

СУПЕРПОЛЕВОЙ ПОДХОД  
К ПОСТРОЕНИЮ ЭФФЕКТИВНОГО ДЕЙСТВИЯ  
В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

С РАСШИРЕННОЙ СУПЕРСИММЕТРИЕЙ

*И. Л. Бухбиндер*<sup>1, \*</sup>, *Е. А. Иванов*<sup>2, \*\*</sup>, *Н. Г. Плетнев*<sup>1, 3</sup>

<sup>1</sup> Томский государственный педагогический университет, Томск, Россия

<sup>2</sup> Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

<sup>3</sup> Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН и  
Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия

ВВЕДЕНИЕ	542
ОДНОПЕТЛЕВОЕ ЭФФЕКТИВНОЕ ДЕЙСТВИЕ В $\mathcal{N} = 4$ СУПЕРСИММЕТРИЧНОЙ ТЕОРИИ ЯНГА–МИЛЛСА В ФОРМАЛИЗМЕ $\mathcal{N} = 1$ СУПЕРПРОСТРАНСТВА	565
ОДНОПЕТЛЕВОЕ ЭФФЕКТИВНОЕ ДЕЙСТВИЕ $\mathcal{N} = 4$ СУПЕРСИММЕТРИЧНОЙ ТЕОРИИ ЯНГА–МИЛЛСА В ГАРМОНИЧЕСКОМ СУПЕРПРОСТРАНСТВЕ	594
ГИПЕРМУЛЬТИПЛЕТНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ ОДНОПЕТЛЕВОГО ЭФФЕКТИВНОГО ДЕЙСТВИЯ В $\mathcal{N} = 2$ СУПЕРКОНФОРМНЫХ ТЕОРИЯХ	633
ОДНОПЕТЛЕВОЕ ЭФФЕКТИВНОЕ ДЕЙСТВИЕ В $\mathcal{N}=2$ СУПЕРСИММЕТРИЧНОЙ МАССИВНОЙ ТЕОРИИ ЯНГА–МИЛЛСА	665
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	684
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	686

---

\*E-mail: joseph@tspu.edu.ru

\*\*E-mail: eivanov@theor.jinr.ru

СУПЕРПОЛЕВОЙ ПОДХОД  
К ПОСТРОЕНИЮ ЭФФЕКТИВНОГО ДЕЙСТВИЯ  
В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ  
С РАСШИРЕННОЙ СУПЕРСИММЕТРИЕЙ

И. Л. Бухбиндер<sup>1, \*</sup>, Е. А. Иванов<sup>2, \*\*</sup>, Н. Г. Плетнев<sup>1, 3</sup>

<sup>1</sup> Томский государственный педагогический университет, Томск, Россия

<sup>2</sup> Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

<sup>3</sup> Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН и

Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия

Дан обзор современного состояния исследований по построению эффективных действий в суперсимметричной квантовой теории поля. Особое внимание уделено калибровочным моделям с расширенной суперсимметрией в суперполевым подходе. Подчеркнуты преимущества формулировки таких моделей в  $\mathcal{N} = 2$  гармоническом суперпространстве для вычисления эффективного действия. Обсуждаются явно суперсимметричные и явно калибровочно-инвариантные методы нахождения низкоэнергетических эффективных действий, вывода поправок к ним и возможность получения точных решений. Подробно рассмотрено вычисление однопетлевых эффективных действий в  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметричной теории Янга–Миллса с гипермультиплетами и в  $\mathcal{N} = 4$  суперсимметричной теории Янга–Миллса. Обсуждается связь эффективного действия в суперсимметричной квантовой теории поля с низкоэнергетическим пределом в теории суперструн.

This is a review of the modern status of research on construction of the effective actions in supersymmetric quantum field theory. A special attention is paid to gauge models with extended supersymmetry in the superfield approach. The advantages of formulating such models in  $\mathcal{N} = 2$  harmonic superspace are emphasized. We describe the manifestly supersymmetric and manifestly covariant methods of constructing the low-energy effective actions, deriving the corrections to them and obtaining the exact results. We consider in detail the calculations of the one-loop effective actions in  $\mathcal{N} = 2$  supersymmetric Yang–Mills theories coupled to hypermultiplets and in  $\mathcal{N} = 4$  supersymmetric Yang–Mills theory. The relationship between the effective action in supersymmetric quantum field theory and the low-energy limits of the superstring theory is discussed.

PACS: 11.30.Pb; 11.15.-q

---

\*E-mail: joseph@tspu.edu.ru

\*\*E-mail: eivanov@theor.jinr.ru

## ВВЕДЕНИЕ

Одним из общепринятых методов теоретического описания физических эффектов в наблюдаемом спектре частиц с учетом промежуточных состояний, которые находятся за пределами энергетических масштабов, достижимых в настоящее время в эксперименте, является метод феноменологических лагранжианов. Классический пример подобного рода — лагранжиан теории Ферми слабых взаимодействий. Как мы сегодня знаем, последовательной (но далеко не полной) теорией таких взаимодействий является Стандартная модель (СМ) электрослабых взаимодействий Вайнберга–Салама. Теория Ферми при этом эффективно возникает, если мы интегрируем по всем тяжелым модам векторных и хиггсовских полей и тем самым исключаем их из рассмотрения.

Другой пример эффективных лагранжианов — лагранжиан Гейзенберга–Эйлера [1, 2] в КЭД, непертурбативно описывающий квантовое взаимодействие заряженного скалярного или спинорного поля с классическим электромагнитным полем постоянной напряженности. Этот эффективный лагранжиан инвариантен относительно всех симметрий классической теории и содержит полную информацию относительно однопетлевой амплитуды в форме, максимально удобной для изучения таких низкоэнергетических нелинейных КЭД-эффектов, как рассеяние фотона на фотоне, изменение закона дисперсии и расщепления фотонов, рождение электрон-позитронных пар во внешнем поле и др.

В настоящее время эффективное действие рассматривается как фундаментальный объект квантовой теории поля, позволяющий описывать всю совокупность квантовых эффектов. По определению, эффективное действие есть производящий функционал для одночастично-неприводимых связанных функций Грина. При этом легкие поля используются как инструмент изучения структуры вакуума полной квантовой теории. Проблема построения эффективного действия тесно связана с решением таких фундаментальных задач квантовой теории поля, как определение структуры вакуума и его низколежащих возбуждений, нахождение квантовых поправок к классическим уравнениям движения, исследование фазовых переходов и динамического нарушения симметрии, изучение квантовой динамики в сильных фоновых полях. Обсуждение проблемы построения эффективного действия в квантовой теории поля дано, например, в [3–7]. Понятие эффективного действия оказалось чрезвычайно полезным для рассмотрения многих аспектов квантования и перенормировки калибровочных теорий, включая вопросы аномалий, некоторые из которых физически значимы (например, трудно представить себе реалистическую 4-мерную теорию поля, в которой отсутствовала бы конформная аномалия).

Наиболее плодотворным подходом к построению эффективного действия в квантовой теории калибровочных полей является метод фонового поля, основы которого заложены Де Виттом [8,9]. Этот метод представляет собой обобщение метода производящих функционалов в квантовой теории поля [10–14] на случай неисчезающих классических фоновых полей и неабелевой калибровочной симметрии. Основным объектом в методе фонового поля является функционал эффективного действия, инвариантный относительно классических калибровочных преобразований.

Эффективное действие позволяет описать все аспекты квантовой теории поля. Оно определяет элементы диаграммной техники теории возмущений, т. е. полные пропагаторы и полные вершинные функции, с учетом всех квантовых поправок и, следовательно, пертурбативную  $S$ -матрицу. С другой стороны, эффективное действие сразу дает физические амплитуды во внешнем классическом поле и описывает все квантовые эффекты во внешних полях (поляризация вакуума квантованных полей, рождение частиц и т. п.) [15].

Функционал эффективного действия является наиболее подходящим инструментом исследования структуры физического вакуума в различных моделях квантовой теории поля со спонтанным нарушением симметрии (хиггсовский вакуум, глюонный конденсат, сверхпроводимость). Эффективное действие позволяет учитывать обратную реакцию квантовых процессов на классический фон, т. е. получать эффективные уравнения движения для фоновых полей. В этом случае, однако, мы встречаемся с определенными трудностями, связанными с зависимостью эффективного действия вне массовой оболочки от способа фиксации калибровки и параметризации квантовых полей. Тем не менее в работах [16,17] приведено доказательство калибровочно-инвариантной перенормируемости теорий типа Янга–Миллса. Было показано, что изменение калибровочного условия эквивалентно некоторому каноническому преобразованию перенормированного действия и производящего функционала вершин, что, в свою очередь, означает калибровочную инвариантность перенормированной  $S$ -матрицы. Иными словами, вся зависимость производящего функционала вершинных функций Грина от калибровочных параметров содержится только в аргументе эффективного действия.

Явно репараметризационно-инвариантный функционал, который не зависит от фиксации калибровки (так называемое *единое* эффективное действие Вилковьского), был построен в работах [18,19]. Эффективное действие Вилковьского изучалось, например, в работе [20] в различных моделях квантовой теории поля (в том числе в эйнштейновской гравитации), а также в квантовой гравитации с высшими производными. Как показано в [21], для скалярной КЭД и теории Янга–Миллса единое эффективное действие во всех порядках теории возмущений в точности совпадает с калибровочно-инвариантным эффективным действием, вычисленным в калибровке Ландау–Де Витта. Эффективное действие Вилковьского было в дальнейшем улучшено Де Виттом [22].

Однако в ряде случаев эта модификация не изменяет результаты однопетлевых вычислений и к тому же привносит ряд проблем, связанных в первую очередь с выбором метрики на конфигурационном пространстве [7].

Из сказанного следует, что вычисление эффективного действия представляет большой интерес как в плане развития общего формализма квантовой теории поля, так и для конкретных приложений. Точное нахождение эффективного действия означало бы точное решение соответствующей модели квантовой теории поля, что в общем случае представляется невозможным. Поэтому используются различные приближенные подходы, такие как разложение по числу петель и разложение по степеням производных функциональных аргументов. Такие разложения применяются для описания физических явлений, в которых роль наблюдаемых играют частицы и поля с массами и энергиями, ограниченными сверху некоторым характерным масштабом. При этом (в ведущем низкоэнергетическом приближении) в эффективном действии удерживаются только первые не исчезающие члены. Именно такие первые члены низкоэнергетического эффективного действия позволяют исследовать структуру вакуума теоретико-полевого модели и динамику ее низколежащих возбуждений.

При нахождении эффективного действия все поля расщепляются на фоновую классическую часть и квантовое возмущение, распространяющееся на этом фоне. Та часть классического действия, которая квадратична по квантовым полям, определяет пропагаторы квантовых полей в фоновом поле, а члены более высокого порядка задают вершины взаимодействия в теории возмущений. Для вычисления эффективного действия прежде всего необходимо найти функции Грина квантовых полей на фоне классических полей различного характера.

Функции Грина в фоновых полях изучались в большом количестве работ. Фок [23] впервые предложил метод решения волнового уравнения на фоне электромагнитного поля через интегральное преобразование с параметром собственного времени. Несколько позднее Швингер [2] обобщил метод собственного времени и применил его к вычислению однопетлевого эффективного действия. Де Витт [8] переформулировал метод собственного времени на геометрическом языке и в присутствии фонового гравитационного поля. Отметим, что это развитие тесно связано с теорией псевдодифференциальных операторов как инструментом исследования уравнений с частными производными в приложениях к спектральной геометрии, спектральным асимптотикам дифференциальных операторов, анализу на многообразиях, дифференциальной геометрии и другим математическим методам, применяемым в квантовой теории\*.

---

\* См., например, [24–31].

В дальнейшем [32, 33] стандартная техника Швингера–Де Витта была обобщена на случай произвольных дифференциальных операторов, удовлетворяющих условию причинности. Метод собственного времени сразу дает функции Грина в окрестности светового конуса. Таким образом, он является наиболее подходящим инструментом для исследования ультрафиолетовых расходимостей (вычисления контрчленов,  $\beta$ -функций и аномалий). Главное преимущество метода собственного времени состоит в том, что он явно ковариантен и позволяет ввести различные ковариантные регуляризации расходящихся интегралов (например, размерную регуляризацию, регуляризацию посредством обобщенной  $\zeta$ -функции и т.п. (см. [34])). Хотя авторы большинства работ в этой области ограничиваются однопетлевым приближением, метод собственного времени применяется также для высших петель. В работах [35, 36] он использовался для анализа двухпетлевых расходимостей в различных моделях квантовой теории поля, в том числе в квантовой гравитации.

Другой важной областью, где метод собственного времени Швингера–Де Витта успешно применяется, является исследование эффекта поляризации вакуума массивных квантовых полей фоновыми полями. Когда комптоновская длина волны гораздо меньше характерного масштаба изменения фонового поля, метод собственного времени дает непосредственно разложение эффективного действия в ряд по малому параметру  $(\lambda/L)^2$ . Коэффициенты этого разложения пропорциональны так называемым коэффициентам Де Витта и строятся как локальные инварианты фоновых полей и их ковариантных производных. В работах [19, 32, 33] обсуждалась общая структура разложения Швингера–Де Витта эффективного действия для безмассовых полей. Было отмечено, что в таких моделях необходим выход за пределы локального разложения посредством суммирования ведущих производных фонового поля в этом разложении. В работе [19] (при некоторых дополнительных предположениях о сходимости соответствующих рядов и интегралов) были просуммированы ведущие производные фоновых полей и получены нелокальные выражения для однопетлевого эффективного действия в случае безмассового поля.

Точной процедуры вычисления эффективного действия в общем случае не может существовать, поскольку для этого требуется знать пропагаторы в произвольных внешних полях, а такие пропагаторы невозможно построить точно. До сих пор все известные вычисления делались либо в локальном приближении в рамках разложения эффективного действия по производным, либо путем выбора какой-либо специфической конфигурации фоновых полей (постоянные поля, однородные пространства и др.), когда соответствующая квантово-механическая задача точно решается. Поскольку точные вычисления возможны только в ограниченном числе случаев, развитие пертурбативных методов ковариантного вычисления эффективного действия является актуаль-

ной областью исследований. Особенно важно иметь такие универсальные методы для квантовой теории калибровочных полей и гравитации [33], а также для суперсимметричных расширений этих теорий.

Метод фонового поля, успешно применяемый для изучения структуры эффективного действия в теории Янга–Миллса и гравитации, может быть обобщен на суперсимметричные калибровочные теории, сформулированные в суперпространстве. Такие обобщения были построены для  $\mathcal{N} = 1$  суперсимметричной теории Янга–Миллса и супергравитации [37–40] и  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметричной теории Янга–Миллса [41–45] (см. также [46], где была предпринята более ранняя попытка разработки метода фонового поля для некоторых  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметричных моделей Янга–Миллса, включая  $\mathcal{N} = 4$  суперсимметричную теорию Янга–Миллса).

Изучение феноменологических и формальных аспектов суперсимметричных моделей теории поля занимает значительное место в современной теоретической физике высоких энергий. Интерес к суперсимметрии в теории поля как симметрии между бозонами и фермионами  $\delta\phi \sim \epsilon^\alpha \psi_\alpha$ ,  $\delta\psi_\alpha \sim \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m \bar{\epsilon}^{\dot{\alpha}} \partial_m \phi + \dots$  обусловлен многими причинами, из которых мы выделим несколько.

- Суперсимметрия [47–50] обеспечивает естественный механизм объединения бозонов и фермионов и, следовательно, должна рассматриваться как составной элемент любой теории, претендующей на роль объединенной теории фундаментальных взаимодействий (формулировки суперсимметричных теорий даны, например, в монографиях [37, 39, 50–52]).

- Суперсимметрия накладывает сильные ограничения на структуру и константы связи взаимодействия между бозонами и фермионами, что приводит к сокращению квадратичных расходимостей и ослаблению всех остальных. При этом решается ряд проблем теории большого объединения, таких как проблема иерархий, проблема строгого пересечения трех бегущих калибровочных констант связи в одной точке, проблема времени жизни протона и др.

- Суперсимметрия выявляет глубокие связи между физически мотивированными суперсимметричными нелинейными сигма-моделями теории поля и такими математическими понятиями, как геометрия кэлеровых, гиперкэлеровых и кватернионных многообразий.

- По современным воззрениям, на роль объединенной теории всех фундаментальных взаимодействий, включая гравитационное, претендует теория суперструн [53, 54]. В этой теории суперсимметрия играет ключевую роль, обеспечивая отсутствие тахионов в спектре струны.

Характерная энергетическая шкала теории суперструн задается планковской массой. На масштабе энергий, много меньших планковской массы, все квантово-полевые явления должны описываться эффективной (низкоэнергетической с точки зрения теории суперструн) суперсимметричной теорией

поля. По этой причине значительный интерес вызывает изучение различных (супер)полевых пределов суперструнных теорий (см., например, [53–55]). Это позволяет исследовать струнные эффекты методами теории поля и теоретико-полевые эффекты методами теории суперструн, а также открывает возможности построения новых (супер)полевых моделей с интересными свойствами, в том числе и с внутренними механизмами нарушения суперсимметрии. На доступных в настоящее время энергиях суперсимметрия «не видна», что должно означать ее нарушение на некотором масштабе. Определение этого энергетического масштаба остается интригующей задачей. Теоретическое исследование низкоэнергетических квантовых аспектов суперсимметричных моделей приобретает ключевое значение для изучения возможных феноменологических проявлений суперсимметрии на масштабах энергий, достижимых в современных экспериментах.

В настоящее время установлено, что в  $\mathcal{N} = 2$  и  $\mathcal{N} = 4$  расширенных суперсимметричных теориях Янга–Миллса специальное низкоэнергетическое эффективное действие может быть точно найдено. Однако надо иметь в виду, что в теориях с расширенной суперсимметрией имеются определенные проблемы с построением квантовой теории. Дело в том, что алгебра расширенной суперсимметрии в общем случае замыкается только на уравнениях движения. В суперполевых подходах требование неприводимости суперполевого представления супералгебры приводит к дифференциальным связям на суперполях. Проблема решения связей через неограниченные суперполя (препотенциалы) создает трудности в исследовании квантовых свойств наиболее интересных теоретико-полевых моделей с  $\mathcal{N} = 2, \dots, \mathcal{N} = 8$  расширенными суперсимметриями и построении соответствующей теории возмущений. Кроме того, еще в 1970-х гг. был сформулирован ряд no-go-теорем о невозможности описания некоторых важных супермультиплетов вне массовой оболочки в терминах суперполей, свободных от связей. Для преодоления этих запретов, как всегда в подобных случаях, потребовалось выявить скрытые ограничения, заложенные в условиях no-go-теорем.

Преобразования суперсимметрии переводят бозоны и фермионы друг в друга, в силу чего поля разных спинов отождествляются с компонентами некоторого супермультиплета. Простейшие  $\mathcal{N} = 1$  супермультиплеты содержат физические поля, у которых спины или спиральности отличаются на  $1/2$ , а также вспомогательные нераспространяющиеся поля. Представление  $\mathcal{N} = 4$  суперсимметрии на свободных уравнениях движения объединяет безмассовые физические поля со спиральностями  $1, 1/2, 0$  в максимально расширенный векторный супермультиплет. Однако набор вспомогательных полей для реализации полной  $\mathcal{N} = 4$  суперсимметрии вне массовой оболочки до сих пор остается неизвестным, и не исключено, что такие представления бесконечномерны. Следующие расширения  $\mathcal{N} = 5, \dots, 8$



с необходимостью включают в себя гравитон со спиральностью 2, левое и правое гравитино со спиральностью  $\pm 3/2$  и другие поля. Как правило, для записи суперсимметричных лагранжианов в терминах компонентных полей достаточно знать состав соответствующих супермультиплетов на массовой оболочке. Однако для детального анализа квантовых свойств этих моделей теории поля желательно располагать информацией о составе супермультиплетов и всех симметриях классического действия вне массовой оболочки.

Наиболее естественное описание расширенных супермультиплетов достигается в терминах суперполей на суперпространстве, параметризованном координатами  $z^M = \{x^m, \theta^{i\alpha}, \bar{\theta}_i^{\dot{\alpha}}\}$ , где  $\theta^{i\alpha}, \bar{\theta}_i^{\dot{\alpha}}$  — антикоммутирующие ( $\theta^2 = 0$ ) вейлевские ( $\alpha, \dot{\alpha} = 1, 2$ ) спиноры и  $i = 1, 2, \dots, \mathcal{N}$ . Физические и вспомогательные поля возникают как компоненты разложения суперполя по степеням грассмановых спинорных координат. Однако в этом разложении помимо компонентных полей того или иного представляющего интерес неприводимого супермультиплета присутствует много лишних компонент. Поэтому соответствующие суперполя с необходимостью должны подчиняться связям, исключая лишние компоненты. Для комплексных  $\mathcal{N} = 1$  суперполей такими связями служат условия грассмановой аналитичности

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}}\Phi(x, \theta, \bar{\theta}) = 0, \quad D_{\alpha}\bar{\Phi}(x, \theta, \bar{\theta}) = 0,$$

решениями которых являются киральные  $\Phi(x_L, \theta)$  или антикиральные  $\bar{\Phi}(x_R, \bar{\theta})$  суперполя, зависящие от половины грассмановых координат, а преобразования суперсимметрии оставляют инвариантными сопряженные киральные подпространства  $\{x_L^m, \theta^{\alpha}\}$  и  $\{x_R^m, \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\}$ .

Развитием этой концепции в случае  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметрии стал метод  $\mathcal{N} = 2$  гармонического суперпространства [51, 56–60]. Здесь оказалось необходимым дополнить координаты  $\mathcal{N} = 2$  суперпространства гармониками  $u^{\pm i}, u^{+i}u_i^- = 1, \overline{u^{+i}} = u_i^-$ , параметризующими фактор-пространство  $SU(2)/U(1)$  группы автоморфизмов  $\mathcal{N} = 2$  супералгебры Пуанкаре. Связи для гипермультиплетов материи и  $\mathcal{N} = 2$  калибровочной теории оказалось возможным разрешить после дополнения стандартного  $\mathcal{N} = 2$  суперпространства гармонической сферой  $SU(2)/U(1)$  и выделения в этом расширенном («гармоническом») суперпространстве аналитического подпространства, замкнутого относительно преобразований  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметрии и параметризованного меньшим числом грассмановых переменных по сравнению со стандартным  $\mathcal{N} = 2$  суперпространством. Гипермультиплеты и  $\mathcal{N} = 2$  калибровочный мультиплет описываются суперполями, «живущими» на аналитическом подпространстве и не подчиненными каким-либо дополнительным связям. Преодоление запретов (no-go-теорем) на суперполе-вом описании представлений расширенной супералгебры вне массовой оболочки становится возможным благодаря тому, что аналитические суперполя

содержат бесконечное число вспомогательных полей (в случае гипермультиплетта) или бесконечное число чисто калибровочных степеней свободы (в случае  $\mathcal{N} = 2$  калибровочного мультиплетта), которые исключаются или уравнениями движения, или выбором подходящей калибровки. Преобразования  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметрии оставляют инвариантным аналитическое подпространство  $\zeta^M \equiv \{x_A^m, \theta^{+\alpha}, \bar{\theta}^{+\dot{\alpha}}, u^{\pm i}\}$ , а физические и вспомогательные поля  $\mathcal{N} = 2$  супермультиплеттов возникают в разложении не ограниченных какими-либо связями суперполей на аналитическом суперпространстве  $\zeta^M$ . Состав супермультиплеттов становится бесконечномерным, поскольку коэффициентами в разложении по степеням гармоник являются высшие неприводимые представления группы  $SU(2)$ . Поэтому необходимо сформулировать такие правила записи суперполевого действия, которые приводят к физическим лагранжианам для конечного числа компонентных полей после исключения вспомогательных полей их уравнениями движения. Это достигается использованием интеграла Березина [62] по грассмановым координатам и интеграла по гармоникам на группе  $SU(2)$ , определенного правилами [51]

$$\int d\theta = 0, \quad \int d\bar{\theta} = 1, \quad \int du = 1, \quad \int du u_{(i_1}^+ \dots u_{i_n}^+ u_{j_1}^- \dots u_{j_n}^-) = 0.$$

$\mathcal{N} = 2$  суперсимметричная теория Янга–Миллса во взаимодействии с материей формулируется в терминах двух  $\mathcal{N} = 2$  мультиплеттов. Векторный мультиплет описывается действительным аналитическим суперполем — препотенциалом  $V^{++} = V^{++I}(\zeta)T_I$ , принимающим значения в алгебре Ли калибровочной группы. В его состав входит векторный калибровочный потенциал и его суперпартнеры. Поля материи входят в состав гипермультиплетта  $q^+(\zeta)$  и ему сопряженного  $\tilde{q}^+(\zeta)$ , которые преобразуются по некоторому представлению калибровочной группы. Классическое действие  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметричной теории Янга–Миллса в гармоническом суперпространстве выглядит весьма просто:

$$S = \frac{1}{2g^2} \text{tr} \int d^8z \mathcal{W}^2 + \frac{1}{2} \int d\zeta^{(-4)} q_a^+ (D^{++} + igV^{++}) q^{+a} \quad (a = 1, 2), \quad (\text{B.1})$$

где  $\mathcal{W} = -\frac{1}{4}(\bar{D}^+)^2 V^{--}$  — калибровочно-инвариантное,  $u$  — независимое киральное суперполе напряженности и  $V^{--}$  — неаналитическое суперполе, связанное с препотенциалом условием нулевой кривизны\*  $D^{++}V^{--} =$

---

\*Здесь  $D^{\pm\pm} = u^{\pm i} \frac{\partial}{\partial u^{\mp i}}$ ,  $D^0 = u^{+i} \frac{\partial}{\partial u^{+i}} - u^{-i} \frac{\partial}{\partial u^{-i}}$  —  $SU(2)$ -ковариантные производные.

$D^{--}V^{++} + i[V^{++}, V^{--}] = 0$ . К сожалению, подобной конструкции для наиболее интересной  $\mathcal{N} = 4$  суперсимметричной теории Янга–Миллса со всеми 16 суперсимметриями, реализованными вне массовой оболочки, не существует\*. Для описания этой теории приходится использовать классическое действие (В.1) с гипермультиплетом в присоединенном представлении и дополнительной неявной  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметрией, реализованной преобразованиями

$$\delta V^{++} = (\varepsilon^{\alpha a} \theta_{\alpha}^{+} + \bar{\varepsilon}_{\dot{\alpha}}^a \bar{\theta}^{+\dot{\alpha}}) q_a^{+}, \quad \delta q_a^{+} = -\frac{1}{2} (D^{+})^4 [(\varepsilon_a^{\alpha} \theta_{\alpha}^{-} + \bar{\varepsilon}_{\dot{\alpha} a} \bar{\theta}^{-\dot{\alpha}}) V^{--}]. \quad (\text{В.2})$$

Таким образом, формализм гармонического суперпространства обеспечивает естественное описание  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметричных теорий вне массовой оболочки и возможность изучения квантовых аспектов таких теорий с сохранением явной  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметрии на всех этапах вычислений. Последнее обстоятельство носит принципиальный характер, поскольку позволяет контролировать корректность вычислений и получать результаты сразу в терминах  $\mathcal{N} = 2$  суперинвариантов. Именно поэтому развитие общих методов ковариантного построения эффективного действия в  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметричных квантовых теориях калибровочных полей и материи в гармоническом суперпространстве является актуальной областью исследований. Отметим также актуальность исследований корреляционных функций в расширенных суперкалибровочных теориях [208, 209].

Другой круг вопросов связан с проблемой выбора реализации теоретико-полевого описания в терминах тех или иных тензорных (супер)полей, описывающих безмассовые и массивные неприводимые представления (супер)группы Пуанкаре. Простейшим примером такой неоднозначности является динамическая эквивалентность описания безмассовой частицы спина ноль в терминах скалярного или тензорного полей [63]. Другим примером эквивалентности, которая имеет место в классических уравнениях движения, может служить суперполевая реализация неприводимого представления суперспина  $1/2$  или в терминах неограниченного действительного скалярного  $\mathcal{N} = 1$  суперполя (препотенциала), или в терминах кирального спинорного  $\mathcal{N} = 1$  суперполя. Будучи динамически эквивалентными на уровне свободных лагранжианов, эти различные реализации одного и того же представления приводят, вообще говоря, к различным моделям взаимодействия с гравитационными и калибровочными (супер)полями. Важный пример такого сорта неэквивалентности представляет  $\mathcal{N} = 2$  вектор — тензорный мультиплет с кали-

---

\*12 суперсимметрий из 16 можно реализовать вне массовой оболочки в рамках  $\mathcal{N} = 3$  гармонического суперпространства [51], но в данном обзоре мы не будем касаться таких формулировок.

брованным центральным зарядом. Один из физических скаляров этого мультиплетта описывается антисимметричным тензором, взаимодействие которого через член Черна–Саймонса с  $\mathcal{N} = 2$  векторным мультиплетом и  $\mathcal{N} = 2$  супергравитацией обеспечивает реализацию механизма сокращения аномалий Грина–Шварца в эффективной теории [64]. Как представление  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметрии этот мультиплет подобен безмассовому  $8 + 8$  гипермультиплету Файе–Сониуса [65], однако для него не существует формулировки без связей, что порождает определенные трудности при анализе квантовых свойств таких систем.

В последнее время происходит возрождение интереса к различным аспектам теоретико-полевого описания 4D  $\mathcal{N} = 1$  и  $\mathcal{N} = 2$  массивных тензорных мультиплетов и их связям со скалярным и векторным мультиплетами. Такой интерес в первую очередь мотивирован тем обстоятельством, что массивная 2-форма естественно возникает в  $\mathcal{N} = 2$  супергравитации, которая получается в результате компактификаций теории струн типа II на многообразия Калаби–Яу в присутствии электрических и магнитных потоков (см., например, обзор [66]). Этот факт дает основания для более детального исследования массивных  $\mathcal{N} = 1$  и  $\mathcal{N} = 2$  тензорных мультиплетов [67]. В  $\mathcal{N} = 1$  суперсимметрии массивный тензорный мультиплет (как дуальная версия массивного векторного мультиплетта) был введен тридцать лет назад, и с тех пор эта конструкция нашла отражение в двух монографиях [37, 39]. В отличие от обычных тензорных мультиплетов модели (безмассовых)  $\mathcal{N} = 1$  и  $\mathcal{N} = 2$  улучшенных тензорных мультиплетов являются суперконформными в случае глобальной суперсимметрии в пространстве Минковского и инвариантными относительно супервейлевских преобразований в искривленном суперпространстве. Кроме того, ограниченные правильно подобранными гармоническими связями суперполя  $\mathcal{N} = 2$  тензорных мультиплетов материи обладают конечным набором вспомогательных полей, и все модели самодействия этих суперполей дуальны специальным классам моделей  $q^+$ -гипермультиплетта [51]. Существует по крайней мере две причины, почему улучшенный тензорный мультиплет представляет интерес: он появляется как суперконформный компенсатор в новых минимальных формулировках  $\mathcal{N} = 1$  супергравитации (см. [37, 39]); он может играть роль голдстоуновского мультиплетта для частичного нарушения  $\mathcal{N} = 1$  суперконформной симметрии, связанного с косетом  $SU(2, 2|1)/(SO(4, 1) \times U(1))$ , включающим  $AdS_5$  как бозонное подпространство [68–71]. Замечательной особенностью улучшенного тензорного мультиплетта является то, что его супервейлевская инвариантность сохраняется и в массивном случае.

Одним из основных свойств низкоэнергетического эффективного действия в суперсимметричной теории поля является голоморфность [72]. Это свойство состоит в том, что в суперсимметричных теориях с комплексными суперполями, заданными на некотором подпространстве полного суперпро-

странства, конечные пертурбативные или непертурбативные квантовые поправки к классическому действию могут возникать в виде голоморфных функций этих суперполей, проинтегрированных по соответствующему подпространству. Примером голоморфности в  $\mathcal{N} = 1$  суперсимметрии может служить непертурбативный голоморфный киральный потенциал с его свойством неперенормируемости [73, 74].

Замечательной демонстрацией возможностей требования голоморфности эффективного действия является точное решение Зайберга–Виттена для эффективного действия в  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметричной теории Янга–Миллса [75, 76] в старшем порядке по пространственно-временным производным компонентных полей. Исходя из предположения о голоморфной зависимости эффективного действия от  $\mathcal{N} = 2$  киральной суперполевой напряженности  $\mathcal{W}$  в случае теории с калибровочной группой  $SU(2)$ , спонтанно нарушенной до  $U(1)$ , и используя идею  $S$ -дуальности, Зайберг и Виттен установили это действие точно с учетом непертурбативных вкладов инстантонов. В пределе ненарушенной  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметрии теория имеет пространство модулей [77, 78], на котором калибровочная группа  $SU(2)$  спонтанно нарушена до  $U(1)$ , и масштаб  $\Lambda$  этого нарушения оказывается динамическим параметром  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметричной теории Янга–Миллса. Все физические состояния могут быть классифицированы по ненарушенной подгруппе  $U(1)$ . Такие состояния, как фотон и все его нейтральные суперпартнеры, остаются безмассовыми, в то время как другие, электрически заряженные состояния, такие как калибровочные бозоны  $W^\pm$ , принадлежащие фактор-пространству  $SU(2)/U(1)$ , приобретают массу  $\sim \Lambda$ . При этом все заряженные состояния тяжелые, и их можно отинтегрировать. Таким образом, в работе Зайберга–Виттена предьявлен пример существования в разумно выбранной неабелевой калибровочной теории дуального эффекта Мейсснера, следствием которого является линейный конфайнмент. Этот результат стимулировал всплеск интереса к изучению эффективного действия  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметричных моделей с другими калибровочными группами и мультиплетами материи.

Еще одним ярким примером голоморфности в  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметричных моделях является аналитический эффективный потенциал  $(q^+)^4$ , построенный как интеграл по аналитическому подпространству  $\mathcal{N} = 2$  гармонического суперпространства [79]. Важно отметить, что как голоморфные, так и аналитические вклады в эффективное действие возникают только в ситуации с центральными BPS-зарядами.

Еще более замечательными свойствами обладает максимально суперсимметричная  $\mathcal{N} = 4$  теория поля Янга–Миллса. Она является ультрафиолетово-конечной и конформно-инвариантной, и существуют сильные аргументы в пользу того, что она самодуальна относительно непертурбативных  $SL(2, Z)$ -преобразований [80, 81]. Эффективное действие в такой теории является суперфункционалом как  $\mathcal{N} = 2$  напряженности, так и  $\mathcal{N} = 2$  гипермульти-

плета, связанных друг с другом дополнительной «скрытой»  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметрией. В работах [82–85] показано, что в кулоновской фазе  $\mathcal{N} = 4$ ,  $SU(2)$  калибровочной теории низкоэнергетическое эффективное действие, зависящее от  $\mathcal{N} = 2$  векторного мультиплета, имеет вид

$$\Gamma[\mathcal{W}, \bar{\mathcal{W}}] = c \int d^{12}z \ln \frac{\mathcal{W}^2}{\Lambda^2} \ln \frac{\bar{\mathcal{W}}^2}{\Lambda^2}. \quad (\text{B.3})$$

Важно подчеркнуть, что требования  $\mathcal{N} = 4$  суперсимметрии и суперконформной инвариантности так сильны, что этот неголоморфный потенциал определяется однозначно с точностью до числового коэффициента. Числовой коэффициент  $c$  был найден из прямых однопетлевых квантовых вычислений и равен  $(N-1)g^2/(4\pi)^2$  [86–89]. Существуют сильные указания на то, что этот однопетлевой эффект не ренормируется ни высшими петлями, ни непертурбативными поправками, и поэтому (B.3) является точным низкоэнергетическим эффективным действием.

В теориях, обладающих глобальными и локальными симметриями, которые не нарушены аномалиями, эффективное действие также должно обладать этими симметриями. При этом возникает задача нахождения таких методов построения эффективного действия, которые обеспечивают сохранение симметрий классического действия на всех этапах вычислений. Хорошо известно, что адекватная формулировка четырехмерных  $\mathcal{N} = 1$  суперсимметричных теорий поля достигается в терминах не ограниченных связями суперполей на  $\mathcal{N} = 1$  суперпространстве. Соответствующие приемы квантовых вычислений, обеспечивающие явную  $\mathcal{N} = 1$  суперсимметрию, достаточно давно разработаны и широко используются [37, 39]. В теориях с  $\mathcal{N} = 1$  суперсимметрией, таких как модель Весса–Зумино и  $\mathcal{N} = 1$  суперсимметричная теория Янга–Миллса, структура эффективного действия изучена достаточно полно [90–106, 212]. В частности, были найдены суперполевой эффективный потенциал и эффективный потенциал вспомогательных полей в модели Весса–Зумино [98] и общей кэлеровой сигма-модели [101], а также двухпетлевой киральный эффективный суперпотенциал [99]. В работе [91] был развит метод фонового поля Швингера–Де Витта в  $\mathcal{N} = 1$  теории Янга–Миллса, который используется для исследования ренормализационных свойств и построения эффективного действия. Методы анализа структуры эффективного действия в  $\mathcal{N} = 1$  моделях, позволяющие суммировать бесконечный набор диаграмм Фейнмана с произвольным числом внешних концов, за последние годы были значительно усовершенствованы [107–111].

Идея объединения Стандартной модели с гравитацией в последние годы рассматривается в рамках подхода, предполагающего существование единой непертурбативной теории суперструн, так называемой М-теории. Возмущения в окрестности различных вакуумов М-теории трактуются как фундаментальные струны одной из пертурбативных теорий суперструн, связанных друг с

другом преобразованиями дуальности. Преобразования дуальности между различными фазами М-теории соотносят, как правило, теории, одна из которых находится в режиме сильной связи. В зависимости от значений параметров (или областей пространства модулей М-теории) одни и те же наблюдаемые объекты могут описываться или как фундаментальные степени свободы одной из пертурбативных теорий, и/или как коллективные возбуждения типа солитоноподобных D-бран. Одно из следствий этого феномена — возможность интерпретации замкнутых струн как связанных состояний теории открытых струн. В теоретико-полевом пределе эти два типа струн воспроизводят, соответственно, гравитацию и калибровочные теории полей материи. Материя, описываемая в терминах открытых струн, ассоциирована с D-бранами и «живет» на некоторой поверхности, в то время как гравитация, отвечающая безмассовым возбуждениям замкнутых струн, распространяется внутри объема, ограниченного этой поверхностью. Гравитация в объеме связана с тензором напряженностей граничной калибровочной теории. Эти утверждения составляют сущность того, что называется голографической дуальностью.

Из гипотезы голографической дуальности следует, что корреляционные функции для тензора напряженностей в полевой теории можно связать с амплитудой распространения гравитонов между заданными точками на границе. В наиболее простых примерах этого соответствия геометрия многомерного пространства имеет вид прямого произведения  $AdS_5 \times S^5$ . Пятимерное пространство анти-де-Ситтера имеет четырехмерную границу, на которой «живет»  $\mathcal{N} = 4$  суперсимметричная масштабно-инвариантная и конечная теория Янга–Миллса. Такое соответствие  $AdS/CFT$  имеет много физически значимых проявлений\*. Для примера, спектр аномальных размерностей локальных операторов конформной калибровочной теории должен совпадать со спектром энергий частицы или, более точно, моды струны, распространяющейся в  $AdS$ -пространстве. Если соответствие  $AdS/CFT$  является истинным, желательнее получить геометрии типа  $AdS$  из первых принципов, исходя из пертурбативных диаграмм Фейнмана. Интересный шаг в этом направлении был сделан в работе [117], где содержится утверждение, что однопетлевые двух- и трехточечные функции в скалярной теории могут быть естественно описаны в терминах пропагаторов из объема к границе в  $AdS_5$ , проинтегрированных по положению точки в объеме. Оказалось, что в первично квантованной картине параметр Швингера играет роль радиальной координаты в  $AdS_5$  и, следовательно, интегрирование по этой переменной соответствует интегрированию по внутреннему пятому измерению. Однако начиная с четы-

---

\*Соответствие  $AdS/CFT$  было предложено Малдасеной в конце 1997 г. [116]. В последние годы это соответствие было обобщено на другие, не- $AdS$ -пространства и дуальные им не суперсимметричные и неконформные теории поля.

рехточечной функции ситуация усложняется и полностью удовлетворительная картина отсутствует. В интересной работе [118] обсуждается, каким образом фоновая геометрия может быть выявлена посредством изучения однопетлевого эффективного действия в несуперсимметричных теориях во внешних абелевых полях. Там показано, что надлежащая идентификация параметров Швингера в абелевом эффективном действии Гейзенберга–Эйлера предполагает интегрирование по геометриям  $AdS_3$ ,  $S_3$  и  $T^*S^3$ , в зависимости от типа внешнего поля.

С более общей точки зрения, производящий функционал Фрадкина–Цейтлина в теории струн [119,120] для безмассовых внешних фоновых полей, определяющий некоторые обобщения действия Борна–Инфельда (BI), должен совпадать с производящим функционалом для эффективного действия  $\mathcal{N} = 4$  суперсимметричной теории Янга–Миллса, включающего все квантовые поправки [121]. В теории открытой струны во внешнем постоянном абелевом векторном поле некоторые  $\alpha'$ -струнные поправки удается просуммировать во всех порядках [119]. Здесь в качестве эффективного действия, основанного на представлении производящего функционала для струнных амплитуд как интеграла Полякова с лагранжианом ковариантной 2D сигма-модели в экспоненте интеграла по путям, возникают известное действие Дирака–Борна–Инфельда (DBI) и его суперсимметричные расширения [121]. В 30-х годах прошлого века действие BI

$$L_{BI} = \sqrt{-\det(\eta_{mn} + F_{mn})} - 1 \quad (B.4)$$

было предложено как решение проблемы сингулярности точечноподобного заряда и бесконечности его энергии в теории Максвелла по аналогии с квадратичным корнем  $\sqrt{1 - v^2/c^2}$  действия релятивистской частицы [122, 123]. DBI-теория обладает многими замечательными свойствами; например, она причинна и дает нетривиальный пример систем с электромагнитной дуальностью. Суперсимметрия, как известно, совместима с принципом причинности, положительной плотностью энергии и дуальностью, так что аналогичные свойства можно ожидать и у суперсимметричных (правильно обобщенных) действий DBI [124–127]. Это в самом деле так для  $\mathcal{N} = 1$  действия DBI [129, 130], и должно быть верно и для  $\mathcal{N} = 2$  действия DBI [131–133]. Как хорошо известно,  $\mathcal{N} = 1$  действие DBI является действием Голдстоуна–Максвелла для  $\mathcal{N} = 1$  векторного супермультиплетта голдстоуновских полей, ассоциированных с частичным спонтанным нарушением суперсимметрии  $\mathcal{N} = 2 \rightarrow \mathcal{N} = 1$  [134–138]. Частичное нарушение  $\mathcal{N} = 4 \rightarrow \mathcal{N} = 2$  в  $\mathcal{N} = 2$  суперпространстве реализовать сложнее, так как естественной формулировки  $\mathcal{N} = 4$  калибровочных теорий со всеми суперсимметриями вне массовой оболочки в настоящее время не существует.

Современный интерес к действию DBI и его многочисленным суперсимметричным и неабелевым модификациям в контексте теории суперструн свя-



зан с действием пробной D3-браны, распространяющейся на искривленном фоне пространства анти-де-Ситтера и на фоне электрической части 4-формы R-R-потенциала, которые индуцированы большим числом  $N$  совпадающих бран [54]. Это действие имеет вид

$$S = -T_3 \int d^4x H^{-1}(X) \times \left[ \sqrt{-\det(\eta_{mn} + H(X) \partial_m X^i \partial_n X^i + H^{1/2}(X) F_{mn})} - 1 \right]. \quad (\text{B.5})$$

Здесь  $i = 1, \dots, 6, m, n = 1, \dots, 4$ ,  $T_3 = 1/2\pi g_s$  и  $H = 1 + Q/|X|^4$ ,  $Q \equiv (1/\pi)Ng_s$ . Полное действие содержит также член Черна–Саймонса, описывающий «магнитную» часть взаимодействия,  $S_{\text{mag}} = iN \int \epsilon_{i_1 \dots i_6} \frac{1}{|X|^6} X^{i_1} dX^{i_2} \wedge \dots \wedge dX^{i_6}$ . Центральным моментом гипотезы соответствия *AdS/CFT* является предположение о точной дуальной связи между ПВ супергравитационным описанием взаимодействия параллельных D-бран и низкоэнергетическим эффективным действием  $\mathcal{N} = 4$  суперсимметричной теории Янга–Миллса в кулоновской фазе спонтанного нарушения калибровочной симметрии (см. [139, 140]). В частности, было обнаружено, что потенциал взаимодействия D3-бран (протяженных объектов, являющихся решениями классических уравнений ПВ супергравитации), описываемый действием DBI, совпадает с лидирующим членом в низкоэнергетическом эффективном действии  $\mathcal{N} = 4$  суперсимметричной теории Янга–Миллса с калибровочной группой  $SU(N)$  при больших  $N$ , спонтанно нарушенной до максимальной абелевой подгруппы [141–143]. Таким образом, вычисление следующих вкладов в низкоэнергетическое эффективное действие  $\mathcal{N} = 4$  суперкалибровочных моделей оказалось очень важным для изучения взаимосвязи суперсимметричной квантовой теории поля и теории струн. Гипотеза о наличии такой тесной взаимосвязи служит сильной мотивацией для изучения квантовых поправок и их ренормализационных свойств в суперсимметричных теориях Янга–Миллса [107, 144, 145]\*.

Остановимся на этих вопросах несколько подробнее. Рассматривается случай, когда  $X^i = \text{const}$ , т. е. все производные скалярных полей игнорируются, а также предполагается, что  $Q/|X|^4 \gg 1$ , благодаря чему можно отбросить единицу в гармонической функции  $H$ . Тогда действие  $S$  становится таким же, как и действие пробной D3-браны в пространстве  $AdS_5 \times S^5$ , ориентированной параллельно границе  $AdS_5$ . Разлагая по степеням  $F$ , получим

\* Более полный список литературы можно найти в [107–111, 145, 187, 190–192, 207].

общую структуру разложения

$$S = \frac{1}{g_s} \int d^4x \sum_{l=0}^{\infty} c_l (g_s N)^l \frac{F^{2l+2}}{|X|^{4l}} \quad (\text{B.6})$$

с первыми членами

$$S = T_3 \int d^4x \left( \frac{1}{4} F^2 + \frac{1}{8} \frac{Q}{|X|^4} \left[ F^4 - \frac{1}{4} (F^2)^2 \right] + \right. \\ \left. + \frac{1}{12} \frac{Q^2}{|X|^8} \left[ F^6 - \frac{3}{8} F^4 F^2 + \frac{1}{32} (F^2)^3 \right] + \dots \right).$$

С точки зрения теории струн в режиме слабой связи ведущие члены взаимодействия между отдельными D-бранами описываются диаграммами типа «диск с дырками». Предел малого разделения должен быть представлен петлевыми поправками в суперсимметричной теории Янга–Миллса, в то время как предел большого разделения описывается через взаимодействие в классической супергравитации. Если коэффициент того или иного члена в потенциале взаимодействия струн оказывается не зависящим от расстояния (т. е. от безразмерного отношения разделения и  $\sqrt{\alpha'}$ ), то этот коэффициент должен быть одним и тем же и в квантовой суперсимметричной теории Янга–Миллса, и в лагранжиане взаимодействия классической супергравитации. На языке суперсимметричной теории Янга–Миллса вычисление потенциала взаимодействия между пучком D3-бран и параллельной пробной D3-браной, переносящей постоянное фоновое поле  $F_{mn}$ , соответствует вычислению эффективного квантового действия  $\Gamma$  на постоянном скалярном фоне  $\Phi^i$ , который нарушает симметрию  $SU(N+1)$  до  $SU(N) \times U(1)$ , и при постоянном  $U(1)$  калибровочном поле  $F_{mn}$ . Для взаимодействия между D3-бранами, т. е. в случае конечной  $\mathcal{N} = 4, D = 4$  суперсимметричной теории Янга–Миллса, разложение  $\Gamma$  по степеням безразмерного отношения  $F^2/|\Phi|^4$  имеет следующий общий вид:

$$\Gamma = \frac{1}{g_{\text{YM}}^2} \int d^4x \sum_{l=0}^{\infty} f_l (g_{\text{YM}}^2 N)^l \frac{F^{2l+2}}{|\Phi|^{4l}}. \quad (\text{B.7})$$

В плоском пределе (большие  $N$ , фиксированная  $\lambda \equiv g_{\text{YM}}^2 N$ ) функции  $f_l$  должны зависеть только от  $\lambda$ .

Наивное сравнение этого эффективного действия с супергравитационным разложением (B.6) (с отождествлением  $g_{\text{YM}}^2 = 2\pi g_s, |\Phi| = T_3 |X|$ ) приводит к гипотезе, что  $l$ -й член получает вклады только от  $l$ -го порядка в разложении эффективного действия  $\mathcal{N} = 4, D = 4$  суперсимметричной теории Янга–Миллса по числу петель. Это действительно справедливо для ведущего члена  $F^4/|X|^4$ , который появляется только в первой петле и отсутствует в более высоких порядках ввиду теоремы неперенормировки. Кроме

того, однопетлевой коэффициент члена  $F^4$  в  $\mathcal{N} = 4$  суперсимметричном эффективном действии оказывается в точном согласии с супергравитационным выражением. В работе [145] изучалось аналогичное соответствие для члена  $F^6$  путем явного вычисления его двухпетлевого коэффициента в  $\mathcal{N} = 4$  суперсимметричной теории Янга–Миллса. Лоренцева структура этого члена в эффективном действии такая же, как в супергравитационном действии DBI (форма абелева члена  $F^6$  на самом деле однозначно фиксируется  $\mathcal{N} = 1$  суперсимметрией), и плоская ( $N \gg 1$ ) часть коэффициента перед ним оказывается точно такой же, как коэффициент перед соответствующим членом в (В.6). В сочетании с тем известным фактом, что абелев член  $F^6$  не появляется в однопетлевом  $\mathcal{N} = 4$  эффективном действии, это наблюдение может означать, что указанный двухпетлевой коэффициент должен быть точным, т. е. абелев член  $F^6$  не получает вклады от всех высших петлевых ( $l \geq 3$ ) порядков.

Эта гипотеза была проверена в [141] в общем неабелевом случае. Было показано, что существует универсальное выражение  $N g_{\text{YM}}^2 \frac{F^6}{|X|^8}$  в  $\mathcal{N} = 4$  суперсимметричной теории Янга–Миллса, которое воспроизводит следующие за ведущими низкоэнергетические члены в супергравитационном потенциале между различными конфигурациями связанных состояний D-бран. Поскольку системы бран с разными фракциями суперсимметрии описываются существенно разными фоновыми конфигурациями, предположение о том, что все соответствующие потенциалы взаимодействия происходят из одного универсального выражения в суперсимметричной теории Янга–Миллса, накладывает весьма нетривиальные ограничения на возможную структуру этого выражения.

Суммируя сказанное, следует ожидать существования новой теоремы неперенормировки для абелева члена  $F^6$  в низкоэнергетическом эффективном действии, аналогичной известной теореме для  $F^4$ . Однако рассуждений на основе масштабной инвариантности и  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметрии недостаточно, чтобы доказать неперенормируемость члена  $F^6$ . Скорее всего, здесь необходимо использовать на полную мощность наличие в  $\mathcal{N} = 4$  теории Янга–Миллса 16 суперсимметрий, реализованных «деформированным» способом [142]. Поскольку  $F^6$ -член не появляется в однопетлевом низкоэнергетическом эффективном действии, можно ожидать его появления на двухпетлевом уровне. Гипотеза о существовании новой теоремы неперенормировки означает тогда, что  $F^6$ -член в эффективном действии существует только в двухпетлевом приближении.

Ситуация с вкладами членов типа  $F^8$  еще сложнее, так как существует большое количество различных инвариантов восьмого порядка, построенных из напряженности  $F_{mn}$ . В отличие от членов типа  $F^4$  и  $F^6$  суперсимметрия сама по себе не ограничивает вид инвариантов типа  $F^8$  единственным

способом —  $F^8$ -члены в действии DBI и в однопетлевом эффективном действии  $\mathcal{N} = 4$  суперсимметричной теории Янга–Миллса различны и имеют, в частности, различные лоренцевы структуры! В [145] была предложена следующая гипотеза об эффективном действии суперсимметричной теории Янга–Миллса: а) коэффициент перед  $F^8$  в разложении действия DBI (B.6) обусловлен вкладом в эффективное действие от трех петель, и этот вклад находится в точном согласии с действием супергравитации; б) коэффициент при однопетлевом вкладе  $F^8$  в эффективном действии  $\mathcal{N} = 4$  теории получает поправки от всех петель, при этом плоская часть результирующей ненулевой функции  $f_3(Ng_{\text{YM}}^2)$  в (B.7) стремится к нулю в пределе  $Ng_{\text{YM}}^2 \gg 1$ , как предсказывается соответствием *AdS/CFT*.

