеровом этапе можно осуществить при помощи быстрого преобразования Фурье [33]. Алгоритм решения следующий: вначале выполняется быстрый анализ Фурье правой части уравнения Пуассона, затем с помощью аналитического выражения осуществляется переход от коэффициентов Фурье правой части к коэффициентам левой части и, наконец, выполняется быстрый син-

тез Фурье левой части. Данный способ решения накладывает ограничения на возможное количество узлов сетки, которое должно быть равно 2^n , $n \in \mathbb{N}$.

При необходимости моделирования в областях со сложной геометрией границ или с большими локальными градиентами обобщенных полей, где потеря точности из-за негибкой топологии сетки может привести к глобальным искажениям всей картины моделируемого процесса, следует использовать структурированные неоднородные и неструктурированные сетки, обозначаемые общей аббревиатурой BFC (Boundary — Fitted Coordinates). Поэтому в последние десятилетия получили развитие различные варианты метода частиц для численного моделирования процессов в областях сложной формы, основанные на использовании сеток, адекватно описывающих границы моделируемой области. При использовании подхода, основанного на неструктурированных сетках, не возникает никаких ограничений на характер геометрии границ и связность расчетной области. Генерация таких сеток легко автоматизируется, что позволяет их динамически адаптировать под локальные особенности решения. В последние годы вопросам построения алгоритмов метода частиц в ячейках на неструктурированных сетках посвящен уже ряд публикаций (см., например, [34, 35]).

Основными структурными элементами являются в плоском случае треугольные элементы, полученные с помощью некоторой триангуляции расчетной области, а в трехмерном — тетраэдры. При этом узлами сетки служат вершины треугольников или тетраэдров. Каждый конечный элемент определяется множеством базисных функций (функций формы), количество которых равно числу узлов (вершин) данного элемента.

Опыт и расчеты показывают, что в компактных циклотронах даже при сравнительно небольшом количестве оборотов, совершаемых частицами в процессе ускорения, при токах инжектируемого пучка в несколько сотен микроампер влияние пространственного заряда сказывается на характеристиках выведенного пучка. Поэтому моделирование динамики пучка с учетом сил собственного поля частиц делает расчеты более реалистичными.

8. МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЫВОДНОЙ СИСТЕМЫ

Ускоренный пучок может быть либо направлен на внутреннюю мишень или обдирочную фольгу, расположенную в вакуумной камере ускорителя, либо выведен на внешнюю мишень. В первом случае при использовании жидкостных и газообразных мишеней достаточно создать дополнительное разделение между соседними орбитами в области расположения мишени. Заброс на мишень определяется так, чтобы потери частиц на стенке мишени, ограничивающей тело мишени со стороны циркулирующего пучка, были приемлемыми. В случае же использования внешней мишени необходима выводная

система, которая, как правило, состоит из электростатических deflectоров и магнитных каналов. Для фокусировки пучка при прохождении им краевого поля магнита могут быть использованы дополнительные градиент-корректоры и магнитные или электростатические квадруполь. Существует несколько способов организации достаточного заброса пучка на вход элементов выводной системы [36]. Во всех этих способах используется метод создания когерентных колебаний частиц вблизи конечного радиуса. Первый из них — увеличение радиальных амплитуд за счет добавления первой гармоники магнитного поля вблизи пересечения резонанса $Q_r = 1$. За счет этого создается разделение между последней внутренней и выводной траекториями частиц. Если первая гармоника добавляется непосредственно в области пересечения резонанса, и после этого частица еще продолжает ускоряться, двигаясь в краевом магнитном поле, то при этом частота Q_r падает на значительную величину (обычно до 0,6–0,8). Вследствие этого бетатронная фаза между двумя последними оборотами существенно отличается от 360° , и разделение между орбитами пропорционально $Q_r - 1$. Естественно, что частица при этом должна совершать небольшое количество оборотов в краевом поле. Такой метод называется прецизионным. Регенеративный метод раскачки орбиты основывается на возбуждении резонанса $2Q_r = 2$. Таким резонансом управляет градиент второй гармоники поля. Метод является довольно сложным по сравнению с вышеописанными и не находит широкого распространения в циклотронах.