В работе [86] было высказано предположение о существовании в случае  $SU(N)$ ,  $N > 2$ , «незащищенных» неабелевых тензорных структур уже в порядке  $\sim v^4$ , из чего следовало бы, что доказательство теоремы о перенормировке применимо только для  $SU(2)$ -случая. В результате вычисления (в подходе гармонического суперпространства) двухпетлевого низкоэнергетического эффективного действия было обнаружено, что в пределе больших  $N$  его коэффициент в точности совпадает с коэффициентом перед соответствующим членом в разложении действия DBI-взаимодействия между пучком  $N$  D3-бран и параллельной пробной D3-браной. Этот результат позволяет высказать сильное предположение о том, что соответствие между низкоэнергетическим эффективным действием  $\mathcal{N} = 4$  суперсимметричной теории Янга–Миллса и потенциалом взаимодействия D3-бран может быть продолжено до более высоких порядков. Члены высших порядков  $F^{2l+2}/|X|^{4l}$  в эффективном действии должны быть бозонной частью комбинации нескольких  $\mathcal{N} = 1$  (или  $\mathcal{N} = 2$ ) суперинвариантов [144]. Только один из них (для каждого  $l$ ) должен иметь «защищенный» коэффициент, который получает вклад только от  $l$ -й петли. Именно этот член (его плоская часть) должен выживать в пределе сильной связи, и он должен быть в согласии с подобными же структурами в разложении действия DBI, в соответствии с предсказаниями гипотезы *AdS/CFT*.

Есть основания полагать, что  $\mathcal{N} = 4$  суперсимметричная теория поля Янга–Миллса самодуальна [80]. Первоначально это свойство было сформулировано как дуальность между обычным и солитонным секторами теории. Относительно недавно было выдвинуто предположение [124, 125], частично инспирированное идеями теории Зайберга–Виттена, а также *AdS/CFT*-соответствия [116] и состоящее в том, что самодуальность может быть реализована в терминах низкоэнергетического эффективного действия теории на кулоновской ветви. На этой ветви калибровочная группа  $SU(N)$  спонтанно нарушена до  $SU(N-1) \times U(1)$ , и динамика описывается одним  $\mathcal{N} = 2$  векторным мультиплетом, соответствующим  $U(1)$ -фактору ненарушенной группы. Были предложены два различных сценария реализации требования самоду-

альности для  $\mathcal{N} = 4$  суперсимметричного эффективного действия в  $\mathcal{N} = 2$  суперпространстве: а) самодуальность относительно преобразования Лежандра [126, 127]; б) самодуальность относительно  $U(1)$ -вращений [125]. До сих пор ни один из этих сценариев не был выведен из первых принципов, и эти предложения по-прежнему остаются только гипотезами. Тем не менее некоторые формы самодуальности  $\mathcal{N} = 4$  суперсимметричного эффективного действия выглядят довольно вероятными в контексте  $AdS/CFT$ -соответствия, и этот вопрос активно обсуждался в литературе [124–127]. Определенное подтверждение этих гипотез имеется на уровне одной петли [125–128]. Оказывается, что дальнейшее подтверждение можно получить и на уровне двух петель, и это есть основной результат большой серии работ [107–114]. Если эффективное действие действительно самодуально в пределе больших  $N$  в смысле сценариев а), б), то должно существовать бесконечное число теорем о неперенормировке. Это следствие возможной самодуальности представляет большой интерес с точки зрения его проверки в суперсимметричной квантовой теории поля.

Все вышеупомянутые результаты о структуре неголоморфного потенциала были получены только для той части эффективного действия, которая зависит от полей  $\mathcal{N} = 2$  калибровочного мультиплетта. Проблема построения ведущего вклада в полное эффективное действие, зависящее как от  $\mathcal{N} = 2$  калибровочного мультиплетта, так и от полей гипермультиплетта, была решена Бухбиндером и Ивановым (БИ) [146]. Вычисление в [146] основано на чисто алгебраическом анализе, исходящем из требования дополнительных скрытых  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметрий на массовой оболочке в  $\mathcal{N} = 4$  суперсимметричной теории Янга–Миллса, сформулированной в  $\mathcal{N} = 2$  суперпространстве. Явная  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметрия вне массовой оболочки и скрытые суперсимметрии в уравнениях движения составляют полный набор суперсимметрий  $\mathcal{N} = 4$  суперсимметричной теории Янга–Миллса. Было показано, что потенциал (В.3) (а также его обобщения для  $SU(N)$ -моделей) может быть дополнен до  $\mathcal{N} = 4$  суперсимметричной формы посредством добавления подходящих членов, зависящих от суперполей гипермультиплетта. Структура этих членов однозначно определяется скрытой суперсимметрией. В результате эффективное действие, полученное в [146], имеет вид

$$\Gamma_q = c \int d^{12}z du \left\{ (X-1) \frac{\ln(1-X)}{X} + [\text{Li}_2(X) - 1] \right\}, \quad X = -2 \frac{q^{+a} q_a^-}{\mathcal{W}\bar{\mathcal{W}}}, \quad (\text{В.8})$$

где  $c$  — тот же числовой коэффициент, что и в неголоморфном потенциале (В.3), и  $\text{Li}_2(X)$  — дилогарифм Эйлера. Кроме того, никакие нелогарифмические члены в низкоэнергетическом эффективном действии не допускают такого дополнения и, следовательно, исключаются ограничениями, накладываемыми  $\mathcal{N} = 4$  суперсимметрией. Открытой проблемой некоторое время

оставалось построение эффективного действия (В.8) путем прямого вычисления супердиаграмм в рамках квантовой теории поля. В работах [147] и [215, 216] эта проблема была также решена.

Объединение гравитации, суперсимметрии и калибровочных теорий приводит к теориям супергравитации с числом суперсимметрий в диапазоне от  $\mathcal{N} = 1$  до  $\mathcal{N} = 8$ . Когда  $\mathcal{N} \geq 4$ , минимальный мультиплет супергравитации содержит скаляры, так что нелинейность действия гравитации с необходимостью приводит к нелинейности кинетического члена скалярных полей. Таким образом, нелинейные сигма-модели (см. обзор в [148]) являются частью лагранжиана расширенной супергравитации. Также существует другой сильный аргумент в пользу изучения классических и квантовых аспектов нелинейных сигма-моделей. Принцип спонтанного нарушения симметрии является определяющим для феноменологических приложений квантовой теории поля (см., например, [156, 164, 165]). Спонтанно нарушенные глобальные симметрии не реализуются как преобразования симметрии физических состояний, поскольку они не оставляют вакуум инвариантным. Тогда (согласно теореме Голдстоуна) спектр физических состояний всегда включает безмассовые частицы для каждого генератора нарушенной симметрии, с сильно нелинейным эффективным действием [149]. В общем случае скалярные поля сигма-модели принимают значения в римановом многообразии с положительно определенной метрикой, что обусловлено требованием отсутствия состояний с отрицательной нормой (требованию положительной определенности метрики удовлетворяют компактные, обычно симметрические пространства).

Существует тесная связь между сигма-моделями с расширенным числом суперсимметрий и комплексными геометриями. Классическими стали три следующих результата. 1. Кэлерово многообразие является пространством полей для суперсимметричных сигма-моделей с четырьмя суперзарядами ( $D \leq 4$ ) [150]. В четырех измерениях ( $D = 4$ ) такие сигма-модели обладают  $\mathcal{N} = 1$  суперсимметрией. 2. На гиперкэлеровых многообразиях «живут» суперсимметричные сигма-модели с восемью суперзарядами ( $D \leq 6$ ) [151, 152]. В четырех измерениях ( $D = 4$ ) такие сигма-модели обладают  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметрией [210]. 3. Кватернион-кэлерово многообразие является пространством суперполей для локально суперсимметричных сигма-моделей с восемью суперзарядами ( $D \leq 6$ ) [153]. Суперпространство как метод исследования обеспечивает уникальные возможности для построения общих суперсимметричных сигма-моделей (см., например, [154] в качестве обзора и источника полной библиографии по этому вопросу). В отличие от 2D-моделей 4D нелинейные суперсимметричные сигма-модели неперенормируемы по индексу расходимости, так же как их 4D несуперсимметричные прообразы. Это главная причина, почему квантовые аспекты таких моделей недостаточно хорошо изучены (некоторые аспекты этой проблемы рассмотрены в [217]).

Тот факт, что к настоящему времени не найдено экспериментальных доказательств суперсимметрии, означает, что на достижимых масштабах энергии она себя не проявляет, и это порождает проблему поиска теоретических механизмов, ответственных за ее нарушение. Одной из возможностей является так называемое мягкое нарушение суперсимметрии. Оно используется в суперсимметричных калибровочных теориях и состоит в том, что к действию добавляются некоторые массовые члены, которые сохраняют калибровочную инвариантность, но нарушают суперсимметрию. Если суперсимметрия спонтанно нарушена, то вспомогательные поля приобретают отличные от нуля вакуумные значения, и в результате появляются спинорные безмассовые поля Голдстоуна (голдстино). Однако стандартные методы нарушения суперсимметрии могут привести к потере замечательных квантовых свойств суперсимметричных теорий или по крайней мере ограничить область их применения [155]. Таким образом, поиск и изучение альтернативных схем нарушения суперсимметрии остается важной задачей.

Как явствует из всего сказанного, в настоящее время существует много гипотез, тесно связанных с теорией струн, о структуре низкоэнергетического эффективного действия суперсимметричной теории Янга–Миллса и нелинейных суперсимметричных кэлеровых и гиперкэлеровых сигма-моделей. Проверка этих гипотез требует явных многопетлевых вычислений. Предполагаемые дуальности, обсуждавшиеся выше, позволяют использовать методы суперсимметричной квантовой теории поля для изучения теории струн, а также использовать методы теории струн для изучения эффективного действия в теории поля.

В данном обзоре излагаются явно ковариантные методы разложения по производным суперполевого теплового ядра и основанная на них техника вычисления однопетлевых вкладов в эффективное действие в рамках метода фонового поля для различных моделей квантовой теории поля с расширенной суперсимметрией. Следует особо подчеркнуть, что специфическими особенностями суперполевых формулировок в терминах препотенциалов является их неполиномиальность, а также сложности, связанные, например, с гармоническими сингулярностями и необходимостью их сокращения. При наивном построении теории возмущений эти обстоятельства приводят к непреодолимым трудностям, связанным с необходимостью суммирования бесконечного числа супердиаграмм. Поэтому для эффективной работы с  $\mathcal{N} = 1$  и гармоническими  $\mathcal{N} = 2$  суперграфами потребовалось изобрести много новых нетривиальных приемов изучения структуры эффективного действия, рассматриваемых в данном обзоре.

Обзор организован следующим образом.

В разд. 1 изучается структура низкоэнергетического эффективного действия в расширенных суперсимметричных полевых моделях, сформулированных в  $\mathcal{N} = 1$  суперпространстве. Дается вывод разложения по производным

однопетлевого эффективного действия  $\mathcal{N} = 4$  суперсимметричной теории Янга–Миллса, содержащей как поля  $\mathcal{N} = 2$  векторного мультиплетта, так и гипермультиплетные поля. Рассматривается формулировка  $\mathcal{N} = 4$  суперсимметричной теории Янга–Миллса в терминах  $\mathcal{N} = 1$  суперполей, и получено однопетлевое эффективное действие в приближении постоянных абелевых напряженностей  $F_{mn}$  и постоянных полей гипермультиплеттов. Полученное действие представляется в виде разложения по суперковариантным производным и переписывается в терминах  $\mathcal{N} = 2$  суперконформных инвариантов. В частности, таким образом воспроизведено полное  $\mathcal{N} = 4$  суперсимметричное низкоэнергетическое эффективное действие из работы [146] и найдены следующие за ведущими вклады в это действие.

Отмечается, что  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметричные функционалы с высшими производными, построенные из гармонических суперполей  $\mathcal{N} = 2$  векторного мультиплетта и гипермультиплетта, не являются автоматически инвариантными относительно исходных преобразований скрытой  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметрии на массовой оболочке. Чтобы обеспечить инвариантность таких функционалов, требуется деформация преобразований скрытой суперсимметрии членами, содержащими производные гипермультиплетта. Используя формулировку  $\mathcal{N} = 4$  теории Янга–Миллса в  $\mathcal{N} = 2$  гармоническом суперпространстве и анализируя возможные деформации преобразований скрытой  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметрии, мы строим  $\mathcal{N} = 4$  расширение члена типа  $F^6$  в эффективном действии. Такое расширение содержит как гармонические суперполя с высшими производными, отвечающие  $\mathcal{N} = 2$  калибровочному мультиплету, так и гармонические суперполя гипермультиплетта с высшими производными. При этом найдена подходящая деформация преобразований скрытой  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметрии. В результате построен суперполевой функционал, инвариантный как относительно преобразований явной  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметрии, так и относительно деформированных преобразований скрытой  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметрии, и содержащий член  $F^6$  в компонентном разложении.

В разд. 2 развивается систематический подход в  $\mathcal{N} = 2$  гармоническом суперпространстве к построению однопетлевого эффективного действия  $\mathcal{N} = 4$  суперсимметричной теории Янга–Миллса, включающего суперполя  $\mathcal{N} = 2$  векторного мультиплетта вкпе с фоновыми полями гипермультиплетта. В рамках формулировки  $\mathcal{N} = 4$  суперсимметричной теории через  $\mathcal{N} = 2$  гармонические суперполя однопетлевое эффективное действие строится с использованием техники ковариантных  $\mathcal{N} = 2$  гармонических суперграфов. Вычисления проводятся для постоянной абелевой напряженности  $F_{mn}$  и соответствующих постоянных полей гипермультиплетта. Построено зависящее от полей гипермультиплетта эффективное действие, и оно представлено в виде интеграла по аналитическому подпространству гармонического суперпространства. Далее показано, что каждый член низкоэнергетического эффективного действия



в разложении Швингера–де Витта можно записать как интеграл по полному  $\mathcal{N} = 2$  суперпространству.

Задачи, рассмотренные в разд. 1 и 2, частично перекрываются. Разница состоит в том, что в разд. 1 развивается подход к эффективному действию, когда рассматриваемые модели сформулированы в терминах  $\mathcal{N} = 1$  суперполей и эффективное действие обладает явной  $\mathcal{N} = 1$  суперсимметрией. В разд. 2 исследуются модели, сформулированные в  $\mathcal{N} = 2$  гармоническом суперпространстве. Соответствующее эффективное действие обладает явной  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметрией. В результате мы можем оценить возможности и достоинства двух указанных выше подходов.

В разд. 3 изучается однопетлевое низкоэнергетическое эффективное действие в секторе гипермультиплета для  $\mathcal{N} = 2$  суперконформных моделей. Любая такая модель содержит  $\mathcal{N} = 2$  векторный мультиплет и некоторое количество гипермультиплетов. Предполагается, что калибровочная группа  $G$  нарушена до  $\tilde{G} \times K$ , где  $K$  является абелевой подгруппой и фоновый векторный мультиплет принадлежит подалгебре Картана, соответствующей  $K$ . Найдено общее выражение для низкоэнергетического эффективного действия в форме интеграла по собственному времени. Построены ведущие, зависящие от пространственно-временных производных суперполей вклады в эффективное действие и анализируется их компонентная структура в бозонном секторе. Компонентное действие содержит члены с тремя и четырьмя пространственно-временными производными полей и имеет вид, аналогичный действию Черна–Саймонса.

В разд. 4 рассматривается  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметричная теория массивных полей Янга–Миллса, сформулированная в  $\mathcal{N} = 2$  гармоническом суперпространстве. Приводятся различные калибровочно-инвариантные формы записи массового слагаемого в действии, в частности, с применением штюкельбергова суперполя, ведущие к дуальным формулировкам теории с использованием тензорного мультиплета. Развивается калибровочно-инвариантная и явно суперсимметричная схема петлевого разложения суперполевого эффективного действия вне массовой оболочки. В рамках этой схемы вычисляются калибровочно-инвариантные и явно  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметричные однопетлевые контрчлены, включая контрчлены, зависящие от штюкельбергова суперполя. Анализируется компонентная структура таких контрчленов.

Изложение материала частично носит обучающий характер и ставит своей целью ввести читателя в активно развивающееся направление современной теоретической физики. Для удобства читателя каждый из разделов обзора содержит введение, обсуждение и итоги, касающиеся только этого раздела, что позволяет в принципе читать каждый раздел независимо от остальных. Конечно, основные мотивации, цели и методы исследования являются общими для всей работы.

## 1. ОДНОПЕТЛЕВОЕ ЭФФЕКТИВНОЕ ДЕЙСТВИЕ В $\mathcal{N} = 4$ СУПЕРСИММЕТРИЧНОЙ ТЕОРИИ ЯНГА–МИЛЛСА В ФОРМАЛИЗМЕ $\mathcal{N} = 1$ СУПЕРПРОСТРАНСТВА

**1.1. Введение.** В настоящее время активно изучаются различные квантовые аспекты низкоэнергетической струнной динамики и соответствия  $AdS/CFT$  [116]. Результатом этих исследований явилась гипотеза (см. подробности в [139, 145]) о том, что суперконформная версия действия Дирака–Борна–Инфельда совпадает с суммой членов разложения квантового эффективного действия  $\mathcal{N} = 4$  суперсимметричной теории Янга–Миллса в кулоновской фазе, а структура некоторых членов этого разложения определяется теоремами неперенормировки.

Целью данного раздела является вывод разложения по производным однопетлевого эффективного действия  $\mathcal{N} = 4$  суперсимметричной теории Янга–Миллса, включающего как поля  $\mathcal{N} = 2$  векторного мультиплетта, так и поля гипермультиплетта. Рассматривается формулировка  $\mathcal{N} = 4$  суперсимметричной теории Янга–Миллса в терминах  $\mathcal{N} = 1$  суперполей. В приближении постоянных абелевых напряженностей  $F_{mn}$  и постоянных полей гипермультиплетта получено однопетлевое эффективное действие, выраженное через  $\mathcal{N} = 1$  суперполя. Полученное действие представляется в виде разложения по суперковариантным производным, и может быть эквивалентно переписано через  $\mathcal{N} = 2$  суперполя. В частности, таким образом можно воспроизвести полное  $\mathcal{N} = 4$  суперсимметричное низкоэнергетическое эффективное действие DBI [146] и найти следующие за ведущими вклады в это действие.

**1.2.  $\mathcal{N} = 4$  суперсимметричная теория Янга–Миллса.** Нашей целью является вычисление однопетлевого эффективного действия  $\mathcal{N} = 4$  суперсимметричной теории Янга–Миллса, учитывающего все поля  $\mathcal{N} = 4$  векторного мультиплетта. В настоящее время подход  $\mathcal{N} = 2$  гармонического суперпространства рассматривается как наиболее удобный и адекватный инструмент описания динамики  $\mathcal{N} = 4$  векторного мультиплетта. В рамках этого подхода  $\mathcal{N} = 4$  суперсимметричная теория Янга–Миллса представляется как  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметричная теория Янга–Миллса, дополненная минимальным взаимодействием с гипермультиплетом в присоединенном представлении калибровочной группы.

Известно, что точная квантовая динамика  $\mathcal{N} = 4$  суперсимметричной теории Янга–Миллса в низкоэнергетическом пределе в секторе  $\mathcal{N} = 2$  векторного мультиплетта задается неголоморфным эффективным потенциалом  $\mathcal{H}(\mathcal{W}, \bar{\mathcal{W}})^*$ , зависящим от  $\mathcal{N} = 2$  напряженностей  $\mathcal{W}, \bar{\mathcal{W}}$  (см. [52, 86]). Точ-

---

\*Низкоэнергетическое эффективное действие для произвольной  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметричной теории Янга–Миллса содержит также голоморфный эффективный потенциал [74], который отсутствует в  $\mathcal{N} = 4$  калибровочной теории.

ная форма неголоморфного потенциала для калибровочной группы  $SU(N)$ , спонтанно нарушенной до ее максимального тора, имеет вид

$$\mathcal{H}(\mathcal{W}, \bar{\mathcal{W}}) = c \sum_{I < J} \ln \left( \frac{\mathcal{W}^I - \mathcal{W}^J}{\Lambda} \right) \ln \left( \frac{\bar{\mathcal{W}}^I - \bar{\mathcal{W}}^J}{\Lambda} \right). \quad (1.1)$$

Здесь  $\Lambda$  — масштабный параметр,  $I, J = 1 \dots N$  и  $c = 1/(4\pi)^2$ . Выражение (1.1) определяет точный низкоэнергетический потенциал в ведущем порядке разложения по внешним импульсам в секторе  $\mathcal{N} = 2$  калибровочного суперполя. Следует отметить, что выражение (1.1) является достаточно общим и с точностью до числового множителя может быть получено из симметричных соображений — требований масштабной инвариантности и  $R$ -симметрии. Кроме того, потенциал (1.1) не ренормируется ни пертурбативными поправками высших петель, ни инстантонными вкладами. Все указанные свойства очень важны для понимания низкоэнергетической квантовой динамики  $\mathcal{N} = 4$  суперсимметричной теории Янга–Миллса в кулоновской фазе. В частности, эффективный потенциал (1.1) представляет собой следующий за ведущим член во взаимодействии между параллельными D3-бранами в теории суперструн. Предполагается, что полное  $\mathcal{N} = 4$  суперсимметричное эффективное действие теории Янга–Миллса, полученное суммированием всех квантовых поправок, должно воспроизводить (с некоторыми оговорками) действие Дирака–Борна–Инфельда [141], как предсказывается  $\mathcal{N} = 4$  версией соответствия между суперсимметричной теорией Янга–Миллса и супергравитацией. Обсуждение этого соответствия и его проверка в двух петлях представлены в работе [145] (также см. изучение аналогичной проблемы для неабелевого фона в работе [107]), а общий подход к вычислению поправок от высших петель — в работе [40].

Для выяснения структуры ограничений на эффективное действие, обусловленных  $\mathcal{N} = 4$  суперсимметрией, и для более глубокого анализа соответствия « $\mathcal{N} = 4$  суперсимметричная теория Янга–Миллса/супергравитация» необходимо изучать эффективное действие не только в секторе  $\mathcal{N} = 2$  векторного мультиплетта, а полностью учитывать все поля  $\mathcal{N} = 4$  векторного мультиплетта. Данная проблема оставалась нерешенной в течение длительного времени. В сравнительно недавней работе [146] было найдено полное точное низкоэнергетическое эффективное действие, зависящее как от  $\mathcal{N} = 2$  калибровочного суперполя, так и от гипермультиплетта. Было показано, что вытекающие из требований скрытой  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметрии алгебраические ограничения на структуру низкоэнергетического эффективного действия в рамках  $\mathcal{N} = 2$  гармонического суперпространства оказываются настолько жесткими, что позволяют восстановить зависимость эффективного действия от полей гипермультиплетта исходя из известного неголоморфного эффективного потенциала (1.1). В итоге дополнительные, завися-

щие от гипермультиплетных полей вклады, содержащие на массовой поверхности  $\mathcal{W}, \bar{\mathcal{W}}$  и поля гипермультиплетов  $q^{ia}$ , представляются эффективным действием

$$\mathcal{L}_q = c \left\{ (X - 1) \frac{\ln(1 - X)}{X} + [\text{Li}_2(X) - 1] \right\}, \quad X = -\frac{q^{ia}q_{ia}}{\mathcal{W}\bar{\mathcal{W}}}, \quad (1.2)$$

где  $\text{Li}_2(X)$  — дилогарифм Эйлера, а  $c$  — та же постоянная, что и в (1.1) (обозначения и подробности см. в [146]). Эффективный лагранжиан (1.2) вместе с неголоморфным эффективным потенциалом (1.1) определяют точное  $\mathcal{N} = 4$  суперсимметричное низкоэнергетическое эффективное действие в исследуемой теории.

Ведущий низкоэнергетический эффективный лагранжиан (1.2) получен в работе [146] на основе чисто алгебраического анализа. Весьма интересной представляется возможность получения такого лагранжиана и следующих поправок к нему в разложении по внешним импульсам прямыми вычислениями в рамках квантовой теории поля. Данная проблема довольно непростая, поскольку выражение (1.2) содержит степени  $X$  и имеет сингулярность в точке  $\mathcal{W} = 0$ . Поэтому искомым результатом невозможно получить, рассматривая фейнмановские диаграммы с заданным числом внешних линий гипермультиплетных и калибровочных полей; требуется просуммировать все такие диаграммы. В работе [147] проблема вычисления эффективного лагранжиана (1.2) решена с помощью техники ковариантных гармонических суперграфов [41]. Более общей является проблема вычисления на основе квантово-полевого или алгебраического подходов следующих за ведущими членами эффективного действия, которые зависели бы от всех полей  $\mathcal{N} = 4$  супермультиплета, а также представления таких членов в полностью  $\mathcal{N} = 4$  суперсимметричной форме.

Данный раздел посвящен решению именно такой задачи для однопетлевого эффективного действия. Изучается разложение по производным однопетлевого эффективного лагранжиана  $\mathcal{L}_{\text{eff}}$ , зависящего как от  $\mathcal{N} = 2$  фоновых калибровочных суперполей и их спинорных производных до некоторого порядка, так и от фоновых гипермультиплетных суперполей. Для этих целей используется формулировка  $\mathcal{N} = 4$  суперсимметричной теории Янга–Миллса в терминах  $\mathcal{N} = 1$  суперполей [37, 39] а также техника разложения по производным в  $\mathcal{N} = 1$  суперпространстве [211, 213, 214]. Такой подход позволяет получить точные коэффициенты при различных степенях спинорных ковариантных производных от постоянной в пространстве-времени  $\mathcal{N} = 2$  суперполевой абелевой напряженности  $\mathcal{W}$ . Отметим, что такая фоновая напряженность принадлежит подалгебре Картана калибровочной группы  $SU(N)$ , спонтанно нарушенной до  $U(1)^{n-1}$ . Аналогично гипермультиплетные поля

$q^{ia}$  также выбираются постоянными в пространстве-времени. Имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{W} = \Phi = \text{const}, \quad D_\alpha^i \mathcal{W} = \lambda_\alpha^i = \text{const}, \quad q^{ia} = \text{const}, \\ D_{(\alpha}^i D_{\beta)j} \mathcal{W} = F_{\alpha\beta} = \text{const}, \quad D^{\alpha(i} D_\alpha^{j)} \mathcal{W} = 0, \quad D_\alpha^i q^{aj} = 0, \quad D_\alpha^i q^{aj} = 0, \end{aligned} \quad (1.3)$$

где  $\Phi = \text{diag}(\Phi^1, \Phi^2, \dots, \Phi^n)$ ,  $\sum \Phi^I = 0$ . Данный фон является простейшим и позволяет провести точные вычисления однопетлевого эффективного действия. Далее будет показано, что для данного фона  $\mathcal{N} = 1$  суперполевого эффективное действие может быть однозначно получено посредством простой замены переменных в эффективном действии без учета гипермультиплетных полей. Используя процедуру, описанную в работе [144], полученный результат можно записать в  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметричной форме, включающей полную зависимость от гипермультиплетных полей. Следует особо отметить, что фон (1.3) является специальным суперсимметричным решением классических уравнений движения для  $\mathcal{N} = 4$  суперсимметричной теории Янга–Миллса, записанной в терминах  $\mathcal{N} = 1$  суперполей. Следовательно, полученное эффективное действие не зависит от выбора калибровки для  $\mathcal{N} = 1$  калибровочных суперполей. Кроме того, можно показать, что фон (1.3) допускает эквивалентное представление в терминах  $\mathcal{N} = 2$  суперполей, поэтому и окончательный результат можно записать в явно  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметричной форме. Однако данный фон не инвариантен относительно преобразований скрытой  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметрии, дополняющей явную  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметрию до  $\mathcal{N} = 4$ . Преобразования  $\mathcal{N} = 4$  суперсимметрии на массовой поверхности смешивают физические поля из  $\mathcal{N} = 2$  векторного мультиплета и гипермультиплета. Однако фон (1.3) не содержит входящих в гипермультиплет физических спинорных полей, которые должны преобразовываться через физические скалярные поля из  $\mathcal{N} = 2$  векторного мультиплета при преобразованиях скрытой  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметрии. Поскольку явная  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметрия присутствует, а исходная скрытая  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметрия нарушена, нет оснований ожидать, что полученное на этом фоне эффективное действие будет обладать  $\mathcal{N} = 4$  инвариантностью.

Далее мы будем исследовать ведущий низкоэнергетический вклад в эффективное действие, который не содержит спинорных производных от напряженности  $\mathcal{W}$  и полей гипермультиплета, т. е. является эффективным потенциалом (1.2). Мы покажем, как следует деформировать преобразования исходной скрытой  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметрии, чтобы обеспечить полную  $\mathcal{N} = 4$  суперсимметрию такого эффективного потенциала.

**1.3. Суперполевые формулировки  $\mathcal{N} = 4$  суперсимметричной теории Янга–Миллса.** Формулировка  $\mathcal{N} = 4$  суперсимметричной теории Янга–Миллса с явной  $\mathcal{N} = 4$  суперсимметрией вне массовой поверхности в настоящее время неизвестна. Поэтому изучение конкретных квантовых аспектов этой теории обычно основывается на ее других формулировках — либо в тер-

минах физических компонентных полей, либо в терминах  $\mathcal{N} = 1$  суперполей (см., например, [37]), либо в терминах  $\mathcal{N} = 2$  гармонических суперполей [51, 56]. В первом случае все четыре суперсимметрии реализованы как скрытые, во втором — одна суперсимметрия явная и три скрытых, и в третьем случае две суперсимметрии реализованы явно и две как скрытые. Во всех случаях часть суперсимметрий замыкается только на массовой поверхности. Для квантовых вычислений в  $\mathcal{N} = 4$  суперсимметричной теории Янга–Миллса желательно иметь максимальное число реализованных явно суперсимметрий. С этой точки зрения использование  $\mathcal{N} = 2$  гармонического суперпространства является наиболее удобным. Однако формулировка в терминах  $\mathcal{N} = 1$  суперполей имеет свои преимущества, обусловленные относительно простой структурой  $\mathcal{N} = 1$  суперпространства и большим накопленным опытом работы с  $\mathcal{N} = 1$  суперграфами.

На массовой поверхности  $\mathcal{N} = 4$  векторный мультиплет можно описать в терминах  $\mathcal{N} = 4$  суперполей  $W^{AB}$ ,  $A, B = 1, \dots, 4$ , удовлетворяющих условию вещественности

$$W^{AB} = \frac{1}{2}\varepsilon^{ABCD}W_{CD}, \quad W_{AB} = \bar{W}^{AB}$$

и условиям массовой поверхности

$$\bar{D}_{A\dot{\alpha}}W^{BC} = \frac{1}{3}\delta_A^{[B}\bar{D}_{E\dot{\alpha}}W^{EC]}, \quad D_\alpha^{(A}W^{B)C} = 0.$$

Суперполе  $W^{AB}$  содержит все физические поля  $\mathcal{N} = 4$  векторного мультиплета. К сожалению, явно  $\mathcal{N} = 4$  суперсимметричного действия вне массовой поверхности для  $\mathcal{N} = 4$  суперсимметричной теории Янга–Миллса до сих пор не найдено.

**1.4. Формулировка  $\mathcal{N} = 4$  суперсимметричной теории Янга–Миллса в  $\mathcal{N} = 1$  суперпространстве.** Состав физических полей суперполя  $W^{AB}$  совпадает с составом таких полей у совокупности трех  $\mathcal{N} = 1$  киральных суперполей и одного  $\mathcal{N} = 1$  векторного мультиплета [37]. Шесть вещественных скаляров, которые являются низшими компонентами суперполя  $W^{AB}$ , отождествляются с тремя комплексными скалярными компонентами киральных  $\mathcal{N} = 1$  суперполей  $\Phi^i$ . Три из четырех вейлевских фермионов, присутствующих в  $W^{AB}$ , вкладываются в  $\Phi^i$ , а оставшийся фермион отождествляется с гэйджино и вместе с вещественным калибровочным векторным полем помещается в  $\mathcal{N} = 1$  векторный мультиплет  $V$ . При таком описании подгруппа  $SU(3) \otimes U(1)$  группы  $SU(4)$   $R$ -симметрии остается явной, и представления  $SU(4)$  распадаются по представлениям этой подгруппы согласно правилу  $\mathbf{6} \rightarrow \mathbf{3} + \bar{\mathbf{3}}$ ,  $\mathbf{4} \rightarrow \mathbf{3} + \mathbf{1}$ . Таким образом, киральные суперполя  $\Phi^i$  преобразуются как  $\mathbf{3}$ -группы  $SU(3)$ , антикиральные  $\bar{\Phi}_i$  как  $\bar{\mathbf{3}}$ , а векторный мультиплет является  $SU(3)$ -синглетом.

Действие  $\mathcal{N} = 4$  суперсимметричной теории Янга–Миллса записывается в  $\mathcal{N} = 1$  суперпространстве следующим образом:

$$S = \frac{1}{g^2} \text{tr} \left( \int d^4x d^2\theta W^2 + \int d^4x d^4\theta \bar{\Phi}_i e^V \Phi^i e^{-V} + \right. \\ \left. + \frac{1}{3!} \int d^4x d^2\theta i c_{ijk} \Phi^i [\Phi^j, \Phi^k] + \frac{1}{3!} \int d^4x d^2\bar{\theta} i c^{ijk} \bar{\Phi}_i [\bar{\Phi}_j, \bar{\Phi}_k] \right). \quad (1.4)$$

Мы используем обозначения и соглашения, принятые в книге [37]. Все суперполя принимают значения в присоединенном представлении калибровочной группы. Кроме явной  $\mathcal{N} = 1$  суперсимметрии и  $SU(3)$ -симметрии, действующей на индексы  $i, j, k, \dots$  суперполей  $\Phi$  и  $\bar{\Phi}$ , действие обладает скрытой глобальной суперсимметрией, задаваемой преобразованиями

$$\begin{aligned} \delta W_\alpha &= -\epsilon_\alpha^i \bar{\nabla}^2 \bar{\Phi}_{ci} + i \epsilon_\alpha^i \nabla_{\alpha\dot{\alpha}} \Phi_c^i, \\ \delta \bar{W}_{\dot{\alpha}} &= -\bar{\epsilon}_{\dot{\alpha}i} \nabla^2 \Phi_c^i + i \epsilon^{\alpha i} \nabla_{\alpha\dot{\alpha}} \bar{\Phi}_{ci}, \\ \delta \Phi_c^i &= \epsilon^{\alpha i} W_\alpha, \quad \delta \bar{\Phi}_{ci} = \bar{\epsilon}_i^{\dot{\alpha}} \bar{W}_{\dot{\alpha}}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Кроме того, действие (1.4) инвариантно относительно преобразований

$$\begin{aligned} \delta \Phi_c^i &= c^{ijk} \bar{\nabla}^2 (\bar{\chi}_j \bar{\Phi}_{ck}) + i [\chi^j \bar{\Phi}_{cj}, \Phi_c^i], \\ \delta \bar{\Phi}_{ci} &= c_{ijk} \nabla^2 (\chi^j \Phi_c^k) + i [\bar{\chi}_j \Phi_c^j, \bar{\Phi}_{ci}]. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Используемые здесь ковариантные спинорные производные  $\nabla_\alpha, \nabla_{\dot{\alpha}}, \nabla^2$  и  $\bar{\nabla}^2$  определены в [37], а  $\chi^i$  —  $\mathcal{N} = 1$  суперполевой параметр, образующий  $SU(3)$ -изоспинор, подобно самому супер полю  $\Phi^i$ . Этот суперполевой параметр в качестве своих компонент содержит параметры преобразований центрального заряда, суперсимметрии и внутренней симметрии  $SU(4)/SU(3)$ . Преобразования (1.6) определены для фоновых ковариантных суперполей  $\Phi_c = e^{\bar{\Omega}} \Phi e^{-\bar{\Omega}}$ ,  $\bar{\Phi}_c = e^{-\Omega} \bar{\Phi} e^{\Omega}$  [37]. Далее будут использоваться только эти ковариантно-киральные суперполя, и индекс  $c$  будет опускаться. Удобно ввести новые обозначения  $\Phi^1 = \Phi$ ,  $\Phi^2 = Q$ ,  $\Phi^3 = \bar{Q}$  и переписать два последних члена в (1.4) следующим образом:

$$i \int d^4x d^2\theta Q[\Phi, \bar{Q}] + i \int d^4x d^2\bar{\theta} \bar{Q}[\bar{\Phi}, \bar{Q}].$$

Такая запись представляет собой  $\mathcal{N} = 1$  суперполевую форму взаимодействия гипермультиплет и низших компонент киральной  $\mathcal{N} = 2$  напряженности векторного поля в  $\mathcal{N} = 4$  теории.

Для случая абелевой калибровочной группы рассматриваемая модель является свободной. Для неабелевой калибровочной группы модель имеет пространство вакуумов, параметризованное средними значениями шести вещественных скаляров. Многообразие вакуумов задается условиями исчезновения

скалярного потенциала (F-flatness и D-flatness) [74]. Решения этих уравнений, определяющие структуру вакуумов теории, классифицируются согласно той фазе калибровочной теории, которой эти вакуумы принадлежат. В чисто кулоновской фазе каждое скалярное поле может иметь определенное, отличное от нуля вакуумное среднее. В итоге вакуумы образуют многообразие  $\mathcal{M} = R^{6r}/\mathcal{S}_r$ , где  $\mathcal{S}_r$  — вейлевская группа перестановок  $r$  элементов. Ненарушенной частью калибровочной группы является тор  $U(1)^r$ . Если несколько скалярных полей имеют одинаковое вакуумное среднее, то некоторая неабелева калибровочная подгруппа  $G \in SU(N)$  остается ненарушенной и в теории появляются дополнительные безмассовые калибровочные поля.

**1.5. Формулировка  $\mathcal{N} = 4$  суперсимметричной теории Янга–Миллса в  $\mathcal{N} = 2$  гармоническом суперпространстве.** По отношению к  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметрии  $\mathcal{N} = 4$  векторный мультиплет разбивается на  $\mathcal{N} = 2$  векторный мультиплет и гипермультиплет. Таким образом,  $\mathcal{N} = 4$  суперсимметричную теорию Янга–Миллса можно рассматривать как специальный случай  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметричной калибровочной теории, действие которой есть сумма действий  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметричной теории Янга–Миллса и гипермультиплета  $q^{ia}$  в присоединенном представлении, минимально взаимодействующего с  $\mathcal{N} = 2$  векторным мультиплетом. Такая теория формулируется в  $\mathcal{N} = 2$  гармоническом суперпространстве [51, 56], и в этом случае динамическими переменными являются вещественное аналитическое калибровочное суперполе  $V^{++}$  и комплексное аналитическое суперполе гипермультиплета  $q^+$ , не ограниченные какими-либо дополнительными связями. Действие  $\mathcal{N} = 4$  суперсимметричной теории поля Янга–Миллса выглядит следующим образом:

$$S[V^{++}, q^+, \check{q}^+] = \frac{1}{2g^2} \text{tr} \int d^8z \mathcal{W}^2 - \frac{1}{2g^2} \text{tr} \int d\zeta^{-4} q^{+a} \mathcal{D}^{++} q_a^+. \quad (1.7)$$

Соответствующие уравнения движения имеют вид

$$\mathcal{D}^{++} q_a^+ = D^{++} q^{+a} + ig [V^{++}, q^{+a}] = 0, \quad \mathcal{D}^{+\alpha} \mathcal{D}_\alpha^+ \mathcal{W} = [q^{+a}, q_a^+]. \quad (1.8)$$

Здесь  $a = 1, 2$  — индексы глобальной  $SU(2)$ -симметрии,  $q_a^+ = (q^+, \check{q}^+)$ ,  $q^{+a} = \varepsilon^{ab} q_b^+ = (\check{q}^+, -q^+)$ ;  $\mathcal{W}$  — напряженность  $\mathcal{N} = 2$  аналитической калибровочной суперполево́й связности  $V^{++}$  в  $\lambda$ -базисе;  $g$  — константа взаимодействия;  $d^8z = d^4x d^2\theta^+ d^2\theta^- du$ ,  $d\zeta^{-4} = d^4x d^2\theta^+ d^2\bar{\theta}^+ du$  и  $du$  — меры интегрирования по всему гармоническому пространству, его аналитическому подпространству и  $SU(2)$ -гармоникам  $u^{\pm i}$  соответственно. Производные  $D_{\alpha(\dot{\alpha})}^+$  не содержат связности в  $\lambda$ -базисе, где имеет место явная  $G$ -аналитичность. Уравнения (1.8) являются уравнениями движения для  $\mathcal{N} = 4$  суперсимметричной теории поля Янга–Миллса, записанными в терминах  $\mathcal{N} = 2$  суперполей. Действие (1.7) допускает явно  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметричные обобщения. Кроме того, это действие инвариантно относительно



скрытых  $\mathcal{N} = 2$  преобразований суперсимметрии [51], которые смешивают суперполя  $\mathcal{W}$ ,  $\bar{\mathcal{W}}$  с  $q_a^+$ , но замыкаются только на массовой поверхности. В абелевом случае преобразования этой скрытой  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметрии имеют вид

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{W} &= \frac{1}{2}\bar{\varepsilon}^{\dot{\alpha}a}\bar{D}_{\dot{\alpha}}^-q_a^+, & \delta\bar{\mathcal{W}} &= \frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha a}D_{\alpha}^-q_a^+, \\ \delta q_a^+ &= \frac{1}{4}(\varepsilon_a^{\alpha}D_{\alpha}^+\mathcal{W} + \bar{\varepsilon}_a^{\dot{\alpha}}\bar{D}_{\dot{\alpha}}^+\bar{\mathcal{W}}), & \delta q_a^- &= \frac{1}{4}(\varepsilon_a^{\alpha}D_{\alpha}^-\mathcal{W} + \bar{\varepsilon}_a^{\dot{\alpha}}\bar{D}_{\dot{\alpha}}^-\bar{\mathcal{W}}).\end{aligned}\quad (1.9)$$

Таким образом, рассматриваемая модель обладает  $\mathcal{N} = 4$  суперсимметрией на массовой поверхности.

Структура вакуума модели (1.7) в абелевом случае определяется решениями уравнений

$$(\mathcal{D}^+)^2\mathcal{W} = (\bar{\mathcal{D}}^+)^2\bar{\mathcal{W}} = 0, \quad D^{++}q^{+a} = 0, \quad (1.10)$$

которые представляют собой абелеву версию общих уравнений (1.8). Для физических компонентных полей  $\mathcal{N} = 4$  векторного мультиплетта, определяемых разложениями

$$\begin{aligned}q^+(\zeta, u) &= f^i(x)u_i^+ + \theta^{+\alpha}\psi_{\alpha}(x) + \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}^+\bar{\kappa}^{\dot{\alpha}}(x) + 2i\theta^+\bar{\theta}^+f^i(x)u_i^-, \\ \mathcal{W} &= \phi(x) + \theta^{-\alpha}\lambda_{\alpha}^+(x) + \theta^{(+\alpha}\theta^{-\beta)}F_{\alpha\beta}(x),\end{aligned}\quad (1.11)$$

суперполевые уравнения (1.10) приводят к следующей системе обычных уравнений:

$$\not{\partial}\psi = \not{\partial}\bar{\kappa} = \square f^i = \square\phi = \not{\partial}\lambda^i = \partial_m F_{mn} = 0. \quad (1.12)$$

Простейшим решением этих уравнений движения является набор постоянных фоновых полей

$$f^i = \text{const}, \quad \psi = \text{const}, \quad \bar{\kappa} = \text{const}, \quad \phi = \text{const}, \quad F_{mn} = \text{const}, \quad (1.13)$$

которые *линейно* преобразуются друг через друга относительно скрытой  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметрии (1.9):

$$\begin{aligned}\delta\phi &= \frac{1}{2}\bar{\varepsilon}^{\dot{\alpha}a}\bar{\kappa}_{\dot{\alpha}a}, & \delta\bar{\phi} &= \frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha a}\psi_{\alpha a}, & \delta\psi_{\alpha a} &= \frac{1}{2}\varepsilon_a^{\beta}F_{\alpha\beta}, & \delta\bar{\kappa}_{\dot{\alpha}a} &= \frac{1}{2}\bar{\varepsilon}_a^{\dot{\beta}}F_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}, \\ \delta f_a^i &= \frac{1}{4}\varepsilon_a^{\alpha}\lambda_{\alpha}^i + \frac{1}{4}\bar{\varepsilon}_{a\dot{\alpha}}\bar{\lambda}^{i\dot{\alpha}}, & \delta\lambda_{\alpha}^i &= 0, & \delta F_{\alpha\beta} &= 0.\end{aligned}\quad (1.14)$$

Решения (1.13) являются простейшей вакуумной конфигурацией, реализующей представление  $\mathcal{N} = 4$  суперсимметрии и позволяющей вычислять  $\mathcal{N} = 4$

суперсимметричное низкоэнергетическое эффективное действие для  $\mathcal{N} = 4$  суперсимметричной теории Янга–Миллса.

Поучительно сравнить  $\mathcal{N} = 4$  суперсимметричный фон (1.13) и фон (1.3). Последний содержит компоненты  $\phi$  и  $F$ , входящие в  $\mathcal{N} = 2$  векторный мультиплет, в то время как компоненты  $\bar{\kappa}$  и  $\psi$  из гипермультиплета в него не входят. В результате фон (1.3) не обладает инвариантностью относительно скрытых  $\mathcal{N} = 2$  преобразований суперсимметрии (1.14) и поэтому не реализует представление  $\mathcal{N} = 4$  суперсимметрии. Тем не менее фон (1.3) является представлением  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметрии. Следовательно, эффективное действие, вычисленное с использованием фона (1.3) в рамках  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметричного метода фонового поля, будет обладать явной  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметрией и калибровочной инвариантностью, но не будет иметь полной  $\mathcal{N} = 4$  суперсимметрии. Последующие вычисления подтвердят это предположение.

Для построения полностью  $\mathcal{N} = 4$  инвариантного эффективного действия следует воспользоваться способом, предложенным в работе [146]. Идея этого способа следующая: рассматривается эффективное действие в секторе  $\mathcal{N} = 2$  векторного мультиплета и затем строится действие, зависящее и от  $\mathcal{N} = 2$  векторного мультиплета, и от гипермультиплета, таким образом, чтобы суммарное действие было инвариантно относительно преобразований скрытой  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметрии (1.9).

**1.6. Метод фонового поля в  $\mathcal{N} = 1$  суперпространстве.** При вычислении эффективного действия мы используем метод фонового поля в  $\mathcal{N} = 1$  суперпространстве и технику собственного времени, адаптированную для  $\mathcal{N} = 1$  суперполевого формализма. Это позволит при вычислении эффективного действия сохранить классическую калибровочную инвариантность и просуммировать бесконечный набор вкладов фейнмановских диаграмм в единый функционал, зависящий от фоновых полей. Как уже было отмечено, рассматриваемая теория может быть сформулирована либо на языке компонентных полей, либо через  $\mathcal{N} = 1$  суперполя, либо через  $\mathcal{N} = 2$  гармонические суперполя. Использование компонентной формулировки исключительно усложняет задачу, так как имеется большое количество взаимодействующих полей и отсутствует явная суперсимметрия. Для изучения эффективного действия модели можно использовать формулировку в  $\mathcal{N} = 2$  гармоническом суперпространстве. Метод фонового поля для теорий в  $\mathcal{N} = 2$  гармоническом суперпространстве предложен в работах [41]. Техника собственного времени в суперполевыми теориях рассматривалась в ряде недавних работ (см., например, [107] и ссылки там). Непосредственное использование общих методов для нахождения эффективного действия может затрудняться техническими проблемами, поэтому при проведении конкретных вычислений эти методы должны быть дополнены специфическими приемами.

При вычислении эффективного действия в рассматриваемой теории с помощью техники собственного времени возникает необходимость рассма-

тривать матричные дифференциальные операторы в суперпространстве, смешивающие секторы  $\mathcal{N} = 2$  векторного мультиплетта и гипермультиплетта. Для изучения эффективного действия можно воспользоваться техникой гармонических суперграфов, однако на этом пути возникают специфические технические проблемы, для преодоления которых необходимо разработать специальные методы нахождения вкладов в эффективное действие, следующих за ведущими и выводящих за рамки низкоэнергетического приближения\*. Этих проблем можно избежать, если работать в терминах  $\mathcal{N} = 1$  суперполей и воспользоваться накопленным опытом исследования теорий в  $\mathcal{N} = 1$  суперпространстве [37, 39, 107, 211].

Хорошо известно, что метод фонового поля предполагает расщепление полей на фоновую и квантовую составляющие и наложение на квантовые поля условий, фиксирующих калибровку. Ясно, что при этом сохраняется полная калибровочная инвариантность классических (фоновых) полей, хотя фиксация калибровки может нарушить некоторые классические симметрии (подробное обсуждение этой проблемы можно найти, например, в работе [112]).

Мы определяем однопетлевое эффективное действие  $\Gamma$ , зависящее от фоновых суперполей (1.3), как функциональный интеграл в пространстве квантовых полей

$$e^{i\Gamma} = \int \mathcal{D}v \mathcal{D}\varphi \mathcal{D}c \mathcal{D}c' \mathcal{D}\bar{c} \mathcal{D}\bar{c}' e^{i(S_{(2)} + S_{\text{FP}})}. \quad (1.15)$$

Здесь  $S_{(2)}$  — квадратичная по квантовым полям часть классического действия, включающая условия фиксации калибровки, а  $S_{\text{FP}}$  — соответствующее действие духов. Формальное вычисление интеграла по путям (1.15) ведет к представлению эффективного действия через функциональный детерминант (см. (1.24)).

Одним из ключевых моментов  $\mathcal{N} = 1$  суперполевых вычислений является выбор многопараметрического ковариантного условия фиксации калибровки

$$S_{\text{GF}} = -\frac{1}{\alpha g^2} \int d^8z (F^A \bar{F}^A + b^A \bar{b}^A), \quad (1.16)$$

где  $b, \bar{b}$  — поля духов Нильсена–Каллош. Условия фиксации калибровки, налагаемые на квантовые суперполя  $v$  и  $\varphi$ , выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} \bar{F}^A &= \nabla^2 v^A + \lambda \left[ \frac{1}{\square_+} \nabla^2 \varphi^i, \bar{\Phi}^i \right]^A, \\ F^A &= \bar{\nabla}^2 v^A - \bar{\lambda} \left[ \frac{1}{\square_-} \bar{\nabla}^2 \bar{\varphi}_i, \Phi^i \right]^A, \end{aligned} \quad (1.17)$$

\*Эти методы будут обсуждаться в разд. 2.

где  $\alpha, \lambda, \bar{\lambda}$  — произвольные числовые параметры, а  $\square_+, \square_-$  — стандартные обозначения для лапласоподобных операторов в  $\mathcal{N} = 1$  суперпространстве. Очевидно, что калибровочные условия (1.17) ковариантны относительно фоновых калибровочных преобразований. Калибровочные условия (1.17) можно рассматривать как суперполевое обобщение калибровок  $R_\xi$ -типа (см. [185, 211]), которые обычно используются в спонтанно нарушенных калибровочных теориях. Поскольку абелев фон является решением классических уравнений движения, конкретный выбор калибровочных параметров не играет роли. Для наших целей удобно выбрать калибровку типа Ферми–Де Витта:  $\alpha = \lambda = 1$ . При таком выборе параметров удастся обойти проблему вычисления смешанных вкладов с векторными и киральными суперполями в пропагаторах. Для вычисления таких вкладов пришлось бы иметь дело со сложными выражениями типа

$$\begin{aligned} & \text{Tr} \ln \left( -\square + iW^\alpha \nabla_\alpha + i\bar{W}^{\dot{\alpha}} \bar{\nabla}_{\dot{\alpha}} + M - \bar{X} \frac{1}{\square_- - \mu\bar{\mu}} X \bar{\nabla}^2 \nabla^2 - \right. \\ & \left. - X \frac{1}{\square_+ - \bar{\mu}\mu} \bar{X} \nabla^2 \bar{\nabla}^2 + \bar{X} \frac{1}{\square_- - \bar{\mu}\mu} \bar{\mu} \bar{X} \bar{\nabla}^2 + X \frac{1}{\square_+ - \mu\bar{\mu}} \mu X \nabla^2 \right). \quad (1.18) \end{aligned}$$

Подчеркнем еще раз, что в калибровочных теориях не все глобальные симметрии классического действия могут в явном виде сохраниться в квантовой теории, даже в отсутствие аномалий. Причина этого кроется в необходимости фиксации калибровки. Как будет показано позже, при такой фиксации нарушаются некоторые симметрии (нарушение классической конформной симметрии обсуждалось в работах [112]). Эта ситуация является достаточно общей. В рассматриваемом случае фиксация калибровки (1.16) нарушает глобальную классическую  $\mathcal{N} = 4$  симметрию (1.5), (1.6), так как эта калибровка ковариантна только относительно преобразований  $\mathcal{N} = 1$  суперсимметрии. Поэтому следует ожидать, что вычисленное эффективное действие обладает инвариантностью только относительно подходящей квантовой деформации скрытых преобразований (1.5). Правильная деформация может быть найдена в каждом конкретном порядке разложения по петлям.