На начальном этапе целесообразно использовать аналитический способ задания полей элементов выводной системы. Так как траектория частицы в малом угловом азимутальном размере близка к дуге, то возможно для задания области локализации электромагнитного поля использовать область, содержащуюся в сегменте кольца (рис. 6). Угловой размер такой области соответствует азимутальному размеру выводного элемента, а разница внутреннего и внешнего радиусов соответствует радиальному размеру элемента. Такой способ задания области поля удобен тем, что может быть определен заданием

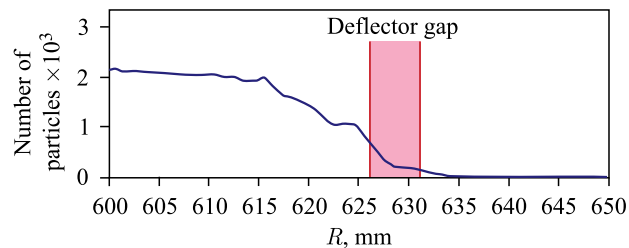


Рис. 6. Выбор положения электростатического deflectора на основании показаний дифференциального пробника

координат всего трех точек, определяющих внутреннюю дугу, и радиального расстояния между дугами. Электромагнитные свойства поля можно описать заданием всего двух величин: в случае электростатического дефлектора — напряженности на центральной линии и градиента электрического поля в зависимости от радиуса; в случае магнитного канала — величины магнитного поля на центральной линии и величины градиента поля вдоль радиуса.

Для проведения реалистичных расчетов в программе анализа динамики частиц должна быть предусмотрена возможность использования трехмерных полей элементов выводной системы. Выбор геометрической структуры элемента основывается на требуемых характеристиках электромагнитных полей, полученных на этапе расчета с использованием аналитики. На начальном этапе выбора структуры магнитных элементов можно использовать методика, описанную выше и основанную на описании поля с помощью бесконечной системы прямолинейных шимм [23]. Затем ведется расчет с помощью одной из программ расчета трехмерных электромагнитных полей, и полученное поле экспортируется в программу расчета динамики. В программе расчета динамики должны присутствовать инструменты управления местом расположения и ориентацией выводного элемента, представленного распределением трехмерного поля.

При выборе места локализации выводных элементов можно отталкиваться от координат траектории центральной частицы, которая заранее определена, и вокруг нее группируется основная масса частиц пучка. Иногда удобно использовать данные, полученные при моделировании дифференциального пробника, который в реальной ускорительной установке представляет собой детектор прямоугольного сечения с размерами в несколько миллиметров. Такой пробник движется по радиусу с шагом, сопоставимым с его размерами, и регистрирует величину интенсивности циркулирующего пучка. Со стороны внешних радиусов он может быть ограничен толстой пластиной, на которой гибнут ускоряемые ионы. При моделировании такого пробника можно видеть распределение интенсивности циркулирующего пучка вдоль радиуса на

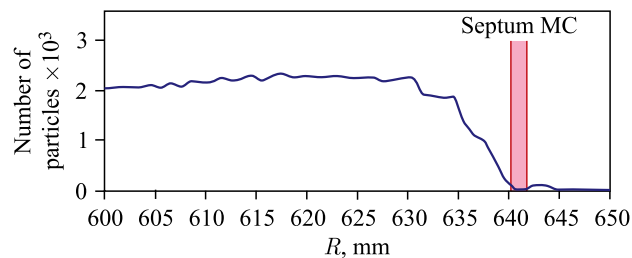


Рис. 7. Выбор положения септума магнитного канала на основании показаний дифференциального пробника

выбранном азимуте. Руководствуясь этими данными, можно определить положение установки септума выводного элемента (см. рис. 6). При этом очевидно, что радиусы, на которых присутствует наибольшее разрежение орбит, характеризуются меньшими значениями показаний пробника. Так, например, на азимуте входа в пассивный магнитный канал, расположенный за электростатическим дефлектором, отклоненный пучок оставляет выделенный «след» на кривой зависимости интенсивности от радиуса, что позволяет определить место установки септума канала (рис. 7).