После расщепления полей на квантовую и фоновую части (т. е.  $e^{V_{\text{tot}}} = e^\Omega e^{g^v} e^{\bar{Q}}$ ,  $\Phi \rightarrow \Phi + \varphi$ ,  $\bar{\Phi} \rightarrow \bar{\Phi} + \bar{\varphi}$ ,  $Q \rightarrow Q + q$ ,  $\bar{Q} \rightarrow \bar{Q} + \bar{q}$ ,  $\tilde{Q} \rightarrow \tilde{Q} + \tilde{q}$ ,  $\bar{\tilde{Q}} \rightarrow \bar{\tilde{Q}} + \bar{\tilde{q}}$ ) запишем квадратичную часть классического действия (1.4) и члена, фиксирующего калибровку (1.16), в виде

$$S_{(2)} = -\frac{1}{2} \sum_{I < J} \int d^4x d^4\theta \left[ \mathcal{F}^{IJ} \mathbf{H}_{IJ} \mathcal{F}^{\dagger IJ} + \bar{v}^{IJ} (O_V - M)_{IJ} v^{IJ} \right]. \quad (1.19)$$

Здесь  $\mathcal{F} = (\bar{\varphi}, \varphi, \bar{q}, q, \bar{\tilde{q}}, \tilde{q})$ ,  $\mathcal{F}^\dagger = (\varphi, \bar{\varphi}, q, \bar{q}, \tilde{q}, \bar{\tilde{q}})^T$ ,

$$M_{IJ} = (\bar{\Phi}_{IJ}\Phi_{IJ} + \bar{Q}_{IJ}Q_{IJ} + \bar{\tilde{Q}}_{IJ}\tilde{Q}_{IJ}), \quad (1.20)$$

$$O_V = \square - iW_{IJ}^\alpha \nabla_\alpha - i\bar{W}_{IJ}^{\dot{\alpha}} \bar{\nabla}_{\dot{\alpha}},$$

$W_{IJ}^\alpha = W_I^\alpha - W_J^\alpha$ ,  $\bar{W}_{IJ}^{\dot{\alpha}} = \bar{W}_I^{\dot{\alpha}} - \bar{W}_J^{\dot{\alpha}}$  — напряженности фоновых полей, лежащих в подалгебре Картана, и  $\Phi_{IJ} = \Phi_I - \Phi_J$ . При выводе (1.19) был использован вейлевский базис в пространстве эрмитовых бесследовых матриц алгебры  $su(N)$ . В исследуемом случае мы ограничиваемся калибровочной группой  $SU(N)$ , нарушенной до ее максимального тора  $U(1)^{N-1}$ . Ограничение  $I < J$  возникает вследствие того, что компоненты квантовых суперполей, принимающие значения в подалгебре Картана, не взаимодействуют с фоновыми полями и поэтому полностью распутываются.

Оператор  $\mathbf{H}$  зависит от ковариантных производных и фоновых полей. Точная форма матрицы оператора следующая:

$$\begin{pmatrix} G_+(\phi)\nabla^2\bar{\nabla}^2 & 0 & -\phi\bar{f}\frac{\nabla^2\bar{\nabla}^2}{\square} & i\bar{v}\nabla^2 & -\phi f\frac{\nabla^2\bar{\nabla}^2}{\square} & -i\bar{f}\nabla^2 \\ 0 & G_-(\phi)\bar{\nabla}^2\nabla^2 & i\bar{v}\bar{\nabla}^2 & \bar{\phi}f\frac{\bar{\nabla}^2\nabla^2}{\square} & -i\bar{f}\bar{\nabla}^2 & -\bar{\phi}\bar{v}\frac{\bar{\nabla}^2\nabla^2}{\square} \\ -f\bar{\phi}\frac{\nabla^2\bar{\nabla}^2}{\square} & i\bar{v}\nabla^2 & G_+(f)\nabla^2\bar{\nabla}^2 & 0 & f\bar{v}\frac{\nabla^2\bar{\nabla}^2}{\square} & i\bar{\phi}\nabla^2 \\ -i\bar{v}\bar{\nabla}^2 & -\bar{f}\phi\frac{\bar{\nabla}^2\nabla^2}{\square} & 0 & G_-(f)\bar{\nabla}^2\nabla^2 & i\phi\bar{\nabla}^2 & -\bar{f}\bar{v}\frac{\bar{\nabla}^2\nabla^2}{\square} \\ -v\bar{\phi}\frac{\nabla^2\bar{\nabla}^2}{\square} & \bar{f}\nabla^2 & -v\bar{f}\frac{\nabla^2\bar{\nabla}^2}{\square} & -i\bar{\phi}\nabla^2 & G_+(v)\nabla^2\bar{\nabla}^2 & 0 \\ i\bar{f}\bar{\nabla}^2 & -\bar{v}\phi\frac{\bar{\nabla}^2\nabla^2}{\square} & -i\phi\bar{\nabla}^2 & -\bar{v}f\frac{\bar{\nabla}^2\nabla^2}{\square} & 0 & G_-(v)\bar{\nabla}^2\nabla^2 \end{pmatrix}, \quad (1.21)$$

где использованы обозначения

$$G_\pm(a) = 1 - \frac{(a\bar{a})}{\square_\pm}, \quad \phi = \Phi_{IJ}, \quad \bar{\phi} = \bar{\Phi}_{IJ},$$

$$f = Q_{IJ}, \quad \bar{f} = \bar{Q}_{IJ}, \quad v = \tilde{Q}_{IJ}, \quad \bar{v} = \bar{\tilde{Q}}_{IJ},$$

и  $\square_\pm$  обозначают операторы  $\nabla^2\bar{\nabla}^2$  и  $\bar{\nabla}^2\nabla^2$  соответственно. В пространстве киральных и антикиральных суперполей операторы  $\square_\pm$  действуют следующим образом:

$$\nabla^2\bar{\nabla}^2 := \square_+ = \square - i\bar{W}^{\dot{\alpha}}\bar{\nabla}_{\dot{\alpha}} - \frac{i}{2}(\bar{\nabla}\bar{W}),$$

$$\bar{\nabla}^2\nabla^2 := \square_- = \square - iW^\alpha\nabla_\alpha - \frac{i}{2}(\nabla W).$$

Вообще говоря, вычисление второй вариационной производной классического действия приводит к матрице  $7 \times 7$ . Но благодаря выбранным условиям

калибровки (1.17) происходит частичная диагонализация, в результате чего эта матрица приобретает блочный вид  $1 \times 1 \oplus 6 \times 6$ , и кинетический оператор векторных полей отделяется. Поэтому задача вычисления функциональных следов облегчается. Выбранные параметры калибровки обеспечивают отсутствие вершины взаимодействия между квантовыми полями материи и квантовыми векторными полями, но приводят к появлению вершин взаимодействия между квантовыми киральными полями и духами.

Рассмотрим структуру вкладов духов Фаддеева–Попова в однопетлевое эффективное действие. Действие духов  $S_{\text{FP}}$  для члена, фиксирующего калибровку (1.17), имеет вид

$$S_{\text{FP}} = \text{tr} \int d^8 z \left[ (\bar{c}' c - c' \bar{c}) - \left( c' \left[ \Phi^i, \frac{\lambda}{\square_+} [\bar{c}, \bar{\Phi}_i] \right] + \bar{c}' \left[ \frac{\bar{\lambda}}{\square_-} [c, \Phi^i], \bar{\Phi}_i \right] \right) \right], \quad (1.22)$$

что ведет к следующему вкладу духов в эффективное действие:

$$\begin{aligned} \ln \text{Det } \mathbf{H}_{\text{FP}} &= \\ &= 2 \sum_{I < J} \text{Tr} \ln \begin{pmatrix} 0 & \left(1 - \frac{M}{\square_+}\right) \nabla^2 \bar{\nabla}^2 \\ - \left(1 - \frac{M}{\square_-}\right) \bar{\nabla}^2 \nabla^2 & 0 \end{pmatrix}_{IJ}, \end{aligned} \quad (1.23)$$

где матрица  $M$  определена в (1.20).

Результат интегрирования в функциональном интеграле (1.15) по всем квантовым суперполям дается формальным представлением через функциональные детерминанты

$$e^{i\Gamma} = \prod_{I < J} [\text{Det}^{-1}(O_V - M)] (\text{Det}^{-1} \mathbf{H}) (\text{Det}^2 \mathbf{H}_{\text{FP}}). \quad (1.24)$$

Поскольку суперполя  $\Phi$  и  $W_\alpha$  принадлежат подалгебре Картана, при интегрировании по квантовым полям следует учитывать только половину корней, и эффективное действие имеет вид

$$\Gamma = \sum_{I < J} \Gamma_{IJ}.$$

Нашей следующей целью является вычисление функционального детерминанта (1.24).

**1.7. Вычисление функциональных следов и однопетлевого эффективного действия.** В данном разделе будут представлены основные этапы вычисления функциональных следов дифференциальных операторов в суперпространстве, которые определяют зависящий от фона вклад в эффективное действие (1.24). Из формулы (1.21) видно, что при нулевых значениях фоновых суперполей  $Q, \bar{Q}$  матричный оператор  $\mathbf{H}$  содержит только зависящие от фона обратные пропагаторы  $G_+, G_-$  и вершины фоновых полей  $\Phi$ , взаимодействующих с квантовыми полями гипермультиплета. Следует отметить, что форма  $\mathbf{H}$ , содержащая полные обратные пропагаторы, полностью определяется выбором калибровки  $R_\xi$  типа (1.17).

На первом этапе разобьем матрицу  $\mathbf{H}$  на сумму двух матриц,  $\mathbf{H} = \mathbf{H}_\square + \mathbf{H}_\nabla$ , где матрица  $\mathbf{H}_\square$  содержит все блоки с  $\nabla^2 \bar{\nabla}^2, \bar{\nabla}^2 \nabla^2$ , а матрица  $\mathbf{H}_\nabla$  — только блоки с  $\bar{\nabla}^2$  и  $\nabla^2$ . При этом логарифм матрицы  $\mathbf{H}$  можно представить в следующем виде:

$$\ln \mathbf{H} = \ln \mathbf{H}_\square + \ln(1 - \mathbf{H}_\square^{-1} \mathbf{H}_\nabla).$$

Используя для обращения матриц блочного типа известную формулу Фробениуса

$$H = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \quad H^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} + A^{-1}BE^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}BE^{-1} \\ -E^{-1}CA^{-1} & E^{-1} \end{pmatrix},$$

где  $E = D - CA^{-1}B$ , можно вычислить обратную матрицу для  $\mathbf{H}_\square$ :

$$\mathbf{H}_\square^{-1} = \begin{pmatrix} g_+(\phi) \frac{\nabla^2 \bar{\nabla}^2}{\square_+^2} & 0 & \frac{\phi \bar{f}}{\square_{+M}} \frac{\nabla^2 \bar{\nabla}^2}{\square_+^2} & 0 & \frac{\phi \bar{v}}{\square_{+M}} \frac{\nabla^2 \bar{\nabla}^2}{\square_+^2} & 0 \\ 0 & g_-(\phi) \frac{\bar{\nabla}^2 \nabla^2}{\square_-^2} & 0 & \frac{\bar{\phi} f}{\square_{-M}} \frac{\bar{\nabla}^2 \nabla^2}{\square_-^2} & 0 & \frac{\bar{\phi} v}{\square_{-M}} \frac{\bar{\nabla}^2 \nabla^2}{\square_-^2} \\ \frac{f \bar{\phi}}{\square_{+M}} \frac{\nabla^2 \bar{\nabla}^2}{\square_+^2} & 0 & g_+(f) \frac{\nabla^2 \bar{\nabla}^2}{\square_+^2} & 0 & \frac{f \bar{v}}{\square_{+M}} \frac{\nabla^2 \bar{\nabla}^2}{\square_+^2} & 0 \\ 0 & \frac{\bar{f} \phi}{\square_{-M}} \frac{\bar{\nabla}^2 \nabla^2}{\square_-^2} & 0 & g_-(f) \frac{\bar{\nabla}^2 \nabla^2}{\square_-^2} & 0 & \frac{\bar{f} v}{\square_{-M}} \frac{\bar{\nabla}^2 \nabla^2}{\square_-^2} \\ \frac{v \bar{\phi}}{\square_{+M}} \frac{\nabla^2 \bar{\nabla}^2}{\square_+^2} & 0 & \frac{v \bar{f}}{\square_{+M}} \frac{\nabla^2 \bar{\nabla}^2}{\square_+^2} & 0 & g_+(v) \frac{\nabla^2 \bar{\nabla}^2}{\square_+^2} & 0 \\ 0 & \frac{\bar{v} \phi}{\square_{-M}} \frac{\bar{\nabla}^2 \nabla^2}{\square_-^2} & 0 & \frac{\bar{v} f}{\square_{-M}} \frac{\bar{\nabla}^2 \nabla^2}{\square_-^2} & 0 & g_-(v) \frac{\bar{\nabla}^2 \nabla^2}{\square_-^2} \end{pmatrix},$$

где

$$g_\pm(\phi) := 1 + \frac{\phi \bar{\phi}}{\square_{\pm M}}, \quad \square_{\pm M} := \square_\pm - M.$$

Видно, что матричная комбинация  $M$  (1.20) при обращении возникает естественным образом. Удивительно, что произведение  $\mathbf{H}_\square^{-1} \mathbf{H}_\nabla$  имеет достаточно

простую форму

$$\mathbf{H}_{\square}^{-1} \mathbf{H}_{\nabla} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i\bar{v} \frac{\nabla^2}{\square_-} & 0 & -i\bar{f} \frac{\nabla^2}{\square_-} \\ 0 & 0 & i v \frac{\bar{\nabla}^2}{\square_+} & 0 & -i f \frac{\bar{\nabla}^2}{\square_+} & 0 \\ 0 & -i\bar{v} \frac{\nabla^2}{\square_-} & 0 & 0 & 0 & i\bar{\phi} \frac{\nabla^2}{\square_-} \\ -i v \frac{\bar{\nabla}^2}{\square_+} & 0 & 0 & 0 & i\phi \frac{\bar{\nabla}^2}{\square_+} & 0 \\ 0 & i\bar{f} \frac{\nabla^2}{\square_-} & 0 & -i\bar{\phi} \frac{\nabla^2}{\square_-} & 0 & 0 \\ i f \frac{\bar{\nabla}^2}{\square_+} & 0 & -i\phi \frac{\bar{\nabla}^2}{\square_+} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.25)$$

На следующем этапе займемся вычислением матричных следов. Разложим  $\text{Tr} \ln(1 - \mathbf{H}_{\square}^{-1} \mathbf{H}_{\nabla})$  в ряд по степеням  $\mathbf{H}_{\square}^{-1} \mathbf{H}_{\nabla}$ . Ненулевые вклады в след будут давать только четные степени разложения, которые группируются в выражение

$$\begin{aligned} \text{Tr}_{6 \times 6} \ln(1 - \ln \mathbf{H}_{\square}^{-1} \mathbf{H}_{\nabla}) &= \\ &= \text{Tr} \left[ \ln \left( 1 - \frac{M}{\square_+} \right) \frac{\nabla^2 \bar{\nabla}^2}{\square_+} \right] + \text{Tr} \left[ \ln \left( 1 - \frac{M}{\square_-} \right) \frac{\bar{\nabla}^2 \nabla^2}{\square_-} \right], \end{aligned} \quad (1.26)$$

где матрица  $M$  та же самая, что и в (1.20), и  $\text{Tr}$  означает функциональный след. Далее рассмотрим след матрицы  $\ln \mathbf{H}_{\square}$ . Используя вышеприведенную методику, разложим матрицу  $\mathbf{H}_{\square}$  в сумму диагональной матрицы и всего остального, т. е. представим ее в виде  $\mathbf{H}_{\square} = \mathbf{H}_0 + \Delta$ , откуда

$$\text{Tr} \ln \mathbf{H}_{\square} = \text{Tr} \ln \mathbf{H}_0 + \text{Tr} \ln(1 + \mathbf{H}_{\square}^{-1} \Delta). \quad (1.27)$$

Матрица  $\mathbf{H}_0$  содержит только операторы  $\nabla^2 \bar{\nabla}^2$  и  $\bar{\nabla}^2 \nabla^2$  при нулевых фоновых полях  $\Phi, Q, \bar{Q}$  и поэтому может быть отброшена. Матричные элементы  $\mathbf{H}_{\square}^{-1} \Delta$  — это блоки с киральными  $\frac{\nabla^2 \bar{\nabla}^2}{\square_+}$  и антикиральными  $\frac{\bar{\nabla}^2 \nabla^2}{\square_-}$  проекторами. После перестановки строк и столбцов след логарифма матрицы  $1 + \mathbf{H}_{\square}^{-1} \Delta$  можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \text{Tr}_{6 \times 6} \ln(1 + \mathbf{H}_{\square}^{-1} \Delta) &= \text{Tr}_{3 \times 3} \ln \left[ 1 - \begin{pmatrix} (\phi \bar{\phi}) & (\phi \bar{f}) & (\phi \bar{v}) \\ (f \bar{\phi}) & (f \bar{f}) & (f \bar{v}) \\ (v \bar{\phi}) & (v \bar{f}) & (v \bar{v}) \end{pmatrix} \frac{\nabla^2 \bar{\nabla}^2}{\square_+^2} \right] + \\ &+ \left( \frac{\nabla^2 \bar{\nabla}^2}{\square_+^2} \rightarrow \frac{\bar{\nabla}^2 \nabla^2}{\square_-^2} \right). \end{aligned} \quad (1.28)$$



Непосредственные вычисления матричных следов для первых членов ряда Тейлора показывают, что можно записать

$$\begin{aligned} \text{Tr}_{6 \times 6} \ln(1 + \mathbf{H}_0^{-1} \Delta) = \\ = \text{Tr} \left[ \ln \left( 1 - \frac{M}{\square_+} \right) \frac{\nabla^2 \bar{\nabla}^2}{\square_+} \right] + \text{Tr} \left[ \ln \left( 1 - \frac{M}{\square_-} \right) \frac{\bar{\nabla}^2 \nabla^2}{\square_-} \right]. \end{aligned} \quad (1.29)$$

Последнее выражение вместе с (1.26) дает

$$\begin{aligned} \ln \text{Det}^{-1} \mathbf{H} = \\ = -2 \text{Tr} \left[ \ln \left( 1 - \frac{M}{\square_+} \right) \frac{\nabla^2 \bar{\nabla}^2}{\square_+} \right] - 2 \text{Tr} \left[ \ln \left( 1 - \frac{M}{\square_-} \right) \frac{\bar{\nabla}^2 \nabla^2}{\square_-} \right]. \end{aligned} \quad (1.30)$$

Вклад духов Фаддеева–Попова определяется выражением (1.23). Выделяя и отбрасывая выражение  $\ln \begin{pmatrix} 0 & \nabla^2 \bar{\nabla}^2 \\ -\bar{\nabla}^2 \nabla^2 & 0 \end{pmatrix}$ , получим вклад духов в эффективное действие в виде

$$\begin{aligned} \ln \text{Det}^2 \mathbf{H}_{\text{FP}} = \\ = 2 \text{Tr} \left[ \ln \left( 1 - \frac{M}{\square_-} \right) \frac{\bar{\nabla}^2 \nabla^2}{\square_-} \right] + 2 \text{Tr} \left[ \ln \left( 1 - \frac{M}{\square_+} \right) \frac{\nabla^2 \bar{\nabla}^2}{\square_+} \right], \end{aligned} \quad (1.31)$$

что с точностью до знака совпадает с (1.30). Поэтому второй и третий детерминанты в (1.24) взаимно сокращаются. Такое удивительное сокращение вкладов духов и киральных полей в однопетлевом эффективном действии  $\mathcal{N} = 4$  суперсимметричной теории Янга–Миллса было впервые замечено в [52] при вычислении в гармоническом суперпространстве. Однако данный результат справедлив только на фоне постоянных киральных суперполей.

Наконец, благодаря сокращению между (1.31) и (1.30), можно записать полный однопетлевой вклад в эффективное действие (1.24) в простой форме, которая определяется только вкладом векторных полей:

$$\Gamma = i \sum_{I < J} \text{Tr} \ln(O_V - M)_{IJ}, \quad (1.32)$$

а вся зависимость от фона содержится в матрице  $M$ . Для оператора  $(O_V - M)_{IJ}$  в вышеприведенной формуле разложение функционального следа по степеням напряженности калибровочных полей уже неоднократно вычислялось разными авторами, но только для случая одного кирального суперполя (см. [96, 144, 211, 213] и ссылки там). Поэтому можно воспользоваться полученными там результатами. Все отличие теории с гипермультиплетом заключается в структуре определенной в (1.20) матрицы  $M = (\bar{\Phi} \Phi + \bar{Q} Q + \bar{\tilde{Q}} \tilde{Q})$ ,

которая инвариантна при преобразованиях группы  $R$ -симметрии  $\mathcal{N} = 4$  суперсимметрии. Поэтому полученные ранее результаты обобщаются на рассматриваемую модель простой заменой матрицы  $M$ .

Функциональный след (1.32) можно записать как разложение по степеням безразмерных суперполевых комбинаций  $\Psi, \bar{\Psi}$ , определенных как

$$\bar{\Psi}^2 = \frac{1}{M^2} \nabla^2 W^2, \quad \Psi^2 = \frac{1}{M^2} \bar{\nabla}^2 \bar{W}^2. \quad (1.33)$$

В приближении постоянного фона это выражение можно просуммировать и получить следующую поправку к полному однопетлевому действию (см. подробности в [144]):

$$\Gamma = \frac{1}{8\pi^2} \int d^8 z \int_0^\infty dt t e^{-t} \frac{W^2 \bar{W}^2}{M^2} \omega(t\Psi, t\bar{\Psi}), \quad (1.34)$$

$$\omega(t\Psi, t\bar{\Psi}) = \frac{\cosh(t\Psi) - 1}{t^2 \Psi^2} \frac{\cosh(t\bar{\Psi}) - 1}{t^2 \bar{\Psi}^2} \frac{t^2(\Psi^2 - \bar{\Psi}^2)}{\cosh(t\Psi) - \cosh(t\bar{\Psi})}.$$

Еще раз отметим, что все отличие эффективных действий с учетом и без учета вклада гипермультиплетных полей заключено в структуре матрицы  $M$ , которая в нашем случае определяется выражением (1.20). В компонентной форме выражение для поправки к однопетлевому эффективному действию (1.34) допускает естественное разложение швингеровского типа по степеням  $F^2/M^2$ . Это разложение не содержит члена типа  $F^6$ , что обусловлено свойствами  $\mathcal{N} = 4$  суперсимметричной теории Янга-Миллса. Функция  $\omega$ , введенная в (1.34) (см. [144]), имеет разложение

$$\omega(x, y) = \frac{1}{2} + \frac{x^2 y^2}{4 \cdot 5!} - \frac{5}{12 \cdot 7!} (x^4 y^2 + x^2 y^4) + \frac{1}{34500} (x^2 y^6 + x^6 y^2) + \frac{1}{86400} x^4 y^4 + \dots \quad (1.35)$$

Выражение (1.35) позволяет разложить эффективное действие (1.34) в ряд по степеням  $\Psi^2, \bar{\Psi}^2$  следующим образом:

$$\Gamma = \Gamma_{(0)} + \Gamma_{(2)} + \Gamma_{(3)} + \dots, \quad (1.36)$$

где член  $\Gamma_{(n)}$  содержит  $c_{m,l} \Psi^{2m} \bar{\Psi}^{2l}$  с  $m+l = n$ . В бозонном секторе это разложение соответствует разложению по степеням напряженности  $F$ , а именно  $\Gamma_{(n)} \sim F^{4+2n}/M^{2+2n}$ ,  $M = (\Phi \bar{\Phi} + f^{ia} f_{ia})$ , где  $\Phi, \bar{\Phi}$  и  $f^{ia}$  — физические бозонные поля  $\mathcal{N} = 2$  векторного мультиплета и гипермультиплета.

**1.8. Преобразование  $\mathcal{N} = 1$  суперсимметричного эффективного действия к явно  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметричной форме.** Эффективное действие (1.34) и его разложение (1.36) записаны в терминах  $\mathcal{N} = 1$  суперполей. В данном разделе перепишем (1.36) в явно  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметричном виде. С этой целью выделим в матрице  $M$ , определенной в (1.20),  $\mathcal{N} = 1$  суперполевой аргумент  $X = -\frac{\bar{Q}Q + \bar{\tilde{Q}}\tilde{Q}}{\bar{\Phi}\Phi}$  (который определен в (1.2) в терминах  $\mathcal{N} = 2$  суперполей), запишем  $M$  как  $M = \Phi\bar{\Phi}(1-X)$  и разложим знаменатели  $(1/M)^k$ , входящие в (1.34), в степенной ряд по  $X$ . Такое разложение дает следующее выражение для общего члена ряда (1.36):

$$\int d^8z \frac{W^2\bar{W}^2}{(\Phi\bar{\Phi})^{2(m+l+k+1)}} (\nabla^2 W^2)^m (\bar{\nabla}^2 \bar{W}^2)^l [-(\bar{Q}Q + \bar{\tilde{Q}}\tilde{Q})]^k. \quad (1.37)$$

Далее, используя то свойство, что  $\int d^{12}z = \int d^8z (\nabla_2)^2 (\bar{\nabla}_2)^2$ , а также определение  $\mathcal{N} = 1$  проекций  $\mathcal{N} = 2$  векторного мультиплетта на массовой поверхности как  $\mathcal{W}| = \Phi, \nabla_{2\alpha}\mathcal{W}| = -W_\alpha, \nabla_2^2\mathcal{W}| = 0$ , преобразуем общий член к  $\mathcal{N} = 2$  форме (1.2). Следует иметь в виду, что описанная процедура имеет неоднозначности вне массовой поверхности даже в отсутствие полей гипермультиплетта (см. [107]), однако для наших целей эти возможные неоднозначности несущественны.

В качестве первого члена в разложении эффективного действия (1.34) по производным появляется известный неголоморфный потенциал (см. (1.42)). Используя  $\mathcal{N} = 1$  выражение на фоне (1.3), его можно однозначно переписать в  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметричной форме. Это единственный член, который автоматически инвариантен при преобразованиях  $\mathcal{N} = 4$  суперсимметрии, поскольку он не содержит производных гипермультиплеттных суперполей и векторной напряженности. Не столь очевидно, как восстановить  $\mathcal{N} = 4$  инвариантность в остальных членах разложения эффективного действия. Здесь требуется дополнительный анализ.

Все вычисления эффективного действия проводились на постоянном фоне (1.3). К сожалению, для восстановления  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметричной формы такой фон недостаточен, поскольку необходимо учитывать производные  $\mathcal{N} = 1$  гипермультиплеттных полей. Процедура восстановления  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметричных выражений по их соответствующим  $\mathcal{N} = 1$  редукциям прежде всего предполагает восстановление  $\mathcal{N} = 2$  меры интегрирования  $\int d^{12}z = \int d^8z (\nabla_2)^2 (\bar{\nabla}_2)^2$ . Таким образом, для получения интеграла по  $\mathcal{N} = 2$  суперпространству из интеграла по  $\mathcal{N} = 1$  суперпространству следует выделить производные  $(\nabla_2)^2 (\bar{\nabla}_2)^2$  из исходного подынтегрального  $\mathcal{N} = 1$  суперполевого выражения. Для получения таких полных производных в подынтегральном выражении (1.37) необходимо «руками» добавить к исходному  $\mathcal{N} = 1$  суперполевоу подынтегральному выражению все недостающие члены,

содержащие производные  $\nabla_{\alpha j} q^{ia}$  с правильными численными коэффициентами, поскольку такие члены не могли возникнуть в процессе вычислений. Если бы мы вычисляли эффективное действие не на специальном фоне (1.3), а на правильном фоне (1.13), то такие члены должны были бы появиться автоматически. В этом случае в  $\mathcal{N} = 1$  подынтегральном выражении можно было бы сразу выделить производные  $\nabla_2^2 \bar{\nabla}_2^2$  и преобразовать его в интеграл по  $\mathcal{N} = 2$  суперпространству.

Далее будем использовать достаточно очевидные предположения о свойствах эффективного действия. Эффективное действие должно быть явно  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметрично, и, следовательно, каждый член его разложения должен записываться как интеграл по  $\mathcal{N} = 2$  суперпространству от функции, зависящей от  $\mathcal{N} = 2$  суперполевых напряженностей, гипермультиплетных суперполей и их спинорных производных. Поэтому, используя интегрирование по частям в интегралах по  $\mathcal{N} = 2$  суперпространству и последовательно преобразуя члены разложения по производным, мы перенесем все производные, действующие на гипермультиплетные суперполя, с этих суперполей на  $\mathcal{N} = 2$  суперполевые напряженности, а затем выполним редукцию к  $\mathcal{N} = 1$  суперполям. В результате обнаружим, что все члены в разложении по производным можно записать в форме, сходной с членом ряда  $\Gamma_{(n)}$ , который определен в (1.36), т. е. без включения производных гипермультиплетных суперполей. Это означает, что можно начинать с вкладов в эффективное действие, записанных в  $\mathcal{N} = 1$  суперсимметричном виде, а затем преобразовывать полученные выражения к соответствующему  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметричному виду. Также следует принять во внимание то, что в пределе нулевых гипермультиплетных полей члены разложения по производным записываются через  $\mathcal{N} = 2$  суперконформные скаляры [144]

$$\bar{\Psi}^2 = \frac{1}{\mathcal{W}^2} \nabla^4 \ln \mathcal{W}, \quad \Psi^2 = \frac{1}{\mathcal{W}^2} \bar{\nabla}^4 \ln \bar{\mathcal{W}}, \quad (1.38)$$

поэтому следует искать такую зависимость от гипермультиплетов, которая совместима с этими свойствами.

Далее покажем, как использовать описанную процедуру для записи функционалов  $\Gamma_{(0)}, \Gamma_{(2)}, \Gamma_{(3)}, \dots$  (1.36) в терминах  $\mathcal{N} = 2$  суперполей. Рассмотрим функционал  $\Gamma_{(0)} = \frac{1}{(4\pi)^2} \int d^8 z \frac{W^2 \bar{W}^2}{M^2}$  (который пропорционален  $F^4$ ) и запишем его в виде (1.37), используя разложение  $\frac{1}{(1-X)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)X^k$ ,

$$\Gamma_{(0)} = \frac{1}{(4\pi)^2} \int d^8 z \left( \frac{W^2 \bar{W}^2}{\Phi^2 \bar{\Phi}^2} + \sum_{k=1}^{\infty} (k+1) \frac{W^2 \bar{W}^2}{\Phi^{2+k} \bar{\Phi}^{2+k}} [-(\bar{Q}Q + \bar{\tilde{Q}}\tilde{Q})^k] \right). \quad (1.39)$$

Естественно отождествить квадратичную комбинацию  $\mathcal{N} = 1$  суперполей  $(\bar{Q}Q + \bar{Q}\bar{Q})$  с  $\mathcal{N} = 1$  проекцией квадратичной комбинации гипермультиплета  $q^{ia}q_{ia}$ . Такое отождествление может быть проверено прямым сравнением состава компонент. Затем мы применим соотношения

$$\begin{aligned}\nabla_2^2 \ln \mathcal{W} &= -\frac{W^\alpha W_\alpha}{\Phi^2} + \dots, \\ \nabla_2^2 \frac{1}{\mathcal{W}^m} &= \frac{m(m+1)}{\Phi^m} \frac{W^\alpha W_\alpha}{\Phi^2} + \dots,\end{aligned}\tag{1.40}$$

где точками обозначены члены с производными  $\Phi$ , которые можно не учитывать при анализе на массовой поверхности. Тогда  $\mathcal{N} = 1$  подынтегральное выражение (1.39) можно записать через суперполя  $\mathcal{N} = 2$  векторного мультиплета и гипермультиплета как

$$\nabla_2^2 \ln \mathcal{W} \bar{\nabla}_2^2 \ln \bar{\mathcal{W}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2(k+1)} \nabla_2^2 \frac{1}{\mathcal{W}^k} \bar{\nabla}_2^2 \frac{1}{\bar{\mathcal{W}}^k} (-q^{ia}q_{ia}) + \dots\tag{1.41}$$

Здесь точки обозначают члены, содержащие производные гипермультиплетных суперполей вида

$$\nabla_2^\alpha \frac{1}{\mathcal{W}^k} \nabla_{2\alpha} (-q^{ia}q_{ia}) \bar{\nabla}_2^2 \frac{1}{\bar{\mathcal{W}}^k}, \quad \frac{1}{\mathcal{W}^k} \nabla_2^2 (-q^{ia}q_{ia}) \bar{\nabla}_2^2 \frac{1}{\bar{\mathcal{W}}^k}.$$

Согласно описанной выше методике они должны быть добавлены в интеграл по  $\mathcal{N} = 1$  суперпространству (1.37) для восстановления полной  $\mathcal{N} = 2$  меры интегрирования  $\nabla_2^2 \bar{\nabla}_2^2$ . В результате получаем выражение

$$\Gamma_{(0)} = \frac{1}{(4\pi)^2} \int d^{12}z \left[ \ln \mathcal{W} \ln \bar{\mathcal{W}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2(k+1)} X^k \right],\tag{1.42}$$

где суперполе  $X = \left( -\frac{q^{ia}q_{ia}}{\mathcal{W}\bar{\mathcal{W}}} \right)$  определено в (1.2). Второй член в (1.42) можно преобразовать к виду (1.2), используя разложение дилוגарифма Эйлера в степенной ряд и соотношение  $\frac{1}{k^2(k+1)} = \frac{1}{k^2} - \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1}$ . После этих преобразований становится ясно, что выражение (1.42) есть не что иное, как эффективный лагранжиан (1.2), полученный в работе [146].

$\mathcal{N} = 2$  представление следующего члена ( $\sim F^8$ ) в ряде (1.36) получается с использованием (1.40) и разложения  $(1/M)^6$  по  $X$ . Непосредственный анализ, аналогичный использованному при преобразовании первого члена,

приводит к следующему выражению для  $\Gamma_{(2)}$  в (1.36):

$$\Gamma_{(2)} = \frac{1}{2(4\pi)^2} \int d^{12}z \Psi^2 \bar{\Psi}^2 \left[ \frac{1}{36} + \frac{1}{5!} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k+5)(k+4)(k+1)}{(k+3)(k+2)} X^k \right]. \quad (1.43)$$

Независящая от  $X$  часть этого члена получена в [144]. Ряд в (1.43) суммируется к точному выражению следующим образом:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k+5)(k+4)(k+1)}{(k+3)(k+2)} X^k &= \\ &= \frac{1}{(1-X)^2} + \frac{4}{(1-X)} + \frac{6X-4}{X^3} \ln(1-X) + 4 \frac{X-1}{X^2} - \frac{10}{3}. \end{aligned} \quad (1.44)$$

Применяя такую же методику к третьему члену ( $\sim F^{10}$ ) в (1.36), можно найти

$$\begin{aligned} \Gamma_{(3)} = -\frac{5}{6(4\pi)^2} \int d^{12}z (\Psi^4 \bar{\Psi}^2 + \Psi^2 \bar{\Psi}^4) \times \\ \times \left[ -\frac{1}{5!} + \frac{1}{7!} \sum_{k=1}^{\infty} (k+7)(k+6)(k+1) X^k \right], \end{aligned} \quad (1.45)$$

где сумма в правой части суммируется к выражению

$$\sum_{k=1}^{\infty} (k+7)(k+6)(k+1) X^k = \frac{2X}{(1-X)^4} (56 - 116X + 84X^2 - 21X^3). \quad (1.46)$$

Таким образом, мы получили зависящие от гипермультиплетов дополнительные добавки к  $\Gamma_{(0)}$ ,  $\Gamma_{(2)}$  и  $\Gamma_{(3)}$  для эффективного действия, полученного в работе [144] в секторе  $\mathcal{N} = 2$  векторного мультиплета. Понятно, что каждый член в разложении эффективного действия (1.36) можно преобразовать к  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметричному виду. Например, зависящая от  $X$  часть четвертого члена ( $\sim F^{12}$ ) в (1.36) состоит из двух частей. Первая часть выражается как

$$\begin{aligned} \Gamma_{(4_1)} = \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{1}{17250} \int d^{12}z (\Psi^2 \bar{\Psi}^6 + \Psi^6 \bar{\Psi}^2) \times \\ \times \frac{12X}{(1-X)^6} (450 - 1545X + 2284X^2 - 1779X^3 + 720X^4 - 120X^5), \end{aligned} \quad (1.47)$$

а вторая дается выражением

$$\Gamma_{(4_2)} = \frac{1}{5 \cdot 6!} \frac{1}{(4\pi)^2} \int d^{12}z \Psi^4 \bar{\Psi}^4 \left[ \frac{12(5X-4)}{X^5} \ln(1-X) - \frac{1}{5X^4(1-X)^6} (240 - 1620X + 4610X^2 - 7120X^3 + 6363X^4 - 4878X^5 + 6135X^6 - 7560X^7 + 5670X^8 - 2268X^9 + 378X^{10}) \right]. \quad (1.48)$$

Таким образом, приходим к выводу, что изложенная методика восстановления  $\mathcal{N} = 2$  суперполевого формы эффективного действия (1.34) для  $\mathcal{N} = 4$  суперсимметричной теории Янга–Миллса, записанной изначально в терминах  $\mathcal{N} = 1$  суперполей, может быть применена к любому члену разложения (1.36). Для этого каждый такой член должен быть дополнен членами, содержащими гипермультиплетные суперполя. Указанная методика не гарантирует, что восстановленное  $\mathcal{N} = 2$  представление будет  $\mathcal{N} = 4$  инвариантно. Проверка этого свойства требует отдельного анализа. Для такого анализа можно использовать  $\mathcal{N} = 1$  суперполево представление скрытых  $\mathcal{N} = 4$  преобразований суперсимметрии (1.5), (1.6) или  $\mathcal{N} = 2$  суперполевого вид этих преобразований (1.9) в гармоническом суперпространстве.

Низкоэнергетическое эффективное действие  $\mathcal{N} = 4$  суперсимметричной теории Янга–Миллса должно быть самодуальным [124], а также инвариантным относительно преобразований суперконформной группы (возможно, деформированных, см. [112]). Однако этих требований недостаточно для однозначной фиксации  $\mathcal{N} = 4$  формы эффективного действия. До сих пор мы использовали приближение постоянного поля (1.3), которое предполагает, что все производные гипермультиплетных полей отсутствуют. Этого приближения достаточно для восстановления явной  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметрии эффективного действия из его  $\mathcal{N} = 1$  формы (1.34), полученной на фоне (1.3) в терминах  $\mathcal{N} = 2$  суперконформных скаляров [144]. Однако вычисление  $\mathcal{N} = 4$  суперсимметричного эффективного действия требует вычислений на фоне  $Dq \neq 0$ . Другой способ получения членов с производными  $Dq^{ia}$ , необходимых для восстановления  $\mathcal{N} = 4$  суперсимметричного вида эффективного действия, может быть основан на алгебраическом анализе, аналогичном проведенному в работе [146].

**1.9. Анализ деформации  $\mathcal{N} = 4$  суперсимметрии для эффективного действия в  $\mathcal{N} = 2$  суперпространстве.** Вне массовой поверхности глобальная и локальная (в супергравитации)  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметрии линейно реализуются на физических полях и на бесконечном наборе вспомогательных полей. При этом преобразования суперсимметрии не зависят от конкретного

вида действия теории. Но на массовой поверхности преобразования симметрии реализуются нелинейно. При получении вкладов с высшими производными в эффективное действие, удовлетворяющих требованию сохранения расширенной суперсимметрии, необходимо последовательно и самосогласованно деформировать классические преобразования и одновременно строить суперсимметрично-инвариантные члены с высшими поправками к действию:

$$\left( \delta_0 + \sum_n \delta_n \right) \left( S_0 + \sum_n S_n \right) = 0.$$

Здесь  $\delta_0$  — классические преобразования суперсимметрии;  $S_0$  — классическое действие, а  $\delta_n, S_n$  — квантовые деформации и высшие поправки к действию. Найти в замкнутой форме полную зависимость эффективного действия от производных едва ли возможно. Единственное, что мы можем сделать в такой ситуации, — выписать все суперсимметричные инварианты и деформированные преобразования с заданным числом производных, полагаясь на известные частные результаты. Для ведущего потенциала  $\propto F^4$  в секторе напряженности векторных суперполей (о последних результатах в этой области см. [52, 107, 145]) проблема вычисления полного  $\mathcal{N} = 4$  суперсимметричного инварианта была решена в работе [147].

Существуют различные подходы, позволяющие строить суперсимметричные поправки с высшими производными к струнному эффективному действию. В работе [124] (исходя из действия суперсимметричной максвелловской теории в  $\mathcal{N} = 3$  суперпространстве [51]) было найдено  $\mathcal{N} = 3$  расширение абелева  $D = 4$  действия Борна–Инфельда вне массовой поверхности. Суперполевая  $\mathcal{N} = 3$  напряженность содержит специфическую комбинацию тензорных вспомогательных полей и калибровочной напряженности. Как результат исключения этих вспомогательных полей с помощью нелинейных уравнений движения, в компонентном лагранжиане возникает нелинейность по обычной калибровочной напряженности. Этот механизм возникновения бозонного лагранжиана Борна–Инфельда из суперсимметричного действия отличается от случая  $\mathcal{N} = 1, D = 4$  суперсимметричной теории Борна–Инфельда, в которой независимо суперсимметризуется каждый член разложения бозонного действия по степеням напряженности калибровочного потенциала.

В данном разделе мы изложим возможный самосогласованный способ получения зависящих от гипермультиплетов дополнений и соответствующим образом деформированных преобразований скрытой суперсимметрии, которые необходимы для обеспечения явной  $\mathcal{N} = 4$  суперсимметрии в следующих после ведущего членах эффективного действия  $\mathcal{N} = 4$  суперсимметричной теории Янга–Миллса. Предлагаемый способ может оказаться полезным для решения проблемы нахождения инвариантов с высшими производными, по-



сколькx при непосредственном поиске последних возникает большое число альтернативных возможностей.

В дальнейшем мы сосредоточимся на проблеме инвариантности  $F^6$ -члена в  $\mathcal{N} = 4$  суперсимметричной теории Янга–Миллса при преобразованиях скрытой  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметрии.

Для построения следующих за ведущим членов разложения эффективного действия по производным, инвариантных относительно скрытых  $\mathcal{N} = 2$  преобразований и зависящих от всех полей  $\mathcal{N} = 4$  суперсимметричного мультиплетa полей Янга–Миллса, можно использовать процедуру Нетер для классических преобразований суперсимметрии, определенных с точностью до поверхностных членов и уравнений движения свободной теории

$$\begin{aligned}\delta_0 \mathcal{W} &= \frac{1}{2} \bar{\varepsilon}^{\dot{\alpha} a} \bar{D}_{\dot{\alpha}}^- q_a^+, & \delta_0 \bar{\mathcal{W}} &= \frac{1}{2} \varepsilon^{\alpha a} D_{\alpha}^- q_a^+, \\ \delta_0 q_a^{\pm} &= \frac{1}{4} (\varepsilon_a^{\alpha} D_{\alpha}^{\pm} \mathcal{W} + \bar{\varepsilon}_a^{\dot{\alpha}} \bar{D}_{\dot{\alpha}}^{\pm} \bar{\mathcal{W}}).\end{aligned}\tag{1.49}$$

Рассмотрим построение возможных гипермультиплетных дополнений для двухпетлевого члена типа  $\propto F^6$ , полученного в [145] в рамках техники суперграфов в гармоническом суперпространстве:

$$\begin{aligned}\Gamma_{(6|0)} &= c_2 \int d^{12}z \left[ \frac{1}{\mathcal{W}^2} \ln \mathcal{W} D^4 \ln \mathcal{W} + \frac{1}{\bar{\mathcal{W}}^2} \ln \bar{\mathcal{W}} \bar{D}^4 \ln \bar{\mathcal{W}} \right] = \\ &= c_2 \int d^{12}z \mathcal{L}_{(6|0)} + \text{с. с.},\end{aligned}\tag{1.50}$$

где  $c_2 = N^2 g_{\text{YM}}^2 \frac{1}{48 \cdot (4\pi)^4}$  и  $D^4 = (D^+)^2 (D^-)^2$ ,  $\bar{D}^4 = (\bar{D}^+)^2 (\bar{D}^-)^2$ . Выражение (1.50) состоит из двух различных частей, содержащих четвертые степени разных спинорных производных,  $D^4$  и  $\bar{D}^4$ . Эти части можно рассматривать по отдельности, поскольку преобразования (1.49) их не перемешивают. Вариация первой части в (1.50), индуцированная преобразованиями (1.49), может быть записана в виде

$$\begin{aligned}\delta_0 \mathcal{L}_{(6|0)} &= -\frac{2q^{+a}}{\mathcal{W}^3 \bar{\mathcal{W}}} (\bar{\varepsilon}_a^{\dot{\alpha}} \bar{D}_{\dot{\alpha}}^- \bar{\mathcal{W}} + \varepsilon_a^{\alpha} D_{\alpha}^- \mathcal{W}) D^4 \ln \mathcal{W} + \\ &+ \frac{q^{+a} \varepsilon_a^{\alpha} D_{\alpha}^- \mathcal{W}}{\mathcal{W} \bar{\mathcal{W}}^3} \bar{D}^4 \ln \bar{\mathcal{W}}.\end{aligned}\tag{1.51}$$

Возникающая проблема состоит в том, что классические вариации (1.51) содержат члены, несимметричные относительно замены  $\varepsilon \leftrightarrow \bar{\varepsilon}$ .

Далее будем рассматривать классические преобразования  $\delta_0$ , определенные в (1.49) вместе с их деформациями  $\delta_{(n|k)}$ . Полные деформированные

преобразования ищутся в виде разложения по степеням  $D, \bar{D}$  и степеням суперполя  $X = \frac{-2q^{+a}q_a^-}{\mathcal{W}\bar{\mathcal{W}}}$ , т. е.  $\delta = \delta_0 + \delta_1(D^4) + \delta_2(D^8) + \dots$ . Индекс  $k$  означает степень  $X$ , т. е.  $\delta_1 = \sum \delta_{(1|k)}$ . Введем первое дополнение к (1.50) как

$$\mathcal{L}_{(6|1)} = d_1 \left[ X \frac{1}{\mathcal{W}^2} D^4 \ln \mathcal{W} + X \frac{1}{\bar{\mathcal{W}}^2} \bar{D}^4 \ln \bar{\mathcal{W}} \right]. \quad (1.52)$$

Его вариация  $\delta_0^{(q)} \mathcal{L}_{(6|1)}$  по отношению к  $q^\pm$  сокращает первый член в (1.51) при  $d_1 = -2$ , однако второй член в (1.51) при этом не сокращается. Поскольку структура функционалов (1.50) несимметрична относительно замены  $\mathcal{W} \leftrightarrow \bar{\mathcal{W}}$ , в то время как  $\delta^{(q)}$ -вариация симметрична, на каждом шаге вариационной процедуры будет возникать остаток в виде разницы вариаций вида (1.50) и (1.51). Для сокращения этого остатка можно использовать однопетлевой член  $\Gamma_{(4)} \propto F^4$  с известным дополнением к нему [146]:

$$\Gamma_{(4)} = c_1 \int d^{12}z \left( \ln \mathcal{W} \ln \bar{\mathcal{W}} + \frac{1}{2} X + \frac{1}{4 \cdot 3} X^2 + \dots \right), \quad (1.53)$$

где  $c_1 = N \frac{1}{(4\pi)^2}$ . Известно, что этот член не перенормируется ни высшими петлями, ни инстантонными поправками. Предположим, что классические преобразования скрытой суперсимметрии деформируются следующим образом:

$$\delta_{(1|0)} \mathcal{W} = \frac{\bar{A}}{2} \bar{\varepsilon}^{\dot{\alpha}a} \bar{D}_{\dot{\alpha}}^- q_a^+ \frac{1}{\mathcal{W}^2} \bar{D}^4 \ln \bar{\mathcal{W}}, \quad (1.54)$$

$$\delta_{(1|0)} \bar{\mathcal{W}} = \frac{A}{2} \varepsilon^{\alpha a} D_{\alpha}^- q_a^+ \frac{1}{\bar{\mathcal{W}}^2} D^4 \ln \mathcal{W},$$

$$\delta_{(1|0)} q_a^\pm = \frac{1}{4} \left( B \varepsilon_a^\alpha D_{\alpha}^\pm \mathcal{W} \frac{1}{\mathcal{W}^2} D^4 \ln \mathcal{W} + \bar{B} \bar{\varepsilon}_a^{\dot{\alpha}} \bar{D}_{\dot{\alpha}}^\pm \bar{\mathcal{W}} \frac{1}{\bar{\mathcal{W}}^2} \bar{D}^4 \ln \bar{\mathcal{W}} \right). \quad (1.55)$$

Если коэффициенты, введенные в (1.54), (1.55), удовлетворяют условиям

$$c_2 + c_1 \frac{(\bar{A} - \bar{B})}{2} = 0, \quad c_2 + c_1 \frac{(A - B)}{2} = 0, \quad (1.56)$$

то деформированная вариация первых двух членов в  $\Gamma_{(4)}$  сократит последний член в (1.51). Вариация  $\mathcal{W}$  в первом дополнении  $\delta_0^{(\mathcal{W})} \mathcal{L}_{(6|1)}$  (1.52) при

классических преобразованиях (1.49) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \delta_0^{(\mathcal{W})} \mathcal{L}_{(6|1)} = & 4 \cdot \frac{5}{3} \frac{q^+ q^-}{\mathcal{W}^2 \bar{\mathcal{W}}^4} q^{+a} (\bar{\varepsilon}_a^{\dot{\alpha}} \bar{D}_{\dot{\alpha}}^- \bar{\mathcal{W}} + \varepsilon_a^{\alpha} D_{\alpha}^- \mathcal{W}) D^4 \ln \mathcal{W} + \\ & + \frac{4}{3} \frac{-2q^+ q^-}{\mathcal{W}^2 \bar{\mathcal{W}}^4} q^{+a} \varepsilon_a^{\alpha} D_{\alpha}^- \mathcal{W} D^4 \ln \mathcal{W} + \\ & + \frac{4}{3} \frac{\bar{\varepsilon}_a^{\dot{\alpha}} \bar{D}_{\dot{\alpha}}^+ q^{-a}}{\mathcal{W}^2 \bar{\mathcal{W}}^3} (q^+ D^+ q^-) \frac{1}{16} D_{\alpha}^+ D^{-2} \ln \mathcal{W}. \end{aligned} \quad (1.57)$$

Теперь введем второе дополнение

$$\mathcal{L}_{(6|2)} = d_2 \left( X^2 \frac{1}{\mathcal{W}^2} D^4 \ln \mathcal{W} + X^2 \frac{1}{\bar{\mathcal{W}}^2} \bar{D}^4 \ln \bar{\mathcal{W}} \right). \quad (1.58)$$

Его вариация по  $q^{\pm}$  в точности совпадает с первым членом из (1.57), и при выборе  $d_2 = -5/3$  она сократит вариацию, индуцированную  $\bar{\varepsilon}$ . Одновременно останется часть вариации (1.57). Для сокращения этого остатка рассмотрим вариацию действия (1.53) относительно следующих деформированных преобразований:

$$\begin{aligned} \delta_{(1|1)} \bar{\mathcal{W}} &= \frac{A_1}{2} X \varepsilon^{\alpha a} D_{\alpha}^- q_a^+ \frac{1}{\mathcal{W}^2} D^4 \ln \mathcal{W}, \\ \delta_{(1|1)} \mathcal{W} &= \frac{\bar{A}_1}{2} X \bar{\varepsilon}^{\dot{\alpha} a} \bar{D}_{\dot{\alpha}}^- q_a^+ \frac{1}{\bar{\mathcal{W}}^2} \bar{D}^4 \ln \bar{\mathcal{W}}, \end{aligned} \quad (1.59)$$

$$\delta_{(1|1)} q_a^- = \frac{B_1}{4} X \varepsilon_a^{\alpha} D_{\alpha}^- \mathcal{W} \frac{1}{\mathcal{W}^2} D^4 \ln \mathcal{W} + \frac{\bar{B}_1}{4} X \bar{\varepsilon}_a^{\dot{\alpha}} \bar{D}_{\dot{\alpha}}^- \bar{\mathcal{W}} \frac{1}{\bar{\mathcal{W}}^2} \bar{D}^4 \ln \bar{\mathcal{W}}. \quad (1.60)$$

Применим эти деформированные преобразования для вычисления вариации выражения (1.53): первый член проварьируем за счет  $\delta_{(1|1)}^{(\bar{\mathcal{W}})}$ , второй член — за счет  $\delta_{(1|0)}^{(\bar{\mathcal{W}})}$  и  $\delta_{(1|1)}^{(q)}$ , а третий член — за счет  $\delta_{(1|0)}^{(q)}$ . Полученная таким образом часть вариации имеет вид

$$\delta \mathcal{L}_{(4)} = c_1 \left( -\frac{2}{3} A_1 + B_1 + \frac{B - A}{3} \right) (q^+ q^-) q^{+a} \varepsilon_a^{\alpha} D_{\alpha}^- \mathcal{W} \frac{D^4 \ln \mathcal{W}}{\mathcal{W}^2 \bar{\mathcal{W}}^4}. \quad (1.61)$$

Требование взаимного сокращения второго члена в  $\Delta \mathcal{L}_{(6|1)}$  (1.57) и соответствующего члена в  $\delta \mathcal{L}_{(4)}$  (1.61) приводит к следующим уравнениям:

$$\frac{2}{3} c_2 = c_1 \left( \frac{B - A}{3} + B_1 - \frac{2}{3} A_1 \right), \quad \text{или} \quad c_1 \left( B_1 - \frac{2}{3} A_1 \right) = 2c_2. \quad (1.62)$$

Эти соотношения определяют коэффициенты разложения деформированных преобразований суперсимметрии по степеням  $X$ . В выборе чисел  $A$  и  $B$

существует произвол, для фиксации которого необходимы дополнительные условия. Чтобы сократить вторую часть в (1.57), введем дополнение нового типа

$$\mathcal{L}'_{(6|1)} = -\frac{1}{3} X \frac{q^+ D^{+\alpha} q^-}{\mathcal{W}\bar{\mathcal{W}}} \frac{1}{\bar{\mathcal{W}}^2} D_\alpha^+ D^{-2} \ln \mathcal{W}$$

и рассмотрим его вариацию относительно преобразований (1.49). Одна часть преобразованного выражения для этой вариации  $\sim D^4 \ln \mathcal{W}$  точно сокращает вторую строчку в (1.57). Однако полное сокращение требует включения дополнительных структур в действие и преобразования скрытой суперсимметрии. Далее мы покажем, какие дополнительные члены следует приписать к действию и преобразованиям скрытой суперсимметрии, чтобы обеспечить инвариантность с точностью до членов порядка  $F^8$  включительно.