9. ОЦЕНКА ПОТЕРЬ ЧАСТИЦ НА ПОВЕРХНОСТЯХ СТРУКТУРНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Для того чтобы определить качественные и количественные характеристики пучка, наряду с вычислением сил пространственного заряда пучка необходимо уметь производить оценку потерь частиц на поверхностях структурных элементов, входящих в состав ускорительной установки. Оценка полной эффективности трансмиссии пучка через циклотрон — ключевой вопрос при проектировании ускорителя. Под трансмиссией пучка через структурный элемент установки обычно понимается отношение интенсивности пучка на выходе из элемента к интенсивности на входе. Перемножая локальную трансмиссию через отдельные структурные узлы циклотрона, можно получить оценку полной трансмиссии пучка через ускоритель. Под трансмиссией структурного узла обычно понимается процентное отношение интенсивности пучка на выходе из узла к интенсивности на его входе. С расчетной точки зрения эффективность трансмиссии есть величина, определяемая количеством потерь макрочастиц, участвующих в моделировании динамики, на поверхностях структурных элементов.

В расчетах полагается, что частица потеряна, если имеет место пересечение ее траектории с поверхностью структурного элемента. Компьютерная модель ускорителя подготовлена таким образом, что в ней имеется описание всех структурных элементов, составляющих систему. Самым распространенным и простым с вычислительной точки зрения способом определения пересечения частицей элемента структуры является замена его набором поверхностей, описываемых аналитическими зависимостями, например, окружностями, цилиндрами, секторами, параллелепипедами и т. д. С заданием таких поверхностей легко определить, имеет ли место пересечение их траекторией макрочастицы. Такому описанию поддаются, например, соленоиды, вакуумная камера циклотрона, электростатические дефлекторы и т. п.

В случае если геометрия элемента имеет сложную структуру, то весьма проблематично или же вовсе невозможно представить его набором аналитических поверхностей. Существует способ решения данной проблемы. Для этого

поверхность трехмерного тела представляется в виде набора треугольников, количество которых выбирается достаточным, чтобы описать особенности геометрии элемента. Далее ведется проверка пересечения траектории частицы с каким-либо треугольником поверхности. На каждом итерационном шаге интегрирования уравнений движения имеются данные о координатах частицы в двух последовательных моментах времени. Траектория частицы между этими двумя моментами представляет собой прямую линию, заданную координатами двух точек в пространстве. Задача сводится к определению пересечения прямой и треугольника, заданных в пространстве. Такая задача имеет несколько вариантов решения, из которых выбирается менее затратный с вычислительной точки зрения. Описанный способ удобен не только тем, что дает возможность оценить коэффициент трансмиссии пучка. Если представить потерянные макрочастицы, скажем, сферами, то можно графически наглядно изобразить области потерь пучка на поверхностях структурных элементов. Для этого достаточно в одной из программ, предназначенных для построения трехмерных тел, построить элементы структуры ускорителя и сферы, отвечающие за потерянные частицы (рис. 8). Это позволяет наглядно отслеживать и оптимизировать «проблемные» зоны ускорителя.

Представить поверхность трехмерного тела набором треугольников довольно просто с помощью коммерческих программ для построения трехмерных тел, таких как AutoCAD, Solid Edge, SolidWorks и т. п. Элементы

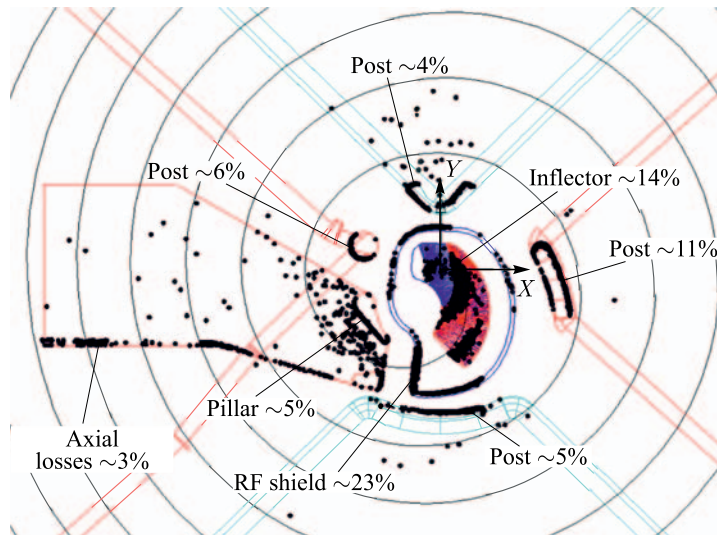


Рис. 8. Графическое представление распределения потерянных частиц в центральной области компактного циклотрона. Черные сферы — потерянные частицы

структуры преобразуются в известный формат представления поверхностей трехмерных тел *.3ds, который представляет собой набор треугольников, описывающих поверхность. Следует помнить, что от степени подробности описания поверхности тела (от количества треугольников) зависит точность оценки количества потерянных частиц на поверхности реального элемента. При создании файла геометрии формата *.3ds необходимо находить компромисс между количеством треугольников, необходимым для точного описания структурного элемента, и временем, которое потребуется для определения возможного пересечения траекторией частицы хотя бы одного из них.

Информация о количестве потерянных во время транспортировки и ускорения макрочастиц определяет эффективность трансмиссии пучка через ускорительную установку. В случае представления структурных элементов в виде достаточного количества поверхностных треугольников трансмиссия может быть вычислена с большой степенью точности. Проведение сравнения результатов, полученных расчетным путем, с экспериментальными данными об интенсивности пучка в узловых точках системы позволяет получить информацию о соответствии созданной компьютерной модели реально существующему ускорителю.

10. ОЦЕНКА ПОТЕРЬ ЧАСТИЦ НА ОСТАТОЧНОМ ГАЗЕ

В ускорителях, ускоряющих отрицательно заряженные ионы, такие как H^- и D^- , значительная часть потерь частиц приходится на перезарядку на остаточном газе в вакуумной камере ускорителя. Особенно актуально это для циклотронов с внутренним источником, так как в вакуумной камере такой установки проблематично создать вакуум достаточного уровня. Количество ионов, которые теряются вследствие взаимодействия с газом, зависит от атомной плотности газа, сечения взаимодействия иона с газом, давления в камере и от длины пути, пройденного частицей. Входными параметрами в аналитической модели газовых потерь [37] служат сорт газа, зависимость давления от пространственной координаты в вакуумной камере и информация о траектории движения ускоряемой частицы (координаты и скорости). Количество теряемых частиц можно оценить по формуле

$$dN = \sigma n V v dt, \quad (10)$$

где N — начальное количество ионов; dt — время движения частицы в газе; n — атомная плотность газа; v — скорость движения иона; σ — сечение взаимодействия иона с газом.

Для проведения наиболее реалистичной оценки потерь необходимы знания о составе газа в вакуумной камере и зависимости давления от пространственной координаты. В том случае, когда такие данные отсутствуют,

в качестве сорта газа можно использовать кислород, имеющий наибольшее сечение взаимодействия с ионами и дающий оценку сверху, азот или водород, очевидно присутствующие в вакуумной камере циклотрона. Сечения взаимодействия ионов с газом известны, и зависимость их величины от энергии частицы можно найти в источнике [38]. Атомная плотность газа вычисляется из выражения

$$PV = nRT,$$

где P — давление газа; V — газовый объем; n — атомная плотность; R — универсальная газовая константа; T — температура. Величину плотности при температуре 300 К [39] можно вычислить по формуле