Приведенный выше пример показывает, что, в принципе, дополнение для  $\mathcal{L}_{(6|0)} \propto D^4$  (1.50) определяется классическими преобразованиями (1.49), индуцированными параметром  $\bar{\epsilon}$ , а несоответствие, связанное с параметром  $\epsilon$ , исключается подходящей модификацией преобразований скрытой суперсимметрии  $\delta_{(1|n)} \propto X^n$  в каждом порядке. Таким образом, проблема разделяется на две отдельные задачи. Это и является основной идеей предлагаемого метода построения выражений, содержащих производные напряженностей векторного мультиплета и инвариантных относительно преобразований скрытой  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметрии.

Теперь, используя описанный выше способ, попытаемся найти ведущий член типа  $F^6$  в полном эффективном действии. Для этого следует выбрать общий член суммы дополнений к (1.50) в виде

$$\Gamma_{(6|n)} = d_n \int d^{12}z \left( \frac{-2q^+ q^-}{\mathcal{W}\bar{\mathcal{W}}} \right)^n \frac{1}{\bar{\mathcal{W}}^2} D^4 \ln \mathcal{W} + \text{c. c.} \quad (1.63)$$

Классическая вариация  $\delta_0 \mathcal{L}_{(6|n)}$ , индуцированная параметром  $\bar{\epsilon}$ , для членов  $\propto D^4 \ln \mathcal{W}$  имеет вид

$$\left[ -d_n n \frac{(-2q^+ q^-)^{n-1}}{\mathcal{W}^n \bar{\mathcal{W}}^{n+2}} + d_n \frac{n(n+4)}{n+2} \frac{(-2q^+ q^-)^n}{\mathcal{W}^{n+1} \bar{\mathcal{W}}^{n+3}} \right] \times \\ \times (q^{+a} \bar{\epsilon}_a^{\dot{\alpha}} \bar{D}_{\dot{\alpha}}^- \bar{\mathcal{W}}) D^4 \ln \mathcal{W}. \quad (1.64)$$

Требование сокращения вариаций  $\delta_0 \mathcal{L}_{(6|n)}$  и  $\delta_0 \mathcal{L}_{(6|n+1)}$  выполняется при условии

$$d_n = d \frac{(n+2)(n+3)}{n}. \quad (1.65)$$

Суммируя все дополнения  $\mathcal{L}_{(6)}^q = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{L}_{(6|n)}(X)$ , получим

$$\Gamma_{(6)}^q = -\frac{c_2}{6} \int d^{12}z \left[ \frac{X}{(1-X)^2} + \frac{5X}{1-X} - 6 \ln(1-X) \right] \frac{1}{\mathcal{W}^2} D^4 \ln \mathcal{W}. \quad (1.66)$$

Данный результат не является полным в том смысле, что к нему надо добавить вклады, содержащие производные гипермультиплетных полей. Но можно найти общий член с производными  $q^+ D^+ q^-$ . Введем дополнение нового типа

$$\mathcal{L}'_{(6|n)} = p_n \frac{(-2q^+ q^-)^n}{\mathcal{W}^{n+1} \bar{\mathcal{W}}^{n+3}} q^+ D_{\alpha}^+ q^- D^{+\alpha} D^{-3} \ln \mathcal{W}. \quad (1.67)$$

Требование сокращения его вариации  $\delta_0^q(\bar{\varepsilon})$  с соответствующим членом в вариации (1.63) ведет к неоднородному рекуррентному соотношению для  $p_n$ , которое имеет решение

$$p_n = -\frac{1}{6} \frac{(n+2)(n+3)}{n+1} - \frac{1}{12} \frac{(n+2)^2(n+3)}{n+7} H_{n+1}^{(2)}, \quad (1.68)$$

где  $H_n^{(2)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$  — гармонические числа  $[n, 2]$ . Для коэффициентов ряда с общим членом другого типа,  $\mathcal{L}''_{(6|n)} = h_n X^n (q^+ D^+ q^-)^2 D^{-2} \ln \mathcal{W}$ , возникнет рекуррентное соотношение другого типа между коэффициентами  $p_n, d_n, h_n$ .

Основной вывод состоит в том, что для  $\mathcal{N} = 4$  суперсимметризации следующих за ведущими членами эффективного действия необходимо рассматривать преобразования, которые перемешивают члены разных степеней в разложении эффективного действия по производным. Для того чтобы удостовериться в содержательности преобразований (1.54), (1.55), рассмотрим вариацию классического действия. Вариация действия гипермультиплетных суперполей пропорциональна уравнениям движения  $D^{++} q^+ = 0$ , а вариация напряженности векторных суперполей по правилу (1.54) порождает следующую вариацию действия:

$$\delta_{(1|0)} \Gamma_0 = \frac{1}{8} \int d^{12}z \left( \bar{A} \bar{\varepsilon}^{\dot{\alpha} a} \bar{D}_{\dot{\alpha}}^- q_a^+ \frac{1}{\mathcal{W}} \ln \bar{\mathcal{W}} + A \varepsilon^{\alpha a} D_{\alpha}^- q_a^+ \frac{1}{\mathcal{W}} \ln \mathcal{W} \right). \quad (1.69)$$

Эта вариация имеет такую же структуру, что и вариация выражения  $\int d^{12}z \ln \mathcal{W} \ln \bar{\mathcal{W}}$  относительно (1.49), поэтому данное выражение следует добавить к классическому действию для обеспечения инвариантности относительно деформированных преобразований (1.54).

Рассмотрим первую деформированную вариацию члена типа  $F^6$  (1.50).  
Получим

$$\delta_{(1|0)}\mathcal{L}_{(6|0)} = c_2 \left[ \frac{\bar{A}}{\mathcal{W}^3 \mathcal{W}^2} \varepsilon^{\dot{\alpha}a} \bar{D}_{\dot{\alpha}}^- q_a^+ D^4 \ln \mathcal{W} \bar{D}^4 \ln \bar{\mathcal{W}} - \frac{A}{\mathcal{W}^5} \varepsilon^{\alpha a} D_{\alpha}^- q_a^+ \ln \mathcal{W} (D^4 \ln \mathcal{W})^2 \right]. \quad (1.70)$$

Первый член в скобках похож на классическую вариацию однопетлевого члена типа  $F^8$ :  $\mathcal{L}_{(8|0)} = \Psi^2 \bar{\Psi}^2 = \frac{1}{\mathcal{W}^2} \bar{D}^2 \ln \bar{\mathcal{W}} \frac{1}{\mathcal{W}^2} D^4 \ln \mathcal{W}$ , однако он появляется с другим коэффициентом  $c_2$ . Это означает, что однопетлевой коэффициент  $\frac{1}{2(24\pi)^2}$  у члена типа  $F^8$  [145] должен перенормироваться двухпетлевыми поправками. Второй член в (1.70) — нового типа. Для его сокращения требуется член с новой структурой

$$\Gamma'_{(8|0)} = c_8 \int d^{12}z \ln \mathcal{W} \left( \frac{1}{\mathcal{W}^2} D^4 \ln \mathcal{W} \right)^2, \quad (1.71)$$

с типичным  $\propto 1/(4\pi)^4$  двухпетлевым коэффициентом  $c_8 = -c_2(A/2)$ . Поэтому можно предположить, что при двухпетлевых вычислениях эффективного действия должен возникать член типа  $F^8$ . С одной стороны, именно он необходим для сокращения второго члена в (1.70), а с другой стороны, он должен иметь коэффициент, характерный для двухпетлевых поправок\*.

Таким образом, самосогласованный подход позволяет получить соответствующие дополнения, содержащие гипермультиплетные суперполя, и деформированные преобразования суперсимметрии, которые, в свою очередь, позволяют получать информацию о перенормировке высших вкладов в эффективное действие.

**1.10. Итоги.** Построено разложение по производным однопетлевого эффективного действия  $\mathcal{N} = 4$  суперсимметричной теории Янга–Миллса, содержащего как  $\mathcal{N} = 1$  суперполя векторного мультиплета, так и суперполя гипермультиплетов материи. Полученное действие переписывается в терминах разложения по степеням  $\mathcal{N} = 2$  суперконформных инвариантов, в котором ведущим членом является  $\mathcal{N} = 4$  суперсимметричный эффективный потенциал, ранее построенный в работе [146]. Найдены следующие за ведущими вклады в это действие. Подчеркнуто, что все полученные явно  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметричные вклады, за исключением ведущего, не должны обладать

---

\*Возможность появления члена  $F^8$  при вычислении двухпетлевых вкладов в эффективное действие обсуждается в работе [145].

инвариантностью относительно классических скрытых  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметрий, что обусловлено выбором фона и процедурой фиксации калибровки. С использованием формулировки теории на языке  $\mathcal{N} = 2$  гармонического суперпространства анализируются возможные самосогласованные деформации скрытых  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметрий и сублидирующие члены эффективного действия  $\mathcal{N} = 4$  суперсимметричной теории Янга–Миллса вне массовой поверхности. Построено зависящее от суперполей гипермультиплетов дополнение для двухпетлевого члена  $\propto F^6$  в разложении Швингера–Де Витта эффективного действия.

## 2. ОДНОПЕТЛЕВОЕ ЭФФЕКТИВНОЕ ДЕЙСТВИЕ $\mathcal{N} = 4$ СУПЕРСИММЕТРИЧНОЙ ТЕОРИИ ЯНГА–МИЛЛСА В ГАРМОНИЧЕСКОМ СУПЕРПРОСТРАНСТВЕ

**2.1. Введение.**  $\mathcal{N} = 4$  суперсимметричная теория Янга–Миллса привлекает повышенное внимание благодаря ее уникальным квантовым свойствам, таким как конечность и точная суперконформная инвариантность, а также из-за ее глубоких связей с теорией струн и бран (см., например, [54, 139]). Открытие соответствия  $AdS/CFT$  стимулировало новый всплеск интереса к изучению различных аспектов  $\mathcal{N} = 4$  суперкалибровочной теории. Как уже было ранее сказано, соответствие  $AdS/CFT$  [116] представляет собой гипотезу о дуальности между ПВ теорией суперструн, компактифицированной на  $AdS_5 \times S^5$ , и четырехмерными  $\mathcal{N} = 4$  суперкалибровочными теориями в пределе 'т Хоофта. Предполагается, что низкоэнергетические свойства теории струн в 5-мерном объеме связаны с  $\mathcal{N} = 4$  суперсимметричной калибровочной квантовой теорией поля на 4-мерной границе. Более точное утверждение состоит в том, что в рассматриваемом пределе теория в объеме сводится к 5-мерной классической супергравитации, которая содержит полную информацию о корреляционных функциях калибровочно-инвариантных составных операторов в квантовой  $\mathcal{N} = 4$ ,  $D = 4$  теории. Из этого гипотетического соответствия между  $\mathcal{N} = 4$  калибровочной теорией и теорией струн также следует, что взаимодействия D3-бран в статическом пределе должны полностью описываться в терминах низкоэнергетического эффективного действия  $\mathcal{N} = 4$ ,  $D = 4$  суперсимметричной теории Янга–Миллса в кулоновской фазе [141, 144, 145]. Таким образом,  $\mathcal{N} = 4$  суперсимметричная калибровочная теория должна рассматриваться как неотъемлемый элемент теории суперструн.

Как уже отмечалось, формулировка  $\mathcal{N} = 4$  калибровочной теории с явной  $\mathcal{N} = 4$  суперсимметрией вне массовой оболочки до сих пор неизвестна. Суперполевое описание этой теории на массовой оболочке достигается в терминах скалярного суперполя  $W_{AB} = -W_{BA}$ ,  $A, B = 1, \dots, 4$ , образую-

шего шестимерное вещественное представление группы внутренней симметрии (« $R$ -симметрии»)  $SU(4) : \bar{W}^{AB} = (1/2)\epsilon^{ABCD}W_{CD}$  [186]. Суперполе  $W_{AB}$  подчинено связям

$$\mathcal{D}_{\alpha A}W_{BC} = \mathcal{D}_{\alpha[A}W_{BC]}, \quad \bar{\mathcal{D}}_{\dot{\alpha}}^A W_{BC} = -\frac{2}{3}\delta_{[B}^A \bar{\mathcal{D}}_{\dot{\alpha}}^E W_{C]E}.$$

Они приводят к уравнениям движения для компонентных полей, состав которых соответствует векторному  $\mathcal{N} = 4$  мультиплету, включающему шесть вещественных скалярных полей, четыре майорановских спинорных поля и одно векторное калибровочное поле\*.

С точки зрения  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметричной теории поля  $\mathcal{N} = 4$  векторный мультиплет представляет собой прямую сумму  $\mathcal{N} = 2$  векторного мультиплета и гипермультиплета [51]. Соответственно,  $\mathcal{N} = 4$  калибровочную теорию можно трактовать как некоторое расширение  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметричной калибровочной теории, к стандартному действию которой добавлено действие  $\mathcal{N} = 2$  гипермультиплета в присоединенном представлении, взаимодействующего с  $\mathcal{N} = 2$  векторным мультиплетом через минимальную связь. Такая модель обладает дополнительной скрытой  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметрией, которая в замыкании с явной  $\mathcal{N} = 2$  как раз порождает  $\mathcal{N} = 4$  суперсимметрию. Обе  $\mathcal{N} = 2$  теории, из которых составлена  $\mathcal{N} = 4$  теория, естественно формулировать в  $\mathcal{N} = 2$  гармоническом суперпространстве [51, 56]. Благодаря наличию явной  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметрии в гармоническом подходе такая формулировка упрощает квантовое рассмотрение.

Непосредственное вычисление многопетлевых вкладов в эффективное действие в замкнутом виде представляет собой крайне сложную техническую задачу даже в гармоническом формализме. Анализ эффективного действия становится куда более простым и ясным в рамках суперполевого метода фоновых гармонических суперполей [41, 52]. За последнее время достигнут существенный прогресс в развитии техники многопетлевых вычислений в гармоническом суперпространстве для  $\mathcal{N} = 2$  фонового векторного мультиплета [107]. Представляется важным и полезным изучение общей структуры возможных поправок более высокого порядка к эффективному действию в методе фоновых суперполей.

В данном разделе  $\mathcal{N} = 4$  суперкалибровочная теория рассматривается как некоторый специальный случай общих  $\mathcal{N} = 2$  калибровочных моделей. Все такие модели можно сформулировать явно  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметричным образом в  $\mathcal{N} = 2$  гармоническом суперпространстве.  $\mathcal{N} = 4$  теория выделена

---

\*Тот же самый мультиплет может быть описан вне массовой оболочки в  $\mathcal{N} = 3$  гармоническом суперпространстве [51, 56]. Квантовые аспекты  $\mathcal{N} = 3$  калибровочной теории в гармонической формулировке обсуждались в [61]. Структура эффективного действия этой теории рассматривалась в [41].



тем, что она обладает дополнительной скрытой  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметрией. Формулировка на языке  $\mathcal{N} = 2$  суперпространства позволяет воспользоваться известной классификацией основных состояний в  $\mathcal{N} = 2$  калибровочных моделях (см., например, [74]). В соответствии с этой классификацией та фаза теории, в которой как скаляры из  $\mathcal{N} = 2$  векторного мультиплетта, так и скаляры из гипермультиплетта обладают ненулевыми вакуумными средними значениями, называется смешанной фазой. Этот вариант спонтанного нарушения калибровочной симметрии в точности соответствует рассматриваемой проблеме. Очевидно, что для сохранения скрытой  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметрии в основном состоянии должны быть отличны от нуля вакуумные средние не только полей  $\mathcal{N} = 2$  векторного мультиплетта, но и полей гипермультиплетта. Явный вид преобразований скрытой  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметрии на средних значениях полей основного состояния и применения этих преобразований приведены в работе [215]\*.

В настоящее время хорошо известно, что точная низкоэнергетическая квантовая динамика  $\mathcal{N} = 4$  калибровочной теории в секторе  $\mathcal{N} = 2$  векторного мультиплетта для калибровочной группы  $SU(N)$ , спонтанно нарушенной до ее максимального тора  $U(1)^{N-1}$ , описывается неголоморфным эффективным потенциалом  $\mathcal{H}(\mathcal{W}, \bar{\mathcal{W}})$ , зависящим от  $\mathcal{N} = 2$  суперполевых напряженностей  $\mathcal{W}, \bar{\mathcal{W}}$  [41, 86]. Структура  $\mathcal{H}(\mathcal{W}, \bar{\mathcal{W}})$  настолько уникальна, что может быть найдена (с точностью до числового множителя) единственно на основе требований масштабной инвариантности и  $R$ -симметрии. Кроме того, потенциал  $\mathcal{H}(\mathcal{W}, \bar{\mathcal{W}})$  не получает пертурбативных квантовых поправок сверх одной петли, а также каких-либо непертурбативных инстантонных поправок (обсуждение неголоморфного потенциала в  $\mathcal{N} = 2$  калибровочной теории можно найти в работе [82], а следующих за ведущим двухпетлевых вкладов в эффективное действие — в работах [107, 145]). Все эти свойства очень важны для понимания низкоэнергетической квантовой динамики  $\mathcal{N} = 4$  калибровочной теории с точки зрения ее соответствия теории суперструн. В частности, оказывается, что в рамках такого соответствия эффективный потенциал  $\mathcal{H}(\mathcal{W}, \bar{\mathcal{W}})$  описывает главные члены взаимодействия между параллельными D3-бранами.

Для выяснения ограничений на эффективное действие, налагаемых  $\mathcal{N} = 4$  суперсимметрией, нахождения полной структуры эффективного действия и более глубокого понимания соответствия « $\mathcal{N} = 4$  калибровочная тео-

---

\*Следует обратить внимание на то обстоятельство, что в литературе не существует единой терминологии касательно основного состояния  $\mathcal{N} = 4$  теории Янга–Миллса, в которой понятия кулоновской, хиггсовской и смешанной фаз в отдельности теряют смысл. Одна из возможностей состоит в использовании терминологии  $\mathcal{N} = 2$  калибровочных теорий исходя из того факта, что  $\mathcal{N} = 4$  теория является их частным случаем. Здесь мы будем следовать именно такому соглашению.

рия/супергравитация» необходимо знать зависимость эффективного действия от всех полей  $\mathcal{N} = 4$  мультиплетов, включая поля гипермультиплетов. Проблема построения эффективного действия  $\mathcal{N} = 4$  теории Янга–Миллса в смешанной фазе оставалась неизученной в течение длительного времени. Сравнительно недавно полное точное выражение для низкоэнергетического эффективного потенциала  $\mathcal{L}_q(X)$ ,  $X = -\frac{q^{ia}q_{ia}}{\mathcal{W}\bar{\mathcal{W}}}$ , включающее зависимость как от  $\mathcal{N} = 2$  калибровочных суперполей, так и от суперполей гипермультиплетов, было построено в работе [146]. Там было показано, что в подходе  $\mathcal{N} = 2$  гармонического суперпространства алгебраические ограничения, налагаемые скрытой  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметрией на структуру низкоэнергетического эффективного действия, оказываются настолько сильными, что позволяют восстановить гипермультиплетную зависимость низкоэнергетического эффективного действия исходя из известного неголоморфного эффективного потенциала  $\mathcal{H}(\mathcal{W}, \bar{\mathcal{W}})$ . В результате был найден дополнительный гипермультиплетно-зависимый вклад в низкоэнергетическое эффективное действие, содержащий как суперполя напряженностей  $\mathcal{N} = 2$  калибровочного мультиплетов  $\mathcal{W}, \bar{\mathcal{W}}$ , так и суперполя гипермультиплетов  $q^{ia}$ , все подчиненные условиям массовой поверхности.

Ведущий низкоэнергетический эффективный лагранжиан  $\mathcal{L}_q(X)$  был построен в работе [146] сугубо алгебраическими методами. Впоследствии в работе [147] было показано, как вычислить эффективный лагранжиан  $\mathcal{L}_q(X)$  на основе техники гармонических супердиаграмм и метода фонового поля в гармоническом суперпространстве. В работе [215] структура однопетлевого эффективного действия, следующего за главным приближением, была найдена на основе формулировки  $\mathcal{N} = 4$  калибровочной теории в терминах  $\mathcal{N} = 1$  суперполей и использования техники разложения по производным в  $\mathcal{N} = 1$  суперпространстве. Хотя такая формулировка сохраняет меньшее число явных суперсимметрий по сравнению с подходом гармонического суперпространства, суперсимметричная  $R_\xi$ -калибровка и особые приемы восстановления  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметричной формы действия позволяют построить эффективное действие, включающее зависимость от произвольных степеней абелевых напряженностей  $F_{mn}$  и специальных  $R$ -симметричных комбинаций постоянных скалярных полей  $\phi, f^{ia}$  из векторного мультиплетов и гипермультиплетов.

Данный раздел посвящен анализу гипермультиплетной зависимости низкоэнергетического эффективного действия  $\mathcal{N} = 4$  суперсимметричной теории Янга–Миллса в  $\mathcal{N} = 2$  гармоническом суперпространстве. Мы вычисляем низкоэнергетическое эффективное действие для независимых от пространственно-временных координат фоновых суперполей напряженности  $\mathcal{N} = 2$  векторного мультиплетов и суперполей гипермультиплетов при следующих предположениях: а)  $\mathcal{W}|_{\theta=0} = \text{const}$ ,  $D_\alpha^\pm \mathcal{W}|_{\theta=0} = \text{const}$ ,  $D_\alpha^- D_\beta^+ \mathcal{W}|_{\theta=0} = \text{const}$ ; б) фоновый гипермультиплет находится на массовой оболочке, т. е.  $q^{\pm a} = q^{ia} u_i^\pm$ ,

где  $q^{ia}$  не зависит от гармоник и считается постоянным. Это означает, что мы рассматриваем эффективное действие в гипермультиплетном секторе как ряд по степеням спинорных производных суперполя  $q^{+a}$  и изучаем простейшее приближение, отвечающее тем вкладам в эффективное действие, которые не зависят от каких-либо производных  $q^{+a}$ . По сравнению с работой [147] рассматривается эффективное действие за пределами ведущего низкоэнергетического приближения в секторе  $\mathcal{N} = 2$  векторного мультиплета, т. е. учитываются все степени абелевой напряженности  $F_{mn}$ . С другой стороны, в отличие от работы [215] на всех этапах рассмотрения используется только  $\mathcal{N} = 2$  гармоническое суперпространство. Тем самым дается обоснование тому специальному эвристическому рецепту восстановления явно  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметричной формы эффективного действия, который был использован в [215] и изложен в предыдущем разделе. В качестве основного результата получено представление собственного времени для низкоэнергетического эффективного действия в виде интеграла по аналитическому подпространству гармонического суперпространства.

Раздел организован следующим образом. В п. 2.2 обсуждается построение  $\mathcal{N} = 4$  калибровочной теории в  $\mathcal{N} = 2$  гармоническом суперпространстве и описывается структура соответствующей теории возмущений. Пункт 2.3 посвящен общей процедуре нахождения однопетлевого эффективного действия в секторе гипермультиплета. В п. 2.4 показано, как суммировать бесконечные серии ковариантных гармонических супердиаграмм с произвольным числом внешних линий гипермультиплета на нетривиальном фоне  $\mathcal{N} = 2$  векторного мультиплета, чтобы представить эффективное действие в виде, наиболее подходящем для дальнейшего его изучения на основе метода собственного времени. Пункт 2.5 посвящен вычислению однопетлевого эффективного действия с помощью обобщения метода символов оператора на случай  $\mathcal{N} = 2$  гармонического суперпространства. В п. 2.6 получен окончательный результат для однопетлевого эффективного действия в виде интеграла по аналитическому подпространству гармонического суперпространства. Показано, что этот результат предполагает разложение эффективного действия по спинорным ковариантным производным, и явно найдены первые два члена такого разложения. Каждый член разложения можно переписать в виде интеграла по полному  $\mathcal{N} = 2$  суперпространству. В п. 2.7 суммированы основные результаты данного раздела.

**2.2.  $\mathcal{N} = 4$  суперсимметричная теория Янга–Миллса в  $\mathcal{N} = 2$  гармоническом суперпространстве.** Гармоническое суперпространство является универсальным инструментом построения  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметричных теорий с сохранением явной  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметрии вне массовой оболочки на всех этапах рассмотрения. Этот новый тип суперпространств был введен в работе [56] и в дальнейшем развивался и усовершенствовался многими авторами. Детальное обсуждение основ и приложений метода гармонического

суперпространства дано в монографии [51], обозначениям и соглашениям из которой мы будем следовать в этом разделе.

Гармоническое суперпространство представляет собой расширение стандартного  $\mathcal{N} = 2$  суперпространства  $z = (x^m, \theta_i^\alpha, \bar{\theta}^{\dot{\alpha}i})$  внутренней сферой  $S^2 = SU(2)/U(1)$ , где  $SU(2)$  — группа автоморфизмов  $\mathcal{N} = 2$  супералгебры Пуанкаре. Эта сфера описывается параметризационно-независимым образом гармониками  $u^{+i}$  и им сопряженными  $u_i^-$ , подчиненными условию  $u^{+i}u_i^- = 1$ . В таком расширенном суперпространстве возможно выделить аналитическое суперпространство с вдвое меньшим числом грассмановых координат переходом к новому (аналитическому) базису  $z_A = (\zeta, \theta_\alpha^-, \bar{\theta}_\alpha^-)$ . Переменные  $\zeta = (x_A^m, \theta^{+\alpha}, \bar{\theta}_\alpha^+, u_i^+, u_i^-)$  как раз и образуют аналитическое подпространство, главным свойством которого является замкнутость относительно координатных преобразований  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметрии. Связь с исходным (центральным) базисом задается соотношениями

$$x_A^m = x^m - 2i\theta^{(i}\sigma^m\bar{\theta}^{j)}u_i^+u_j^-, \quad \theta_\alpha^\pm = u_i^\pm\theta_\alpha^i, \quad \bar{\theta}_\alpha^\pm = u_i^\pm\bar{\theta}_\alpha^i.$$

Как общие гармонические суперполя, так и суперполя, заданные на аналитическом подпространстве («аналитические гармонические суперполя»), могут переносить ненулевой внешний («гармонический»)  $U(1)$ -заряд, где  $U(1)$  — подгруппа в знаменателе гармонического фактор-пространства  $S^2 = SU(2)/U(1)$ . Это тот же заряд, который переносят гармонические координаты  $u_i^\pm$  и соответствующие проекции грассмановых координат в аналитическом базисе. Строгое сохранение гармонического  $U(1)$ -заряда на всех этапах рассмотрения — один из основных принципов метода гармонического суперпространства.

Спинорные ковариантные производные в центральном и аналитическом базисах связаны между собой как  $D_\alpha^\pm = u_i^\pm D_\alpha^i$ ,  $\bar{D}_\alpha^\pm = u_i^\pm \bar{D}_\alpha^i$ , причем производные  $D_\alpha^+$ ,  $\bar{D}_\alpha^+$  становятся «короткими» в аналитическом базисе:

$$D_\alpha^+ = \frac{\partial}{\partial\theta^{-\alpha}}, \quad \bar{D}_\alpha^+ = \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{-\alpha}}. \quad (2.1)$$

Принимая во внимание независящие от выбора базиса очевидные свойства антикоммутиративности

$$\{D_\alpha^+, D_\beta^+\} = \{\bar{D}_\alpha^+, \bar{D}_\beta^+\} = \{D_\alpha^+, \bar{D}_\beta^+\} = 0 \quad (2.2)$$

(они следуют из вида антикоммутаторов исходных спинорных производных после проецирования последних на гармоники  $u^{+i}$ ), можно ковариантно определить аналитические гармонические суперполя  $\Phi^{(p)}$ , где  $(p)$  — гармонический  $U(1)$ -заряд как подкласс общих гармонических суперполей, выделяемый связями

$$D_\alpha^+\Phi^{(p)} = \bar{D}_\beta^+\Phi^{(p)} = 0. \quad (2.3)$$

В аналитическом базисе связи (2.3) из-за свойства «короткости» (2.1) принимают вид грассмановых условий Коши–Римана и легко решаются через суперполя без связей, «живущие» на аналитическом суперпространстве:

$$\Phi^{(p)} = \Phi^{(p)}(\zeta) = \Phi^{(p)}(x_A, \theta^+, \bar{\theta}^+, u^\pm). \quad (2.4)$$

Двумя основными  $\mathcal{N} = 2$  мультиплетами, на которых базируется интересующая нас  $\mathcal{N} = 4$  суперсимметричная калибровочная теория, являются гипермультиплет и  $\mathcal{N} = 2$  векторный мультиплет. В гармоническом суперпространстве гипермультиплет описывается вне массовой оболочки аналитическим суперполем с  $U(1)$ -зарядом, равным  $+1$ :

$$D_\alpha^+ q^+ = \bar{D}_{\dot{\alpha}}^+ q^+ = 0 \Rightarrow q^+ = q^+(x_A, \theta^+, \bar{\theta}^+, u).$$

Его свободное действие дается интегралом по аналитическому подпространству

$$S_{\text{hyper}} = - \int d\zeta^{(-4)} \bar{q}^+ D^{++} q^+, \quad (2.5)$$

где  $d\zeta^{(-4)} = d^4x d^2\theta^+ d^2\bar{\theta}^+ du$  — соответствующая мера интегрирования (она заряжена, поскольку грассмановы координаты переносят гармонические заряды), а

$$D^{++} = u^{+i} \frac{\partial}{\partial u^{-i}} - 2i(\theta^+ \sigma^m \bar{\theta}^+) \frac{\partial}{\partial x_A^m}$$

— одна из трех гармонических производных в аналитическом базисе, выделенная тем, что коммутирует со спинорными производными  $D_\alpha^+, \bar{D}_{\dot{\beta}}^+$  и, следовательно, сохраняет аналитичность. Две другие производные,  $D^{--}$  и  $D^0$ , вместе с  $D^{++}$  образуют алгебру  $su(2)$ ,

$$[D^{++}, D^{--}] = D^0, \quad [D^0, D^{\pm\pm}] = \pm 2D^{\pm\pm},$$

в которой  $D^{\pm\pm}$  играют роль операторов повышения и понижения, а  $D^0$  — оператор гармонического  $U(1)$ -заряда, принимающий фиксированное значение на гармонических суперполях,  $D^0 \Phi^{(p)} = p \Phi^{(p)}$ . Мера  $d\zeta^{(-4)}$  помимо интегрирования по координатам  $x_A^m$  и  $\theta_\alpha^+, \bar{\theta}_{\dot{\beta}}^+$  содержит гармоническую меру интегрирования  $du$ . Правила интегрирования по гармоникам приведены в [51].

Уравнение движения для гипермультиплета, следующее из действия (2.5), также имеет вид условия аналитичности, в этом случае по отношению к гармоническим  $SU(2)$ -координатам,

$$D^{++} q^+ = 0.$$

Это уравнение полностью «убивает» бесконечный «хвост» вспомогательных полей, которые присутствуют в разложении суперполя  $q^+$  по гармоническим

координатам вне массовой оболочки, и приводит к стандартным условиям массовой поверхности для физических полей (кваргета скаляров и двух вейлевских фермионов). Его решение образует так называемое ультракороткое суперполе.

Векторный (калибровочный)  $\mathcal{N} = 2$  мультиплет описывается вещественным дважды заряженным аналитическим суперполем  $V^{++}(x, \theta^+, \bar{\theta}^+, u)$ ,  $D^0 V^{++} = 2V^{++}$ . Это суперполе играет роль калибровочной связности в ковариантизированной гармонической производной

$$\mathcal{D}^{++} = D^{++} + igV^{++},$$

которая, как и плоская  $D^{++}$ , коммутирует с  $D_{(\alpha, \dot{\alpha})}^+$ :  $[D^{++}, D_{\alpha, \dot{\alpha}}^+] = 0$ . В калибровке Весса–Зумино суперполе  $V^{++}$  в качестве компонент содержит все поля  $\mathcal{N} = 2$  векторного мультиплета вне массовой поверхности (комплексное скалярное поле, калибровочное векторное поле,  $SU(2)$ -дублет вейлевских фермионов и вещественный  $SU(2)$ -триплет вспомогательных полей). Таким образом,  $V^{++}$  является базисным объектом  $\mathcal{N} = 2$  калибровочной теории, ее неограниченным аналитическим препотенциалом. Все другие объекты этой теории, например, суперполе напряженности  $\mathcal{W}$ , выражаются через  $V^{++}$  [51, 56]. Говоря точнее, суперполе напряженности непосредственно выражается через неаналитическое суперполе  $V^{--}$ ,

$$\mathcal{W} = -\frac{1}{4}(\bar{D}^+)^2 V^{--}, \quad \bar{\mathcal{W}} = -\frac{1}{4}(D^+)^2 V^{--}, \quad (2.6)$$

которое связано с  $V^{++}$  условием «нулевой гармонической кривизны»,

$$D^{++}V^{--} - D^{--}V^{++} + i[V^{++}, V^{--}] = 0. \quad (2.7)$$

Это условие имеет решение в виде степенного ряда

$$V^{--} = \sum_{n=1}^{\infty} \int d^{12}z du_1 \cdots du_n (-i)^{n+1} \frac{V^{++}(z, u_1) \cdots V^{++}(z, u_n)}{(u^+ u_1^+)(u_1^+ u_2^+) \cdots (u_n^+ u^+)}, \quad (2.8)$$

который является нелокальным функционалом  $V^{++}$  в секторе гармонических переменных. Из представления (2.6), условия (2.7) и аналитичности  $V^{++}$  следует, в частности, ковариантная  $u$ -независимость напряженности  $\mathcal{W}$ ,

$$\mathcal{D}^{\pm\pm} \mathcal{W} = 0.$$

Другими важными свойствами супернапряженностей  $\mathcal{W}, \bar{\mathcal{W}}$ , также следующими из определения (2.6), являются их киральность (антикиральность),

$\mathcal{D}_\alpha^\pm \bar{\mathcal{W}} = \bar{\mathcal{D}}_\alpha^\pm \mathcal{W} = 0$ , и тождество Бьянки:  $\mathcal{D}^{\alpha i} \mathcal{D}_\alpha^j \mathcal{W} = \bar{\mathcal{D}}_\alpha^i \bar{\mathcal{D}}^{\alpha j} \bar{\mathcal{W}}$ . Для дальнейшего использования необходимо привести также полную алгебру ковариантных производных:

$$\begin{aligned} \{\mathcal{D}_\alpha^+, \mathcal{D}_\beta^+\} &= \{\bar{\mathcal{D}}_\alpha^+, \bar{\mathcal{D}}_\beta^+\} = \{\mathcal{D}_\alpha^+, \bar{\mathcal{D}}_\alpha^+\} = 0, \\ \{\mathcal{D}_\alpha^+, \mathcal{D}_\beta^-\} &= -2i\varepsilon_{\alpha\beta} \bar{\mathcal{W}}, \quad \{\bar{\mathcal{D}}_\alpha^+, \bar{\mathcal{D}}_\beta^-\} = 2i\varepsilon_{\alpha\beta} \mathcal{W}, \\ \{\bar{\mathcal{D}}_\alpha^+, \mathcal{D}_\alpha^-\} &= -\{\mathcal{D}_\alpha^+, \bar{\mathcal{D}}_\alpha^-\} = 2i\mathcal{D}_{\alpha\dot{\alpha}}, \\ [\mathcal{D}^{++}, \mathcal{D}_\alpha^-] &= \mathcal{D}_\alpha^+, \quad [D^{++}, \bar{\mathcal{D}}_\alpha^-] = \mathcal{D}_\alpha^+, \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} [\mathcal{D}_\alpha^\pm, \mathcal{D}_{\beta\dot{\beta}}] &= \varepsilon_{\alpha\beta} \bar{\mathcal{D}}_{\dot{\beta}}^\pm \bar{\mathcal{W}}, \quad [\bar{\mathcal{D}}_\alpha^\pm, \mathcal{D}_{\beta\dot{\beta}}] = \varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \mathcal{D}_{\beta\dot{\beta}}^\pm \mathcal{W}, \\ [\mathcal{D}_{\alpha\dot{\alpha}}, \mathcal{D}_{\beta\dot{\beta}}] &= \frac{1}{2i} \{\varepsilon_{\alpha\beta} \bar{\mathcal{D}}_\alpha^+ \bar{\mathcal{D}}_\beta^- \bar{\mathcal{W}} + \varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \mathcal{D}_\alpha^- \mathcal{D}_\beta^+ \mathcal{W}\}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Как уже не раз было сказано ранее, действие  $\mathcal{N} = 4$  калибровочной теории в  $\mathcal{N} = 2$  гармоническом суперпространстве есть сумма действий векторного мультиплета и взаимодействующего с ним через минимальную связь гипермультиплета в присоединенном представлении калибровочной группы:

$$S_{(\mathcal{N}=4_{\text{SYM}})} = \frac{1}{2g^2} \text{tr} \int d^8 z \mathcal{W}^2 - \frac{1}{2} \text{tr} \int d\zeta^{(-4)} q^{+a} (D^{++} + iV^{++}) q_a^+. \quad (2.11)$$

Здесь  $a = 1, 2$  — индекс глобальной  $SU(2)$ -группы симметрии Паули–Гюрги:  $q_a^+ = (q^+, \check{q}^+)$ ,  $q^{+a} = \varepsilon^{ab} q_b^+ = (\check{q}^+, -q^+)$  (она коммутирует с генераторами  $\mathcal{N} = 2$  супералгебры, ковариантными производными и  $SU(2)$ -автоморфизмами), а  $d^8 z = d^4 x d^2 \theta^+ d^2 \theta^- du$  — мера интегрирования по киральному суперпространству.

Действие (2.11) позволяет сформулировать правила явно  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметричного квантования теории. Это действие инвариантно относительно преобразований скрытой  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметрии [51], реализованной на суперполях векторного мультиплета и гипермультиплета следующим образом:

$$\begin{aligned} \delta V^{++} &= (\varepsilon^{\alpha a} \theta_a^+ + \bar{\varepsilon}_{\dot{\alpha}}^a \bar{\theta}^{+\dot{\alpha}}) q_a^+, \\ \delta q_a^+ &= -\frac{1}{2} (D^+)^4 [(\varepsilon_a^\alpha \theta_\alpha^- + \bar{\varepsilon}_{\dot{\alpha} a} \bar{\theta}^{-\dot{\alpha}}) V^{--}]. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Хотя эти преобразования имеют правильное замыкание с собой и преобразованиями явной  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметрии только на массовой поверхности, действие (2.11) инвариантно относительно (2.12) вне массовой поверхности. Таким образом, модель обладает второй, скрытой,  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметрией,

которая вместе с явной  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметрией замыкается на  $\mathcal{N} = 4$  суперсимметрию на уравнениях движения. Структура модели на массовой оболочке определяется в терминах решений соответствующих уравнений движения:

$$D^{++}q^{+a} + ig[V^{++}, q^{+a}] = 0, \quad (\mathcal{D}^+)^2\mathcal{W} = [q^{+a}, q_a^+]. \quad (2.13)$$

Простейшее решение этих уравнений в абелевом случае состоит из набора постоянных фоновых полей, которые при преобразованиях скрытой  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметрии линейно преобразуются друг через друга, смешивая  $\mathcal{W}, \bar{\mathcal{W}}$  с  $q_a^+$  [41]:

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{W} &= \frac{1}{2}\varepsilon^{\dot{\alpha}a}\bar{D}_{\dot{\alpha}}^-q_a^+, & \delta\bar{\mathcal{W}} &= \frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha a}D_{\alpha}^-q_a^+, \\ \delta q_a^+ &= \frac{1}{4}(\varepsilon_a^{\alpha}D_{\alpha}^+\mathcal{W} + \bar{\varepsilon}_a^{\dot{\alpha}}\bar{D}_{\dot{\alpha}}^+\bar{\mathcal{W}}). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Основное (вакуумное) состояние любой  $\mathcal{N} = 2$  суперконформной модели, в том числе и  $\mathcal{N} = 4$  калибровочной теории как частного случая таких моделей, может включать только безмассовый  $U(1)$  векторный мультиплет и безмассовые нейтральные гипермультиплеты, поскольку заряженные гипермультиплеты приобретают массу за счет механизма Хиггса. Многообразие вакуумов определяется условиями исчезновения скалярного потенциала («F-плоскостность» плюс «D-плоскостность»). Набор вакуумов, включающих только безмассовые нейтральные гипермультиплеты, образует «ветвь Хиггса» теории. Набор, включающий только безмассовые  $U(1)$  векторные мультиплеты, формирует «кулоновскую ветвь» теории. Наконец, множество вакуумов, на которых сосуществуют мультиплеты обоих сортов, образует «смешанную фазу» теории. Таким образом, распространяющимися низкоэнергетическими полями в смешанной фазе являются безмассовые нейтральные скаляры, спиноры и  $U(1)$  векторные бозоны, которые входят в состав суперполей  $\mathcal{W}, \bar{\mathcal{W}}, q^{+a}, q^{-a}$  на массовой оболочке, обладающих свойствами

$$(D^{\pm})^2\mathcal{W} = (\bar{D}^{\pm})^2\bar{\mathcal{W}} = 0,$$

$$D^{++}q^{+a} = D^{--}q^{-a} = 0, \quad q^{-a} \equiv D^{--}q^{+a}, \quad D_{\alpha}^-q^{-a} = \bar{D}_{\dot{\alpha}}^-q^{-a} = 0.$$

Далее будем рассматривать низкоэнергетическое эффективное действие в  $\mathcal{N} = 4$  суперкалибровочной теории именно на смешанной ветви, в указанном выше смысле. С другой стороны, поскольку  $\mathcal{N} = 2$  векторный мультиплет и гипермультиплет составляют в рассматриваемом случае  $\mathcal{N} = 4$  векторный мультиплет, мы можем трактовать все вакуумные состояния как формирующие уникальную кулоновскую ветвь  $\mathcal{N} = 4$  модели\*.

---

\*Подчеркнем еще раз, что использование различных терминов для обозначения вакуумных состояний в этой теории является вопросом соглашения.



Явно  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметричные правила Фейнмана в гармоническом суперпространстве были разработаны в [56] (см. также [51]). Вычисление квантовых поправок может содержать потенциально опасные гармонические сингулярности, которые возникают в гармонических распределениях при совпадающих точках. Проблема совпадающих гармонических особенностей в рамках гармонических правил Фейнмана для супердиаграмм впервые обсуждалась в [51], где было предложено некоторое решение этой проблемы. Метод фонового поля для построения эффективного действия в гармоническом суперпространстве был развит в работах [41] (см. также [46], где такой же метод применялся в стандартном  $\mathcal{N} = 2$  суперпространстве). Этот метод позволяет вычислить эффективное действие для произвольной  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметричной калибровочной модели в виде, сохраняющем явную  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметрию и классическую калибровочную инвариантность на квантовом уровне.

В рамках метода фонового поля исходные суперполя расщепляются на классические суперполя  $V^{++}, q^+$  и квантовые суперполя  $v^{++}, Q^+$ , причем калибровочные условия накладываются только на квантовые поля. Правила Фейнмана выводятся из квантового действия вида  $S_{\text{quant}} = S_2 + S_{\text{int}}$ , где  $S_2$  — квадратичная форма квантовых полей и гостов, а  $S_{\text{int}}$  описывает взаимодействие. Оба действия  $S_2$  и  $S_{\text{int}}$  зависят от фоновых полей. Все детали этой процедуры приведены в [41].

Действие  $S_2$  определяет пропагаторы, зависящие от фоновых полей. Далее мы используем фоново-ковариантное калибровочное условие  $\mathcal{D}^{++}v^{++} = 0$ . В этом случае пропагатор квантового калибровочного суперполя дается выражением

$$G^{(2,2)}(1|2) = \frac{1}{2\widehat{\square}_1\widehat{\square}_2} (\mathcal{D}_1^+)^4 (\mathcal{D}_2^+)^4 \{ \delta^{12}(z_1 - z_2) (D_2^{--})^2 \delta^{(-2,2)}(u_1, u_2) \}. \quad (2.15)$$

Подчеркнем, что этот пропагатор является аналитическим суперполем по каждому из своих аргументов. Пропагатор духов Фаддеева–Попова  $b$  и  $c$  записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} G^{(0,0)}(1|2) &= i \langle b(1) c^T(2) \rangle = \\ &= \frac{1}{\widehat{\square}_1} (\mathcal{D}_1^+)^4 (\mathcal{D}_2^+)^4 \left\{ \delta^{12}(z_1 - z_2) \frac{(u_1^- u_2^-)}{(u_1^+ u_2^+)^3} \right\}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Пропагатор  $q^+$ -гипермультиплета, описываемого действием (2.11) во внешнем поле  $V^{++}$ , имеет вид

$$\begin{aligned} G^{(1,1)}(1|2) &= i \langle q^{+a}(1) \check{q}_b^+(2) \rangle = \\ &= -\delta_b^a \frac{1}{\widehat{\square}_1} (\mathcal{D}_1^+)^4 (\mathcal{D}_2^+)^4 \left\{ \delta^{12}(z_1 - z_2) \frac{1}{(u_1^+ u_2^+)^3} \right\}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Все эти пропагаторы содержат оператор  $\widehat{\square} = (-1/2)(\mathcal{D}^+)^4(\mathcal{D}^{--})^2$ , который переводит каждое ковариантно-аналитическое суперполе в ковариантно-аналитическое. На пространстве таких суперполей оператор  $\widehat{\square}$  представляется дифференциальным оператором второго порядка

$$\begin{aligned} \widehat{\square} = & \frac{1}{2}\mathcal{D}^{\dot{\alpha}\alpha}\mathcal{D}_{\alpha\dot{\alpha}} + \frac{i}{2}(\mathcal{D}^{+\alpha}\mathcal{W})\mathcal{D}_{\alpha}^- + \frac{i}{2}(\bar{\mathcal{D}}_{\dot{\alpha}}^+\bar{\mathcal{W}})\bar{\mathcal{D}}^{-\dot{\alpha}} - \\ & - \frac{i}{4}(\bar{\mathcal{D}}_{\dot{\alpha}}^+\bar{\mathcal{D}}^{+\dot{\alpha}}\bar{\mathcal{W}})\mathcal{D}^{--} + \frac{i}{8}[\mathcal{D}^{+\alpha}, \mathcal{D}_{\alpha}^-]\mathcal{W} + \frac{1}{2}\{\mathcal{W}, \bar{\mathcal{W}}\}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Это выражение выводится из алгебры ковариантных производных (4.23). Примечательно, что дифференциальная часть оператора  $\widehat{\square}$  однозначно определяется из требований, что а)  $\widehat{\square}$  выражается только через ковариантные производные; б) оператор  $\widehat{\square}$  преобразует каждое ковариантно-аналитическое суперполе в ковариантно-аналитическое. Оператор  $\widehat{\square}$  естественно назвать аналитическим даламбертианом. Одним из его важных свойств является сохранение аналитичности,  $[\mathcal{D}_{(\alpha, \dot{\alpha})}^+, \widehat{\square}] = 0$ .

Из-за нетривиальной зависимости от гармоник  $\mathcal{N} = 2$  пропагаторы имеют сложную структуру. Но, как недавно показано [107], гармоническая зависимость  $\mathcal{N} = 2$  пропагаторов резко упрощается, если фоновый векторный мультиплет удовлетворяет классическим уравнениям движения  $\mathcal{D}^{ij}\mathcal{W} = \bar{\mathcal{D}}^{ij}\bar{\mathcal{W}} = 0$ . В этом случае гармоническая зависимость пропагаторов полностью факторизуется, что позволяет держать под контролем гармоническую зависимость  $\mathcal{N} = 2$  супердиаграмм.

При вычислении эффективного действия в рамках метода фонового поля часто используются метод собственного времени или техника теплового ядра. Эти методы обеспечивают возможность эффективно суммировать бесконечное множество диаграмм Фейнмана со все возрастающим числом вставок фоновых полей и строить разложение эффективного действия по производным фонового поля явно калибровочно-ковариантным образом. Метод фонового поля и методы теплового ядра для  $\mathcal{N} = 1$  калибровочных теорий хорошо развиты (см., например, книгу [37]). Метод фонового поля в гармоническом суперпространстве разработан в [41], некоторые примеры его важных приложений были рассмотрены в [107]. Однако до недавнего времени многие аспекты метода теплового ядра в  $\mathcal{N} = 2$  суперпространстве оставались почти полностью неизученными. В разд. 4 мы воспользуемся  $\mathcal{N} = 2$  суперполевым методом теплового ядра для построения однопетлевого эффективного действия  $\mathcal{N} = 4$  калибровочной теории в  $\mathcal{N} = 2$  гармоническом суперпространстве и расширим однопетлевые результаты работы [147] для ведущих квантовых низкоэнергетических поправок до следующих за ведущими вкладов в эффективное действие, зависящих как от  $\mathcal{N} = 2$  векторного мультиплета, так и от  $\mathcal{N} = 2$  гипермультиплета.

### 2.3. Однопетлевое эффективное действие в секторе гипермультиплетта.

Рассмотрим  $\mathcal{N} = 4$  теорию Янга–Миллса с калибровочной группой  $SU(2)$ , сформулированную на языке  $\mathcal{N} = 2$  гармонических суперполей. Калибровочная симметрия модели нарушена до  $U(1)$ , так что фоновые поля  $V^{++}, q^+$  принадлежат подалгебре Картана калибровочной группы. Начнем, как и в [147], с процедуры фоново-квантового расщепления  $q^{+a} \rightarrow q^{+a} + Q^{+a}$ ,  $V^{++} \rightarrow V^{++} + gv^{++}$ . Здесь  $q^{+a}, V^{++}$  являются фоновыми полями и  $Q^{+a}, v^{++}$  — квантовыми. Для однопетлевых вычислений достаточно рассмотреть только ту часть квантового действия  $S_{\text{quant}}$ , которая квадратична по квантовым суперполям:

$$S_2 = -\frac{1}{2} \text{tr} \int d\zeta^{(-4)} [v^{++} \widehat{\square} v^{++} + Q^{+a} (D^{++} + iV^{++}) Q_a^+ + [Q^{+a}, igv^{++}] q_a^+ + q^{+a} ig[v^{++}, Q_a^+]] + \dots \quad (2.19)$$

Многоточием заменен вклад гостей. Оператор  $\widehat{\square}$  содержит фоновые  $\mathcal{N} = 2$  суперполя напряженностей  $\mathcal{W}, \bar{\mathcal{W}}$ , действует в присоединенном представлении калибровочной группы и имеет вид (2.18). Набор фоновых суперполей в (2.19) удовлетворяет уравнениям  $(D^+)^2 \mathcal{W} = 0$ ,  $D^{++} q^{+a} = 0$  и  $D^{+\alpha} \mathcal{D}_\alpha^- \mathcal{W} = 0$ ,  $D^{-\alpha} \mathcal{D}_\alpha^- \mathcal{W} = 0$ . Удобно переопределить  $g Q^+ \rightarrow Q^+$  и записать фоновые суперполя как  $V^{++} = \tau_3 V_3^{++}$ ,  $q^+ = \tau_3 q_3^+$ ,  $\mathcal{W} = \tau_3 \mathcal{W}_3$ . Здесь  $\tau_i = (1/\sqrt{2}) \sigma_i$  — генераторы  $su(2)$ -алгебры:

$$[\tau_i, \tau_j] = i\sqrt{2} \epsilon_{ijk} \tau_k, \quad \text{tr}(\tau_i \tau_j) = \delta_{ij}.$$

Для фона, принимающего значения в абелевой подалгебре, также выполняется ограничение  $D^{\pm\alpha} \mathcal{W} = D^{\pm\alpha} \mathcal{W}$ , и аналогичное — для  $\bar{\mathcal{W}}$ , т. е. ковариантные спинорные производные становятся «плоскими» производными  $D, \bar{D}$ , когда действуют на такие ограниченные  $\mathcal{W}$  и  $\bar{\mathcal{W}}$ . Теперь, принимая во внимание уравнения движения и тот факт, что все квантовые суперполя принадлежат присоединенному представлению,  $v^{++} = v_i^{++} \tau_i$ ,  $Q^{+a} = Q_i^{+a} \tau_i$ , получаем

$$\widehat{\square} v^{++} = \square_{\text{cov}} v^{++} + \frac{i}{2} [D^{+\alpha} \mathcal{W}, \mathcal{D}_\alpha^- v^{++}] + \frac{i}{2} [\bar{D}^{+\dot{\alpha}} \bar{\mathcal{W}}, \bar{\mathcal{D}}_{\dot{\alpha}}^- v^{++}] + [\mathcal{W}, [\bar{\mathcal{W}}, v^{++}]]. \quad (2.20)$$

Здесь  $\square_{\text{cov}} = (1/2) D^{\alpha\dot{\alpha}} \mathcal{D}_{\alpha\dot{\alpha}}$ . Имеем также  $D^{++} q^1 = D^{++} q^1 + \sqrt{2} V^{++} q^2$ ,  $D^{++} q^2 = D^{++} q^2 - \sqrt{2} V^{++} q^1$ ,  $D^{++} q^3 = D^{++} q^3$ ,  $\mathcal{D}_m = D_m + \sqrt{2} A_m$ .

Теперь квадратичная часть действия переписывается как

$$\begin{aligned}
 S_2 = & -\frac{1}{2} \int d\zeta^{(-4)} \left\{ v_1^{++} (\square_{\text{cov}} + 2\mathcal{W}\bar{\mathcal{W}}) v_1^{++} + v_2^{++} (\square_{\text{cov}} + 2\mathcal{W}\bar{\mathcal{W}}) v_2^{++} + \right. \\
 & + \frac{1}{\sqrt{2}} v_1^{++} \left( (D^{+\alpha}\mathcal{W}) D_{\alpha}^{-} + (\bar{D}_{\dot{\alpha}}^{+}\bar{\mathcal{W}}) \bar{D}^{-\dot{\alpha}} \right) v_2^{++} - \\
 & - \frac{1}{\sqrt{2}} v_2^{++} \left( (D^{+\alpha}\mathcal{W}) D_{\alpha}^{-} + (\bar{D}_{\dot{\alpha}}^{+}\bar{\mathcal{W}}) \bar{D}^{-\dot{\alpha}} \right) v_1^{++} + \\
 & + v_3^{++} \square v_3^{++} + Q_i^{+a} D^{++} Q_{ia}^{+} + Q_1^{+a} (\sqrt{2} V^{++}) Q_{2a}^{+} + \\
 & + Q_2^{+a} (-\sqrt{2} V^{++}) Q_{1a}^{+} + v_2^{++} \sqrt{2} (q^{+a} Q_{a1}^{+} - Q_1^{+a} q_a^{+}) + \\
 & \left. + v_1^{++} \sqrt{2} (Q_2^{+a} q_a^{+} - q^{+a} Q_{a2}^{+}) \right\} + \dots \quad (2.21)
 \end{aligned}$$

Здесь и далее мы опускаем индекс 3 у фоновых суперполей, а многоточие, как и раньше, символизирует вклады гостей, которые не зависят от фонового гипермультиплетта. Как можно усмотреть из (2.21), только те компоненты квантовых суперполей, которые несут индексы 1 и 2, имеют нетривиальные фоновозависимые пропагаторы. Квантовое суперполе с индексом 3 не взаимодействует с фоном и полностью отщепляется.

После перехода к новым комплексным квантовым суперполям

$$\begin{aligned}
 \chi^{++} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (v_1^{++} + i v_2^{++}), & \bar{\chi}^{++} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (v_1^{++} - i v_2^{++}), \\
 \eta^{+a} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (Q_1^{+a} + i Q_2^{+a}), & \bar{\eta}^{+a} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (Q_1^{+a} - i Q_2^{+a})
 \end{aligned}$$

действие (2.21) принимает вид

$$\begin{aligned}
 S_2 = & - \int d\zeta^{(-4)} \left\{ \bar{\chi}^{++} \left( \square_{\text{cov}} + 2\mathcal{W}\bar{\mathcal{W}} - \right. \right. \\
 & - \frac{i}{\sqrt{2}} [(D^{+\alpha}\mathcal{W}) D_{\alpha}^{-} + (\bar{D}_{\dot{\alpha}}^{+}\bar{\mathcal{W}}) \bar{D}^{-\dot{\alpha}}] \left. \right) \chi^{++} + \\
 & + \bar{\eta}^{+a} (D^{++} - i\sqrt{2} V^{++}) \eta_a^{+} - i \chi^{++} \sqrt{2} q^{+a} \bar{\eta}_a^{+} + i \bar{\chi}^{++} \sqrt{2} q^{+a} \eta_a^{+} + \\
 & \left. + \frac{1}{2} v_3^{++} \square v_3^{++} + \frac{1}{2} Q_3^{+a} D^{++} Q_{3a}^{+} \right\}. \quad (2.22)
 \end{aligned}$$

Эта форма действия является наиболее удобной для пертурбативных вычислений. Действие представляет собой сумму диагональной части  $S_0$ , которая определяет пропагаторы, и недиагональной части  $V$ , которая ответственна за

взаимодействие. Мы опустили члены с не взаимодействующими полями  $Q_3^{a+}$  и  $v_3^{++}$ .

В качестве первого шага введем оператор

$$\widehat{\square}_{\text{short}} = \square_{\text{cov}} + 2\mathcal{W}\bar{\mathcal{W}} - \frac{i}{\sqrt{2}} \left[ (D^{+\alpha}\mathcal{W})\mathcal{D}_{\alpha}^{-} + (\bar{D}_{\dot{\alpha}}^{+}\bar{\mathcal{W}})\bar{\mathcal{D}}^{-\dot{\alpha}} \right], \quad (2.23)$$

который можно получить из (2.18), удерживая в этом выражении только суперполя  $\mathcal{W}, \bar{\mathcal{W}}$ , связанные с ненарушенной  $U(1)$ -подгруппой, и помещая их на массовую оболочку. Обратим внимание на то, что операторы (2.18) и (2.23) на массовой оболочке связаны друг с другом заменами  $\mathcal{W} \rightarrow -\mathcal{W}/\sqrt{2}$ ,  $\bar{\mathcal{W}} \rightarrow -\bar{\mathcal{W}}/\sqrt{2}$ . Теперь легко написать правила Фейнмана для вычисления эффективного действия аналогично тому, как это было сделано в [41, 51, 56]. Для пропагаторов калибровочных полей  $\chi^{++}$  и  $\bar{\chi}^{++}$  и гипермультиплетов  $\eta_a^{+}$  и  $\bar{\eta}^{+a}$  используем выражения (2.15) и (2.17) соответственно. Вершины берутся непосредственно из взаимодействия  $V$  в виде

$$V = -i\chi^{++}\sqrt{2}q^{+a}\bar{\eta}_a^{+} + i\bar{\chi}^{++}\sqrt{2}q^{+a}\eta_a^{+}.$$

Получающиеся правила Фейнмана имеют стандартный вид. Подчеркнем только одну важную особенность. В каждой вершине, которая включает в себя интеграл по аналитическому подпространству, всегда можно снять оператор  $(D^{+})^4$  с одного из пропагаторов и преобразовать интеграл по  $d\zeta^{(-4)}$  к интегралу по полной мере  $\mathcal{N} = 2$  суперпространства  $d^{12}z$ .

Теперь заметим, что, производя в (2.22) функциональные замены переменных:

$$\begin{aligned} \chi^{++}(1) &\rightarrow \chi^{++}(1) - i \int d\zeta_2^{(-4)} G^{(2,2)}(1|2) q^{+a}(2) \eta_a^{+}(2), \\ \bar{\chi}^{++}(1) &\rightarrow \bar{\chi}^{++}(1) + i \int d\zeta_2^{(-4)} G^{(2,2)}(1|2) q^{+a}(2) \bar{\eta}_a^{+}(2), \end{aligned}$$

где пропагатор  $G^{2,2}(1|2)$  определен в (2.15), можно диагонализировать оператор

$$\int d\zeta_1^{(-4)} d\zeta_2^{(-4)} \bar{\eta}^{+a}(1) \left\{ \delta_a^b \mathcal{D}_1^{++} \delta^{(1,3)}(1|2) + q_a^{+}(1) G^{(2,2)}(1|2) q^{+b}(2) \right\} \eta_b^{+}(2).$$

Тогда однопетлевое эффективное действие  $\Gamma[V^{++}, q^{+}]$ , определяемое функциональным интегралом

$$e^{i\Gamma[V^{++}, q^{+}]} = \int \mathcal{D}\bar{\eta}^{+} \mathcal{D}\eta^{+} \mathcal{D}\bar{\chi}^{++} \mathcal{D}\chi^{++} e^{iS_2[\eta^{+}, \bar{\eta}^{+}, \bar{\chi}^{++}, \chi^{++}, V^{++}, q^{+}]},$$

может быть формально записано в виде

$$\begin{aligned} \Gamma[V^{++}, q^{+}, \check{q}^{+}] &= i \text{Tr} \ln \left\{ \delta_a^b \mathcal{D}_1^{++} \delta^{(1,3)}(1|2) + \right. \\ &\quad \left. + q_a^{+}(1) G^{(2,2)}(1|2) q^{+b}(2) \right\} + \Gamma[V^{++}]. \quad (2.24) \end{aligned}$$

Последний член  $\Gamma[V^{++}]$  в этом выражении является частью полного однопетлевого эффективного действия, которое зависит только от  $\mathcal{N} = 2$  калибровочного суперполя. Мы будем в основном изучать первое слагаемое, поскольку оно аккумулирует в себе всю зависимость от гипермультиплета.

Выражение (2.24), записанное в виде аналитического нелокального суперфункционала, является отправной точкой для наших вычислений однопетлевого эффективного действия в секторе гипермультиплета. Выражение (2.24) показывает, что эффективное действие хорошо определено в рамках теории возмущений по степеням нелокального взаимодействия  $q_a^+(1)G^{(2,2)}(1|2)q^{+b}(2)$ . Бесконечный ряд по этим степеням приводит к эффективному действию в виде  $\Gamma[V^{++}, \check{q}^+, q^+] = \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma_{2n}[V^{++}, \check{q}^+, q^+]$ . Здесь  $2n$ -й член задается супердиаграммой с  $2n$  внешними линиями  $\check{q}^+, q^+$  и любым числом внешних линий  $V^{++}$ . Так как действие  $\Gamma[V^{++}, \check{q}^+, q^+]$  калибровочноинвариантно по построению, можно ожидать, что каждый коэффициент  $\Gamma_{2n}$  зависит от фонового суперполя  $V^{++}$  только через напряженности  $\mathcal{W}, \bar{\mathcal{W}}$  и их ковариантные производные. Подчеркнем, что супердиаграммы, возникающие в рамках этой процедуры, содержат фоново-зависимые суперпропагаторы.

**2.4. Анализ супердиаграмм для гипермультиплетно-зависимых вкладов в эффективное действие.** Гипермультиплетно-зависимые вклады в однопетлевое эффективное действие представлены следующей бесконечной последовательностью супердиаграмм, изображенных на рис. 1.

Здесь волнистая линия обозначает пропагатор  $\mathcal{N} = 2$  калибровочного суперполя, а сплошные внешние и внутренние линии обозначают фоновые суперполя гипермультиплета и квантовые пропагаторы гипермультиплета соответственно. Числа  $1, 2, \dots$  маркируют аргументы  $(\zeta_A, u)$  внешних линий гипермультиплетов. Как уже отмечалось выше, вся зависимость вкладов от калибровочного суперполя включена в фоново-зависимые пропагаторы.

Произвольный суперграф с  $2n$  внешними линиями гипермультиплета выглядит подобно кольцу, состоящему из  $n$  звеньев формы  $\langle \bar{\eta}^+ \eta^+ \rangle \langle \chi^{++} \bar{\chi}^{++} \rangle$  или  $n$  звеньев формы  $\langle \eta^+ \bar{\eta}^+ \rangle \langle \bar{\chi}^{++} \chi^{++} \rangle$ . Полный вклад в  $2n$ -точечную су-

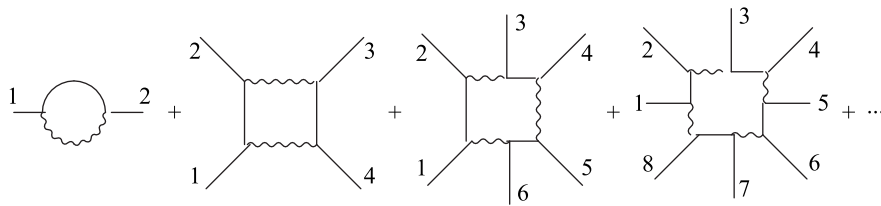


Рис. 1.

пердиаграмму определяется следующим общим выражением:

$$\begin{aligned}
i\Gamma_{2n} = & \frac{4}{n} \int d\zeta_1^{(-4)} d\zeta_2^{(-4)} \dots d\zeta_{2n}^{(-4)} \times \\
& \times \frac{(\mathcal{D}_1^+)^4 (\mathcal{D}_2^+)^4}{(u_1^+ u_2^+)^3} \left\{ \frac{1}{\widehat{\square}_1} \delta_{1|2}^{12} \right\} \frac{(\mathcal{D}_2^+)^4 (\mathcal{D}_3^+)^4}{\widehat{\square}_2 \widehat{\square}_3} (\mathcal{D}_3^{--})^2 \left\{ \delta_{2|3}^{12} \delta^{(-2,2)}(u_2, u_3) \right\} \times \\
& \times \frac{(\mathcal{D}_3^+)^4 (\mathcal{D}_4^+)^4}{(u_3^+ u_4^+)^3} \left\{ \frac{1}{\widehat{\square}_3} \delta_{3|4}^{12} \right\} \dots \frac{(\mathcal{D}_{2n-2}^+)^4 (\mathcal{D}_{2n-1}^+)^4}{\widehat{\square}_{2n-2} \widehat{\square}_{2n-1}} \times \\
& \times (\mathcal{D}_{2n-1}^{--})^2 \left\{ \delta_{2n-2|2n-1}^{12} \delta^{(-2,2)}(u_{2n-2}, u_{2n-1}) \right\} \frac{(\mathcal{D}_{2n-1}^+)^4 (\mathcal{D}_{2n}^+)^4}{(u_{2n-1}^+ u_{2n}^+)^3} \times \\
& \times \left\{ \frac{1}{\widehat{\square}_{2n-1}} \delta_{2n-1|2n}^{12} \right\} \frac{(\mathcal{D}_{2n}^+)^4 (\mathcal{D}_1^+)^4}{\widehat{\square}_{2n} \widehat{\square}_1} (\mathcal{D}_1^{--})^2 \left\{ \delta_{2n|1}^{12} \delta^{(-2,2)}(u_{2n}, u_1) \right\} \times \\
& \times q_a^+(z_1, u_1) q^{+a}(z_2, u_2) q_b^+(z_3, u_3) \dots q_c^+(z_{2n-1}, u_{2n-1}) q^{+c}(z_{2n}, u_{2n}). \quad (2.25)
\end{aligned}$$

Здесь и далее, для того чтобы избежать проблемы гармонических сингулярностей, используется пропагатор  $\mathcal{N} = 2$  калибровочного поля в виде, явно аналитичном по обоим аргументам.

Фактор  $4/n$  имеет следующее происхождение. Вклад супердиаграммы типа кольца, составленного из  $n$  повторяющихся звеньев  $\langle \bar{\eta}^+ \eta^+ \rangle \langle \chi^{++} \bar{\chi}^{++} \rangle$ , появляется с симметричным фактором  $2/n$ . Тот же фактор  $2/n$  возникает из суперграфа, состоящего из  $n$  повторяющихся звеньев  $\langle \eta^+ \bar{\eta}^+ \rangle \langle \bar{\chi}^{++} \chi^{++} \rangle$ . Далее каждая вершина привносит фактор  $-i$ , а каждые  $\langle \eta^+ \bar{\eta}^+ \rangle$  и  $\langle \bar{\chi}^{++} \chi^{++} \rangle$  из пропагаторов — факторы  $i$  и  $i/2$  соответственно. Поэтому полное число  $n$  звеньев привносит фактор  $2^{-n}$ . Любая вершина также поставляет коэффициент  $\sqrt{2}$ . Все это приводит к суммарному коэффициенту  $2^n$ . Учитывая все эти вклады, получаем в точности коэффициент  $4/n$ .

Начнем с прямого вычисления вклада супердиаграммы  $\Gamma_2[V^{++}, q^{+a}]$ . В аналитическом базисе он записывается в виде

$$\begin{aligned}
i\Gamma_2 = & \int d\zeta_1^{(-4)} d\zeta_2^{(-4)} du_1 du_2 \left\{ \frac{(\mathcal{D}_1^+)^4 (\mathcal{D}_2^+)^4}{(u_1^+ u_2^+)^3} \frac{1}{\widehat{\square}_1} \delta^{12}(1|2) \right\} \times \\
& \times \left\{ \frac{(\mathcal{D}_2^+)^4 (\mathcal{D}_1^+)^4}{\widehat{\square}_2 \widehat{\square}_1} \delta^{12}(2|1) (\mathcal{D}_1^{--})^2 \delta^{-2,2}(u_2, u_1) \right\} q_a^+(z_1, u_1) q^{+a}(z_2, u_2). \quad (2.26)
\end{aligned}$$

Согласно общей стратегии обращения с такими супердиаграммами мы должны вначале восстановить полную грассманову меру интегрирования в вершинах по правилу  $d^{12}z_1 d^{12}z_2 = d^{(-4)}\zeta_1 d^{(-4)}\zeta_2 (D_1^+)^4 (D_2^+)^4$ . Поскольку нам интересны вклады в эффективное действие, которые не зависят от пространственно-временных производных  $\mathcal{D}_m q_a^+$  и спинорных производных  $\mathcal{D}_{(\alpha, \dot{\alpha})}^- q_a^+$  фо-

нового гипермультиплета, достаточно использовать следующие суперполевые ограничения:

$$\mathcal{D}_{(\alpha, \dot{\alpha})}^- q_a^+ = 0, \quad \mathcal{D}_{(\alpha, \dot{\alpha})}^+ q^{-a} = 0. \quad (2.27)$$

Интегрируя по частям с помощью дельта-функции, мы стянем петлю в точку суперпространства. Однако все еще остается нелокальное выражение

$$i\Gamma_2 = \int \frac{dz du_1 du_2}{(u_1^+ u_2^+)^3} \frac{(\mathcal{D}_2^+)^4 (\mathcal{D}_1^+)^4}{\widehat{\square}_1^2 \widehat{\square}_2} \delta^{12}(z) \left\{ (\mathcal{D}_1^-)^2 \delta^{-2,2}(u_2, u_1) \right\} \times \\ \times q_a^+(z_1, u_1) q^{+a}(z_1, u_2), \quad (2.28)$$

в котором присутствует гармоническое распределение  $(u_1^+ u_2^+)^{-3}$  с особенностью в совпадающих точках. Если бы мы имели дело с плоскими ковариантными производными, то мы могли бы использовать важное тождество  $(D_1^+)^4 (D_2^+)^4 \delta^8(\theta_1 - \theta_2) = (u_1^+ u_2^+)^4$  для устранения этой сингулярности. Однако рассматриваемое выражение (2.28) содержит ковариантные спинорные производные, и дальнейший анализ становится более сложным. В принципе, можно было бы использовать идею из работы [107], состоящую в том, что при вычислении двухточечной функции вида  $(\mathcal{D}_1^+)^4 (\mathcal{D}_2^+)^4 \delta^{12}(z_1 - z_2) \frac{1}{(u_1^+ u_2^+)^q}$

надо выразить ковариантные производные  $\mathcal{D}_2^{+(\alpha, \dot{\alpha})}$  через ковариантные производные  $\mathcal{D}_1^{+(\alpha, \dot{\alpha})}$ . Это может помочь в вычислении  $\Gamma_2$  (2.28), однако процедура такого вычисления по-прежнему является технически очень сложной.

С нашей точки зрения, удобнее начать с представления (2.26) и работать в аналитическом подпространстве. Тогда вместо вычисления вклада (2.28) в полном  $\mathcal{N} = 2$  суперпространстве мы должны фактически получить эквивалентное выражение вида

$$\int d\zeta^{-4} (D^+)^4 \mathcal{L}(\mathcal{W}, \bar{\mathcal{W}}, q^+)$$

с тем же  $\mathcal{L}$ . Для этого мы вернемся в (2.28) к аналитическому подпространству и дважды воспользуемся соотношением [107], а также гармоническими тождествами  $(u_1^+ u_2^+)|_{1=2} = 0$ ,  $D_1^- (u_1^+ u_2^+) = (u_1^- u_2^+)$ ,  $(u_1^+ u_2^-)|_{1=2} = 1$  и

$$\frac{1}{(u_1^+ u_2^+)^3} (\mathcal{D}_1^+)^4 (\mathcal{D}_2^+)^4 (\mathcal{D}_1^+)^4 = \\ = (\mathcal{D}_1^+)^4 \{ \dots + (u_1^+ u_2^+) (u_2^- u_1^+)^2 (u_1^- u_2^+)^2 \widehat{\square}_1 \widehat{\square}_2 + \dots \}. \quad (2.29)$$

В результате получим

$$i\Gamma_2 = \int d\zeta^{(-4)} du_1 du_2 (u_1^+ u_2^+) (q_a^+(u_1) q^{+a}(u_2)) (D_1^{--})^2 \times \\ \times \delta^{(-2,2)}(u_2 u_1) \frac{(\mathcal{D}^+)^4}{\widehat{\square}_2} \delta^{12}(z). \quad (2.30)$$



Для того чтобы снять фактор  $(D^{--})^2$  с гармонической дельта-функции и применить гармонические тождества

$$(D_1^{--})^2 \delta^{(-2,2)}(u_2 u_1) = (D_2^{--})^2 \delta^{(2,-2)}(u_2 u_1),$$

$$D^{--} q^+ = q^-, \quad (u_1^+ u_2^+)|_{1=2} = 0,$$

мы временно восстановим полную меру интегрирования, а в конце вернемся к аналитической мере. При этом необходимо учесть ограничения (2.27).

Интегрирование по одному набору гармоник приводит к окончательному результату для  $\Gamma_2$ :

$$i\Gamma_2 = \int d\zeta^{(-4)} du(-4q_a^- q^{+a}) \frac{(\mathcal{D}^+)^4}{\widehat{\square}} \delta^{12}(z). \quad (2.31)$$

Следующий шаг состоит в вычислении вклада с четырьмя внешними линиями гипермультиплета  $\Gamma_4[q^+]$ . Начинаем с общего выражения (2.25) для  $n = 2$  и выполняем те же самые манипуляции, что и в предыдущем случае. Это дает

$$\begin{aligned} i\Gamma_4 &= \int d\zeta_1^{(-4)} \dots d\zeta_4^{(-4)} du_1 \dots du_4 \frac{(\mathcal{D}_1^+)^4 (\mathcal{D}_2^+)^4}{(u_1^+ u_2^+)^3} \left\{ \frac{1}{\widehat{\square}_1} \delta^{12}(1|2) \right\} \times \\ &\times \left[ \frac{(\mathcal{D}_2^+)^4 (\mathcal{D}_3^+)^4}{\widehat{\square}_2 \widehat{\square}_3} \delta^{12}(2|3) (\mathcal{D}_3^{--})^2 \delta^{(-2,2)}(u_2, u_3) \right] \frac{(\mathcal{D}_3^+)^4 (\mathcal{D}_4^+)^4}{(u_3^+ u_4^+)^3} \left\{ \frac{1}{\widehat{\square}_3} \delta^{12}(3|4) \right\} \times \\ &\times \left[ \frac{(\mathcal{D}_4^+)^4 (\mathcal{D}_1^+)^4}{\widehat{\square}_4 \widehat{\square}_1} \delta^{12}(4|1) (\mathcal{D}_1^{--})^2 \delta^{(-2,2)}(u_4, u_1) \right] \times \\ &\times q_a^+(z_1, u_1) q^{+a}(z_2, u_2) q_b^+(z_3, u_3) q^{+b}(z_4, u_4) = \\ &= \int \frac{dz du_1 \dots du_4}{(u_1^+ u_2^+)^3 (u_3^+ u_4^+)^3} \frac{(\mathcal{D}_1^+)^4 (\mathcal{D}_2^+)^4 (\mathcal{D}_3^+)^4 (\mathcal{D}_4^+)^4}{\widehat{\square}_1^2 \widehat{\square}_2^2 \widehat{\square}_3^2 \widehat{\square}_4^2} \delta^{12}(z) |(\mathcal{D}_3^{--})^2 \times \\ &\times \delta^{(-2,2)}(u_2, u_3) (\mathcal{D}_1^{--})^2 \delta^{(-2,2)}(u_4, u_1) q_a^+(1) q^{+a}(2) q_b^+(3) q^{+b}(4). \quad (2.32) \end{aligned}$$

Используя тождества  $(\mathcal{D}_3^{--})^2 \delta^{(-2,2)}(u_2, u_3) = (\mathcal{D}_2^{--})^2 \delta^{(2,-2)}(u_2, u_3)$ , и  $(\mathcal{D}_2^+)^4 (\mathcal{D}_2^{--})^2 (\mathcal{D}_3^+)^4 \delta^{(2,-2)}(u_2, u_3) = -2\widehat{\square}_2 (\mathcal{D}_2^+)^4$ , получаем

$$\begin{aligned} i\Gamma_4 &= \int dz \frac{du_1 du_2}{(u_1^+ u_2^+)^6} \frac{(\mathcal{D}_1^+)^4 (\mathcal{D}_2^+)^4}{\widehat{\square}_1^2 \widehat{\square}_2^2} \delta^{12}(z) |q_a^+(1) q^{+a}(2) q_b^+(2) q^{+b}(1) = \\ &= \int d\zeta^{(-4)} \frac{du_1 du_2}{(u_1^+ u_2^+)^2} \frac{(\mathcal{D}_2^+)^4}{\widehat{\square}_2^2} \delta^{12}(z) D_1^{++} q_a^-(1) q^{+a}(2) q_b^+(2) q^{+b}(1) = \\ &= \int d\zeta^{(-4)} du_1 du_2 [D_1^{--} \delta^{(2,-2)}(u_1 u_2)] \frac{(\mathcal{D}_2^+)^4}{\widehat{\square}_2^2} \delta^{12}(z) q_a^-(1) q^{+a}(2) q_b^+(2) q^{+b}(1). \end{aligned}$$

Записывая  $D_1^- \delta^{(-2,2)}(u_1 u_2) = D_2^- \delta^{(0,0)}(u_1 u_2)$  и интегрируя по  $u_2$ , получаем окончательный ответ для  $\Gamma_4$ :

$$i\Gamma_4 = \frac{1}{2} \int d\zeta^{(-4)} du (-4q^- q^+)^2 \frac{(\mathcal{D}^+)^4}{\widehat{\square}^2} \delta^{12}(z).$$

Существенно, что здесь использованы связи (2.27).

Анализ общего члена  $\Gamma_{2n}$  осуществляется аналогично. Прежде всего преобразуем все интегралы по аналитическому подпространству в интегралы по полному суперпространству в каждой точке за счет факторов  $(D_k^+)^4 (D_{k+1}^+)^4$  из пропагаторов гипермультиплета. Далее совершаем интегрирование по наборам грасмановых координат и пространственно-временным координатам с использованием соответствующих дельта-функций под знаком интеграла. Это приводит к выражению

$$\begin{aligned} & \int d^{12}z du_1 \cdots du_{2n} \times \\ & \times \frac{\delta^{(-2,2)}(u_2, u_3) \delta^{(-2,2)}(u_4, u_5) \cdots \delta^{(-2,2)}(u_{2n}, u_1) (\mathcal{D}_2^+)^4 (\mathcal{D}_4^+)^4 \cdots (\mathcal{D}_{2n}^+)^4}{(u_1^+ u_2^+)^3 (u_3^+ u_4^+)^3 \cdots (u_{2n-1}^+ u_{2n}^+)^3} \frac{(\mathcal{D}_2^+)^4 (\mathcal{D}_4^+)^4 \cdots (\mathcal{D}_{2n}^+)^4}{\widehat{\square}_1 \widehat{\square}_2 \cdots \widehat{\square}_{2n}} \times \\ & \times \left\{ \delta^{12}(z - z') |q_a^+(u_1) q^{+a}(u_2) q_b^+(u_3) \cdots q_c^+(u_{2n-1}) q^{+c}(u_{2n}) \right\}. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Теперь, интегрируя по  $u_2, u_4, \dots, u_{2n}$  с использованием гармонической дельта-функции, получаем

$$\begin{aligned} & \int \frac{du_1 du_3 \cdots du_{2n-1}}{(u_1^+ u_3^+)^3 (u_3^+ u_5^+)^3 \cdots (u_{2n-1}^+ u_1^+)^3} \frac{(\mathcal{D}_1^+)^4 (\mathcal{D}_3^+)^4 \cdots (\mathcal{D}_{2n-1}^+)^4}{\widehat{\square}_1^2 \widehat{\square}_3^2 \cdots \widehat{\square}_{2n-1}^2} \times \\ & \times \left\{ \delta^{12}(z - z') |q_a^+(u_1) q^{+a}(u_3) q_b^+(u_3) q^{+b}(u_5) \cdots q_c^+(u_{2n-1}) q^{+c}(u_1) \right\}. \end{aligned} \quad (2.34)$$

После переименования индексов по правилу  $c \rightarrow a, a \rightarrow b, \dots; 3 \rightarrow 2, \dots, (2n-1) \rightarrow n$ , можно получить выражение

$$\begin{aligned} i\Gamma_{2n} &= \frac{4(-1)^n 2^n}{n} \int d^{12}z du_1 \cdots du_n \times \\ & \times \frac{(\mathcal{D}_1^+)^4 (\mathcal{D}_2^+)^4 \cdots (\mathcal{D}_n^+)^4}{(u_1^+ u_2^+)^3 (u_2^+ u_3^+)^3 \cdots (u_n^+ u_1^+)^3} \frac{1}{\widehat{\square}_1^2 \widehat{\square}_2^2 \cdots \widehat{\square}_n^2} \times \\ & \times \left\{ \delta^{12}(z - z') |_{z=z'} q^{+a}(u_1) q_b^+(u_1) q^{+b}(u_2) q_c^+(u_2) \cdots q_a^+(u_n) \right\}. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Для упрощения этого выражения мы представим  $q_b^+(u_1)$  как  $q_b^+(u_1) = D_1^{++} q_b^-(u_1)$  (поскольку  $q^+$  находится на своей массовой оболочке). Заметим, что действие  $D^{++}$  на  $\widehat{\square}$  дает структуру, подобную  $(\mathcal{D}^+)^5 = 0$ . Теперь

интегрируем по частям, перебрасываем гармоническую производную на гармонические распределения

$$\begin{aligned} -D_1^{++} \frac{1}{(u_1^+ u_2^+)^3 (u_n^+ u_1^+)^3} &= \\ &= \frac{1}{2} \left\{ (D_1^{--})^2 \delta^{(3,-3)}(u_1, u_2) \frac{1}{(u_1^+ u_n^+)^3} + (2 \leftrightarrow n) \right\} \end{aligned} \quad (2.36)$$

и используем тождество [51, 52]

$$(D_1^{--})^2 \delta^{(3,-3)}(1|2) = (D_2^{--})^2 \delta^{(-1,1)}(1|2). \quad (2.37)$$

Затем снимаем операторный фактор  $(D_2^{--})^2$  с гармонической дельта-функции. Легко видеть, что этот оператор может дать отличный от нуля результат только тогда, когда он падает на  $(\mathcal{D}^+(u_2))^4$ . Получаем

$$\begin{aligned} \int du_1 \cdots \left( -\frac{1}{2} \right) \delta^{(-1,1)}(1|2) \frac{(\mathcal{D}_1^+)^4 (D_2^{--})^2 (\mathcal{D}_2^+)^4 \cdots (\mathcal{D}_n^+)^4}{(u_2^+ u_3^+)^3 \cdots (u_n^+ u_1^+)^3} \frac{1}{\widehat{\square}_1^2 \widehat{\square}_2^2 \cdots \widehat{\square}_n^2} \times \\ \times \left\{ \delta^{12}(z) |q^{+a}(u_1) q_b^-(u_1) q^{+b}(u_2) \cdots q_a^+(u_n) \right\} + (2 \leftrightarrow n). \end{aligned} \quad (2.38)$$

После замены  $u_2 \leftrightarrow u_n$  во втором члене он становится идентичен первому. Выполняя интегрирование по  $u_1$ , получаем выражение  $(-1)(-2\widehat{\square}_2) \frac{1}{\widehat{\square}_2^4}$ . На

втором этапе повторяем описанные выше действия для  $q_c^+(u_2)$ , т. е. представляем его в виде  $q_c^+(u_2) = D_2^{++} q_c^-$  и интегрируем по частям относительно  $\mathcal{D}_2^{++}$ . Выполняя такие же манипуляции, как и выше, получаем фактор  $(-1)^2 (-2\widehat{\square}_3)^2 \frac{1}{\widehat{\square}_3^6}$ .

После  $n-4$  аналогичных шагов, т. е. представляя  $q_d^+(u_3) = D_3^{++} q_d^-(u_3)$  и т. д., мы редуцируем гармонический интеграл к выражению (2.35) с тремя наборами гармоник:

$$\begin{aligned} \frac{(\mathcal{D}_u^+)^4 (\mathcal{D}_{u_{n-1}}^+)^4 (\mathcal{D}_{u_n}^+)^4}{\widehat{\square}_u^{2n-4} \widehat{\square}_{u_{n-1}}^2 \widehat{\square}_{u_n}^2} \frac{(2\widehat{\square})^{n-3}}{(u^+ u_{n-1}^+)^3 (u_{n-1}^+ u_n^+)^3 (u_n^+ u^+)^3} \times \\ \times \left\{ \delta^{12}(z-z') |q^{+a}(u) \cdots q_c^+(u) q^{+c}(u_{n-1}) q_d^+(u_{n-1}) q^{+d}(u_n) q_a^+(u_n) \right\}. \end{aligned} \quad (2.39)$$

На последнем шаге записываем  $q_c^+(u) = D_u^{++} q_c^-$  и перебрасываем  $D_u^{++}$  на гармонический фактор. Повторяя те же манипуляции, выполняем  $u_{n-1}-$

интегрирование и получаем в итоге выражение

$$i\Gamma_{2n} = -\frac{(-2)^n 2^n}{n} \int d^{12}z du du_1 \frac{(\mathcal{D}_u^+)^4 (\mathcal{D}_{u_1}^+)^4}{\widehat{\square}_u^n \widehat{\square}_{u_1}^2} \frac{1}{(u^+ u_1^+)^6} \times \\ \times \left\{ \delta^{12}(z - z') |q^{+a}(u) q_b^-(u) q^{+b}(u) \dots q_c^+(u) q^{+c}(u_1) q_a^+(u_1) \right\}. \quad (2.40)$$

Теперь вернемся в аналитическое подпространство, применяя тождество (2.29):

$$\int d\zeta^{(-4)} \frac{du du_1}{(u^+ u_1^+)^2} \frac{(\mathcal{D}_u^+)^4}{\widehat{\square}_u^n} \times \\ \times \delta^{12}(z - z') |q^{+a}(u) q_b^-(u) q^{+b}(u) \dots q_c^+(u) q^{+c}(u_1) q_a^+(u_1).$$

Далее воспользуемся тождеством  $q^+(u_1) = (u_1^+ u^-) q^+(u) - (u_1^+ u^+) q^-$ ,  $q_a^- q^{-a} = 0$ , что приведет к фактору  $(u_1^+ u_2^+)^2$ . Окончательно получим

$$i\Gamma_{2n} = \frac{1}{n} \int d\zeta^{(-4)} du \frac{(\mathcal{D}_u^+)^4}{\widehat{\square}_u^n} \delta^{12}(z - z') |(-4q^- q^+)^n. \quad (2.41)$$

Здесь мы снова учли ограничения (2.27).

Теперь просуммируем все вклады  $\Gamma_{2n}$  (2.41). Результат может быть записан через функциональный детерминант специального дифференциального оператора:

$$i\Gamma = - \int d\zeta^{(-4)} du \ln \left( 1 + \frac{4q_a^- q^{+a}}{\widehat{\square}} \right) (\mathcal{D}^+)^4 \delta^{12}(z - z') |_{z'=z} = \\ = - \int d\zeta^{(-4)} du \left[ \ln(\widehat{\square} + 4q_a^- q^{+a}) + \ln \widehat{\square} \right] (\mathcal{D}^+)^4 \delta^{12}(z - z') |_{z'=z}. \quad (2.42)$$

Видно, что вклад второго члена во второй строке (2.42) совпадает с точностью до знака с однопетлевым эффективным действием  $\mathcal{N} = 4$  суперкалибровочной теории в секторе  $\mathcal{N} = 2$  векторного мультиплетта. Таким образом,  $\Gamma$ , определенная в (2.42), обращается в нуль в пределе нулевых гипермультиплеттов. Отметим, что выражение (2.42) представляет только ту часть полного эффективного действия (2.24), которая зависит от гипермультиплеттов. Полное эффективное действие содержит также гипермультиплеттно-независимую часть  $\Gamma(V^{++})$ .

Необходимо подчеркнуть, что, несмотря на формальное наличие  $q_a^-$  в (2.42), подынтегральное выражение в (2.42) является аналитическим суперполем в рамках низкоэнергетического приближения (см. ограничения (2.27) в секторе гипермультиплетта). Действительно, комбинация  $q_a^- q^{+a}$  на массовой

поверхности гармонически независима [146] и пропорциональна  $q^{ia}q_{ia}$ , где  $q^{ia}$  является (ограниченным) суперполем на общем  $\mathcal{N} = 2$  суперпространстве. Эта величина должна рассматриваться как не зависящая от пространственно-временных координат, если мы рассматриваем только ведущее низкоэнергетическое приближение для гипермультиплетной зависимости (см. (2.27)). Такая ситуация полностью согласуется с общей картиной вычисления эффективного действия в виде ряда по производным фонового поля. Чтобы выделить члены без производных в эффективном действии, достаточно в последнем положить равными нулю все возможные производные фоновых полей. Поэтому уравнение (2.42) для рассматриваемого приближения (которое было сформулировано в этом разделе с самого начала\*) является полностью корректным.

Таким образом, исходя из формулировки  $\mathcal{N} = 4$  суперсимметричной теории Янга–Миллса в  $\mathcal{N} = 2$  гармоническом суперпространстве и применяя метод гармонических суперграфов, мы получили суперполевое выражение для однопетлевого эффективного действия в секторе гипермультиплета (2.42). Это выражение свободно от гармонических сингулярностей и, как мы увидим, допускает непосредственное вычисление с помощью  $\mathcal{N} = 2$  суперполевого обобщения метода теплового ядра. В следующем разделе мы покажем, что общее выражение (2.42) позволяет получить точное представление собственного времени для эффективного действия и его разложения по степеням ковариантных спинорных производных пространственно-постоянной  $\mathcal{N} = 2$  суперполевой абелевой напряженности  $\mathcal{W}, \bar{\mathcal{W}}$  при условиях

$$\begin{aligned} \mathcal{W}|_{\theta=0} = \text{const}, \quad D_{\alpha}^{\pm} \mathcal{W}|_{\theta=0} = \text{const}, \quad \bar{D}_{\alpha}^{\pm} \bar{\mathcal{W}}|_{\theta=0} = \text{const}, \\ D_{\alpha}^{-} D_{\beta}^{+} \mathcal{W}|_{\theta=0} = \text{const}, \quad \bar{D}_{\alpha}^{-} \bar{D}_{\beta}^{+} \bar{\mathcal{W}}|_{\theta=0} = \text{const}, \end{aligned} \quad (2.43)$$

а также фонового гипермультиплета на массовой оболочке  $q^{\pm a} = q^{ia}u_i^{\pm}$ , где  $q^{ia}$  не зависит от гармоник и рассматривается как суперполе, постоянное в пространстве-времени.

Из выражения (2.42) сразу следует одно из основных утверждений касательно гипермультиплетной зависимости однопетлевого эффективного действия: суперполе гипермультиплета входит в эффективное действие в комбинации  $\bar{\mathcal{W}}\mathcal{W} + 2q_{\alpha}^{-}q^{+a}$ , которая инвариантна относительно полной  $R$ -симметрии  $\mathcal{N} = 4$  супералгебры, при условии, что суперполевая напряженность

---

\*Подчеркнем еще раз, что мы рассматриваем только старший, не зависящий от производных вклад гипермультиплета в низкоэнергетическое эффективное действие. Конечно, такое приближение нарушает инвариантность относительно скрытой  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметрии. Было бы крайне интересно и полезно разработать систематическую процедуру для получения разложения по производным эффективного действия в секторе гипермультиплета, однако эта проблема выходит за рамки данного обзора.

$\mathcal{W}$  и суперполе гипермультиплетта помещены на массовую оболочку и предполагаются независимыми от пространственно-временных координат [146]. Чтобы убедиться в справедливости этого утверждения, воспользуемся в выражении  $\widehat{\square} + 4q_a^- q^{+a}$  представлением (2.23) для оператора  $\widehat{\square}$ . Получим, что  $\widehat{\square} + 4q_a^- q^{+a} = \frac{1}{2} \mathcal{D}^{\alpha\dot{\alpha}} \mathcal{D}_{\alpha\dot{\alpha}} - \frac{i}{\sqrt{2}} ((D^{+\alpha} \mathcal{W}) \mathcal{D}_{\alpha}^- + (\bar{D}_{\dot{\alpha}}^+ \bar{\mathcal{W}}) \bar{\mathcal{D}}^{-\dot{\alpha}}) + 2\mathcal{W}\bar{\mathcal{W}} + 4q_a^- q^{+a}$ . В этом выражении фигурирует вышеуказанная комбинация суперполей (два последних члена без производных), и именно эта комбинация является аргументом гипермультиплетно-зависимого эффективного действия в низкоэнергетическом приближении\*.

**2.5. Представление собственного времени для эффективного действия.**

Выражение (2.42) обладает рядом замечательных свойств. Во-первых, мы начали рассмотрение с модели двух взаимодействующих суперполей  $V^{++}$ ,  $q^+$  и затем просуммировали суперграфы таким образом, что эффективное действие выразилось в терминах дифференциального оператора, действующего только в секторе векторного мультиплетта. Вся зависимость от гипермультиплетов вошла в этот оператор. Во-вторых, соотношение (2.42) имеет вид  $\text{Tr} \ln \hat{A}$  с оператором  $\hat{A} = \widehat{\square} + 4q_a^- q^{+a}$ , действующим на аналитические суперполя. Необходимо подчеркнуть, что полученная простая форма однопетлевого эффективного действия заранее не очевидна, она явилась результатом пересуммирования бесконечной последовательности однопетлевых гармонических суперграфов с произвольным числом внешних линий гипермультиплетта.

Эффективное действие (2.42) представляет собой основу для использования представления собственного времени:

$$\begin{aligned} \Gamma &= i \int d\zeta^{(-4)} du \int_0^\infty \frac{ds}{s} e^{-s(\widehat{\square} + 4q_a^- q^{+a})} (\mathcal{D}^+)^4 \delta^{12}(z - z')|_{z'=z} = \\ &= i \int_0^\infty \frac{ds}{s} \text{Tr} \left\{ K(s) e^{-s(4q_a^- q^{+a})} \right\}. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Здесь  $K(s)$  является суперполевым тепловым ядром, операция  $\text{Tr}$  означает взятие функционального следа в аналитическом подпространстве гармонического суперпространства,  $\text{Tr} K(s) = \text{tr} \int d\zeta^{(-4)} K(\zeta, \zeta|s)$ , где  $\text{tr}$  обозначает след по дискретным индексам. В результате задача о нахождении однопетлевого эффективного действия сводится к вычислению ядра  $K(s) = e^{-s\widehat{\square}}$ .

---

\*Следует отметить, что такое приближение нарушает  $R$ -симметрии начальной классической модели. Проблема построения общего разложения эффективного действия по производным, содержащего спинорные производные гипермультиплетта и сохраняющего все  $R$ -симметрии, в настоящее время открыта.

По определению, оператор  $\widehat{\square}$  имеет вид\*

$$\widehat{\square} = \frac{1}{2} \mathcal{D}^{\dot{\alpha}\alpha} \mathcal{D}_{\alpha\dot{\alpha}} + \frac{i}{2} (D^{+\alpha} \mathcal{W}) \mathcal{D}_{\alpha}^{-} + \frac{i}{2} (\bar{D}_{\dot{\alpha}}^{+} \bar{\mathcal{W}}) \bar{\mathcal{D}}^{-\dot{\alpha}} + \mathcal{W} \bar{\mathcal{W}}. \quad (2.45)$$

Для вычисления эффективного действия (2.44) воспользуемся техникой символов операторов в аналитическом подпространстве полного  $\mathcal{N} = 2$  гармонического суперпространства\*\*. Начнем с преобразования Фурье дельта-функции в  $\mathcal{N} = 2$  суперпространстве

$$\delta^{12}(z - z') = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \int d^4 \psi^+ d^4 \psi^- e^{ip_m(x-x')^m} \times \\ \times e^{(\theta-\theta')^{+\alpha} \psi_{\alpha}^{-} + \bar{\psi}_{\dot{\alpha}}^{-} (\bar{\theta}-\bar{\theta}')^{+\dot{\alpha}}} e^{(\theta-\theta')^{-\alpha} \psi_{\alpha}^{+} + \bar{\psi}_{\dot{\alpha}}^{+} (\bar{\theta}-\bar{\theta}')^{-\dot{\alpha}}}. \quad (2.46)$$

Здесь  $p_M = \{p_m, \psi_{\alpha}^{\pm}, \bar{\psi}_{\dot{\alpha}}^{\pm}\}$  — кокасательный супервектор в точке суперпространства  $z$  и  $d^4 \psi^+ = (1/16) d^2 \psi^+ d^2 \bar{\psi}^+$ . В результате тепловое ядро в сопадающих точках принимает вид

$$K(\zeta, \zeta|s) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} d^8 \psi \exp \left\{ -s \left( \frac{1}{2} (\mathcal{D} + ip) \right)^{\dot{\alpha}\alpha} (\mathcal{D} + ip)_{\alpha\dot{\alpha}} + \right. \\ \left. + \frac{i}{2} (D^{+\alpha} \mathcal{W}) (\mathcal{D} + \psi)_{\alpha}^{-} + \frac{i}{2} (\bar{D}_{\dot{\alpha}}^{+} \bar{\mathcal{W}}) (\bar{\mathcal{D}} + \bar{\psi})^{-\dot{\alpha}} + \mathcal{W} \bar{\mathcal{W}} \right\} (\mathcal{D}^+ + \psi^+)^4 \times \mathbf{1}. \quad (2.47)$$

В качестве следующего шага мы должны подействовать операторами в экспоненциале на правую единицу. После этого все дифференциальные операторы будут действовать только на  $\mathcal{W}, \bar{\mathcal{W}}$ . Таким образом, конечный результат выразится в терминах напряженностей  $\mathcal{W}, \bar{\mathcal{W}}$  и их спинорных производных. Эта процедура проводится следующим образом. Выделяем в (2.47) экспоненциал главного символа  $(1/2) p^{\alpha\dot{\alpha}} p_{\alpha\dot{\alpha}}$  из оператора (2.45) и разлагаем оставшуюся экспоненту в степенной ряд по ковариантным производным. Далее проносим все производные направо, по пути коммутируя или антикоммутируя их с коэффициентами оператора (2.45). На конечном этапе производные действуют на единицу, что дает нуль. Последний шаг рассматриваемой процедуры состоит в гауссовских интегрированиях по импульсам  $p$  и тривиальному интегрированию по нечетным переменным  $\psi$ . В результате получим ряд по ковариантным производным напряженностей. Однако для получения

\*Заметим, что замена  $\mathcal{W} \rightarrow -\mathcal{W}/\sqrt{2}$ ,  $\bar{\mathcal{W}} \rightarrow -\bar{\mathcal{W}}/\sqrt{2}$  приводит выражение (2.45) к виду (2.23).

\*\*Техника символов операторов для вычисления эффективного действия в  $\mathcal{N} = 1$  суперпространстве была использована в [211, 213].

этим способом окончательного результата в явно ковариантной форме требуются долгие трудоемкие вычисления.

Метод, порождающий явно суперсимметричное асимптотическое разложение ядра теплопроводности, был развит в рамках  $\mathcal{N} = 1$  суперпространства в работах [96, 211, 213]. Мы обобщим этот метод теплового ядра на  $\mathcal{N} = 2$  гармоническое суперпространство. В каждой точке суперпространства введем касательное пространство, образованное системой нормальных координат и слоем, полученным путем параллельного переноса из точки базового пространства. Псевдодифференциальные операторы могут быть переписаны в этом локальном представлении векторного расслоения. Рассмотрим тепловое ядро с помощью этих операторов и построим алгоритм асимптотического разложения ядра теплопроводности.

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
 A^{+\alpha} &= \frac{i}{2}[D^{+\alpha}, \mathcal{W}], & \bar{A}^{+\dot{\alpha}} &= -\frac{i}{2}[\bar{D}^{+\dot{\alpha}}, \bar{\mathcal{W}}], \\
 A^{-\alpha} &= [D^{-\alpha}, \mathcal{W}], & \bar{A}^{-\dot{\alpha}} &= [\bar{D}^{-\dot{\alpha}}, \bar{\mathcal{W}}], \\
 \{D_{\alpha}^{-}, A_{\beta}^{+}\} &= N_{\alpha\beta} = N_{\beta\alpha} = \frac{i}{2}D_{\alpha}^{-}D_{\beta}^{+}\mathcal{W}, \\
 \{\bar{D}_{\dot{\alpha}}^{-}, \bar{A}_{\dot{\beta}}^{+}\} &= \bar{N}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = \bar{N}_{\dot{\beta}\dot{\alpha}} = -\frac{i}{2}\bar{D}_{\dot{\alpha}}^{-}\bar{D}_{\dot{\beta}}^{+}\bar{\mathcal{W}}.
 \end{aligned} \tag{2.48}$$

В этих обозначениях алгебра ковариантных производных (2.10) принимает вид

$$[\mathcal{D}_{\alpha\dot{\alpha}}, x^{\beta\dot{\beta}}] = 2\delta_{\alpha\dot{\alpha}}^{\beta\dot{\beta}}, \quad \{\mathcal{D}_{\alpha}^{-}, \theta^{+\beta}\} = \delta_{\alpha}^{\beta}, \quad \{\bar{\mathcal{D}}_{\dot{\alpha}}^{-}, \bar{\theta}^{+\dot{\beta}}\} = \delta_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}}, \tag{2.49}$$

$$\begin{aligned}
 [\mathcal{D}^{\dot{\alpha}\alpha}, \mathcal{D}_{\beta\dot{\beta}}] &= -(\delta_{\beta}^{\dot{\alpha}}N_{\beta}^{\alpha} + \delta_{\beta}^{\alpha}\bar{N}_{\dot{\beta}}^{\dot{\alpha}}) = -F_{\beta\dot{\beta}}^{\alpha\dot{\alpha}}, \\
 [\mathcal{D}_{\alpha}^{-}, \mathcal{D}_{\beta\dot{\beta}}] &= \varepsilon_{\alpha\beta}\bar{A}_{\dot{\beta}}^{-}, & [\bar{\mathcal{D}}_{\dot{\alpha}}^{-}, \mathcal{D}_{\beta\dot{\beta}}] &= \varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}A_{\beta}^{-}, \\
 \mathcal{D}_m A_{(\alpha,\dot{\alpha})}^{\pm} &= \mathcal{D}_{(\delta,\dot{\delta})}^{\pm}N_{\alpha\beta} = \mathcal{D}_{(\delta,\dot{\delta})}^{\pm}\bar{N}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = \mathcal{D}_m N_{\alpha\beta} = \mathcal{D}_m \bar{N}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = 0.
 \end{aligned} \tag{2.50}$$

Таким образом, набор ковариантных производных вместе с ограниченными условиями массовой оболочки фоновыми суперполями  $\mathcal{W}, \bar{\mathcal{W}}$ , которые отвечают постоянным в пространстве-времени конфигурациям (2.43) и их производным низшего порядка, образуют конечномерную супералгебру (2.48)–(2.50).