$$n [\text{м}^{-3}] = 3,3 \cdot 10^{22} P [\text{Торр}].$$

Для вычисления траектории иона используется одна из программ трассировки частиц. Для вычисленных координат частицы можно определить давление газа, которое в общем случае имеет зависимость от пространственной координаты. Известные скорости иона позволяют получить его энергию, а следовательно, определить сечение взаимодействия с остаточным газом. Количество потерь ионов определяется по формуле (10) вдоль траектории частицы пошагово, где на каждом следующем шаге входным параметром является количество частиц на предыдущем шаге, с последующим интегрированием всех потерь.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье описаны основные приемы моделирования компактного изохронного циклотрона, начиная с настройки системы с помощью трассировки центральной частицы и заканчивая изучением движения пучка частиц. Отдельное внимание уделено процессу перевода теоретических алгоритмов в программный код. Основываясь на описанных методах, можно создать компьютерную модель ускорительной установки, с помощью которой возможно подготовить проект нового ускорителя или подобрать параметры режима ускорения для уже существующей установки. На основании подготовленной в одной из программ создания трехмерных тел механической модели ускорителя становится возможным путем экспорта геометрической структуры рассчитать электромагнитные поля и оценить потери частиц на поверхностях структурных элементов. При моделировании важно обращать внимание на основные особенности динамики частиц, которые влияют на количественные и качественные характеристики пучка. Корректно созданная компьютерная модель является мощным и надежным инструментом при изучении физических процессов, происходящих в ускорительной установке.

В заключение автор выражает благодарность С. Б. Ворожцову за помощь в подготовке работы и обсуждение ее содержательной части.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Самарский А. А., Михайлов А. П. Математическое моделирование. Идеи. Методы. Примеры. 2-е изд., испр. М.: Физматлит, 2001.
2. Onishchenko L. M. Cyclotrons: A Survey // Phys. Part. Nucl. 2008. V. 39. P. 950.
3. Smirnov V. L., Vorozhtsov S. B. SNOP — Beam Dynamics Analysis Code for Compact Cyclotrons // Proc. of the XXI Rus. Accel. Conf. RuPAC'2012, St. Petersburg, Russia, 2012.
4. Yang J. J. et al. // Proc. of HB2008. Nashville, 2008.
5. Glazov A. A. et al. Program Complex for Cyclotron Beam Dynamic Simulations // Proc. of the RuPAC'2004, Russia, 2004.
6. Čihák M., Lebeda O., Štursa J. Beam Dynamic Simulation in the Isochronous Cyclotron U-120M // Proc. of the Conf. on Cyclotrons and Their Applications. 2007.
7. Wang B. et al. Computer Design of the Compact Cyclotron // Phys. Part. Nucl. Lett. 2012. V. 9, No. 3(173). P. 471–488.
8. Smirnov V. et al. Quantitative Simulation of NIRS Cyclotron // Proc. of IPAC'12, New Orleans, USA, 2012.
9. Смирнов В. Л. Комплексное моделирование компактного циклотрона. Автореф. дис. . . . канд. физ.-мат. наук. Дубна, 2013.
10. Vorozhtsov S. B. et al. Computation of Cyclotron Electromagnetic Fields // IEEE Trans. Nucl. Sci. 2011. V. 58, No. 3.
11. Hart T. L., Summers D. J., Paul K. Magnetic Field Expansion out of a Plane: Application to Cyclotron Development // Proc. of PAC'11, New York, USA, 2011.
12. Opera/Tosca Reference Manual. Vector Fields.
13. Dubrovin A. N. User's Guide MERMAID: Magnet Design in Two and Three Dimensions. Novosibirsk: SIM Limited, 1994. P. 3–60.
14. Sytchevsky S. et al. Numerical Technology for Design, Development and Measurements of Magnet System in Cyclotrons // XXXV Eur. Cyclotron Progress Meeting (ECPM 2006), Nov. 2–4, 2006.
15. Halbach K., Holsinger R. F. SUPERFISH — A Computer Program for Evaluation of RF Cavities with Cylindrical Symmetry // Part. Accel. 1976. V. 7. P. 213–222.
16. www.cst.com
17. Forringer E. R. Phase Space Characterization of an Internal Ion Source for Cyclotrons. PhD Thesis. Michigan State Univ., 2004.
18. Овсянников Д. А. Моделирование и оптимизация динамики пучков заряженных частиц. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1990.
19. Vatygin Y. Low Energy Beam Transport for Intense Beams, High Intensity RF Linear Accelerators // U.S. Part. Accel. School, Albuquerque, New Mexico, June 23–27, 2014.
20. Reiser M. Theory and Design of Charged Particle Beams. Wiley, 1994.
21. Smirnov V., Vorozhtsov S., Vincent J. Design Study of an Ultra-Compact Superconducting Cyclotron for Isotope Production // Nucl. Instr. Meth. A. 2014. V. 763. P. 612.