На следующем шаге поднимаем действие сдвинутых операторов  $X_m = \mathcal{D}_m + ip_m, X_{(\alpha,\dot{\alpha})}^{\pm} = \mathcal{D}_{(\alpha,\dot{\alpha})}^{\pm} + \psi_{(\alpha,\dot{\alpha})}^{\pm}$ , удовлетворяющих той же алгебре (2.48)–(2.50), в касательное пространство посредством «экспоненциального отобра-



жения»  $X(p_M, \partial/\partial p_M) = U^{-1} X_M U$  с\*

$$U = e^{-\partial_\psi^{-\alpha} \mathcal{D}_\alpha^+ - \bar{D}_\alpha^+ \bar{\partial}_\psi^{-\dot{\alpha}}} e^{2\theta^{-\alpha} p_{\alpha\dot{\alpha}} \bar{\partial}_\psi^{+\dot{\alpha}} - 2\partial_\psi^{+\alpha} p_{\alpha\dot{\alpha}} \bar{\theta}^{-\dot{\alpha}}} e^{\partial_\psi^{+\alpha} \mathcal{D}_\alpha^- + \bar{D}_\alpha^- \bar{\partial}_\psi^{+\dot{\alpha}}} \times \\ \times \exp\left(-\frac{i}{2} \partial_p^{\dot{\alpha}\alpha} \mathcal{D}_{\alpha\dot{\alpha}}\right),$$

где роль касательных векторов, образующих базис нормальной системы координат, играет набор производных

$$\partial_\psi^{\mp\alpha} \equiv \frac{\partial}{\partial \psi_\alpha^\pm}, \quad \bar{\partial}_\psi^{\mp\dot{\alpha}} \equiv \frac{\partial}{\partial \bar{\psi}_{\dot{\alpha}}^\pm}, \quad \partial_p^{\alpha\dot{\alpha}} \equiv \frac{\partial}{\partial p_{\alpha\dot{\alpha}}} \quad [\partial^M, p_N] = \delta_N^M.$$

Действие оператора  $U$  на сдвинутые операторы  $X_M$  дается следующими выражениями:

$$\begin{aligned} U^{-1} X_\alpha^+ U &= \psi_\alpha^+, & U^{-1} \bar{X}_\alpha^+ U &= -\bar{\psi}_\alpha^+, \\ U^{-1} X_\alpha^- U &= -\psi_\alpha^- + 2\bar{\partial}_\psi^{-\dot{\alpha}} p_{\alpha\dot{\alpha}} + \mathcal{O}(\partial_\psi^-, \partial_p), \\ U^{-1} \bar{X}_\alpha^- U &= \bar{\psi}_\alpha^- + 2\partial_\psi^{-\alpha} p_{\alpha\dot{\alpha}} + \mathcal{O}(\partial_\psi^-, \partial_p), \\ \{X_\alpha^+, \bar{X}_\alpha^-\} &= 2X_{\alpha\dot{\alpha}} = -\{X_\alpha^-, \bar{X}_\alpha^+\}, \\ X_{\alpha\dot{\alpha}} &= ip_{\alpha\dot{\alpha}} + \partial_\psi^+ (\bar{D}_\alpha^- \bar{\mathcal{W}}) - \bar{\partial}_\psi^+ (D_\alpha^- \mathcal{W}) - \\ &\quad - \frac{1}{8} \{\partial_p^{\dot{\beta}} (\bar{D}_\beta^+ \bar{D}_\alpha^- \bar{\mathcal{W}}) + \partial_p^{\beta} (D_\beta^- D_\alpha^+ \mathcal{W})\} + \mathcal{O}(\partial_\psi^-, \partial_p). \end{aligned} \quad (2.51)$$

Отображение функций суперпространства в точке  $z$  на касательное суперпространство задается преобразованиями

$$\begin{aligned} \mathcal{W} &\rightarrow \mathcal{W} - \partial_\psi^{+\alpha} (D_\alpha^- \mathcal{W}) + \mathcal{O}(\partial_\psi^-, \partial_p), \\ \bar{\mathcal{W}} &\rightarrow \bar{\mathcal{W}} + \bar{\partial}_\psi^{+\dot{\alpha}} (\bar{D}_\alpha^- \bar{\mathcal{W}}) + \mathcal{O}(\partial_\psi^-, \partial_p), \\ D_\alpha^+ \mathcal{W} &\rightarrow D_\alpha^+ \mathcal{W} - \partial_\psi^{+\beta} (D_\beta^- D_\alpha^+ \mathcal{W}) + \mathcal{O}(\partial_\psi^-, \partial_p), \\ \bar{D}_\alpha^+ \bar{\mathcal{W}} &\rightarrow \bar{D}_\alpha^+ \bar{\mathcal{W}} + \bar{\partial}_\psi^{+\dot{\beta}} (\bar{D}_\beta^- \bar{D}_\alpha^+ \bar{\mathcal{W}}) + \mathcal{O}(\partial_\psi^-, \partial_p), \\ D_\alpha^- \mathcal{W} &\rightarrow D_\alpha^- \mathcal{W} + \mathcal{O}(\partial_\psi^-, \partial_p), \\ \bar{D}_\alpha^- \bar{\mathcal{W}} &\rightarrow \bar{D}_\alpha^- \bar{\mathcal{W}} + \mathcal{O}(\partial_\psi^-, \partial_p). \end{aligned} \quad (2.52)$$

---

\*Главная цель этих преобразований состоит в исключении операторов  $\mathcal{D}_m$ ,  $\mathcal{D}_\alpha^+$ ,  $\mathcal{D}_\alpha^-$  из  $X_M$ . Далее мы используем те же обозначения  $X_M$  и для преобразованных, и для исходных величин.

Отметим, что в этом представлении операторы  $X$ , суперполя и их производные удовлетворяют той же алгебре (2.49), (2.50). Вообще говоря, для произвольных фоновых суперполей все определенные выше величины представляются бесконечными рядами по  $\partial_p$  и конечными рядами по степеням грассмановых производных  $\partial_\psi$ , с коэффициентами, заданными в фиксированной точке  $z^A$ . Но для рассматриваемого фона представление (2.51), (2.52) является точным.

Фактическое вычисление эффективного действия (2.44) с ядром (2.47) основано на следующем наблюдении. Операторную экспоненту  $e^{-s\widehat{\square}_U}$ , где оператор  $\widehat{\square}_U$  выражен в терминах сдвинутых переменных  $X$  (2.51), можно рассматривать как оператор эволюции квантовой системы Бозе–Ферми с гамильтонианом  $\hat{H} = \widehat{\square}_U$ . Уравнения (2.45), (2.51) показывают, что гамильтониан  $\hat{H}$  является квадратичной формой операторов  $p, \partial_p, \psi, \partial_\psi$  с постоянными коэффициентами (благодаря ограничениям на рассматриваемые фоновые поля). Поэтому вычисление  $\text{Tr } K(s) = \int d\zeta^{-4} K(\zeta, \zeta|s)$  с ядром  $K(\zeta, \zeta|s)$ , определенным формулой (2.47), является точно решаемой задачей.

Вернемся к уравнению (2.47), в котором все операторы и поля вместе с их производными записаны в представлении (2.51). Это эквивалентно утверждению, что ядро теплопроводности расширено на касательное расслоение в точке суперпространства  $z$ , где суперкоордината  $z$  рассматривается как постоянный параметр. Согласно (2.47) оператор эволюции должен в итоге подействовать на единицу. Очевидно, что для нахождения результата такого действия необходимо перенести все производные по  $p$  и  $\psi$  направо и на последнем шаге (когда они подействуют на единицу), избавиться от них. Эта процедура может быть реализована на основе формулы Бейкера–Кемпбелла–Хаусдорфа, соответствующей алгебре (2.49), (2.50). В результате мы получим так называемый символ оператора эволюции. Этот символ должен быть проинтегрирован по бозонным переменным  $p$  и фермионным переменным  $\psi$ , что приведет нас к следу теплового ядра (2.47). Следующее полезное наблюдение состоит в том, что показатель экспоненты оператора эволюции содержит только операторы  $\mathcal{D}^- \sim \psi^-$ . Все  $\mathcal{D}^+ \sim \psi^+$  сконцентрированы в предэкспоненте  $(\mathcal{D}^+)^4$ , и они насыщают интеграл по  $d^4\psi^+$ . Поэтому мы должны опустить все члены  $\mathcal{O}(\partial_\psi^-)$  в операторе  $\hat{H}$ , что позволит получить более простое выражение для (2.51), (2.52). Кроме того, чтобы выполнить интегрирование Березина в секторе переменных  $\psi^-$ , мы должны выделить «проектор»  $(\psi^-)^4$  из рассматриваемого экспоненциала.

Эта программа может быть эффективно реализована, если представить  $K(s) = e^{-s\widehat{\square}}$  как произведение нескольких операторных экспонент. Такая конструкция позволяет преодолеть трудности, которые возникали в преды-

дущих попытках вычисления эффективного действия  $\mathcal{N} = 2$  калибровочной теории непосредственно в  $\mathcal{N} = 2$  суперпространстве. Запишем оператор  $K(s) = e^{-s\hat{\square}}$  в виде

$$\begin{aligned} K(s) &= \exp \left( -s \left\{ A^+ \mathcal{D}^- + \bar{A}^+ \bar{\mathcal{D}}^- + \frac{1}{2} \mathcal{D}^{\dot{\alpha}\alpha} \mathcal{D}_{\dot{\alpha}\alpha} + \mathcal{W}\bar{\mathcal{W}} \right\} \right) = \\ &= \exp \{ -f_{\dot{\alpha}\alpha}(s) \mathcal{D}^{\dot{\alpha}\alpha} \} \exp \left\{ -s \frac{1}{2} \mathcal{D}^{\dot{\alpha}\alpha} \mathcal{D}_{\dot{\alpha}\alpha} \right\} \exp \{ -\Omega(s) \} \times \\ &\quad \times \exp \{ -s(A^{+\alpha} \mathcal{D}_{\dot{\alpha}\alpha}^- + \bar{A}^{+\dot{\alpha}} \bar{\mathcal{D}}_{\dot{\alpha}\alpha}^-) \} \end{aligned} \quad (2.53)$$

с некоторыми неизвестными коэффициентами в правой части. Эти коэффициенты могут быть найдены непосредственно, т. е. на основе теоремы Бейкера–Кемпбелла–Хаусдорфа (используемое представление формулы Бейкера–Кемпбелла–Хаусдорфа мы приведем ниже), или как решение системы дифференциальных уравнений на коэффициенты. Оба способа ведут к одним и тем же результатам.

Для построения указанной системы уравнений рассмотрим  $\left( \frac{d}{ds} K \right) K^{-1}$  и подставим вместо  $K$  первую и вторую строчки в (2.53). Возникающие уравнения для функций  $f^{\dot{\alpha}\alpha}(s)$  имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{f}_{\dot{\alpha}\alpha}(s) &= -f_{\dot{\beta}\dot{\beta}} F_{\dot{\alpha}\alpha}^{\dot{\beta}\beta} - A^{+\beta} (D_{\dot{\beta}}^- f_{\dot{\alpha}\alpha}) - \bar{A}^{+\dot{\beta}} (\bar{D}_{\dot{\beta}}^- f_{\dot{\alpha}\alpha}) + \\ &\quad + A_{\dot{\beta}}^+ \bar{A}_{\dot{\beta}}^- \left( \int_0^s d\tau e^{\tau F} \right)_{\dot{\alpha}\alpha}^{\dot{\beta}\beta} + \bar{A}_{\dot{\beta}}^+ A_{\dot{\beta}}^- \left( \int_0^s d\tau e^{\tau F} \right)_{\dot{\alpha}\alpha}^{\dot{\beta}\beta}. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Аналогично уравнение для функции  $\Omega$  есть

$$\begin{aligned} \dot{\Omega}(s) - \mathcal{W}\bar{\mathcal{W}} &= -A^{+\alpha} (D_{\dot{\alpha}\alpha}^- \Omega) - \bar{A}^{+\dot{\alpha}} (\bar{D}_{\dot{\alpha}\alpha}^- \Omega) + \\ &\quad + A_{\dot{\alpha}\alpha}^+ f^{\dot{\alpha}\alpha} \bar{A}_{\dot{\alpha}\alpha}^- + \bar{A}_{\dot{\alpha}\alpha}^+ f^{\dot{\alpha}\alpha} A_{\dot{\alpha}\alpha}^- - \frac{1}{2} A_{\dot{\beta}}^+ \bar{A}_{\dot{\beta}}^- \times \\ &\quad \times \left( \int_0^s d\tau e^{-\tau F} \right)_{\dot{\alpha}\alpha}^{\dot{\beta}\beta} F_{\dot{\rho}\rho}^{\dot{\alpha}\alpha} f^{\dot{\rho}\rho} - \frac{1}{2} \bar{A}_{\dot{\beta}}^+ A_{\dot{\beta}}^- \left( \int_0^s d\tau e^{-\tau F} \right)_{\dot{\alpha}\alpha}^{\dot{\beta}\beta} F_{\dot{\rho}\rho}^{\dot{\alpha}\alpha} f^{\dot{\rho}\rho}. \end{aligned} \quad (2.55)$$

Легко показать, что решение уравнения (2.54) может быть записано в виде

$$f_{\dot{\alpha}\alpha} = -A_{\dot{\delta}}^+ \mathcal{N}_{\dot{\alpha}\alpha}^{\dot{\delta}\dot{\delta}}(s) \bar{A}_{\dot{\delta}}^- - \bar{A}_{\dot{\delta}}^+ \bar{\mathcal{N}}_{\dot{\alpha}\alpha}^{\dot{\delta}\dot{\delta}}(s) A_{\dot{\delta}}^-, \quad (2.56)$$

где функции  $\mathcal{N}(N, \bar{N})$ ,  $\bar{\mathcal{N}}(N, \bar{N})$  приведены ниже. Решение уравнения (2.55) имеет вид

$$\begin{aligned} \Omega(s) = & s\mathcal{W}\bar{\mathcal{W}} + A^{+\alpha}\Omega_{\alpha}^{-}(s) + \bar{A}^{+\dot{\alpha}}\bar{\Omega}_{\dot{\alpha}}^{-}(s) + \\ & + (A^+)^2\Psi^{(-2)}(s) + (\bar{A}^+)^2\bar{\Psi}^{(-2)}(s) + A^{+\alpha}\bar{A}_{\dot{\alpha}}^+\Psi_{\alpha}^{\dot{\alpha}(-2)}(s). \end{aligned} \quad (2.57)$$

Отметим, что это решение представляет собой полином конечного порядка по степеням грассмановых элементов  $A^{\pm}$ ,  $\bar{A}^{\pm}$  (2.48). Коэффициенты  $\Omega_{\alpha}^{-}(s)$ ,  $\bar{\Omega}_{\dot{\alpha}}^{-}(s)$ ,  $\Psi^{(-2)}(s)$ ,  $\bar{\Psi}^{(-2)}(s)$ ,  $\Psi_{\alpha}^{\dot{\alpha}(-2)}(s)$  даются соотношениями (2.78)–(2.84).

Полезно записать последний экспоненциал в (2.53) в виде

$$\begin{aligned} e^{-s(A^+\mathcal{D}^- + \bar{A}^+\bar{\mathcal{D}}^-)} = & 1 + a^{+\alpha}\mathcal{D}_{\alpha}^- + \bar{a}^{+\dot{\alpha}}\bar{\mathcal{D}}_{\dot{\alpha}}^- + f^{+2}(\mathcal{D}^-)^2 + \\ & + \bar{f}^{+2}(\bar{\mathcal{D}}^-)^2 + f^{+2\dot{\alpha}\alpha}\mathcal{D}_{\alpha}^-\bar{\mathcal{D}}_{\dot{\alpha}}^- + \bar{\Xi}^{+3\dot{\alpha}}\bar{\mathcal{D}}_{\dot{\alpha}}^-(\mathcal{D}^-)^2 + \\ & + \Xi^{+3\alpha}\mathcal{D}_{\alpha}^-(\bar{\mathcal{D}}^-)^2 + \Omega^{+4}(\mathcal{D}^-)^2(\bar{\mathcal{D}}^-)^2. \end{aligned} \quad (2.58)$$

Коэффициенты в этом разложении могут быть найдены точно. Отметим, что  $\Omega^{+4}(s) \sim (A^+)^4$ . Подынтегральное выражение для ядра (2.47) представляется в виде произведения ядра типа швингеровского  $\exp\left(-s\frac{1}{2}\mathcal{D}^{\alpha\dot{\alpha}}\mathcal{D}_{\alpha\dot{\alpha}}\right)$  и членов разложения (2.58) по степеням  $\mathcal{D}^-$ , а также разложения  $e^{-f_{\alpha\dot{\alpha}}\mathcal{D}^{\alpha\dot{\alpha}}}$ ,  $e^{-\Omega(s)}$  по степеням грассмановых величин  $A^+$ ,  $\bar{A}^+$ . Это приводит к представлению

$$\begin{aligned} K(s) = & \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} d^8\psi \exp\left(-s\frac{1}{2}X^{\alpha\dot{\alpha}}X_{\alpha\dot{\alpha}}\right) \times \\ & \times \left\{ 1 + \frac{1}{2}f_{\alpha\dot{\alpha}}(s)X^{\alpha\dot{\alpha}}f_{\beta\dot{\beta}}(s)X^{\beta\dot{\beta}} + \dots \right\} \times \\ & \times e^{-\Omega(s)} \left\{ 1 + \dots + \Omega^{+4}(s)(\psi^-)^4 \right\} (\psi^+)^4 \times \mathbf{1}. \end{aligned} \quad (2.59)$$

Это очень сложное выражение можно существенно упростить, используя замечательные свойства интеграла Березина. Только последний член в последней скобке дает нетривиальный вклад. Так как  $\Omega^{+4} \sim (A^+)^4$  и все  $f_{\alpha\dot{\alpha}}$ ,  $\Omega$  построены из элементов  $A^+$ ,  $\bar{A}^+$ , мы должны опустить в выражении для  $K(s)$  все эти функции, кроме  $e^{-s\mathcal{W}\bar{\mathcal{W}}}$ . В результате приходим к выражению

$$K(s) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} K_{\text{Sch}}(s) e^{-s\mathcal{W}\bar{\mathcal{W}}} \Omega^{+4}(s). \quad (2.60)$$

Последний шаг состоит в вычислении ядра Швингера для оператора  $\square_{\text{cov}}(X_m) = (1/2)X^{\alpha\dot{\alpha}}X_{\alpha\dot{\alpha}}$ ,  $K_{\text{Sch}}(s) \equiv \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-s\square_{\text{cov}}(X_m)}$ , где операторы

$X_{\alpha\dot{\alpha}}$  определены в (2.51). Такие вычисления теперь стали стандартными (см., например, [96, 107, 144])\* . Поэтому мы приведем только окончательный результат

$$K_{\text{Sch}}(s) = \frac{i}{(4\pi s)^2} \frac{s^2(N^2 - \bar{N}^2)}{\cosh(sN) - \cosh(s\bar{N})}. \quad (2.61)$$

Здесь  $N = \sqrt{-(1/2)D^4\mathcal{W}^2}$ . Эта величина может быть выражена через два инварианта абелева векторного поля,  $\mathcal{F} = (1/4)F^{mn}F_{mn}$  и  $\mathcal{G} = (1/4)^*F^{mn}F_{mn}$ , как  $N = \sqrt{2(\mathcal{F} + i\mathcal{G})}$ . В контексте  $\mathcal{N} = 4$  суперкалибровочной теории ядро (2.61) было найдено в [144] с использованием различных косвенных подходов. Здесь мы записали ядро (2.61) полностью в терминах  $\mathcal{N} = 2$  гармонических суперполей.

**2.6. Эффективное действие и его разложение по ковариантным спинорным производным.** В предыдущем пункте мы разработали метод собственного времени в гармоническом суперпространстве. Теперь применим эту технику для построения эффективного действия.

Эффективное действие записывается в виде (2.44), где тепловое ядро в совпадающих точках определяется формулой (2.47). Мы применяем разложение (2.60), (2.61) для  $K_{\text{Sch}}(s)$  (2.90),  $\Omega^{(+4)}$  и учитываем следующие свойства: 1) уравнение (2.47) уже содержит  $(\psi^+)^4$  и, следовательно, можно сразу использовать  $\int d^4\psi^+(\psi^+)^4 = 1$ ; 2) для насыщения интегрирования по  $\psi^-$  достаточно удержать в уравнении (2.58) только последний член  $\Omega^{+4}(\psi^-)^4$ ; 3) поскольку  $\Omega^{+4} \sim (A^+)^4$  (см. (2.90)), в (2.53) должны быть опущены все члены, которые зависят от  $A^+$ . Это приводит к следующей окончательной форме эффективного действия:

$$\Gamma = \frac{1}{(4\pi)^2} \int d\zeta^{(-4)} du \int_0^\infty \frac{ds}{s^3} e^{-s(2\mathcal{W}\bar{\mathcal{W}} + 4q_a^- q^{+a})} \frac{s^2(N^2 - \bar{N}^2)}{\cosh(sN) - \cosh(s\bar{N})} \times \\ \times \frac{1}{16} (D^+\mathcal{W})^2 (\bar{D}^+\bar{\mathcal{W}})^2 \frac{\cosh(sN) - 1}{N^2} \frac{\cosh(s\bar{N}) - 1}{\bar{N}^2}. \quad (2.62)$$

Можно показать, что подынтегральное выражение в (2.62) допускает разложение в степенной ряд по величинам  $s^2N^2, s^2\bar{N}^2$ . После замены параметра собственного времени  $s$  на  $s' = 2s\mathcal{W}\bar{\mathcal{W}}$  получаем разложение по степеням

\* Отметим, что выполнение операции  $\text{tr}$  по лоренцевым индексам тривиально благодаря тождеству

$$N_\alpha^\beta N_\beta^\delta = -\frac{1}{4} D_\alpha^- D^{+\beta} \mathcal{W} D_\beta^- D^{+\delta} \mathcal{W} = -\frac{1}{8} D_\alpha^- D^{+\beta} D_\beta^- D^{+\delta} \mathcal{W}^2 = -\frac{1}{2} \delta_\alpha^\delta (D)^4 \mathcal{W}^2 = \delta_\alpha^\delta N^2.$$

$s'^2 \frac{4N^2}{4(\mathcal{W}\bar{\mathcal{W}})^2}$  и им сопряженным. Кроме того, поскольку подынтегральное выражение (2.62) уже пропорционально  $(A^+)^4$ , мы можем заменить величины  $N^2, \bar{N}^2$  в каждом члене разложения суперконформными инвариантами  $\Psi^2$  и  $\bar{\Psi}^2$  [144], которые даются выражением

$$\bar{\Psi}^2 = \frac{1}{\bar{\mathcal{W}}^2} D^4 \ln \mathcal{W} = \frac{1}{2\bar{\mathcal{W}}^2} \left\{ \frac{N_\alpha^\beta N_\beta^\alpha}{\mathcal{W}^2} + 4 \frac{A^{+\alpha} N_\alpha^\beta A_\beta^-}{\mathcal{W}^3} + 3 \frac{(A^+)^2 (A^-)^2}{\mathcal{W}^4} \right\} \quad (2.63)$$

и сопряженным ему. После всех этих манипуляций можно показать, что каждый член разложения записывается в виде интеграла по общему  $\mathcal{N} = 2$  суперпространству.

Выражение (2.62) в отсутствие гипермультиплетов было получено в работах [144, 146] с помощью других методов. Гипермультиплетная зависимость эффективного действия была получена в [215] в терминах  $\mathcal{N} = 1$  суперполей, ее преобразование к  $\mathcal{N} = 2$  гармонической форме было произведено там же на основе эвристического рецепта восстановления явно  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметричного вида эффективного действия, изначально записанного в терминах  $\mathcal{N} = 1$  суперполей. Выше мы получили гипермультиплетную зависимость эффективного действия (2.62) полностью в терминах гармонических суперполей, и эта зависимость совпала с полученной в [215]. Тем самым мы подтвердили правильность рецепта, использованного в [215].

Приведем несколько первых членов разложения эффективного действия (2.62) в ряд по степеням  $N^2, \bar{N}^2$  и сравним их с результатами  $\mathcal{N} = 1$  суперполевых вычислений, основанных на вышеупомянутых специальных предписаниях восстановления явной  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметричной формы эффективного действия в формализме  $\mathcal{N} = 1$  суперполей. Мы хотим показать, что разложение по спинорным производным в (2.62) фактически воспроизводит разложение в [215]. Каждый член разложения эффективного действия содержит определенную степень абелевой напряженности  $F_{mn}$ . Такое разложение позволяет выделить явно зависимость от  $q^- q^+$ . Поскольку  $N^2, \bar{N}^2$  включают спинорные ковариантные производные от суперполевых напряженностей (см. (2.48)), разложение по этим величинам есть в точности разложение по спинорным ковариантным производным напряженностей  $\mathcal{W}, \bar{\mathcal{W}}$ .

Используем разложения  $K_{\text{Sch}}(s)$  и  $\Omega^{+4}(s)$ . Это приводит к выражению

$$\Gamma = \frac{1}{(8\pi)^2} \int d\zeta^{(-4)} du \int_0^\infty ds s e^{-s(2\mathcal{W}\bar{\mathcal{W}}+4q^-q^+)} D^+ \mathcal{W} D^+ \mathcal{W} \bar{D}^+ \bar{\mathcal{W}} \bar{D}^+ \bar{\mathcal{W}} \times \\ \times \left\{ 1 + \frac{s^4}{2 \cdot 5!} D^4 \mathcal{W}^2 \bar{D}^4 \bar{\mathcal{W}}^2 + \dots \right\}.$$

Ведущая низкоэнергетическая поправка соответствует члену  $F^4$ . Выполняя интеграл по  $s$ , получаем

$$\begin{aligned} \Gamma_{F^4} &= \frac{1}{(4\pi)^2} \int d\zeta^{(-4)} du \frac{1}{16} \frac{D^+ \mathcal{W} D^+ \bar{\mathcal{W}} \bar{D}^+ \bar{\mathcal{W}} \bar{D}^+ \bar{\mathcal{W}}}{\mathcal{W}^2 \bar{\mathcal{W}}^2} \times \\ &\quad \times \frac{1}{\left(1 - \left(-\frac{2q^- q^+}{\mathcal{W} \bar{\mathcal{W}}}\right)\right)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(4\pi)^2} \times \\ &\quad \times \int d\zeta^{(-4)} du \frac{1}{16} \frac{D^+ \mathcal{W} \dots \bar{D}^+ \bar{\mathcal{W}}}{(\mathcal{W} \bar{\mathcal{W}})^{k+2}} (k+1) (-2q^- q^+)^k = \\ &= \frac{1}{(4\pi)^2} \int d\zeta^{(-4)} du \frac{1}{16} \left\{ D^{+2} \ln \mathcal{W} \bar{D}^{+2} \ln \bar{\mathcal{W}} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2(k+1)} D^{+2} \frac{1}{\mathcal{W}^k} \bar{D}^{+2} \frac{1}{\bar{\mathcal{W}}^k} (-2q^- q^+)^k \right\}, \quad (2.64) \end{aligned}$$

что окончательно дает

$$\Gamma_{F^4} = \frac{1}{(4\pi)^2} \int d^{12}z \left\{ \ln \mathcal{W} \ln \bar{\mathcal{W}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2(k+1)} \left( \frac{-2q^{ai} q_{ai}}{\mathcal{W} \bar{\mathcal{W}}} \right)^k \right\}. \quad (2.65)$$

Это выражение совпадает с результатами работ [147, 215]\*:

$$\Gamma_{F^4} = \frac{1}{(4\pi)^2} \int d^{12}z \left\{ \ln \mathcal{W} \ln \bar{\mathcal{W}} + \text{Li}_2(X) + \ln(1-X) - \frac{1}{X} \ln(1-X) \right\},$$

где  $X = \frac{-2q^{ai} q_{ai}}{\mathcal{W} \bar{\mathcal{W}}}$  и  $\text{Li}_2(X)$  есть дилогарифм Эйлера.

Следующая за лидирующей поправка к  $F^8$ -члену\*\* имеет вид

$$\begin{aligned} \Gamma_{F^8} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2(4\pi)^2} \int d\zeta^{(-4)} du \frac{1}{16} \frac{D^+ \mathcal{W} \dots \bar{D}^+ \bar{\mathcal{W}}}{(\mathcal{W} \bar{\mathcal{W}})^6} D^4 \mathcal{W}^2 \bar{D}^4 \bar{\mathcal{W}}^4 \times \\ &\quad \times \frac{1}{5!} (k+1)(k+2)(k+3)(k+4)(k+5) \left( \frac{-2q^- q^+}{\mathcal{W} \bar{\mathcal{W}}} \right)^k. \quad (2.66) \end{aligned}$$

\*Мы можем положить  $\int d\zeta^{(-4)} (D^+)^4 = \int d^{12}z$  и  $\int du = 1$ , поскольку в центральном базисе  $\mathcal{N} = 2$  гармонического суперпространства суперполя гипермультиплета на массовой оболочке представляются как  $q^{\pm\alpha} = q^{i\alpha} u_{\pm}^{\pm}$ , а супернапряженности  $\mathcal{W}, \bar{\mathcal{W}}$  не зависят от гармоник.

\*\*  $F^6$ -поправка не возникает в однопетлевом эффективном действии для  $\mathcal{N} = 4$  теории Янга–Миллса [90, 144].

Используя детализированные выражения

$$D^4 \mathcal{W}^2 = 4D_\alpha^+ D^{-\beta} \mathcal{W} D^{+\alpha} D_\beta^- \mathcal{W}$$

и

$$D^{+\alpha} D_\alpha^+ (D^{+\delta} \mathcal{W} D_\delta^+ \mathcal{W} D^{-\beta} \mathcal{W} D_\beta^- \mathcal{W}) = 2D^{+\delta} \mathcal{W} D_\delta^+ \mathcal{W} D_\alpha^+ D^{-\beta} \mathcal{W} D^{+\alpha} D_\beta^- \mathcal{W},$$

получим цепочку тождеств

$$\begin{aligned} \frac{1}{(\mathcal{W})^{k+6}} D^+ \mathcal{W} D^+ \mathcal{W} D^4 \mathcal{W} &= 2D^+ D^+ \left\{ \frac{D^+ \mathcal{W} D^+ \mathcal{W}}{\mathcal{W}^{k+4}} \frac{D^- \mathcal{W} D^- \mathcal{W}}{\mathcal{W}^2} \right\} = \\ &= -2D^+ D^+ \left\{ \frac{1}{(k+2)(k+3)} D^+ D^+ \frac{1}{\mathcal{W}^{k+2}} D^- D^- \ln \mathcal{W} \right\} = \\ &= -2D^+ D^+ \left\{ \frac{1}{(k+2)(k+3)} \frac{1}{\mathcal{W}^{k+2}} D^4 \ln \mathcal{W} \right\}. \end{aligned}$$

Подобные манипуляции осуществляются также и с комплексно-сопряженным членом. С учетом этих тождеств, после восстановления полной меры  $d^{12}z = d\zeta^{(-4)}(D^+)^4$  возникает фактор

$$\frac{1}{(k+2)^2(k+3)^2} \frac{1}{\bar{\mathcal{W}}^2} D^4 \ln \mathcal{W} \frac{1}{\mathcal{W}^2} \bar{D}^4 \ln \bar{\mathcal{W}} \left( \frac{-2q_a^- q^{+a}}{\mathcal{W}\bar{\mathcal{W}}} \right)^k.$$

Это позволяет записать  $\Gamma_{F^8}$  в форме

$$\begin{aligned} \Gamma_{F^8} &= \frac{1}{2(4\pi)^{25}!} \int d^{12}z \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)(k+4)(k+5)}{(k+2)(k+3)} \Psi^2 \bar{\Psi}^2 \left( \frac{-2q_a^- q^{+a}}{\mathcal{W}\bar{\mathcal{W}}} \right)^k = \\ &= \frac{1}{2(4\pi)^{25}!} \int d^{12}z \Psi^2 \bar{\Psi}^2 \left\{ \frac{1}{(1-X)^2} + \frac{4}{(1-X)} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{6X-4}{X^3} \ln(1-X) + 4 \frac{X-1}{X^2} \right\}. \quad (2.67) \end{aligned}$$

Этот результат совпадает с результатом  $\mathcal{N} = 1$  вычислений, выполненных с использованием рецептов работы [215].

Аналогичное рассмотрение позволяет в принципе получить любой член  $\Gamma_{F^{2n}}$  в разложении эффективного действия (2.62) по производным. Следует обратить внимание на то, что в каждом члене разложения интегралы по аналитическому подпространству можно преобразовать в интегралы по полному  $\mathcal{N} = 2$  суперпространству.



### 2.7. Полезное представление формулы Бейкера–Кемпбелла–Хаусдорфа.

Тепловое ядро, связанное с оператором  $\mathcal{O}$ , задается как матричный элемент оператора  $e^{\mathcal{O}}$ . Во многих случаях оператор  $\mathcal{O}$  является линейной комбинацией базисных операторов, которые образуют некоторую (супер)алгебру. Тогда вычисление теплового ядра радикально упрощается благодаря возможности использования формулы Бейкера–Кемпбелла–Хаусдорфа (ВСН). Согласно этой формуле показатель экспоненты, которая есть произведение двух экспонент с некоммутирующими операторами  $A$  и  $B$  в качестве показателей, может быть представлен в виде ряда по степеням коммутаторов  $[A, B]$ ,  $[A, [A, B]]$ ,  $[B, [A, B]]$  и т. п. Мы получим другое удобное представление для ВСН-формулы, а именно

$$e^{A+B} = e^{C_1+C_2+C_3+\dots} e^A, \quad (2.68)$$

где операторы  $C_k$  выражаются через коммутаторы операторов  $A$  и  $B$ . Покажем, что операторы  $C_k$  могут быть определены таким образом, что каждый  $C_k$  содержит  $k$ -ю степень оператора  $B$  и все степени оператора  $A$ . Это представление ВСН-формулы оказывается полезным в тех случаях, когда операторы  $A$  и  $B$  ассоциированы с некоторой (супер)алгеброй, которая позволяет суммировать операторные серии  $C_1 + C_2 + C_3 + \dots$  к явным выражениям.

Введем в (2.68) переменную  $t$  следующим образом:

$$e^{A+tB} = e^{tC_1+t^2C_2+t^3C_3+\dots} e^A. \quad (2.69)$$

Далее определим функцию

$$\mathcal{F} = e^{A+tB} e^{-A} = \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} t^k C_k(A, B)\right) \quad (2.70)$$

и найдем подходящие операторы  $C_k$  в (2.69). Очевидно, что при  $t = 0$  (2.69) становится тождеством, а при  $t = 1$  мы получаем первоначальное соотношение (2.68). Вычислим логарифмическую производную функции (2.69) по  $t$ . С одной стороны, имеем

$$\dot{\mathcal{F}} \mathcal{F}^{-1} = \int_0^1 d\tau e^{\tau A + \tau t B} B e^{-\tau A - \tau t B}. \quad (2.71)$$

С другой стороны,

$$\mathcal{F} = e^{tC_1+t^2C_2+\dots}, \quad \dot{\mathcal{F}} \mathcal{F}^{-1} = C_1 + 2tC_2 + \dots \quad (2.72)$$

Если положим  $t = 0$ , то получим

$$C_1 = \int_0^1 d\tau e^{\tau A} B e^{-\tau A} = \int_0^1 d\tau \mathcal{B}(\tau). \quad (2.73)$$

Для получения  $C_2$  мы должны вычислить первую производную логарифмической производной по  $t$ :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\dot{\mathcal{F}}\mathcal{F}^{-1}) &= \int_0^1 \int_0^1 d\tau' d\tau \left\{ e^{\tau'A + \tau'\tau t B} (\tau B) e^{-\tau'A - \tau'\tau t B} \right\} \times \\ &\times \left\{ e^{\tau A + \tau t B} B e^{-\tau A - \tau t B} \right\} + \int_0^1 \int_0^1 d\tau' d\tau \left\{ e^{\tau A + \tau t B} B e^{-\tau A - \tau t B} \right\} \times \\ &\times \left\{ e^{\tau'A + \tau'\tau t B} (-\tau B) e^{-\tau'A - \tau'\tau t B} \right\}. \end{aligned} \quad (2.74)$$

При  $t = 0$  мы получаем выражение для  $C_2$ :

$$2C_2 = \int_0^1 \int_0^1 d\tau d\tau' \tau [\mathcal{B}(\tau'\tau), \mathcal{B}(\tau)]. \quad (2.75)$$

Следуя той же стратегии, можно найти все операторы  $C_k$ . Например, для построения оператора  $C_3$  надо вычислить вторую производную найденной выше логарифмической производной. Это приводит к соотношению

$$\begin{aligned} 6C_3 + [C_1, C_2] &= \int_0^1 d\tau'' d\tau' d\tau \tau^2 \left\{ [\mathcal{B}(\tau'\tau), [\mathcal{B}(\tau''\tau), \mathcal{B}(\tau)]] - \right. \\ &\left. - \tau' [\mathcal{B}(\tau), [\mathcal{B}(\tau''\tau'\tau), \mathcal{B}(\tau')]] \right\}, \end{aligned} \quad (2.76)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  уже были найдены. Оператор  $C_4$  находится из соотношения

$$\begin{aligned} 24C_4 + 6[C_1, C_3] + [C_1, [C_1, C_2]] &= \int_0^1 d\tau''' d\tau'' d\tau' d\tau \tau^2 \times \\ &\times \left\{ \tau' \tau \left[ [\mathcal{B}(\tau'''\tau'\tau), \mathcal{B}(\tau'\tau)], [\mathcal{B}(\tau''\tau), \mathcal{B}(\tau)] \right] - \right. \\ &- \tau'' \tau \left[ \mathcal{B}(\tau'\tau), [\mathcal{B}(\tau), [\mathcal{B}(\tau'''\tau''\tau), \mathcal{B}(\tau''\tau)]] \right] + \\ &+ \tau \left[ \mathcal{B}(\tau'\tau), [\mathcal{B}(\tau''\tau), [\mathcal{B}(\tau'''\tau), \mathcal{B}(\tau)]] \right] \left. \right\} \times \\ &\times \tau^2 \tau' \left\{ \tau'' \tau' \tau \left[ [[\mathcal{B}(\tau'''\tau''\tau'), \mathcal{B}(\tau''\tau'\tau)], \mathcal{B}(\tau')], \mathcal{B}(\tau) \right] + \right. \\ &+ \tau' \tau \left[ [\mathcal{B}(\tau''\tau'\tau), [\mathcal{B}(\tau'''\tau'\tau), \mathcal{B}(\tau')], \mathcal{B}(\tau)] + \right. \\ &\left. \left. + \tau \left[ [\mathcal{B}(\tau''\tau'\tau), \mathcal{B}(\tau')], [\mathcal{B}(\tau'''\tau), \mathcal{B}(\tau)] \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.77)$$

и т. д. Применяя ту же процедуру, можно получить, в принципе, все члены ряда ВСН в формуле (2.68).

В рассматриваемом случае проблема заключается в переписывании экспоненциала (2.53) суммы операторов, удовлетворяющих алгебраическим соотношениям (2.48), (2.50), в виде произведения экспонент отдельных операторов. Эта задача решается в два этапа.

Во-первых, в качестве  $A$  в (2.68) возьмем оператор  $A^+D^- + \bar{A}^+\bar{D}^-$  и представим  $C_1$  как линейную комбинацию операторов  $(1/2)\mathcal{D}^{\alpha\dot{\alpha}}\mathcal{D}_{\alpha\dot{\alpha}}$ ,  $f^{\alpha\dot{\alpha}}(A^\pm, \bar{A}^\pm, N, \bar{N})\mathcal{D}_{\alpha\dot{\alpha}}$  с некоторыми определенными коэффициентами\* плюс некоторые определенные функции аргументов  $\mathcal{W}$ ,  $\bar{\mathcal{W}}$ ,  $A^\pm$ ,  $\bar{A}^\pm$ ,  $N$ ,  $\bar{N}$  в качестве центральных элементов. Это означает, что все другие операторы  $C_2, C_3, \dots$  должны быть пропорциональны оператору  $\mathcal{D}_{\alpha\dot{\alpha}}$  с некоторыми функциями в качестве коэффициента. Поэтому ряд  $C_1 + C_2 + C_3 + \dots$  сводится к суммированию этих коэффициентных функций, которое можно осуществить в явном виде. Результат дается выражением  $-s(1/2)\mathcal{D}^{\alpha\dot{\alpha}}\mathcal{D}_{\alpha\dot{\alpha}}$  плюс  $f^{\alpha\dot{\alpha}}(A^\pm, \bar{A}^\pm, N, \bar{N})\mathcal{D}_{\alpha\dot{\alpha}}$  плюс некоторый центральный элемент.

Во-вторых, мы применяем еще раз формулу (2.68) для выражения  $\exp(-s(1/2)\mathcal{D}^{\alpha\dot{\alpha}}\mathcal{D}_{\alpha\dot{\alpha}} + f^{\alpha\dot{\alpha}}\mathcal{D}_{\alpha\dot{\alpha}})$  и выбираем в качестве  $A$  оператор  $-s(1/2)\mathcal{D}^{\alpha\dot{\alpha}}\mathcal{D}_{\alpha\dot{\alpha}}$ . Все операторы  $C_k$  будут опять пропорциональны одному оператору  $\mathcal{D}_{\alpha\dot{\alpha}}$ , и набор коэффициентных функций может быть просуммирован к явным выражениям. В результате мы получаем правую часть выражения (2.53). Все коэффициентные функции приведены в п. 2.8 (см. соотношения (2.78)–(2.84)). Эти функции также могут быть найдены из дифференциальных уравнений (2.54), (2.55). Результаты, полученные на основе ВСН-формулы и через решения приведенных выше дифференциальных уравнений, совпадают.

**2.8. Коэффициентные функции в разложении теплового ядра.** Решения линейных дифференциальных уравнений (2.54) и (2.55) для  $f_{\alpha\dot{\alpha}}(s)$  и  $\Omega(s)$  могут быть найдены точно, и они имеют вид (2.56), (2.57). Коэффициенты степенного разложения  $f_{\alpha\dot{\alpha}}(s)$  по базису грассмановых элементов  $A_\alpha^+, \bar{A}_{\dot{\alpha}}^+$  даются следующими выражениями:

$$\mathcal{N}_{\alpha\dot{\alpha}}^{\delta\dot{\delta}} = \int_0^s d\tau \left( \frac{e^{-\tau N} - e^{\tau \bar{N}}}{N + \bar{N}} e^{-s\bar{N}} \right)_{\alpha\dot{\alpha}}^{\delta\dot{\delta}} = -\frac{e^{-sF} - 1}{NF} + \frac{e^{-s\bar{N}} - 1}{N\bar{N}}, \quad (2.78)$$

$$\bar{\mathcal{N}}_{\dot{\alpha}\alpha}^{\delta\dot{\delta}} = \int_0^s d\tau \left( \frac{e^{-\tau \bar{N}} - e^{\tau N}}{N + \bar{N}} e^{-sN} \right)_{\dot{\alpha}\alpha}^{\delta\dot{\delta}} = -\frac{e^{-sF} - 1}{\bar{N}F} + \frac{e^{-sN} - 1}{N\bar{N}}. \quad (2.79)$$

\* Действительно, например,  $[A^+D^-, (1/2)\mathcal{D}^{\alpha\dot{\alpha}}\mathcal{D}_{\alpha\dot{\alpha}}] = -A^{+\alpha}\bar{A}^{-\dot{\alpha}}\mathcal{D}_{\alpha\dot{\alpha}}$ .

Коэффициенты степенного разложения  $\Omega(s)$  по этому же базису  $A_\alpha^+, \bar{A}_\alpha^+$  выражаются как

$$\Omega_\alpha^- = -\bar{W} \left\{ \frac{e^{-sN} + sN - 1}{N^2} \right\}_\alpha^\beta A_{\beta}^-, \quad (2.80)$$

$$\bar{\Omega}_{\dot{\alpha}}^- = -W \bar{A}_{\dot{\beta}}^- \left\{ \frac{e^{-s\bar{N}} + s\bar{N} - 1}{\bar{N}^2} \right\}_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}}, \quad (2.81)$$

$$\begin{aligned} \Psi^{(-2)} &= \frac{1}{8} (\bar{A}^-)^2 \text{tr} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=1}^n \frac{s^{n+2}}{(n+2)!} C_n^p (-F)^{n-p} \{ N^{p-1} - (-1)^n \bar{N}^{p-1} \} = \\ &= (\bar{A}^-)^2 \left\{ \frac{s^3}{6} + \frac{s^5}{5!} (N^2 + \bar{N}^2) + \dots \right\}, \quad (2.82) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}^{(-2)} &= \frac{1}{8} (A^-)^2 \text{tr} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=1}^n \frac{s^{n+2}}{(n+2)!} C_n^p (-F)^{n-p} \{ \bar{N}^{p-1} - (-1)^n N^{p-1} \} = \\ &= (A^-)^2 \left\{ \frac{s^3}{6} + \frac{s^5}{5!} (N^2 + \bar{N}^2) + \dots \right\}, \quad (2.83) \end{aligned}$$

$$\Psi_\alpha^{\dot{\alpha}(-2)} = \Psi_{\dot{\alpha}\delta}^{\dot{\alpha}\delta} A_\delta^- \bar{A}^{-\dot{\delta}},$$

$$\begin{aligned} \Psi_{\dot{\alpha}\delta}^{\dot{\alpha}\delta} &= \frac{1}{N\bar{N}(N-\bar{N})} + \frac{1}{N\bar{N}} \left\{ \frac{e^{-sN}}{\bar{N}} - \frac{e^{-s\bar{N}}}{N} \right\} + \frac{N^2 + \bar{N}^2}{2N^2\bar{N}^2(N-\bar{N})} e^{s(\bar{N}-N)} + \\ &+ \frac{\bar{N}^2 e^{sF} - N^2 e^{-sF}}{2N^2\bar{N}^2(N+\bar{N})} = \frac{s^3}{3} + \frac{s^4}{8} (\bar{N} - N) + \frac{7s^5}{5!} (N^2 + \bar{N}^2) + \dots \quad (2.84) \end{aligned}$$

Коэффициенты разложения по производным оператора  $\exp \{-s(A^+ \mathcal{D}^- + \bar{A}^+ \bar{\mathcal{D}}^-)\}$ , определенные в (2.58), представляются следующими выражениями:

$$a^{+\alpha} = A^{+\beta} \left( \frac{e^{-sN} - 1}{N} \right)_\beta^\alpha, \quad \bar{a}^{+\dot{\alpha}} = \bar{A}^{+\dot{\beta}} \left( \frac{e^{-s\bar{N}} - 1}{\bar{N}} \right)_{\dot{\beta}}^{\dot{\alpha}}, \quad (2.85)$$

$$f^{+2} = -\frac{1}{4} (A^+)^2 \text{tr} \left( \frac{\cosh(sN) - 1}{N^2} \right), \quad (2.86)$$

$$\bar{f}^{+2} = -\frac{1}{4} (\bar{A}^+)^2 \text{tr} \left( \frac{\cosh(s\bar{N}) - 1}{\bar{N}^2} \right),$$

$$f^{+2\dot{\alpha}\alpha} = -A^{+\beta} \bar{A}^{+\dot{\beta}} \left( \frac{e^{-sN} - 1}{N} \right)_\beta^\alpha \left( \frac{e^{-s\bar{N}} - 1}{\bar{N}} \right)_{\dot{\beta}}^{\dot{\alpha}}, \quad (2.87)$$

$$\bar{\Xi}^{+3\dot{\alpha}} = -\frac{1}{4}(A^+)^2 \bar{A}^{+\dot{\beta}} \left( \frac{e^{-s\bar{N}} - 1}{\bar{N}} \right)_{\dot{\beta}}^{\dot{\alpha}} \text{tr} \left( \frac{\cosh(sN) - 1}{N^2} \right), \quad (2.88)$$

$$\Xi^{+3\alpha} = -\frac{1}{4}(\bar{A}^+)^2 A^{+\beta} \left( \frac{e^{-sN} - 1}{N} \right)_{\beta}^{\alpha} \text{tr} \left( \frac{\cosh(s\bar{N}) - 1}{\bar{N}^2} \right), \quad (2.89)$$

$$\Omega^{+4} = -\frac{1}{16}(A^+)^2 (\bar{A}^+)^2 \text{tr} \left( \frac{\cosh(sN) - 1}{N^2} \right) \text{tr} \left( \frac{\cosh(s\bar{N}) - 1}{\bar{N}^2} \right). \quad (2.90)$$

**2.9. Итоги.** Исследована проблема построения однопетлевого низкоэнергетического эффективного действия в  $\mathcal{N} = 4$ ,  $SU(2)$  калибровочной теории. Теория формулируется в  $\mathcal{N} = 2$  гармоническом суперпространстве и обладает явной  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметрией и дополнительной скрытой  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметрией, которые на массовой оболочке замыкаются на  $\mathcal{N} = 4$  суперсимметрию. Изложен новый подход к построению эффективного действия, зависящего от всех полей  $\mathcal{N} = 4$  векторного мультиплета. Главное преимущество этого подхода состоит в том, что на всех этапах вычислений сохраняется явная  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметрия.

С точки зрения  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметрии рассматриваемое эффективное действие есть функционал суперполей  $\mathcal{N} = 2$  векторного мультиплета и гипермультиплета. Теория квантуется в рамках  $\mathcal{N} = 2$  метода фонового поля, что позволяет получить эффективное действие в явно калибровочно-инвариантной форме. Мы вычисляем эффективное действие в низкоэнергетическом приближении, считая, что  $\mathcal{N} = 2$  суперполевые напряженности  $\mathcal{W}$ ,  $\bar{\mathcal{W}}$  и суперполя гипермультиплетов  $q^{ia}$  находятся на массовой поверхности и являются постоянными в пространстве-времени. Эффективное действие задается интегралом по аналитическому подпространству гармонического суперпространства от функции, зависящей от супернапряженностей  $\mathcal{W}$ ,  $\bar{\mathcal{W}}$ , их спинорных ковариантных производных и суперполей гипермультиплета. В низкоэнергетическом пределе эта зависимость найдена точно. Также подтверждены и обоснованы изложенные в предыдущем разделе результаты работы [215], в которой однопетлевое эффективное действие в секторе гипермультиплета было найдено в терминах  $\mathcal{N} = 1$  суперполей на основе специальной фиксации калибровки и с применением некоторых эвристических рецептов восстановления явно  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметричной формы эффективного действия. В рамках метода данного раздела такая форма воспроизводится автоматически.

Разработан общий метод получения однопетлевого низкоэнергетического эффективного действия рассматриваемой теории полностью в терминах  $\mathcal{N} = 2$  гармонических суперполей. Исходной для нашего рассмотрения является бесконечная серия ковариантных гармонических суперграфов с произвольным числом внешних линий гипермультиплета. Каждый из таких суперграфов записывается как интеграл по аналитическому подпространству, и все вклады

суммируются. Результат дается выражением (2.42). Это выражение анализируется с использованием метода собственного времени и метода символов операторов. В результате мы получаем окончательное выражение (2.62) для эффективного действия.

В настоящее время остаются открытыми по крайней мере два вопроса, касающиеся гипермультиплетной зависимости эффективного действия в  $\mathcal{N} = 4$  калибровочной теории. Первая проблема состоит в построении эффективного действия, в котором присутствуют не исчезающие спинорные ковариантные производные суперполей гипермультиплета. В этом случае низкоэнергетическое эффективное действие может быть записано в виде разложения по спинорным производным супернапряженностей и суперполей гипермультиплета. В частности, зная такое разложение, можно было бы получить ответ на вопрос о том, инвариантно ли эффективное действие относительно скрытых квантовых  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметрий, подобных скрытой  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметрии классического действия. Второй проблемой является нахождение гипермультиплетной зависимости вкладов в эффективное действие от высших петель. Мы надеемся, что методы, изложенные в этом разделе, окажутся полезными при изучении обеих проблем.

### 3. ГИПЕРМУЛЬТИПЛЕТНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ ОДНОПЕТЛЕВОГО ЭФФЕКТИВНОГО ДЕЙСТВИЯ В $\mathcal{N} = 2$ СУПЕРКОНФОРМНЫХ ТЕОРИЯХ

**3.1. Введение.**  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметричные калибровочные теории общего положения в четырех измерениях суть теории  $\mathcal{N} = 2$  векторного калибровочного мультиплета, взаимодействующего с безмассовыми гипермультиплетами, которые принадлежат определенным представлениям  $R$  калибровочной группы  $G$ . Обсуждавшаяся выше  $\mathcal{N} = 4$  суперсимметричная калибровочная теория есть частный случай, отвечающий гипермультиплету в присоединенном представлении. Все эти калибровочные модели обладают только однопетлевыми расходимостями [41, 188] и могут быть конечными, а следовательно, и суперконформными при определенных ограничениях на состав представлений гипермультиплетной материи. В модели с числом  $n_\sigma$  гипермультиплетов в представлении  $R_\sigma$  калибровочной группы  $G$  условие конечности (и суперконформности) может быть записано в простой универсальной форме [188]

$$C(G) = \sum_{\sigma} n_{\sigma} T(R_{\sigma}), \quad (3.1)$$

где  $C(G)$  — квадратичный оператор Казимира для присоединенного представления и  $T(R_\sigma)$  — квадратичный оператор Казимира для представления  $R_\sigma$ . Простейшее решение уравнения (3.1) как раз соответствует  $\mathcal{N} = 4$

калибровочной теории с  $n_\sigma = 1$  и всеми полями в присоединенном представлении. Очевидно, что возможны и другие решения; например, в случае группы  $SU(N)$  с гипермультиплетом в фундаментальном представлении имеем  $T(R) = 1/2$ ,  $C(G) = N$  и  $n_\sigma = 2N$ . Большой класс  $\mathcal{N} = 2$  суперконформных моделей был построен исходя из гипотезы соответствия  $AdS/CFT$  (см., например, [189] и ссылки там; примеры таких моделей и описание структуры вакуумных состояний подробно обсуждаются, например, в работе [115]). В данном разделе изучается структура низкоэнергетического однопетлевого эффективного действия для общих  $\mathcal{N} = 2$  суперконформных теорий [218].

Эффективное действие  $\mathcal{N} = 4$  калибровочной теории и  $\mathcal{N} = 2$  суперконформных моделей в секторе  $\mathcal{N} = 2$  векторного мультиплета изучалось различными методами [41, 82, 86, 107, 115, 144]. Однако проблема гипермультиплетной зависимости эффективного действия для этих теорий оставалась в течение длительного времени открытой.

Как уже обсуждалось ранее, низкоэнергетическое эффективное действие в  $\mathcal{N} = 4$  теории, содержащее как поля  $\mathcal{N} = 2$  векторного мультиплета, так и гипермультиплетные фоновые поля, было впервые построено в работе [146] и затем детально изучалось в работе [216]. В данном разделе мы рассмотрим гипермультиплетную зависимость эффективного действия для  $\mathcal{N} = 2$  суперконформных моделей. Такие модели являются конечными, подобно  $\mathcal{N} = 4$  калибровочной теории, ввиду чего можно было бы ожидать, что гипермультиплетная зависимость соответствующих эффективных действий аналогична зависимости, найденной в  $\mathcal{N} = 4$  теории. Тем не менее это не столь очевидно. Действительно,  $\mathcal{N} = 4$  калибровочная теория является частным случаем  $\mathcal{N} = 2$  суперконформных моделей, выделенным наличием у нее дополнительной скрытой  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметрии. Как было отмечено в [146], именно эта дополнительная  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметрия играет ключевую роль при нахождении явной зависимости эффективного действия  $\mathcal{N} = 4$  калибровочной теории от полей гипермультиплета. В общем случае такие скрытые  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметрии отсутствуют, поэтому вывод эффективного действия для общих  $\mathcal{N} = 2$  суперконформных моделей в секторе гипермультиплета является интересной самостоятельной задачей.

В этом разделе найдено полное  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметричное однопетлево эффективное действие, зависящее как от фонового векторного мультиплета, так и от фоновых полей гипермультиплета в смешанной фазе, в которой скалярные поля и векторного мультиплета, и гипермультиплета имеют отличные от нуля вакуумные средние\*.

---

\*Примеры эффективного действия в хиггсовской фазе для  $\mathcal{N} = 2$  калибровочной теории даны в работе [79].

Подобно рассмотренной в предыдущем разделе  $\mathcal{N} = 4$  калибровочной теории рассматриваемые здесь  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметричные модели формулируются в гармоническом суперпространстве [51, 56]. Развита систематический метод нахождения членов с фиксированным числом производных полей в однопетлевом эффективном действии с использованием теплового ядра для некоторых дифференциальных операторов, заданных на гармоническом суперпространстве, и вычислен след теплового ядра, содержащий зависимость от  $\mathcal{N} = 2$  векторного мультиплетта и фоновых суперполей гипермультиплетта. Изучена компонентная структура ведущих квантовых поправок как на массовой поверхности по фоновым суперполям, так и вне ее. Обнаружено, что эти поправки содержат среди прочего взаимодействия типа членов Черна–Саймонса. Необходимость присутствия в эффективном действии  $\mathcal{N} = 4$  калибровочной теории таких явно масштабно-инвариантных, но  $P$ -нечетных членов, содержащих как скалярные, так и векторные поля, была отмечена в работе [193]. Гипотеза о существовании членов с высшими производными в эффективном действии  $\mathcal{N} = 2$  моделей в гармоническом суперпространстве была высказана в работе [195]. Мы покажем, что члены в эффективном действии, предложенные в этой работе, могут быть воспроизведены как результат прямых вычислений в суперсимметричной квантовой теории поля.

Раздел организован следующим образом. Пункт 3.2 содержит краткое описание формулировки  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметричных моделей в гармоническом суперпространстве и описание соответствующей структуры вакуумов. Также в этом пункте напоминаются основные элементы  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметричного метода фонового поля. В п. 3.3 обсуждается структура суперпространственного дифференциального оператора, связанного с гипермультиплетной зависимостью однопетлевого эффективного действия, построенного на данном вакууме. Пункт 3.4 посвящен непосредственным вычислениям однопетлевого низкоэнергетического эффективного действия для фонового поля, подчиненного условиям массовой оболочки (см. (3.6)). Кроме того, выводится бозонное компонентное эффективное действие, содержащее члены с четырьмя пространственно-временными производными скалярных компонентных полей гипермультиплетта. Аналогичные члены, подобные члену Черна–Саймонса, обсуждались в [195]. В п. 3.5 изучаются возможные вклады в эффективное действие от фонового гипермультиплетта вне массовой оболочки (3.6). Показано, что в бозонном секторе соответствующий вклад содержит члены типа Черна–Саймонса с тремя пространственно-временными производными, аналогичные членам, предложенным в [195]. Сводка результатов приведена в п. 3.6.

**3.2. Модель и фоновое-квантовое расщепление.** Как уже говорилось в предыдущем разделе, подход гармонического суперпространства обеспечивает явно ковариантное описание  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметричных теорий на классическом и квантовом уровнях. Главное преимущество этого подхода состоит



в том, что  $\mathcal{N} = 2$  векторный мультиплет и гипермультиплет описываются в его рамках суперполями без связей, «живущими» на аналитическом подпространстве с координатами  $\zeta^M \equiv (x_A^m, \theta^{+\alpha}, \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}^+, u_i^{\pm})$ .

$\mathcal{N} = 2$  векторный мультиплет описывается вещественным аналитическим суперполем, калибровочным препотенциалом  $V^{++} = V^{++I}(\zeta)T_I$ , принимающим значения в алгебре Ли калибровочной группы. Препотенциал  $V^{++}$  удовлетворяет условию вещественности  $\widetilde{V}^{++} = V^{++}$  по отношению к обобщенному сопряжению, произведению комплексного сопряжения и антиподального отображения на гармонической сфере  $S^2$ . Калибровочная группа действует на  $V^{++}$  как  $\delta V^{++} = -\mathcal{D}^{++}\lambda$ , где  $\lambda$  — произвольная вещественная аналитическая суперфункция. В калибровке Весса–Зумино в суперполе  $V^{++}$  остается конечное число компонентных полей  $\phi, \bar{\phi}, A_m, \lambda_{\alpha}, \bar{\lambda}_{\dot{\alpha}}, D^{(ij)}$ , отвечающих полювому содержанию  $\mathcal{N} = 2$  векторного мультиплета.

Гипермультиплет, преобразующийся по представлению  $R$  калибровочной группы, описывается аналитическим суперполем  $q^+(\zeta)$  и ему сопряженным  $\tilde{q}^+(\zeta)$  (см. определение сопряжения в [51]), принимающими значения в представлении  $R$ . Скалярные компонентные поля  $f^i(x_A)$  гипермультиплета вместе с комплексно-сопряженными полями  $\tilde{f}^i = (f_i)^{\dagger}$  образуют  $SU(2)$ -дублет. Они, так же как и спинорные физические поля, возникают как младшие компоненты в разложении  $\theta^+, \bar{\theta}^+, u_i^{\pm}$  суперполей  $q^+, \tilde{q}^+$ .

Классическое действие  $\mathcal{N} = 2$  калибровочной теории, взаимодействующей с гипермультиплетами материи, состоит из двух частей: действия «чистой»  $\mathcal{N} = 2$  калибровочной теории и действия  $N_c$  гипермультиплетов  $q^{+a}$ ,  $a = 1, \dots, 2N_c$ , в фундаментальном, присоединенном или любом другом представлении калибровочной группы. Записанное в гармоническом суперпространстве [51] полное действие имеет следующий универсальный вид:

$$S = \frac{1}{2g^2} \text{tr} \int d^8z \mathcal{W}^2 + \frac{1}{2} \int d\zeta^{(-4)} q_a^{+f} (D^{++} + igV^{++}) q_f^{+a}. \quad (3.2)$$

Здесь индекс  $f$  характеризует представление группы «ароматов», по отношению к которому гипермультиплет  $q_a^{+f}$  образует  $N_f$ -мерный вектор. Для каждого фиксированного индекса  $f$  мы используем симплектически-ковариантную запись  $\tilde{q}_a^+ \equiv q^{+a} = \Omega^{ab} q_b^+$ , где  $\Omega^{ab} = \Omega^{ba}$  является инвариантным тензором симплектической группы  $USp(2N_c)^*$ . Таким образом, суперполе  $q_f^{+b}$  является матрицей размерности  $2N_c \times N_f$ . Ковариантная производная действует на гипермультиплетные суперполя как  $\mathcal{D}^{++} q_f^{+a} = D^{++} q_f^{+a} +$

\*При фиксированном  $N_c$  глобальная подгруппа калибровочной группы должна быть подгруппой в  $USp(2N_c)$ . Отметим существование изоморфизмов  $USp(2) \sim SU(2)$ ,  $USp(4) \sim SO(5)$ .

$i\mathbf{V}_b^{++a}q_f^{+b}$ , где  $\mathbf{V}_b^{++a} = V^{++I}(\mathbf{T}_I)_b^a$ ,  $\mathbf{T}_I = \begin{pmatrix} -T_I & 0 \\ 0 & T_I \end{pmatrix}$ . Все остальные обозначения те же, что и в предыдущем разделе. По построению действие (3.2) является явно  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметричным. Для простоты на промежуточных стадиях вычислений мы полагаем константу связи  $g$  равной единице. В окончательных выражениях для эффективного действия легко восстановить явную зависимость от  $g$ .

Напомним, что суперполе напряженности  $\mathcal{W}$  выражается через неаналитическую гармоническую связность  $V^{--}$

$$\mathcal{W} = -\frac{1}{4}(\bar{D}^+)^2 V^{--}, \quad \bar{\mathcal{W}} = -\frac{1}{4}(D^+)^2 V^{--}. \quad (3.3)$$

Из этого представления следует, что  $\mathcal{W}, \bar{\mathcal{W}}$  — калибровочно-ковариантные,  $u$ -независимые ( $\mathcal{D}^{\pm\pm}\mathcal{W} = 0$ ) и ковариантно-киральные (антикиральные) ( $\bar{\mathcal{D}}_{\dot{\alpha}}^{\pm}\mathcal{W} = 0, \mathcal{D}_{\dot{\alpha}}^{\pm}\bar{\mathcal{W}} = 0$ ) суперполя, удовлетворяющие тождествам Бьянки  $(\mathcal{D}^{\pm})^2\mathcal{W} = (\bar{\mathcal{D}}^{\pm})^2\bar{\mathcal{W}}$ .

Действие (3.2) обладает суперконформной симметрией  $SU(2, 2|2)$ , явная реализация которой в гармоническом суперпространстве дана в [51]. Низкоэнергетическое эффективное действие  $\mathcal{N} = 2$  калибровочной теории, построенное на общем вакууме, включает зависимость только от безмассового  $U(1)$  векторного мультиплета и безмассовых нейтральных гипермультиплетов, поскольку заряженные векторные мультиплеты и гипермультиплеты получают массу за счет механизма Хиггса и не дают вклада в низкоэнергетическом приближении. Пространство вакуумных модулей для теорий рассматриваемого типа задается следующими соотношениями [74]:

$$[\bar{\phi}, \phi] = 0, \quad \phi f_i = 0, \quad \bar{f}^i \bar{\phi} = 0, \quad \bar{f}^{(i} T_I f^{j)} = 0. \quad (3.4)$$

Здесь  $\phi, \bar{\phi}$  — скалярные взаимосопряженные компоненты  $\mathcal{N} = 2$  векторного мультиплета и  $f_i$  — комплексные скалярные компоненты гипермультиплета.

Структура вакуума характеризуется решениями уравнений (3.4). Эти решения могут быть классифицированы в соответствии с фазами (или ветвями) рассматриваемой калибровочной модели [74]. В чисто кулоновской фазе, при  $f_i = 0, \phi \neq 0$ , ненарушенной калибровочной группой является картановская подгруппа  $U(1)^{\text{rank}(G)}$ . В чисто хиггсовской фазе, т.е. при  $f_i \neq 0$ , калибровочные симметрии полностью нарушены, поэтому безмассовые калибровочные бозоны отсутствуют в этой фазе. Хорошо известно, что условия F- и D-плоскостности, описывающие хиггсовскую фазу, могут быть сопоставлены с АДНМ-ограничениями, определяющими пространство модулей инстантонов. В смешанной фазе, т.е. на прямом произведении кулоновской и хиггсовской ветвей (когда некоторые вакуумные значения полей  $\phi, \bar{\phi}$ , а также

$f_i$  не равны нулю), калибровочная группа нарушается до  $\tilde{G} \times K$ , где  $K$  есть некоторая абелева подгруппа, и  $\text{rank}(\tilde{G}) < \text{rank}(G)$ .

Далее мы следуем [115] и накладываем специфические ограничения на фоновые суперполя  $\mathcal{N} = 2$  векторного мультиплетта и гипермультиплетта. Они выбираются таким образом, чтобы отличными от нуля были только их проекции на фиксированное направление в пространстве модулей вакуумов. В частности, их скалярные поля должны быть решениями уравнений (3.4):

$$V^{++} = \mathbf{V}^{++}(\zeta)H, \quad q^+ = \mathbf{q}^+(\zeta)\Upsilon. \quad (3.5)$$

Здесь  $H$  обозначает фиксированный генератор абелевой подалгебры Каргана, соответствующей подгруппе  $K$ , а  $\Upsilon$  — фиксированный вектор в  $R$ -пространстве представления калибровочной группы, по которому преобразуется гипермультиплет. Этот вектор выбран так, что  $H\Upsilon = 0$  и  $\Upsilon\mathbf{T}_I\Upsilon = 0$ . Уравнения (3.5) выделяют единственный  $U(1)$  векторный мультиплет и единственный гипермультиплет, который нейтрален по отношению к  $U(1)$ -калибровочной подгруппе с генератором  $H$ . Свобода в выборе  $H$  и  $\Upsilon$  может быть ограничена требованием, чтобы полевая конфигурация (3.5) была инвариантна относительно максимальной ненарушенной калибровочной подгруппы.

На древесном уровне и энергиях ниже масштаба нарушения симметрии теория описывает динамику свободных полей безмассового  $\mathcal{N} = 2$  векторного мультиплетта и гипермультиплетта, поля которых направлены вдоль определенного выделенного вектора в пространстве модулей вакуума. Низкоэнергетические распространяющиеся поля безмассовых нейтральных гипермультиплеттов и  $U(1)$ -мультиплеттов, в совокупности составляющие полный набор суперполей на массовой оболочке, обладают свойствами

$$\begin{aligned} (D^\pm)^2\mathcal{W} &= (\bar{D}^\pm)^2\bar{\mathcal{W}} = 0, \\ D^{++}q^{+a} &= (D^{--})^2q^{+a} = D^{--}q^{-a} = 0, \\ q^{-a} &= D^{--}q^{+a}, \quad D_{(\alpha,\dot{\alpha})}^-q^{-a} = 0. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Все обозначения взяты из книги [51]. Уравнения (3.6) исключают вспомогательные поля и помещают физические поля на массовую оболочку. На квантовом уровне обмен виртуальными массивными частицами порождает поправки к действию безмассовых полей.

Явно  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметричные правила Фейнмана в гармоническом суперпространстве были построены в работе [56] (см. также [41, 52]). Мы будем квантовать  $\mathcal{N} = 2$  суперкалибровочные теории в рамках  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметричного метода фонового поля [41, 52] посредством разделения полей  $V^{++}, q^{+a}$  на сумму фоновых полей  $V^{++}, q^{+a}$ , параметризованных в соответствии с (3.5), и квантовых полей  $v^{++}, Q^{+a}$ . Лагранжиан будет представлен как степенной ряд по квантовым полям. Такая процедура позволяет

находить квантовое эффективное действие для произвольной  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметричной калибровочной модели в виде, сохраняющем явную  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметрию и классическую калибровочную инвариантность. Исходные инфинитезимальные калибровочные преобразования реализуются двумя способами: во-первых, как фоновые преобразования

$$\delta V^{++} = -\mathcal{D}^{++}\lambda, \quad \delta v^{++} = i[\lambda v^{++}] \quad (3.7)$$

и, во-вторых, как квантовые преобразования

$$\delta V^{++} = 0, \quad \delta v^{++} = -\mathcal{D}^{++}\lambda - i[v^{++}, \lambda]. \quad (3.8)$$

В рамках фоново-квантового расщепления классическое действие «чистой»  $\mathcal{N} = 2$  калибровочной теории записывается в виде

$$S_{\text{SYM}}[V^{++} + v^{++}] = S_{\text{SYM}}[V^{++}] + \frac{1}{4} \int d\zeta^{(-4)} du v^{++} (D^+)^2 \mathcal{W}_\lambda - \\ - \text{tr} \int d^{12}z \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-ig)^{n-2}}{n} \int du_1 \cdots du_n \frac{v_\tau^{++}(z, u_1) \cdots v_\tau^{++}(z, u_n)}{(u_1^+ u_2^+) \cdots (u_n^+ u_1^+)}. \quad (3.9)$$

Здесь  $\mathcal{W}_\lambda$  и  $v_\tau^{++}$  обозначают  $\mathcal{W}$  и  $v^{++}$  в  $\lambda$ - и  $\tau$ -базисах соответственно. Они связаны друг с другом через «мост»  $b$ ,  $\mathcal{W}_\lambda = e^{ib} \mathcal{W} e^{-ib}$ ,  $v_\tau^{++} = e^{-ib} v^{++} e^{ib}$ . Квантовая часть действия зависит от  $V^{++}$  через зависимость  $v_\tau^{++}$  от моста, который является сложной функцией  $V^{++}$ . Действие гипермультиплета расщепляется в соответствии с представлением

$$S_H(q+Q) = S_H[q] + \int d\zeta^{(-4)} du Q_a^+ \mathcal{D}^{++} q^{+a} + \frac{1}{2} \int d\zeta^{(-4)} du q_a^+ i v^{++} q^{+a} + \\ + \frac{1}{2} \int d\zeta^{(-4)} du \left\{ Q_a^+ \mathcal{D}^{++} Q^{+a} + Q_a^+ i v^{++} q^{+a} + q_a^+ i v^{++} Q^{+a} + Q_a^+ i v^{++} Q^{+a} \right\}. \quad (3.10)$$

Члены, линейные по  $v^{++}$  и  $q^+$  в (3.9), (3.10), определяют уравнения движения. Эти члены должны быть опущены, когда мы рассматриваем эффективное действие на массовой оболочке.

Для построения эффективного действия будем следовать процедуре Фаддеева–Попова. В рамках метода фонового поля мы должны фиксировать калибровку только относительно квантовых преобразований (3.8). В соответствии с рассмотрением в [52] введем функцию фиксации калибровки

$$\mathcal{F}_\tau^{(4)} = D^{++} v_\tau^{++} = e^{-ib} (\mathcal{D}^{++} v^{++}) e^{ib} = e^{-ib} \mathcal{F}^{(4)} e^{ib},$$

на которую квантовые преобразования (3.8) действуют следующим образом:

$$\delta \mathcal{F}_\tau^{(4)} = e^{-ib} \{ \mathcal{D}^{++} (\mathcal{D}^{++} \lambda + i[v^{++}, \lambda]) \} e^{ib}. \quad (3.11)$$

По уравнению (3.11) определяется детерминант Фаддеева–Попова:

$$\Delta_{\text{FP}}[v^{++}, V^{++}] = \text{Det} [\mathcal{D}^{++} (\mathcal{D}^{++} + iv^{++})].$$

Для представления  $\Delta_{\text{FP}}[v^{++}, V^{++}]$  в виде функционального интеграла введем два вещественных аналитических фермионных духа  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$  в присоединенном представлении калибровочной группы и определим соответствующее действие духов:

$$S_{\text{FP}}[\mathbf{b}, \mathbf{c}, v^{++}, V^{++}] = \text{tr} \int d\zeta^{(-4)} du \mathbf{b} \mathcal{D}^{++} (\mathcal{D}^{++} \mathbf{c} + i[v^{++}, \mathbf{c}]). \quad (3.12)$$

В результате получим эффективное действие  $\Gamma[V^{++}, q^+]$  в виде

$$\begin{aligned} e^{i\Gamma[V^{++}, q^+]} &= e^{iS_{\text{cl}}[V^{++}, q^+]} \int \mathcal{D}v^{++} \mathcal{D}Q^+ \mathcal{D}\mathbf{b} \mathcal{D}\mathbf{c} \times \\ &\times \exp \{ i(\Delta S_{\text{SYM}}[v^{++}, V^{++}] + \Delta S_H[v^{++}, V^{++}, Q^+, q^+] + \\ &+ S_{\text{FP}}[\mathbf{b}, \mathbf{c}, v^{++}, V^{++}]) \} \delta[\mathcal{F}^{(4)} - f^{(4)}], \end{aligned} \quad (3.13)$$

где  $f^{(4)}(\zeta, u)$  — внешнее аналитическое суперполе со значениями в алгебре Ли, независящее от  $V^{++}$ , а  $\delta[\mathcal{F}^{(4)}]$  — определенная аналитическая функциональная дельта-функция. Для приведения интегрального представления для  $\Gamma[V^{++}, q^+]$  к более удобному виду усредним правую часть в уравнении (3.13) с весом

$$\Delta[V^{++}] \exp \left\{ \frac{i}{2\alpha} \text{tr} \int d^{12}z du_1 du_2 f_\tau^{(4)}(z, u_1) \frac{(u_1^- u_2^-)}{(u_1^+ u_2^+)^3} f_\tau^{(4)}(z, u_2) \right\}. \quad (3.14)$$

Здесь  $\alpha$  является произвольным калибровочным параметром. Функционал  $\Delta[V^{++}]$  находится из соотношения

$$\begin{aligned} 1 &= \Delta[V^{++}] \int \mathcal{D}f^{(4)} \times \\ &\times \exp \left\{ \frac{i}{2\alpha} \text{tr} \int d^{12}z du_1 du_2 f_\tau^{(4)}(z, u_1) \frac{(u_1^- u_2^-)}{(u_1^+ u_2^+)^3} f_\tau^{(4)}(z, u_2) \right\}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Используя стандартное тождество  $\int d\zeta^{(-4)} (D^+)^4 L(z, u) = \int d^{12}z L(z, u)$  в выражении

$$\Delta^{-1}[V^{++}] = \int \mathcal{D}f^{(4)} \times \exp \left\{ \frac{i}{2\alpha} \text{tr} \int d\zeta_1^{(-4)} d\zeta_2^{(-4)} du_1 du_2 f^{(4)}(\zeta_1, u_1) A(1, 2) f^{(4)}(\zeta_2, u_2) \right\},$$

мы можем записать  $\Delta[V^{++}]$  через специальный фоново-зависимый оператор  $A = \frac{(u_1^- u_2^-)}{(u_1^+ u_2^+)^3} (D_1^+)^4 (D_2^+)^4 \delta^{12}(z_1 - z_2)$ , который действует на пространстве аналитических суперполей, принимающих значения в алгебре Ли калибровочной группы:

$$\Delta[V^{++}] = \text{Det}^{1/2} A. \quad (3.16)$$

Чтобы вычислить  $\text{Det} A$ , представим его через функциональный интеграл по аналитическим суперполям как

$$\text{Det}^{-1} A = \int \mathcal{D}\chi^{(4)} \mathcal{D}\rho^{(4)} \times \exp \left\{ i \text{tr} \int d\zeta_1^{(-4)} du_1 d\zeta_2^{(-4)} du_2 \chi^{(4)}(1) A(1, 2) \rho^{(4)}(2) \right\}, \quad (3.17)$$

и произведем следующие замены функциональных переменных интегрирования:

$$\rho^{(4)} = (\mathcal{D}^{++})^2 \sigma, \quad \text{Det} \frac{\delta \rho^{(4)}}{\delta \sigma} = \text{Det} (\mathcal{D}^{++})^2.$$

Имеем\*

$$\begin{aligned} \text{tr} \int d\zeta_1^{(-4)} du_1 d\zeta_2^{(-4)} du_2 \chi^{(4)}(1) A(1, 2) \rho^{(4)}(2) &= \\ &= \text{tr} \int d^{12}z du_1 du_2 \chi_\tau^{(4)}(1) \frac{(u_1^- u_2^-)}{(u_1^+ u_2^+)^3} (D_2^{++})^2 \sigma_\tau(2) = \\ &= \frac{1}{2} \text{tr} \int d^{12}z du \chi_\tau^{(4)} (D^{--})^2 \sigma_\tau = -\text{tr} \int d\zeta^{(-4)} du \chi^{(4)} \square \sigma, \end{aligned} \quad (3.18)$$

---

\* Мы используем тождество  $(D_2^{++})^2 \frac{u_1^- u_2^-}{(u_1^+ u_2^+)^3} = (u_2^+ u_1^-) (D_2^{--})^2 \delta^{(3,-3)}(u_2, u_1)$ .

где

$$\widehat{\square} = -\frac{1}{2}(\mathcal{D}^+)^4(\mathcal{D}^{--})^2. \quad (3.19)$$

На основе уравнений (3.16)–(3.18) получаем

$$\Delta[V^{++}] = \text{Det}^{1/2} \widehat{\square}_{(4,0)} \text{Det}^{-1/2} (\mathcal{D}^{++})^2. \quad (3.20)$$

Теперь можно найти представление для  $\Delta[V^{++}]$  в виде следующего функционального интеграла:

$$\begin{aligned} \Delta[V^{++}] &= \text{Det}^{1/2} \widehat{\square}_{(4,0)} \times \\ &\times \int \mathcal{D}\varphi \exp \left[ -\frac{i}{2} \text{tr} \int d\zeta^{(-4)} du \mathcal{D}^{++} \varphi \mathcal{D}^{++} \varphi \right]. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Здесь переменная интегрирования  $\varphi$  является бозонным вещественным аналитическим суперполем, принимающим значения в алгебре Ли калибровочной группы. Суперполе  $\varphi$  по сути является духом Нильсена–Каллош для рассматриваемой теории. В результате получаем, что квантовая  $\mathcal{N} = 2$  калибровочная теория в подходе фонового поля определяется набором из трех гостей: двух фермионных духов  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$  и бозонного гостя  $\varphi$ . Действия гостей  $S_{\text{FP}}$  и  $S_{\text{NK}}$  задаются выражениями (3.12) и (3.21) и совпадают с известным действием  $\omega$ -гипермультиплета.

После усреднения эффективного действия с весом (3.14) получаем следующее представление для функционального интеграла:

$$\begin{aligned} e^{i\Gamma[V^{++}, q^+]} &= e^{iS_{\text{cl}}[V^{++}, q^+]} \text{Det}^{1/2} \widehat{\square}_{(4,0)} \times \\ &\times \int \mathcal{D}v^{++} \mathcal{D}Q^+ \mathcal{D}\mathbf{b} \mathcal{D}\mathbf{c} \mathcal{D}\varphi e^{iS_q[v^{++}, Q^+, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \varphi, V^{++}, q^+]}, \end{aligned} \quad (3.22)$$

где

$$\begin{aligned} S_q[v^{++}, Q^+, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \varphi, V^{++}, q^+] &= \Delta S_{\text{SYM}}[v^{++}, V^{++}] + S_{\text{GF}}[v^{++}, V^{++}] + \\ &+ \Delta S_H[v^{++}, V^{++}, Q^+, q^+] + S_{\text{FP}}[\mathbf{b}, \mathbf{c}, v^{++}, V^{++}] + S_{\text{NK}}[\varphi, V^{++}]. \end{aligned}$$

Здесь  $S_{\text{GF}}[v^{++}, V^{++}]$  представляет собой вклад члена фиксации калибровки в квантовое действие

$$\begin{aligned} S_{\text{GF}}[v^{++}, V^{++}] &= \frac{1}{2\alpha} \text{tr} \int d^{12}z du_1 du_2 \frac{u_1^- u_2^-}{(u_1^+ u_2^+)^3} \times \\ &\times [D_1^{++} v_\tau^{++}(1) D_2^{++} v_\tau^{++}(2)] = \frac{1}{2\alpha} \text{tr} \int d^{12}z du_1 du_2 \frac{v_\tau^{++}(1) v_\tau^{++}(2)}{(u_1^+ u_2^+)^2} - \\ &- \frac{1}{4\alpha} \text{tr} \int d^{12}z du v_\tau^{++} (D^{--})^2 v_\tau^{++}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Рассмотрим сумму квадратичных по  $v^{++}$  частей из  $\Delta S_{\text{SYM}}$  (3.9) и  $S_{\text{GF}}$  (3.23). Эта сумма имеет вид

$$\frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{\alpha} \right) \text{tr} \int d^{12}z du_1 du_2 \frac{v_{\tau}^{++}(1)v_{\tau}^{++}(2)}{(u_1^+ u_2^+)^2} + \frac{1}{2\alpha} \text{tr} \int d^{12}z du v^{++} \widehat{\square} v^{++},$$

где мы воспользовались определением (2.18). Для дальнейшего упрощения вычислений выберем калибровку Ферми–Фейнмана с  $\alpha = -1$ . Теперь можно записать окончательный ответ для эффективного действия  $\Gamma[V^{++}, q^+]$  в виде (3.22), в котором квантовое действие  $S_q$  выражено как

$$S_q[v^{++}, Q^+, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \varphi, V^{++}, q^+] = S_2[v^{++}, Q^+, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \varphi, V^{++}, q^+] + S_{\text{int}}[v^{++}, Q^+, \mathbf{b}, \mathbf{c}, V^{++}, q^+],$$

где

$$S_2 = -\frac{1}{2} \text{tr} \int d\zeta^{(-4)} du v^{++} \widehat{\square} v^{++} + \text{tr} \int d\zeta^{(-4)} du \mathbf{b} (\mathcal{D}^{++})^2 \mathbf{c} + \frac{1}{2} \text{tr} \int d\zeta^{(-4)} du \varphi (\mathcal{D}^{++})^2 \varphi + \frac{1}{2} \int d\zeta^{(-4)} du \{ Q_a^+ \mathcal{D}^{++} Q^{+a} + Q_a^+ i v^{++} q^{+a} + q_a^+ i v^{++} Q^{+a} \}, \quad (3.24)$$

$$S_{\text{int}} = -\text{tr} \int d^{12}z du_1 \cdots du_n \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-i)^{n-2}}{n} \frac{v_{\tau}^{++}(z, u_1) \cdots v_{\tau}^{++}(z, u_n)}{(u_1^+ u_2^+) \cdots (u_n^+ u_1^+)} - i \text{tr} \int d\zeta^{(-4)} du \mathcal{D}^{++} \mathbf{b} [v^{++}, \mathbf{c}] + \frac{1}{2} \int d\zeta^{(-4)} du Q_a^+ i v^{++} Q^{+a}. \quad (3.25)$$

Действия  $S_2$  и  $S_{\text{int}}$  полностью определяют в явно суперсимметричной и калибровочно-инвариантной форме структуру пертурбативного разложения эффективного действия  $\Gamma[V^{++}, q^+]$  в  $\mathcal{N} = 2$  калибровочной теории, взаимодействующей с гипермультиплетами.

Отметим, что в схеме квантования Фаддеева–Попова не все скрытые симметрии классического действия переносятся на квантовый случай. Согласно анализу, проведенному в работе [112], проблема сохранения некоторой явной глобальной симметрии на квантовом уровне по существу эквивалентна нахождению калибровочных условий, ковариантных относительно этих симметрий. В случае конформной симметрии таких калибровочных условий не существует, и для восстановления калибровочной орбиты любое специальное конформное преобразование должно сопровождаться зависящими от полей нелокальными калибровочными преобразованиями [112]. Инвариантность



функционального интеграла относительно комбинированных конформных и калибровочных преобразований приводит к модификации конформных тождеств Уорда для эффективного действия.

Действие  $S_2$  определяет пропагаторы, зависящие от фоновых полей [52]. В рамках метода фонового поля в  $\mathcal{N} = 2$  гармоническом суперпространстве требуются три типа ковариантных пропагаторов для материальных и калибровочных полей. Ассоциированная с  $\widehat{\square}$  функция Грина  $G^{(2,2)}(z, z')$ , которая подчиняется граничному условию Фейнмана и удовлетворяет уравнению  $\widehat{\square} G^{(2,2)}(1|2) = -\mathbf{1}\delta^{(2,2)}(1|2)$ , где  $\delta^{(2,2)}(\zeta_1, \zeta_2)$  — аналитическая дельта-функция\*, определяется выражением

$$\begin{aligned} i\langle v^{++}(z, u)v^{++}(z', u') \rangle &= G^{(2,2)}(z, u, z', u') = \\ &= -\frac{1}{\widehat{\square}}(\mathcal{D}^+)^4\{\mathbf{1}\delta^{12}(z - z')\delta^{(-2,2)}(u, u')\}. \end{aligned}$$

Иногда полезно, следуя [51], переписать  $G^{(2,2)}$  в виде, явно аналитическом по обоим аргументам:

$$\begin{aligned} G^{(2,2)}(1, 2) &= -\frac{1}{2\widehat{\square}_1\widehat{\square}_2}(\mathcal{D}_1^+)^4(\mathcal{D}_2^+)^4 \times \\ &\times \{\mathbf{1}\delta^{12}(z_1 - z_2)(\mathcal{D}_2^-)^2\delta^{(-2,2)}(u_1, u_2)\}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Это представление может быть применено при вычислении тех супердиаграмм, которые содержат произведения гармонических распределений.

Пропагатор  $Q^+$  гипермультиплета определяется действием (3.24) и имеет вид

$$\begin{aligned} i\langle Q^+(\zeta_1, u_1, \zeta_2, u_2) \rangle &= G_b^{a(1,1)}(1|2) = \\ &= -\delta_b^a \frac{(\mathcal{D}_1^+)^4(\mathcal{D}_2^+)^4}{(u_1^+ u_2^+)^3} \frac{1}{\widehat{\square}_1} \delta^{12}(z_1 - z_2). \end{aligned} \quad (3.27)$$

Нетрудно заметить, что это явно аналитическое выражение является решением уравнения  $\mathcal{D}_1^{++}G^{(1,1)} = \delta_A^{(3,1)}(1|2)$ .

Уравнение на функцию Грина для гипермультиплета второго типа, описываемого незаряженным вещественным аналитическим суперполем  $\omega(\zeta, u)$ , суть

$$(\mathcal{D}_1^{++})^2 G^{(0,0)}(1|2) = \delta_A^{(4,0)}(1|2).$$

---

\*  $\delta^{(q,4-q)}(\zeta_1, u_1|\zeta_2, u_2) = (\mathcal{D}_1^+)^4 \delta^{12}(z_1 - z_2) \delta^{(q-4,4-q)}(u_1, u_2) = (\mathcal{D}_2^+)^4 \delta^{12}(z_1 - z_2) \delta^{(q,-q)}(u_1, u_2)$ .

Соответствующее выражение для  $G^{(0,0)}$  записывается как

$$\begin{aligned} i\langle\omega(1), \omega^T(2)\rangle &= G^{(0,0)}(1|2) = \\ &= -\frac{1}{\widehat{\square}_1}(\mathcal{D}_1^+)^4(\mathcal{D}_2^+)^4 \left\{ \mathbf{1}\delta^{12}(z_1 - z_2) \frac{u_1^- u_2^-}{(u_1^+ u_2^+)^3} \right\}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Появляющийся в функциях Грина оператор  $\widehat{\square} = -(1/2)(\mathcal{D}^+)^4(\mathcal{D}^{--})^2$  переводит каждое ковариантно-аналитическое суперполе в ковариантно-аналитическое. С использованием алгебры (2.10) он может быть переписан как дифференциальный оператор второго порядка на пространстве таких суперполей [52]:

$$\begin{aligned} \widehat{\square} &= \frac{1}{2}\mathcal{D}^{\alpha\dot{\alpha}}\mathcal{D}_{\alpha\dot{\alpha}} + \frac{i}{2}(\mathcal{D}^{+\alpha}\mathcal{W})\mathcal{D}_{\alpha}^- + \frac{i}{2}(\bar{\mathcal{D}}_{\dot{\alpha}}^+\bar{\mathcal{W}})\bar{\mathcal{D}}^{-\dot{\alpha}} + \\ &+ \frac{1}{2}\{\mathcal{W}, \bar{\mathcal{W}}\} - \frac{i}{4}(\bar{\mathcal{D}}^+\bar{\mathcal{D}}^+\bar{\mathcal{W}})\mathcal{D}^{--} + \frac{i}{8}[\mathcal{D}^+, \mathcal{D}^-]\mathcal{W}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Среди важных свойств  $\widehat{\square}$  отметим сохранение им аналитичности,  $[(\mathcal{D}^+)^4, \widehat{\square}] = 0$ . Коэффициенты этого оператора зависят от фоновых суперполей  $\mathcal{W}, \bar{\mathcal{W}}$ .

В случае фона, принадлежащего абелевой подгруппе калибровочной группы и удовлетворяющего условиям массовой поверхности, имеется дополнительное ограничение:  $\mathcal{D}^{\pm}\mathcal{W} = D^{\pm}\mathcal{W}$ , и подобное же условие для  $\bar{\mathcal{W}}$  с  $\bar{D}^{\pm}$ . Таким образом, в этом случае спинорные производные становятся фоновонезависимыми. Кроме того, мы должны опустить два последних слагаемых в (3.29), так как они исчезают на массовой поверхности.

Для упрощения той части действия, которая квадратична по квантовым калибровочным суперполям, удобно разложить эти матричные суперполя по некоторому базису. Мы выбираем квантовые суперполя в однозначном соответствии с корнями алгебры Ли калибровочной группы  $G$ :  $v = \sum_{\alpha} v^{\alpha} E_{\alpha} + \sum_i v^i H_i$ . Здесь  $E_{\alpha}$  — генератор, отвечающий корню  $\alpha$  и нормированный как  $\text{tr}(E_{\alpha} E_{-\beta}) = \delta_{\alpha, -\beta}$ , а  $H_i$  суть генераторы подалгебры Картана ранга ( $G$ ), удовлетворяющие коммутационным соотношениям  $[H_i, E_{\alpha}] = \alpha(H_i)E_{\alpha}$ . Используя эти обозначения, можно переписать действие (3.24) в терминах коэффициентов разложения по  $v$  в этом базисе. Такая форма записи эффективного действия очень удобна при вычислениях и будет использоваться в п. 3.4 в различных случаях.

После выключения калибровочного фонового суперполя функции Грина (3.26), (3.27) и (3.28) переходят в свободные пропагаторы, построенные в работах [51, 56].

**3.3. Структура однопетлевого эффективного действия.** Рассмотрим петлевое разложение эффективного действия в рамках метода фонового поля. Эффективное действие определяется вакуумными диаграммами (т. е. диаграммами без внешних линий) с зависимыми от фонового поля пропагаторами и вершинами. Формальное выражение однопетлевого действия  $\Gamma[V^{++}, q^+]$  в рассматриваемой теории записывается как функциональный интеграл (3.22), а полное квадратичное действие квантовых полей определено в (3.24).

Выражения (3.22), (3.24) полностью определяют явно суперсимметричную и калибровочно-инвариантную структуру теории возмущений для вычисления эффективного действия  $\mathcal{N} = 2$  калибровочной теории с гипермультиплетами. Для пропагаторов квантового векторного мультиплета  $v^{++}$  и гипермультиплетов  $Q^{+a}$  используем выражения (3.26) и (3.27) соответственно. Вершины могут быть определены непосредственно из выражения (3.25). Легко видеть, что госты не связаны с фоновым гипермультиплетом и, следовательно, не дают вклада в гипермультиплетно-зависимую часть однопетлевого эффективного действия. В векторном секторе  $\mathcal{N} = 2$  калибровочной теории, когда гипермультиплет материи отынтегрирован, однопетлевое эффективное действие  $\Gamma[V^{++}]$  принимает вид

$$\Gamma[V^{++}] = \frac{i}{2} \text{Tr}_{(2,2)} \ln \widehat{\square} - \frac{i}{2} \text{Tr}_{(4,0)} \ln \widehat{\square} - \frac{i}{2} \text{Tr}_{ad} \ln (\mathcal{D}^{++})^2 + \\ + i \text{Tr}_{R_q} \ln \mathcal{D}^{++} + \frac{i}{2} \text{Tr}_{R_\omega} \ln (\mathcal{D}^{++})^2.$$

В настоящее время голоморфная и неоломорфная части низкоэнергетического эффективного действия  $\mathcal{N} = 2$  и  $\mathcal{N} = 4$  суперсимметричных калибровочных теорий в кулоновской фазе, в том числе действие Гейзенберга–Эйлера в присутствии ковариантно-постоянного векторного мультиплета, полностью известны (см., например, [82, 86]). Общая структура низкоэнергетического эффективного действия в таких теориях задается выражением [107, 144]

$$\Gamma = S_{cl} + \int d^{12}z = \left\{ c \ln \mathcal{W} \ln \bar{\mathcal{W}} + \int d^{12}z \ln \mathcal{W} \Lambda \left( \frac{D^4 \ln \mathcal{W}}{\mathcal{W}^2} \right) + \text{c. c.} + \right. \\ \left. + \int d^{12}z \Upsilon \left( \frac{\bar{D}^4 \ln \bar{\mathcal{W}}}{\mathcal{W}^2}, \frac{D^4 \ln \mathcal{W}}{\mathcal{W}^2} \right) \right\} + \dots,$$

где  $\Lambda$  и  $\Upsilon$  — голоморфная и вещественная аналитическая функции (анти)киральных суперконформных инвариантов. Известно, что  $c$ -член на компонентном уровне порождает квантовые поправки с четырьмя производными, включающие знаменитый член  $F^4$  (см., например, [82]). Гипермультиплетно-зависимая часть эффективного действия в  $\mathcal{N} = 4$  калибровочной теории в главном порядке также известна [146, 215, 216].

Для дальнейшего анализа эффективного действия удобно диагонализировать действие квантовых полей  $S^{(2)}$ , сдвинув переменные гипермультиплета в функциональном интеграле как

$$\begin{aligned} Q^{+a} &= \xi^{+a} + i \int d\zeta_2^{(-4)} q^{+b}(2) v^{++}(2) G_b^{a(1,1)}(1|2), \\ Q_a^+ &= \xi_a^+ - i \int d\zeta_2^{(-4)} G_a^{b(1,1)}(1|2) v^{++}(2) q_b^+(2), \end{aligned} \quad (3.30)$$

где  $\xi^{+a}$ ,  $\xi_a^+$  — новые независимые переменные функционального интегрирования. Очевидно, что якобиан замены (3.30) равен единице. Здесь  $G_b^{a(1,1)}(1|2)$  — фоновозависимый пропагатор (3.27) для суперполей  $Q^{+a}$ ,  $Q_b^+$ . В терминах нового набора квантовых полей для гипермультиплетно-зависимой части квадратичного действия получается выражение

$$\begin{aligned} S_H^{(2)} &= -\frac{1}{2} \int d\zeta^{(-4)} \xi^{+a} \mathcal{D}^{++} \xi_a^+ - \\ &\quad - \frac{1}{2} \int d\zeta_1^{(-4)} d\zeta_2^{(-4)} q^{+a}(1) v^{++}(1) G_a^{b(1,1)}(1|2) v^{++}(2) q_b^+(2). \end{aligned}$$

Тогда часть квадратичного действия, содержащая векторный мультиплет, удлиняется на следующее нелокальное выражение:

$$\begin{aligned} S_v^{(2)} &= -\frac{1}{2} \text{tr} \int d\zeta_1^{(-4)} v_1^{++} \times \\ &\quad \times \int d\zeta_2^{(-4)} \left[ \widehat{\square} \delta_A^{(2,2)}(1|2) + q^{+a}(1) G_a^{b(1,1)}(1|2) q_b^+(2) \right] v_2^{++}. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Выражение (3.31), записанное как аналитический нелокальный суперфункционал, будет отправной точкой для наших вычислений однопетлевого эффективного действия в секторе гипермультиплета. Наша цель в этом и следующем пунктах состоит в том, чтобы найти ведущие низкоэнергетические вклады в эффективное действие для медленно меняющихся суперполей гипермультиплета, когда всеми производными фонового гипермультиплета можно пренебречь. Мы покажем, что в этом случае нелокальные взаимодействия могут быть локализованы в точке.

Используя соотношение  $v_2^{++} = \int d\zeta_3^{(-4)} \delta_A^{(2,2)}(2|3) v_3^{++}$ , мы можем переписать разложение для  $S_v^{(2)}$  (3.31) в виде

$$\begin{aligned} S_v^{(2)} &= -\frac{1}{2} \text{tr} \int d\zeta_1^{(-4)} v_1^{++} \int d\zeta_2^{(-4)} \left[ \widehat{\square} \delta_A^{(2,2)}(1|2) + \right. \\ &\quad \left. + \int d\zeta_3^{(-4)} q^{+a}(1) G_a^{b(1,1)}(1|3) q_b^+(3) \delta_A^{(2,2)}(3|2) \right] v_2^{++}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

После этого воспользуемся явным выражением для функции Грина (3.27) и соотношением, позволяющим представить  $(\mathcal{D}_1^+)^4(\mathcal{D}_2^+)^4$  в виде полинома по степеням  $(u_1^+ u_2^+)$  [107]

$$(\mathcal{D}_1^+)^4(\mathcal{D}_2^+)^4 = (\mathcal{D}_1^+)^4 \left[ (\mathcal{D}_1^-)^4 (u_1^+ u_2^+)^4 - \frac{i}{2} \Delta_1^{--} (u_1^+ u_2^+)^3 (u_1^- u_2^-) - \widehat{\square}_1 (u_1^+ u_2^+)^2 (u_1^- u_2^-)^2 \right], \quad (3.33)$$

где

$$\Delta^{--} = \mathcal{D}^{\alpha\dot{\alpha}} \mathcal{D}_{\alpha}^- \bar{\mathcal{D}}_{\dot{\alpha}}^- + \frac{1}{2} \mathcal{W}(\mathcal{D}^-)^2 + \frac{1}{2} \bar{\mathcal{W}}(\bar{\mathcal{D}}^-)^2 + (\mathcal{D}^- \mathcal{W}) \mathcal{D}^- + (\bar{\mathcal{D}}^- \bar{\mathcal{W}}) \bar{\mathcal{D}}^-. \quad (3.34)$$

Поскольку  $G^{(1,1)}(1, 2) = -G^{(1,1)}(2, 1)$ , нелокальный член в (3.32) принимает вид

$$\int d\zeta_3^{(-4)} q^{+a}(1) (\mathcal{D}_3^+)^4 \left[ (\mathcal{D}_3^-)^4 (u_3^+ u_1^+) \frac{1}{\widehat{\square}_3} \times \right. \\ \left. \times -\frac{i}{2} \Delta_3^{--} (u_3^- u_1^-) \frac{1}{\widehat{\square}_3} - \frac{(u_3^- u_1^-)^2}{(u_3^+ u_1^+)} \right] \delta^{12}(1|3) q_a^+(3) \delta_A^{(2,2)}(3|2).$$

Большие скобки содержат три члена. Легко видеть, что первые два члена включают производные, которые в эффективном действии породят производные суперполей гипермультиплетов. Так как мы интересуемся исключительно вкладом без производных, указанные члены могут быть просто опущены. В результате нам достаточно рассмотреть только третий член в скобках.

Теперь применим соотношение  $\int d\zeta_3^{(-4)} (\mathcal{D}_3^+)^4 = \int d^{12} z_3 du_3$ , позволяющее проинтегрировать по  $z_3$ , и в результате получим

$$- \int du_3 q^{+a}(1) \frac{(u_3^- u_1^-)^2}{(u_3^+ u_1^+)} q_a^+(u_3, z_1) \delta_A^{(2,2)}(u_3, z_1|2).$$

Далее явно выделим гармоническую зависимость гипермультиплета на массовой оболочке, записав  $q^{+a}(3) = u_{3i}^+ q^{ia}$ , и перейдем к пределу совпадающих гармонических аргументов  $u_1 = u_3$ , воспользовавшись гармонической частью дельта-функции  $\delta_A^{(2,2)}(u_3, z_1|2)$ . После этого получим, что

$\int du_3 \frac{u_{3i}^+}{u_3^+ u_1^+} = -u_{1i}^-$ . В результате рассматриваемый член принимает вид

$$q^{+a}(1) q_a^-(1) \delta_A^{(2,2)}(1|2).$$

Выражение  $q^{+a}(1) q_a^-(1) = q^{ia} q_{ia}$  будет в дальнейшем трактоваться как слабо меняющаяся суперполе, и всеми его производными мы будем пренебрегать.

Именно такой суперполевым аргумент был получен в работе [216] после суммирования гармонических супердиаграмм.

Таким образом, в ведущем низкоэнергетическом приближении второе слагаемое в (3.32) становится локальным. В результате этого оператор в действии  $S_v^{(2)}$ , определяющий эффективный фоново-ковариантный пропагатор квантового суперполя векторного мультиплета  $v^{++}$  (мы разлагаем суперполе  $v^{++}$  по базису генераторов как  $v^{++} = v_I^{++} T_I$  и далее работаем только с суперполевыми компонентами  $v_I^{++}$ ), принимает вид

$$\left[ \widehat{\square}_{IJ} + q^{+a}(z_1, u_1) \{T_I, T_J\} q_a^-(z_1, u_1) \right] \delta_A^{(2,2)}(1|2), \quad (3.35)$$

где

$$\widehat{\square}_{IJ} = \text{tr} \left\{ T_{(I} \square T_{J)} + \frac{i}{2} T_{(I} [\mathcal{D}^{+\alpha} \mathcal{W}, T_{J)}] \mathcal{D}_{\alpha}^- + \right. \\ \left. + \frac{i}{2} T_{(I} [\bar{\mathcal{D}}_{\dot{\alpha}}^+ \bar{\mathcal{W}}, T_{J)}] \bar{\mathcal{D}}^{-\dot{\alpha}} + T_{(I} [\mathcal{W}, [\bar{\mathcal{W}}, T_{J)}]] \right\}.$$

Здесь  $\square = (1/2) \mathcal{D}^{\alpha\dot{\alpha}} \mathcal{D}_{\alpha\dot{\alpha}}$  — ковариантный даламбертиан.

Таким образом, с использованием гармонической формулировки  $\mathcal{N} = 2$  калибровочной теории во взаимодействии с гипермультиплетом и техники нелокальных сдвигов мы показали, что за счет модификации действия вся зависимость от фонового гипермультиплета оказалась сосредоточенной в секторе квантового векторного мультиплета. Поэтому однопетлевое эффективное действие определяется выражением

$$\Gamma^{(1)}[V^{++}, q^+] = \Gamma_v^{(1)}[V^{++}, q^+] + \tilde{\Gamma}^{(1)}[V^{++}]. \quad (3.36)$$

Первый член в (3.36) возникает за счет квантового векторного мультиплета  $v_I^{++}$

$$\Gamma_v^{(1)}[V^{++}, q^+] = \frac{i}{2} \text{Tr} \ln (\widehat{\square}_{IJ} + q^{+a} \{T_I, T_J\} q_a^-). \quad (3.37)$$

Второй член в (3.36) обусловлен вкладом гостов и квантового гипермультиплета  $\xi_a^+$ , и он не зависит от фонового гипермультиплета. В результате вся зависимость однопетлевого эффективного действия от фонового суперполя гипермультиплета заключена в операторе

$$\widehat{\square}_{IJ} + q^{+a} \{T_I, T_J\} q_a^-, \quad (3.38)$$

действующем на  $v_I^{++}$ . Она имеет вид массовой матрицы векторного мультиплета

$$(\mathcal{M}_v^2)_{IJ} = \text{tr} \left\{ [T_I, \mathcal{W}] [\bar{\mathcal{W}}, T_J] + (I \leftrightarrow J) \right\} + q^{+a} \{T_I, T_J\} q_a^-, \quad (3.39)$$

если  $q^+$  принадлежит фундаментальному представлению, и матрицы

$$(\mathcal{M}_v^2)_{IJ} = \text{tr} \{ [T_I, \mathcal{W}][\bar{\mathcal{W}}, T_J] + [q^{+a}, T_I][T_J, q_a^-] \} + (I \leftrightarrow J) \quad (3.40)$$

в том случае, когда  $q^+$  преобразуется по произвольному матричному представлению.

Итак, зависимость от гипермультиплета полностью переносится в сектор квантовых суперполей  $v^{++}$  и оказывается сосредоточенной в фоново-ковариантном операторе (3.38). Представления (3.36), (3.37) служат отправной точкой для вычисления однопетлевого эффективного действия. Обратим внимание на то, что мы не накладывали никаких ограничений на пространственно-временную зависимость суперполя гипермультиплета, кроме свойств, вытекающих из условий массовой оболочки (3.6).

До сих пор в нашем построении структура калибровочной группы, реализованной на суперполях  $\mathcal{W}, q_a^+$ , была совершенно произвольной. Начиная с этого момента фоновые суперполя будут выбираться вдоль заданного направления в пространстве модулей вакуума так, чтобы их скалярные поля являлись решениями уравнений (3.4). Пусть фоновый векторный мультиплет и гипермультиплет имеют вид (3.5), где  $H$  является фиксированным генератором подалгебры Картана. Это находится в согласии с предположением, что калибровочная группа  $G$  нарушена до подгруппы  $\tilde{G} \times K$ , где  $K$  — абелева подгруппа Картана с алгеброй, к которой принадлежит генератор  $H$ . В этом случае существует единственная вакуумная комбинация  $\mathcal{W}\bar{\mathcal{W}}$  для  $\mathcal{N} = 2$  фонового векторного мультиплета и единственная вакуумная комбинация  $q^{+a}q_a^-$  для фонового гипермультиплета\*. Тогда оператор, действующий на квантовые суперполя векторного мультиплета, определенные в (3.38), принимает универсальный вид

$$\square + \frac{i}{2}\alpha(H)(\mathcal{D}^+\mathcal{W}\mathcal{D}^- + \bar{\mathcal{D}}^+\bar{\mathcal{W}}\bar{\mathcal{D}}^-) + \alpha^2(H)\mathcal{W}\bar{\mathcal{W}} + q^{+a}q_a^-Z. \quad (3.41)$$

Здесь  $\square$  — ковариантный даламбертиан, комбинация  $q^{+a}q_a^-$  ( $a = 1, 2$ ) уже не имеет матричных индексов (поскольку выбрано фиксированное направление в пространстве модулей), а матрица  $Z$  имеет индексы  $I, J$ , обусловленные выражением  $\{T_I, T_J\}$  после фиксации фонового гипермультиплета, как в (3.5). Все матрицы в (3.41), содержащие  $\mathcal{W}, \bar{\mathcal{W}}$ , диагональны по индексам генераторов подгруппы  $\tilde{G}$ .

Нас будут интересовать только гипермультиплетно-зависимые слагаемые в однопетлевом эффективном действии (3.37). Поясним, как такие члены

---

\*Если фоновые поля соответствуют нескольким картановским генераторам  $H_i$ , то эффективное действие будет суммой вкладов по индексу  $i$ , такой, что каждый вклад имеет структуру, соответствующую описанному выше случаю. Поэтому без нарушения общности мы можем ограничиться случаем с одним фиксированным генератором  $H$ .