22. *Смирнов В. Л., Ворожцов С. Б.* Способ аксиальной инжекции пучка в компактный циклотрон со сверхвысоким магнитным полем. Патент № 2014103854 от 04.02.2014.
23. *Дмитриевский С. Г. и др.* Препринт ОИЯИ 1431. Дубна, 1963.
24. *Podadera I. et al.* Beam Diagnostics for Commissioning and Operation of a Novel Compact Cyclotron for Radioisotope Production // Proc. of IBIC2013, Oxford, UK, 2013.
25. *Замолодчиков В. И.* Циклотрон и фазотрон с вариацией магнитного поля на энергию до 1 ГэВ. Дис. . . . д-ра физ.-мат. наук. Дубна: ОИЯИ, 1971.
26. *Hagedorn H. L., Verster N. F.* Orbits in an AVF Cyclotron // Nucl. Instr. Meth. 1962. V. 18(19). P. 200–228.
27. *Gordon M. M.* Computation of Closed Orbits and Basic Focusing Properties for Sector-Focused Cyclotrons and the Design of “Cyclops” // Part. Accel. 1984. V. 16. P. 39–62.
28. *Vorozhtsov A. S. et al.* Magnetic Field of the VINCY Cyclotron // The 35th Eur. Cyclotron Progress Meeting (ECPM 2006), Nice, France, 2006.
29. *Ворожцов С. Б.* Численное моделирование магнитной системы и динамики частиц в ускорителях с пространственной вариацией магнитного поля. Дис. . . . д-ра физ.-мат. наук. Дубна: ОИЯИ, 1986.
30. *Жидков Е. П., Перепелкин Е. Е., Ворожцов С. Б.* Моделирование спирального инфлектора и центрирования орбит в компактном циклотроне // Мат. моделирование. 2009. Т. 21, № 1. С. 3–11.
31. *Chautard F.* Beam Dynamics for Cyclotrons // CAS Proc. 2005. V. 12. P. 209.
32. *Григорьев Ю. Н., Вишневков В. А., Федорук М. П.* Численное моделирование методами частиц в ячейках. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2004. 360 с.
33. *Рошаль А. С.* Быстрое преобразование Фурье в вычислительной физике // Изв. вузов. Радиофизика. 1976. Т. XIX, № 10. С. 1425–1454.
34. *Assous F., Degond P., Segre J.* A Particle-Tracking Method for 3D Electromagnetic PIC Codes on Unstructured Meshes // Comp. Phys. Commun. 1992. V. 72. P. 105–114.
35. *Sonnendrucker E., Ambrosiano J. J., Branon S. T.* A Finite Element Formulation of the Darwin PIC Model on Unstructured Grids // J. Comp. Phys. 1995. V. 121. P. 281–297.
36. *Heikkinen P.* Injection and Extraction for Cyclotrons // CAS Proc. 1994. V. II. P. 819.
37. *Nuttens V. et al.* Cyclotron Vacuum Model and H Gas Stripping Losses // Proc. of CYCLOTRONS 2010, Lanzhou, China, 2010.
38. *Nakai Y. et al.* Cross Sections for Charge Transfer of Hydrogen Atoms and Ions Colliding with Gaseous Atoms and Molecules // At. Data Nucl. Data Tables. 1987. V. 37. P. 69–101.
39. *Poncet A.* // CERN Accelerator School: Vacuum Technology. Snekersten, Denmark, 1999. Proc. CERN, Geneva, Switzerland, 1999. P. 165–176.