могут в принципе возникнуть в (3.37). Массовая матрица имеет следующую структуру:  $\mathcal{M}_v^{(2)} = \alpha^2(H)\mathcal{W}\bar{\mathcal{W}} \cdot Y + q^{+a}q_a^- \cdot Z$ . У матрицы  $Y$  имеется  $n(H)$  собственных векторов, отвечающих собственному значению 1. Матрица в скобках в (3.41) имеет те же собственные векторы, что и  $Y$ . Касательно матрицы  $Z$  допустимы два варианта.

1. Матрица  $Z$  имеет  $n(\Upsilon)$  собственных векторов, общих с собственными векторами матрицы  $Y$  ( $n(\Upsilon) \leq n(H)$ ), с собственными значениями  $r(\Upsilon)$ . Тогда эффективное действие есть сумма по различным значениям  $r(\Upsilon)$ . Поэтому, не теряя общности, мы можем считать, что существует только одно собственное значение  $r(\Upsilon)$  с числом  $n(\Upsilon)$  собственных векторов, которые одновременно являются собственными векторами матрицы  $Y$ . Следовательно, гипермультиплетная зависимость эффективного действия в рассматриваемом случае определяется выражением

$$\Gamma_v^{(1)}[V^{++}, q^+] = \frac{i}{2}n(\Upsilon) \text{Tr} \ln \left[ \square + \frac{i}{2}\alpha(H)(\mathcal{D}^+\mathcal{W}\mathcal{D}^- + \bar{\mathcal{D}}^+\bar{\mathcal{W}}\bar{\mathcal{D}}^-) + \alpha^2(H)\mathcal{W}\bar{\mathcal{W}} + r(\Upsilon)q^{+a}q_a^- \right]. \quad (3.42)$$

Здесь символом  $\text{Tr}$  обозначен функциональный след операторов, действующих на аналитические суперполя с соответствующим  $U(1)$ -зарядом\*. Те собственные векторы матрицы  $Y$ , которые не совпадают с собственными векторами матрицы  $Z$ , не дают вклада в гипермультиплетную зависимость эффективного действия.

2. Матрицы  $Y$  и  $Z$  не имеют общих собственных векторов. В этом случае гипермультиплетно-зависимая часть эффективного действия исчезает.

Таким образом, гипермультиплетно-зависимое эффективное действие определяется выражением (3.42). В следующем пункте мы рассмотрим процедуру конкретного вычисления этого выражения.

**3.4. Вычисление однопетлевого эффективного действия.** Выражение (3.42) является основой для анализа гипермультиплетной зависимости эффективного действия. Это выражение будет переписано в форме, которая позволит вычислить его с помощью суперполевого обобщения метода собственного времени Фока–Швингера [2] ( $\mathcal{N} = 1$  суперполевого метода собственного времени развит в работах [39, 40, 211, 213]). Мы будем следовать общему подходу, разработанному в работе [216], где с использованием этого

\*В частности, если  $\mathcal{A}^{(p, 4-p)}(\zeta_1, \zeta_2)$  есть ядро оператора, действующего на пространстве ковариантно-аналитических суперполей с зарядом  $p$ , то

$$\text{Tr} \mathcal{A}^{(p, 4-p)} = \text{tr} \int d\zeta^{(-4)} du \mathcal{A}^{(p, 4-p)}(\zeta, \zeta),$$

где через «tr» обозначен след по групповым индексам.



метода анализировалась гипермультиплетная зависимость эффективного действия  $\mathcal{N} = 4$  теории Янга–Миллса.

В рамках представления собственного времени Фока–Швингера эффективное действие (3.42) записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \Gamma_v^{(1)}[V^{++}, q^+] &= \frac{i}{2} n(\Upsilon) \int d\zeta^{(-4)} du \times \\ &\times \int_0^\infty \frac{ds}{s} \exp \left[ -s \left( \square + \frac{i}{2} \alpha(H) (\mathcal{D}^+ \mathcal{W} \mathcal{D}^- + \bar{\mathcal{D}}^+ \bar{\mathcal{W}} \bar{\mathcal{D}}^-) + \mathcal{M}_v^2 \right) \right] \times \\ &\times (\mathcal{D}^+)^4 [\delta^{12}(z - z') \delta^{(-2,2)}(u, u')] \Big|_{z=z', u=u'} = \int_0^\infty \frac{ds}{s} \text{Tr} K(s), \quad (3.43) \end{aligned}$$

где  $\mathcal{M}_v^2 = \alpha^2(H) \mathcal{W} \bar{\mathcal{W}} + r(\Upsilon) q^+ a q_a^-$ . Здесь  $K(s)$  — суперполево теплое ядро оператора. Символ  $\text{Tr}$  означает функциональный след в аналитическом подпространстве гармонического суперпространства,  $\text{Tr} K(s) = \text{tr} \int d\zeta^{(-4)} K(\zeta, \zeta|s)$ , где  $\text{tr}$  — обозначение для следа по дискретным индексам. Представление эффективного действия в виде (3.43) позволяет нам осуществить непосредственное вычисление эффективного действия как разложения по степеням ковариантных спинорных производных абелевых суперполей напряженности  $\mathcal{W}, \bar{\mathcal{W}}$ . Лидирующие низкоэнергетические члены в этом разложении соответствуют фоновым калибровочным суперполям, которые постоянны в пространстве-времени,  $D_\alpha^- D_\beta^+ \mathcal{W} = \text{const}$ ,  $\bar{D}_\alpha^- \bar{D}_\beta^+ \bar{\mathcal{W}} = \text{const}$ , и фоновому гипермультиплету на массовой оболочке. Кроме того, мы предполагаем, что гипермультиплет является медленно меняющейся функцией на суперпространстве, и при вычислении суперполевого эффективного действия пренебрегаем любыми производными гипермультиплета. Это, однако, не приведет к нехватке необходимого числа пространственно-временных производных в компонентном эффективном лагранжиане. Грассманова мера в интеграле по гармоническому суперпространству  $d^4\theta^+ d^4\theta^-$  порождает четыре пространственно-временные производные в компонентном разложении суперполевого лагранжиана. Поэтому сделанные выше предположения обеспечивают получение компонентного эффективного лагранжиана, включающего четыре пространственно-временных производных скалярной компоненты гипермультиплета. Возможные вклады в гипермультиплетную зависимость эффективного действия от членов вне массовой оболочки будут обсуждаться в следующем пункте.

Построение эффективного действия (3.43) основано на вычислении суперполевого теплового ядра  $K(s)$ . Ведущей идеей (даже с учетом свойств неаналитического подынтегрального выражения) является желание оставаться в аналитическом подпространстве на всех этапах вычислений, избегая искус-

ственного преобразования аналитического интеграла в интеграл по полному суперпространству, в котором, как правило, подынтегральные выражения содержат плохо определенные произведения гармонических распределений. Интегрирование с аналитической мерой может рассматриваться как «проектор», автоматически удаляющий все гармонические особенности. Кроме того, поскольку ковариантный даламбертиан не содержит эффективно действующей  $\mathcal{D}^+$ , при обработке теплового ядра мы никогда не получим производную  $\mathcal{D}^+q^-$ , но только  $\mathcal{D}^-q^-$ , которая обращается в нуль на массовой оболочке. При таком способе вычислений квантовые поправки с высшими производными должны появляться в виде

$$\int d\zeta^{(-4)} (D^+)^4 \mathcal{H}(\mathcal{W}, \bar{\mathcal{W}}, q^+, q^-). \quad (3.44)$$

В случае ковариантно-постоянного гипермультиплетта,  $\mathcal{D}_m q^+ = 0$ , и векторного мультиплетта,  $\mathcal{D}_m \mathcal{W} = \mathcal{D}_m \bar{\mathcal{W}} = 0$ , тепловое ядро может быть вычислено точно. Для этой цели удобно разделить вклады от «диамагнитной» и «парамагнитной» частей оператора  $\hat{\square}$ . Мы следуем здесь общей схеме вычислений в работе [216], принимая во внимание только те аспекты, которые существенны для рассматриваемой теории. В качестве первого шага мы применяем формулу Бейкера–Кемпбелла–Хаусдорфа, чтобы записать  $K(s)$  в виде произведения нескольких операторных экспонент\*,

$$\begin{aligned} K(s) &= \exp\left(-s\left\{A^+D^- + \bar{A}^+\bar{D}^- + \frac{1}{2}D^{\alpha\dot{\alpha}}\mathcal{D}_{\alpha\dot{\alpha}} + \mathcal{M}_v^2\right\}\right) = \\ &= \exp\{-f_{\alpha\dot{\alpha}}(s)\mathcal{D}^{\alpha\dot{\alpha}}\} \exp\left\{-s\frac{1}{2}D^{\alpha\dot{\alpha}}\mathcal{D}_{\alpha\dot{\alpha}}\right\} \times \\ &\quad \times \exp\{-\Omega(s)\} \exp\{-s(A^+D^- + \bar{A}^+\bar{D}^-)\}, \end{aligned} \quad (3.45)$$

с некоторыми неизвестными коэффициентами в правой части. Для этих коэффициентов можно вывести систему дифференциальных уравнений, из которой они находятся. Уравнение для функции  $f^{\dot{\alpha}\alpha}(s)$  имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}f_{\alpha\dot{\alpha}}(s) &= -f_{\beta\dot{\beta}}F_{\dot{\alpha}\alpha}^{\dot{\beta}\beta} - A^{+\beta}(D_{\beta}^-f_{\alpha\dot{\alpha}}) - \bar{A}^{+\dot{\beta}}(\bar{D}_{\dot{\beta}}^-f_{\alpha\dot{\alpha}}) + \\ &\quad + A_{\beta}^+ \bar{A}_{\dot{\beta}}^- \left(\int_0^s d\tau e^{\tau F}\right)_{\dot{\alpha}\alpha}^{\dot{\beta}\beta} + \bar{A}_{\dot{\beta}}^+ A_{\beta}^- \left(\int_0^s d\tau e^{\tau F}\right)_{\dot{\alpha}\alpha}^{\dot{\beta}\beta}. \end{aligned}$$

\*Мы используем обозначения

$$A^{+\alpha} = \frac{i}{2}\alpha(H)(\mathcal{D}^{+\alpha}\mathcal{W}), \quad \bar{A}^{+\dot{\alpha}} = -\frac{i}{2}\alpha(H)(\bar{\mathcal{D}}^{+\dot{\alpha}}\bar{\mathcal{W}}), \quad \mathcal{N}_{\alpha}^{\beta} = D_{\alpha}^-A^{+\beta}, \quad \bar{\mathcal{N}}_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}} = \bar{D}_{\dot{\alpha}}^- \bar{A}^{+\dot{\beta}}.$$

Можно показать, что решение этого уравнения записывается в виде

$$f_{\alpha\dot{\alpha}} = -A_{\delta}^{+} \mathcal{F}_{\alpha\dot{\alpha}}^{\delta\dot{\delta}} \bar{A}_{\dot{\delta}}^{-} - \bar{A}_{\dot{\delta}}^{+} \bar{\mathcal{F}}_{\alpha\dot{\alpha}}^{\delta\dot{\delta}} A_{\delta}^{-}, \quad (3.46)$$

где выражения для функций  $\mathcal{F}(\mathcal{N}, \bar{\mathcal{N}}, s)$ ,  $\bar{\mathcal{F}}(\mathcal{N}, \bar{\mathcal{N}}, s)$  даны в [216]. Аналогичное уравнение для функции  $\Omega$  запишется как

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \Omega(s) - \mathcal{M}_v^2 = & -A^{+\alpha} (D_{\alpha}^{-} \Omega) - \bar{A}^{+\dot{\alpha}} (\bar{D}_{\dot{\alpha}}^{-} \Omega) + A_{\alpha}^{+} f^{\alpha\dot{\alpha}} \bar{A}_{\dot{\alpha}}^{-} + \bar{A}_{\dot{\alpha}}^{+} f^{\dot{\alpha}\alpha} A_{\alpha}^{-} - \\ & - \frac{1}{2} A_{\beta}^{+} \bar{A}_{\dot{\beta}}^{-} \left( \int_0^s d\tau e^{-\tau F} \right)^{\dot{\beta}\beta} F_{\dot{\rho}\rho}^{\dot{\alpha}\alpha} f^{\dot{\rho}\rho} - \frac{1}{2} \bar{A}_{\dot{\beta}}^{+} A_{\beta}^{-} \left( \int_0^s d\tau e^{-\tau F} \right)^{\dot{\beta}\beta} F_{\dot{\rho}\rho}^{\dot{\alpha}\alpha} f^{\dot{\rho}\rho}. \end{aligned}$$

Решение этого уравнения дается выражением

$$\begin{aligned} \Omega(s) = & s \mathcal{M}_v^2 + A^{+\alpha} \Omega_{\alpha}^{-}(s) + \bar{A}^{+\dot{\alpha}} \bar{\Omega}_{\dot{\alpha}}^{-}(s) + (A^{+})^2 \Psi^{(-2)}(s) + \\ & + (\bar{A}^{+})^2 \bar{\Psi}^{(-2)}(s) + A^{+\alpha} \bar{A}_{\dot{\alpha}}^{+} \Psi_{\alpha}^{\dot{\alpha}(-2)}(s). \end{aligned} \quad (3.47)$$

Отметим, что это решение является полиномом конечного порядка по степеням грасмановых величин  $A^{\pm}, \bar{A}^{\pm}$ . Все коэффициенты приведены в работе [216]. Теперь необходимо преобразовать последний экспоненциал в (3.45) к виду

$$\begin{aligned} \exp \{ -s(A^{+} \mathcal{D}^{-} + \bar{A}^{+} \bar{\mathcal{D}}^{-}) \} = & 1 + a^{+\alpha} \mathcal{D}_{\alpha}^{-} + \bar{a}^{+\dot{\alpha}} \bar{\mathcal{D}}_{\dot{\alpha}}^{-} + \\ & + f^{+2} (\mathcal{D}^{-})^2 + \bar{f}^{+2} (\bar{\mathcal{D}}^{-})^2 + f^{+2\dot{\alpha}\alpha} \mathcal{D}_{\alpha}^{-} \bar{\mathcal{D}}_{\dot{\alpha}}^{-} + \bar{\Xi}^{+3\dot{\alpha}} \bar{\mathcal{D}}_{\dot{\alpha}}^{-} (\mathcal{D}^{-})^2 + \\ & + \Xi^{+3\alpha} \mathcal{D}_{\alpha}^{-} (\bar{\mathcal{D}}^{-})^2 + \Omega^{+4} (\mathcal{D}^{-})^2 (\bar{\mathcal{D}}^{-})^2. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Коэффициенты этого разложения были найдены точно. Они приведены в работе [216].

Для дальнейшего анализа важно заметить, что

$$\Omega^{+4} = -\frac{1}{16} (A^{+})^2 (\bar{A}^{+})^2 \operatorname{tr} \left( \frac{\cosh(s\mathcal{N}) - 1}{\mathcal{N}^2} \right) \operatorname{tr} \left( \frac{\cosh(s\bar{\mathcal{N}}) - 1}{\bar{\mathcal{N}}^2} \right). \quad (3.49)$$

Можно показать, что только этот последний член в разложении экспоненты выживает в пределе совпадающих аргументов  $\theta^{+} = \theta^{+'}$ , к которому необходимо перейти в (3.43) с учетом свойства  $(D^{-})^4 (D^{+})^4 \delta^8(\theta - \theta')|_{\theta=\theta'} = 1$ . Все другие члены, с числом производных  $(D^{-})$  меньше четырех, исчезают в указанном пределе. В результате в качестве коэффициента получаем выражение, содержащее максимально допустимую степень грасманово-нечетных

величин  $A^+$ ,  $\bar{A}^+$ . Любая другая зависимость от  $A^+$ ,  $\bar{A}^+$  в операторной экспоненте (3.45) не дает вклада, и мы получаем выражение для эффективного действия в виде

$$\Gamma_v^{(1)}[V^{++}, q^+] = \frac{i}{2}n(\Upsilon) \int d\zeta^{(-4)} e^{-s\mathcal{M}_v^2} K_{\text{Sch}}(s)(A^+)^2(\bar{A}^+)^2 \times \text{tr} \left( \frac{\cosh(s\mathcal{N}) - 1}{\mathcal{N}^2} \right) \text{tr} \left( \frac{\cosh(s\bar{\mathcal{N}}) - 1}{\bar{\mathcal{N}}^2} \right), \quad (3.50)$$

где  $K_{\text{Sch}}(s)$  есть суперполевоe обобщение ядра Швингера [2, 144]. Последнее определяется следующим образом:

$$K_{\text{Sch}}(x, x', s) = \exp \left( -\frac{s}{2} \mathcal{D}^{\dot{\alpha}\alpha} \mathcal{D}_{\dot{\alpha}\alpha} \right) \{1\delta^4(x - x')\}.$$

Вычисление этого теплового ядра и его функционального следа производится стандартным образом (детали см., например, в работах [107, 211, 213]). Мы запишем только окончательный результат:

$$K_{\text{Sch}}(s) = \frac{i}{(4\pi s)^2} \frac{s^2(\mathcal{N}^2 - \bar{\mathcal{N}}^2)}{\cosh(s\mathcal{N}) - \cosh(s\bar{\mathcal{N}})}.$$

Здесь  $\mathcal{N}$  выражается через  $\mathcal{N} = \sqrt{(-1/2)D^4\mathcal{W}^2}$  и в конечном счете в терминах двух инвариантов абелева векторного поля  $\mathcal{F} = (1/4)F^{mn}F_{mn}$  и  $\mathcal{G} = (1/4)^*F^{mn}F_{mn}$  как  $\mathcal{N} = \sqrt{2(\mathcal{F} + i\mathcal{G})}$ .

Выражение (3.50) представляет собой окончательный ответ для гипермультиплетно-зависимого низкоэнергетического однопетлевого эффективного действия типа Гейзенберга–Эйлера. Напомним, что вся зависимость от фонового гипермультиплета сконцентрирована в  $\mathcal{M}_v^2$ . Явное выражение для эффективного действия имеет вид

$$\Gamma^{(1)}[V^{++}, q^+] = \frac{1}{(4\pi)^2}n(\Upsilon) \int d\zeta^{(-4)} du \times \int_0^\infty \frac{ds}{s^3} e^{-s(\alpha^2(H)\mathcal{W}\bar{\mathcal{W}} + r(\Upsilon)q^+q^-)} \frac{\alpha^4(H)}{16} (D^+\mathcal{W})^2(\bar{D}^+\bar{\mathcal{W}})^2 \times \frac{s^2(\mathcal{N}^2 - \bar{\mathcal{N}}^2)}{\cosh(s\mathcal{N}) - \cosh(s\bar{\mathcal{N}})} \frac{\cosh(s\mathcal{N}) - 1}{\mathcal{N}^2} \frac{\cosh(s\bar{\mathcal{N}}) - 1}{\bar{\mathcal{N}}^2}. \quad (3.51)$$

Подынтегральное выражение в (3.51) может быть разложено в ряд по степеням  $s^2\mathcal{N}^2$ ,  $s^2\bar{\mathcal{N}}^2$ . После замены переменной собственного времени  $s$  на  $s'\mathcal{W}\bar{\mathcal{W}}$  получаем разложение по степеням  $s'^2 \frac{\mathcal{N}^2}{(\mathcal{W}\bar{\mathcal{W}})^2}$  и им сопряженным.

Поскольку подынтегральное выражение в (3.51) содержит  $(D^+\mathcal{W})^2(\bar{D}^+\bar{\mathcal{W}})^2$  в виде фактора, в каждом члене разложения величины  $\mathcal{N}^2, \bar{\mathcal{N}}^2$  по суперконформным инвариантам  $\Psi^2$  и  $\bar{\Psi}^2$  [144] можно заменить эти инварианты выражением  $\bar{\Psi}^2 = \frac{1}{\mathcal{W}^2} D^4 \ln \mathcal{W} = \frac{1}{2\mathcal{W}^2} \left\{ \frac{\mathcal{N}_\alpha^\beta \mathcal{N}_\beta^\alpha}{\mathcal{W}^2} + \mathcal{O}(D^+\mathcal{W}) \right\}$  и ему сопряженным. После этого можно показать, что каждый член разложения записывается в виде интеграла по полной мере  $\mathcal{N} = 2$  суперпространства.

Интересно и поучительно вычислить ведущую часть эффективного действия (3.51). Анализ выражения (3.51) (подробности в работах [213, 215, 216]) дает

$$\Gamma_{\text{lead}}^{(1)} = \frac{1}{(4\pi)^2} n(\Upsilon) \int d\zeta^{(-4)} du \frac{1}{16} \frac{D^+\mathcal{W}D^+\bar{\mathcal{W}}}{\mathcal{W}^2} \frac{\bar{D}^+\bar{\mathcal{W}}\bar{D}^+\bar{\mathcal{W}}}{\bar{\mathcal{W}}^2} \frac{1}{(1-X)^2},$$

где

$$X = \frac{-q^{+a}q_a^-}{\mathcal{W}\bar{\mathcal{W}}} \frac{r(\Upsilon)}{\alpha^2(H)}. \quad (3.52)$$

В качестве следующего шага мы перепишем это выражение в виде

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(4\pi)^2} \int d\zeta^{(-4)} du \frac{1}{16} \left\{ D^{+2} \ln \mathcal{W} \bar{D}^{+2} \ln \bar{\mathcal{W}} + \right. \\ & \left. + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2(k+1)} D^{+2} \frac{1}{\mathcal{W}^k} \bar{D}^{+2} \frac{1}{\bar{\mathcal{W}}^k} \left( -\frac{r(\Upsilon)q^{+a}q_a^-}{\alpha^2(H)} \right)^k \right\} = \\ & = \frac{1}{(4\pi)^2} \int d^{12}z du \left\{ \ln \mathcal{W} \ln \bar{\mathcal{W}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2(k+1)} X^k \right\}. \quad (3.53) \end{aligned}$$

Полученный результат совпадает (с точностью до группового фактора  $\Upsilon$ ) с выражениями, ранее полученными в [146, 216]:

$$\Gamma_{\text{lead}}^{(1)} = \frac{n(\Upsilon)}{(4\pi)^2} \int du d^{12}z \left[ \ln \mathcal{W} \ln \bar{\mathcal{W}} + \text{Li}_2(X) + \ln(1-X) - \frac{1}{X} \ln(1-X) \right]. \quad (3.54)$$

Здесь  $\text{Li}_2(X)$  есть дилогарифм Эйлера. Следующие за лидирующей поправкой к (3.54) могут быть также вычислены. Замечательное свойство низкоэнергетического эффективного действия (3.54) состоит в появлении фактора  $r(\Upsilon)/\alpha(H)$  в аргументе  $X$ . Этот фактор обусловлен вакуумной структурой рассматриваемой модели и зависит от специфических особенностей нарушения симметрии. Форма гипермультиплетной зависимости эффективного действия, аналогичная (3.54), была первоначально найдена в работе [146] для случая  $\mathcal{N} = 4$  теории Янга–Милса и затем изучалась различными методами в работах [147, 216].

В  $\mathcal{N} = 4$  теории Янга–Миллса как  $\mathcal{N} = 2$  векторный мультиплет, так и гипермультиплет принадлежат присоединенному представлению калибровочной группы, и поэтому вышеуказанный коэффициент в  $X$  равен 1. В результате приходим к заключению, что гипермультиплетно-зависимое низкоэнергетическое эффективное действие имеет универсальную форму (3.54) для всех  $\mathcal{N} = 2$  суперконформных моделей, с той лишь разницей, что та или иная  $\mathcal{N} = 2$  суперконформная модель отличается от других коэффициентом  $r(\Upsilon)/\alpha(H)$  в величине  $X$  (3.52). То же самое утверждение относится и к общему выражению (3.50). Различные модели различаются еще и коэффициентами  $n(\Upsilon)$  перед интегралами (3.50) и (3.54). Показанная универсальность эффективного действия  $\mathcal{N} = 2$  суперконформных калибровочных теорий представляет собой примечательный результат, демонстрирующий реальную силу гармонического подхода в квантовой области.

Теперь обсудим некоторые избранные члены в лагранжиане компонентных полей эффективного действия (3.54). В работе [146] компонентная структура эффективного действия (3.54) для  $\mathcal{N} = 4$  калибровочной теории изучалась в бозонном секторе для постоянных фоновых полей  $F_{mn}, \phi, \bar{\phi}, f^i, \bar{f}_i$ . Однако, как было отмечено выше, суперполево эффективное действие (3.54) позволяет найти члены в эффективном действии вплоть до пространственно-временных производных четвертого порядка на компонентных полях. Наша цель состоит в нахождении таких членов в секторе скалярных полей гипермультиплета. Для этого мы опускаем все компоненты фонового суперполя, кроме скаляров  $\phi, \bar{\phi}$  в  $\mathcal{N} = 2$  векторном мультиплете и скаляров  $f, \bar{f}$  в гипермультиплете, и интегрируем по  $d^4\theta^+ d^4\theta^- = (D^-)^4(D^+)^4$ . Мы действуем этими производными на ряды под интегралом в (3.53). Для получения старших пространственно-временных производных скалярных компонент гипермультиплета следует бросить ровно две спинорные производные на каждое суперполе гипермультиплета. После некоторых преобразований это приводит к следующим членам с четырьмя пространственно-временными производными на  $q^\pm$  в компонентном разложении эффективного действия (3.53):

$$\begin{aligned} \Gamma_{\text{lead}}^{(1)} = & \int d^4x du \frac{n(\Upsilon)}{(4\pi)^2} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{16} \frac{k-1}{k(k+1)} \frac{X^{k-2}}{(\mathcal{W}\bar{\mathcal{W}})^2} \times \\ & \times \left\{ -\bar{D}^{+\dot{\alpha}} D^{+\alpha} q_b^- \bar{D}_{\dot{\alpha}}^+ D_{\beta}^- q^{+(b} \bar{D}^{-\dot{\beta}} D^{-\beta} q^{+a)} \bar{D}_{\dot{\beta}}^- D_{\alpha}^+ q_a^- + \right. \\ & + \frac{1}{2} \bar{D}^{+\dot{\alpha}} D^{+\alpha} q_b^- \bar{D}^{-\dot{\beta}} D^{-\beta} q^{+b} \bar{D}_{\dot{\beta}}^- D_{\beta}^- q^{+a} \bar{D}_{\dot{\alpha}}^+ D_{\alpha}^+ q_a^- + \\ & \left. + \frac{1}{2} \bar{D}^{-\dot{\beta}} D^{+\alpha} q_b^- \bar{D}^{+\dot{\alpha}} D^{-\beta} q^{+b} \bar{D}_{\dot{\alpha}}^+ D_{\beta}^- q^{+a} \bar{D}_{\dot{\beta}}^- D_{\alpha}^+ q_a^- \right\} |_{\theta=0}. \end{aligned}$$

Непосредственное вычисление\* каждого слагаемого в этом выражении показывает, что среди многих членов с четырьмя производными имеется интересный член специального типа

$$\Gamma_{\text{lead}}^{(1)} = \frac{-1}{8\pi^2} n(\Upsilon) \left( \frac{r(\Upsilon)}{\alpha(H)} \right)^2 \left[ \frac{X_0 - 2}{X_0^3} \ln(1 - X_0) - \frac{2}{X_0^2} \right] \times \\ \times \int du d^4x \frac{1}{(\phi\bar{\phi})^2} i\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho} \partial_\mu \tilde{q}^+ \partial_\nu q^+ \partial_\lambda \tilde{q}^- \partial_\rho q^-. \quad (3.55)$$

Первый член в разложении этого выражения по переменной  $X_0 = \frac{r(\Upsilon)\bar{f}^i f_i}{\alpha^2 \phi\bar{\phi}}$  имеет вид

$$\Gamma_{\text{lead}}^{(1)} = -\frac{n(\Upsilon)}{48\pi^2} \left( \frac{r(\Upsilon)}{\alpha(H)} \right)^2 \int d^4x \frac{1}{(\phi\bar{\phi})^2} i\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho} \times \\ \times \left( \partial_\mu \bar{f}^i \partial_\nu f_i \partial_\lambda \bar{f}^j \partial_\rho f_j - \partial_\mu \bar{f}^i \partial_\nu \bar{f}_i \partial_\lambda f^j \partial_\rho f_j \right). \quad (3.56)$$

Здесь мы опустили все слагаемые, содержащие выражения типа  $\partial^\mu f \partial_\mu f$ . Выражение (3.55), (3.56) подобно действию Черна–Саймонса для многокомпонентного комплексного скалярного поля. Возможность появления членов такого типа в эффективном действии обсуждалась в работах [193, 195] в контексте  $\mathcal{N} = 4, 2$  суперсимметричных калибровочных моделей и для  $d = 6, \mathcal{N} = (2, 0)$  суперконформных моделей. В данном случае выражение (3.55) возникло как результат непосредственного вычисления в суперсимметричной квантовой теории поля.

В качестве примера приведем значения  $\alpha(H)$ ,  $r(\Upsilon)$  и  $n(\Upsilon)$  для моделей, рассмотренных в [115].

1.  $\mathcal{N} = 4$  теория Янга–Миллса с калибровочными группами  $SU(N)$ ,  $Sp(2N)$  и  $SO(N)$ . Здесь гипермультиплетный сектор включает один гипермультиплет в присоединенном представлении калибровочной группы. Фон выбирается так, чтобы калибровочные группы нарушались согласно вариантам  $SU(N) \rightarrow SU(N-1) \times U(1)$ ,  $Sp(2N) \rightarrow Sp(2N-2) \times U(1)$  и  $SO(N) \rightarrow SO(N-2) \times U(1)$ . Все фоновые поля выстроены вдоль элемента  $H = U(1)$  подалгебры Каргана (с  $\Upsilon = H$ ). Массовая матрица выражается как

$$(\mathcal{M}_v^2)_{IJ} = (\mathcal{W}\bar{\mathcal{W}} + \mathbf{q}^+ \mathbf{q}_a^-) (\alpha(H))^2 \delta_{I,J},$$

\*Здесь мы используем соотношения  $\bar{D}^+ D^+ q^- = \bar{D}^+ D^+ D^{--} q^+ = -\bar{D}^+ D^- q^+ = -2i\sigma^\mu \partial_\mu q^+$ , так же как  $\bar{D}^- D^- q^+ = 2i\sigma^\mu \partial_\mu q^-$ ,  $\bar{D}^+ D^- q^+ = 2i\sigma^\mu \partial_\mu q^+$ ,  $\bar{D}^- D^+ q^- = -2i\sigma^\mu \partial_\mu q^-$ . Дополнительно используется правило  $\int du u_i^+ u_j^+ u_k^- u_l^- = (1/6)(\epsilon_{ik}\epsilon_{jl} + \epsilon_{il}\epsilon_{jk})$ .

и следы в уравнении (3.36) приводят к коэффициенту  $n(\Upsilon)$ , равному числу корней с  $\alpha(H) \neq 0$ , т. е. числу ненарушенных генераторов,

$$n(\Upsilon) = \begin{cases} 2(N-1) & \text{для } SU(N), \\ 4N-2 & \text{для } Sp(2N) \text{ и } SO(2N+1), \\ 4N-1 & \text{для } SO(2N). \end{cases}$$

Из вида массовой матрицы следует, что в этом случае  $r(\Upsilon) = \alpha(H)$ .

2. Эта модель была предложена в [189]. В качестве калибровочной группы  $USp(2N) = Sp(2N, \mathbb{C}) \cap U(\neq \mathbb{N})$ . Модель содержит четыре гипермультиплет  $q_F^+$  в фундаментальном представлении и один гипермультиплет  $q_A^+$  в антисимметричном бесследовом представлении группы  $USp(2N)$ . Фоновые поля  $\mathcal{W}$ ,  $q_F^+$ ,  $q_A^+$  выбираются как решения уравнения (3.4) с максимальной ненарушенной калибровочной подгруппой  $USp(2N-2) \times U(1)$ :

$$\mathcal{W} = \frac{\mathcal{W}}{\sqrt{2}} \text{diag} \left( \underbrace{1, 0, \dots, 0}_{N-1}, -1, \underbrace{0, \dots, 0}_{N-1} \right), \quad q_F^+ = 0,$$

$$(q_A^+)^\beta_\alpha = \frac{\mathbf{q}^+}{\sqrt{2N(N-1)}} \text{diag} \left( N-1, \underbrace{-1, \dots, -1}_{N-1}, N-1, \underbrace{-1, \dots, -1}_{N-1} \right).$$

Массовая матрица  $(M_v^2)_{IJ}$  была построена в [115]. Она имеет  $n(\Upsilon) = 4(N-1)$  собственных векторов с собственными значениями  $M_v^2 = \mathcal{W}\mathcal{W} + \frac{N}{N-1} \bar{\mathbf{q}}^j \mathbf{q}_j$ .

3.  $\mathcal{N} = 2$  суперконформная модель с простейшим «колчаном» калибровочных теорий [189]. Калибровочная группа есть произведение  $SU(N)_L \times SU(N)_R$ . Модель содержит два гипермультиплет  $q^+$ ,  $\tilde{q}^+$  в бифундаментальных представлениях  $(\mathbf{N}, \bar{\mathbf{N}})$  и  $(\bar{\mathbf{N}}, \mathbf{N})$  калибровочной группы. В работе [115] были построены решения уравнения (3.4) с неисчезающими компонентами гипермультиплет, которые задают плоские направления в безмассовых  $\mathcal{N} = 2$  калибровочных теориях. Пространство модулей вакуума для этих моделей включает следующие конфигурации:

$$\mathcal{W}_L = \mathcal{W}_R = \frac{\mathcal{W}}{N\sqrt{2(N-1)}} \text{diag} \left( N-1, \underbrace{-1, \dots, -1}_{N-1} \right),$$

$$q^+ = \tilde{q}^+ = \frac{\mathbf{q}^+}{\sqrt{2}} \text{diag} (1, 0, \dots, 0).$$

Эти конфигурации оставляют в качестве ненарушенной калибровочную группу  $SU(N-1) \times SU(N-1)$  вместе с диагональной  $U(1)$ -подгруппой



в  $SU(N)_L \times SU(N)_R$ , соотнесенной с выбором  $\mathcal{W}$ . На таком фоне массовая матрица имеет собственное значение  $\mathcal{M}_v^2 = \frac{1}{N-1} \bar{\mathcal{W}}\mathcal{W} + \frac{1}{N} \mathbf{q}^{+a} \mathbf{q}_a^-$  и, соответственно,  $n(\Upsilon) = 4(N-1)$ .

**3.5. Гипермультиплетно-зависимый вклад в эффективное действие вне массовой оболочки.** Все предыдущее рассмотрение, а также работы по гипермультиплетной зависимости эффективного действия [146, 216] основывались на предположении, что гипермультиплет  $q^+$  удовлетворяет условиям массовой оболочки (3.6) и ограничению  $q^+ = D^{++}q^-$ . Как было отмечено в [146], этих условий достаточно, чтобы получить все ведущие низкоэнергетические вклады в эффективное действие. Здесь мы ослабим эти ограничения и изучим некоторые из возможных лидирующих вкладов с минимальным числом пространственно-временных производных в компонентном эффективном действии.



Рис. 2. Однопетлевая супердиаграмма

Рассмотрим супердиаграмму на рис. 2 с двумя внешними концами гипермультиплета и со всеми пропагаторами, зависящими от фонового  $\mathcal{N} = 2$  векторного мультиплета. Здесь волнистая линия обозначает  $\mathcal{N} = 2$  калибровочный пропагатор суперполя, а сплошные внешние и внутренние линии — фоновые суперполя гипермультиплета и пропагатор квантового гипермультиплета соответственно. Для простоты будем считать, что фоновое поле абелево, и опустим все групповые факторы. Соответствующий вклад в эффективное действие выглядит как

$$i\Gamma_2 = \int d\zeta_1^{(-4)} d\zeta_2^{(-4)} du_1 du_2 \left[ \frac{(D_1^+)^4 (D_2^+)^4}{(u_1^+ u_2^+)^3} \frac{1}{\widehat{\square}_1} \delta^{12}(1|2) \right] \times \\ \times \left[ \frac{(D_2^+)^4 (D_1^+)^4}{\widehat{\square}_2 \widehat{\square}_1} \delta^{12}(2|1) (D_1^{--})^2 \delta^{(-2,2)}(u_2, u_1) \right] \tilde{q}^+(z_1, u_1) q^+(z_2, u_2). \quad (3.57)$$

Как обычно, выделим фактор  $(D^+)^4$  из пропагатора векторного мультиплета для восстановления полной  $\mathcal{N} = 2$  меры интегрирования. Далее мы стягиваем петлю в точку, перекидывая операторы  $\widehat{\square}$  и  $(D^+)^4$  с первой  $\delta$ -функции на другую, и снимаем одно интегрирование. В процессе этих манипуляций оператор  $\widehat{\square}$  не действует на  $q^+$ , потому что мы интересуемся вкладом, порождающими членами с минимальным числом пространственно-временных производных в компонентной форме эффективного действия. В результате получим

$$i\Gamma_2 = \int \frac{d\zeta_1^{(-4)} du_1 du_2}{(u_1^+ u_2^+)^3} \frac{(D_1^+)^4 (D_2^+)^4 (D_1^+)^4}{\widehat{\square}_2 \widehat{\square}_1^2} \times \\ \times \delta^{12}(z - z') (D_1^{--})^2 \delta^{(-2,2)}(u_2, u_1) \tilde{q}^+(z_1, u_1) q^+(z_1, u_2).$$

Далее два раза воспользуемся соотношением (3.33), позволяющим представить  $(\mathcal{D}_1^+)^4(\mathcal{D}_2^+)^4$  в виде многочлена по степеням  $(u_1^+u_2^+)$ . Теперь после перемножения оператора  $(\mathcal{D}_1^+)^4(\mathcal{D}_2^+)^4(\mathcal{D}_1^+)^4$  и распределения  $1/(u_1^+u_2^+)^3$  получим многочлен от величины  $(u_1^+u_2^+)$ , содержащий степени этой величины от пятой до первой.

Первая степень в точности соответствует вкладу того типа, который мы рассмотрели в предыдущем разделе, поскольку одну из производных в  $(D^{--})^2$  можно использовать для преобразования  $(u_1^+u_2^+)$  в  $(u_1^+u_2^-)|_{u_1=u_2} = 1$  в пределе совпадающих точек. Другая  $D^{--}$  преобразует  $q^+$  в  $q^-$ . Все это уже было сделано в п. 3.4. Поэтому, сохраняя только первый порядок по  $(u_1^+u_2^+)$ , мы получаем вклад комбинации  $q^+q^-$  без производных. Как отмечалось в п. 3.4, для получения такого вклада достаточно рассмотреть гипермультиплет, удовлетворяющий условиям массовой оболочки (3.6).

Здесь мы рассмотрим новый вклад в эффективное действие от члена  $(u_1^+u_2^+)^2$ :

$$\frac{(\mathcal{D}_1^+)^4(\mathcal{D}_2^+)^4(\mathcal{D}_1^+)^4}{(u_1^+u_2^+)^3} = \dots + (u_1^+u_2^+)^2(u_1^-u_2^+)(u_2^-u_1^+)(\mathcal{D}_1^+)^4 \times \\ \times \left[ \frac{i}{2} \widehat{\square}_1 \Delta_2^{--}(u_2^+u_1^-) - \frac{i}{2} \Delta_1^{--} \widehat{\square}_2(u_1^+u_2^-) \right] + \dots \quad (3.58)$$

Многоточие обозначает члены со степенями величины  $(u_1^+u_2^+)$ , отличными от 2. Можно показать, что в пределе совпадающих точек такие члены исчезают. Теперь, перебрасывая  $(D^{--})^2$  на  $(u_1^+u_2^+)^2$ , получим выражение

$$i\Gamma_2 = i \int d\zeta^{(-4)} du (\mathcal{D}^+)^4 \frac{1}{\widehat{\square}} \left( \underbrace{\widehat{\square} \Delta^{--}}_{\Gamma_2(1)} - \underbrace{\Delta^{--} \widehat{\square}}_{\Gamma_2(2)} \right) \times \\ \times \delta^{12}(z-z')|_{z=z'} \tilde{q}^+(z,u) q^+(z,u), \quad (3.59)$$

где  $\Delta^{--}$  определена в (3.34).

Рассмотрим каждый из двух отмеченных вкладов отдельно. Используем представление

$$\frac{1}{\widehat{\square}} \Delta^{--} \delta^{12}(z-z')| = \int ds s e^{s\widehat{\square}} \Delta^{--} \delta^{12}(z-z')|, \quad (3.60)$$

где  $|$  означает предел совпадения  $z = z'$ . Теперь мы можем использовать разложение по производным теплового ядра. Главная цель при этом состоит в том, чтобы собрать максимально возможное число факторов  $\mathcal{D}^+$ ,  $\mathcal{D}^-$ , действующих на  $(\theta^+ - \theta'^+)^4(\theta^- - \theta'^-)^4$ , и сохранить минимальный порядок по  $s$  в интеграле собственного времени. Высокие порядки по  $s$  генерируют высокие

степени спинорных производных в эффективном действии. Для построения необходимого оператора  $(D^-)^4$  мы в (3.60) разлагаем экспоненту, содержащую  $D^+WD^- + \text{с. с.}$ , до второго порядка, после чего действуем на слагаемое  $(1/2)\mathcal{W}(\mathcal{D}^-)^2 + \text{с. с.}$ , входящее в  $\Delta^{--}$ . Представление (3.60) позволяет записать ведущий вклад в  $\Gamma_2(1)$  следующим образом:

$$\Gamma_2(1) = - \int d^{12}z du \int_0^\infty ds s \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-sp^2} e^{s(\mathcal{W}\bar{\mathcal{W}}-\varepsilon)} \frac{s^2}{32} \bar{\mathcal{W}}(D^{+\alpha}\mathcal{W}D_\alpha^+\mathcal{W}) \times \\ \times (D^-)^2(\bar{D}^-)^2\delta^8(\theta-\theta')|\tilde{q}^+q^+ + \text{с. с.}$$

После тривиального интегрирования по  $p$  и  $s$  этот вклад сводится к выражению

$$\Gamma_2(1) = \frac{i}{32\pi^2} \int d^{12}z du \frac{1}{\mathcal{W}} \frac{D^+\mathcal{W}D^+\mathcal{W}}{\mathcal{W}^2} \tilde{q}^+(z,u)q^+(z,u)(\mathcal{D}^-)^4\delta^8(\theta-\theta')| + \\ + \frac{i}{32\pi^2} \int d^{12}z du \frac{1}{\bar{\mathcal{W}}} \frac{\bar{D}^+\bar{\mathcal{W}}\bar{D}^+\bar{\mathcal{W}}}{\bar{\mathcal{W}}^2} \tilde{q}^+(z,u)q^+(z,u)(\mathcal{D}^-)^4\delta^8(\theta-\theta')|. \quad (3.61)$$

Теперь выполним те же манипуляции со вторым подчеркнутым вкладом  $\Gamma_2(2)$ , удерживая тот же порядок по  $s$  и  $D^-$ ,  $\bar{D}^-$ , как и в выражении (3.61):

$$\Gamma_2(2) = - \int d^{12}z du \tilde{q}^+q^+ \int_0^\infty \frac{ds s^2}{2} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-sp^2+i sp\mathcal{D}^+\bar{\square}} \times \\ \times (ip^{\alpha\dot{\alpha}}\mathcal{D}_\alpha^-\bar{D}_{\dot{\alpha}}^- + \Delta^{--}) \left( -\frac{1}{2}p^{\alpha\dot{\alpha}}p_{\alpha\dot{\alpha}} + ip^{\alpha\dot{\alpha}}\mathcal{D}_{\alpha\dot{\alpha}} + \bar{\square} \right) \delta^8(\theta-\theta')| = \\ = - \int d^{12}z du \tilde{q}^+q^+ \int_0^\infty \frac{ds s^2}{2} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-sp^2+s\mathcal{W}\bar{\mathcal{W}}-\varepsilon s} \times \\ \times \frac{1}{2}\bar{\mathcal{W}}(\bar{D}^-)^2\frac{1}{4}(D^+\mathcal{W})(D^+\mathcal{W}) \left( -\frac{s^2}{4}p^{\alpha\dot{\alpha}}p_{\alpha\dot{\alpha}} + s \right) \times \\ \times \frac{1}{2}(D^-)^2\delta^8(\theta-\theta')| + (\mathcal{W} \leftrightarrow \bar{\mathcal{W}}).$$

Интегрирование по импульсу в этом выражении\* дает  $\frac{i}{(4\pi s)^2} \left\{ -\frac{s^2}{4} \frac{4}{s} + s \right\} = 0$ . После этого мы обнаруживаем, что ведущий член вида (3.61) отсутствует

---

\*  $\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-sp^2} = \frac{i}{(4\pi s)^2}, \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} p_{\alpha\dot{\alpha}}p^{\beta\dot{\beta}} e^{-sp^2} = \frac{i}{(4\pi s)^2} \frac{1}{s} \delta_{\alpha\dot{\alpha}}^{\beta\dot{\beta}}.$

в  $\Gamma_2(2)$ . Теперь нетрудно показать, что вклад (3.61) можно переписать как (мы используем  $\int d^2\theta^- = \bar{D}^{+2}$ )

$$-\frac{i}{32\pi^2} \int d^4x d^4\theta^+ d^2\theta^- du (\bar{D}^+)^2 (D^+)^2 (\ln \mathcal{W}) \times \\ \times \frac{1}{\mathcal{W}} \tilde{q}^+(z, u) q^+(z, u) (\mathcal{D}^-)^4 \delta^8(\theta - \theta') | + \text{с. с.}$$

Ненулевой результат возникает тогда, когда все  $D^+$ -факторы действуют только на спинорную дельта-функцию. Таким образом, рассматриваемый вклад записывается как интеграл по мере  $d^4x du d^4\theta^+ d^2\theta^-$ , которая выглядит как  $3/4$  полной  $\mathcal{N} = 2$  меры интегрирования в гармоническом суперпространстве  $d^4x du d^4\theta^+ d^4\theta^-$ .

Таким образом, гипермультиплетно-зависимая часть эффективного действия содержит член

$$\Gamma_2 = -\frac{i}{32\pi^2} \int d^4x du d^4\theta^+ d^2\theta^- \frac{1}{\mathcal{W}} \ln(\mathcal{W}) \tilde{q}^+ q^+ |_{\bar{\theta}=0} - \\ - \frac{i}{32\pi^2} \int d^4x du d^4\theta^+ d^2\bar{\theta}^- \frac{1}{\bar{\mathcal{W}}} \ln(\bar{\mathcal{W}}) \tilde{q}^+ q^+ |_{\theta=0}. \quad (3.62)$$

Наличие такого члена в эффективном действии для  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметричных моделей было предположено в работе [195]. Здесь мы показали, как член такой структуры может быть получен в рамках суперсимметричной квантовой теории поля.

Интересно и полезно найти компонентную форму нестандартного суперполевого действия (3.62). Здесь мы рассмотрим чисто бозонный сектор в (3.62). После интегрирования по антикоммутирующим переменным, которое можно эквивалентно заменить действием суперковариантных производных при  $\theta = 0$ , получим

$$\Gamma_2 = \frac{i}{4\pi^2} \int d^4x du \frac{1}{\mathcal{W}\bar{\mathcal{W}}} D_\beta^+ \bar{D}_{\dot{\alpha}}^- \tilde{q}^+ \bar{D}^{-\dot{\alpha}} D_\alpha^- q^+ D^{+\beta} D^{-\alpha} \mathcal{W} |_{\theta, \bar{\theta}=0} + \\ + \frac{i}{4\pi^2} \int d^4x du \frac{1}{\mathcal{W}\bar{\mathcal{W}}} \bar{D}_\beta^+ D^{-\alpha} \tilde{q}^+ D_\alpha^- \bar{D}_{\dot{\alpha}}^- q^+ \bar{D}^{+\dot{\beta}} \bar{D}^{-\dot{\alpha}} \bar{\mathcal{W}} |_{\theta, \bar{\theta}=0}.$$

Поскольку  $D_\alpha^- \bar{D}_{\dot{\alpha}}^- q^+ = -2i\partial_{\alpha\dot{\alpha}} f^-$ ,  $\bar{D}_\beta^+ D_\beta^- \tilde{q}^+ = 2i\partial_{\beta\dot{\beta}} \tilde{f}^+$ , получаем

$$\Gamma_2 = \frac{i}{\pi^2} \int d^4x du \frac{1}{\phi\bar{\phi}} \partial_{\beta\dot{\alpha}} \tilde{f}^+ \partial_{\alpha\dot{\alpha}} f^- F^{\beta\alpha} + \\ + \frac{i}{\pi^2} \int d^4x du \frac{1}{\phi\bar{\phi}} \partial_{\dot{\beta}}^\alpha \tilde{f}^+ \partial_{\alpha\dot{\alpha}} f^- \bar{F}^{\dot{\beta}\dot{\alpha}}, \quad (3.63)$$

где  $F^{\alpha\beta}, \bar{F}^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}$  — спинорные компоненты абелевой напряженности  $F_{ab}$ . Теперь мы конвертируем спинорные индексы в векторные. В результате получим вклад в эффективное действие, подобный члену Черна–Саймонса и содержащий три пространственно-временные производные

$$\Gamma_2 = -\frac{1}{2\pi^2} \int d^4x \frac{1}{\phi\bar{\phi}} \varepsilon^{mnab} \partial_m \bar{f}^i \partial_n f_i F_{ab}. \quad (3.64)$$

Это выражение является простейшим вкладом в гипермультиплетно-зависимое эффективное действие вне массовой оболочки (3.6) для фонового гипермультиплета. Конечно, существуют и другие, более сложные вклады, включающие производные гипермультиплета. Они могут быть вычислены по той же схеме, которая привела к (3.62). Здесь мы всего лишь продемонстрировали процедуру, которая позволяет получать вклады в эффективное действие в виде интеграла по  $3/4$  полного  $\mathcal{N} = 2$  гармонического суперпространства.

**3.6. Итоги.** Исследовано однопетлевое низкоэнергетическое эффективное действие в  $\mathcal{N} = 2$  суперконформных моделях. Эти модели сформулированы в гармоническом суперпространстве, и их полевое содержание соответствует условию ультрафиолетовой конечности теории (3.1). Эффективное действие зависит от фонового абелева  $\mathcal{N} = 2$  суперполя векторного мультиплета и фонового суперполя гипермультиплета, которые удовлетворяют специальным ограничениям (3.4), (3.5), определяющим структуру вакуума моделей. Эффективное действие вычисляется на основе  $\mathcal{N} = 2$  метода фонового поля для фонового гипермультиплета на массовой оболочке (3.6) и вне ее.

Показано, что гипермультиплетно-зависимое однопетлевое эффективное действие в рассматриваемой теории связано со специальным суперполевым оператором (3.38), действующим только в секторе квантовых суперполей векторного мультиплета. Коэффициенты этого оператора содержат фоновые суперполя и зависят от деталей нарушения калибровочной симметрии. Доказано, что для вычисления однопетлевого эффективного действия достаточно рассмотреть простой случай, когда этот оператор имеет универсальную форму (3.41).

Гипермультиплетно-зависимое однопетлевое низкоэнергетическое эффективное действие представлено в виде интеграла по собственному времени. Показано, что для нахождения низкоэнергетических вкладов в эффективное действие достаточно рассмотреть векторный мультиплет и гипермультиплет на массовой поверхности. Окончательный результат для такого случая дается соотношением (3.50), которое является  $\mathcal{N} = 2$  суперполевым аналогом эффективного действия Гейзенберга–Эйлера. Ведущая часть низкоэнергетического эффективного действия (3.54) имеет универсальный вид\* и зави-

---

\*Такая форма низкоэнергетического эффективного действия (3.54) впервые была найдена в [146] для  $\mathcal{N} = 4$  калибровочной теории.

сит от величины  $X = \frac{-\mathbf{q}^{+a} \mathbf{q}_a^-}{\mathcal{W}\mathcal{W}} \frac{r(\Upsilon)}{\alpha(H)}$  (3.52), содержащей детали вакуумной структуры модели. Используя суперполево эффективное действие (3.54), мы строим ведущие по пространственно-временным производным члены в секторе скалярных компонент гипермультиплета. Эти члены содержат четыре пространственно-временные производные скалярного поля и имеют вид, подобный действию Черна–Саймонса (3.55).

Установлены возможные вклады в эффективное действие, которые могут быть получены, если мы выходим за пределы условий массовой оболочки (3.6) для фонового гипермультиплета. Вычислена гармоническая супердиаграмма с двумя внешними линиями гипермультиплета и с фоново-зависимым пропагатором векторного мультиплета и найден ее ведущий низкоэнергетический вклад. Мы показали, что окончательный результат имеет очень интересную суперполевою структуру и записывается в виде интеграла по  $3/4$  полного  $\mathcal{N} = 2$  гармонического суперпространства (3.62). Возможное наличие таких членов в эффективном действии  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметричных теорий было недавно предположено в работе [195]. Мы находим компонентную структуру эффективного действия (3.62) в бозонном секторе, удерживая скалярные компоненты фонового гипермультиплета и векторные компоненты фонового  $\mathcal{N} = 2$  калибровочного мультиплета. Полученное в результате выражение (3.64) имеет вид, подобный членам Черна–Саймонса, и содержит три пространственно-временные производные компонентных полей.

В заключение этого раздела еще раз подчеркнем, что мы проанализировали общую структуру гипермультиплетно-зависимого однопетлевого низкоэнергетического эффективного действия  $\mathcal{N} = 2$  суперконформных моделей. Найдено универсальное выражение для эффективного действия гипермультиплета на массовой оболочке. Для гипермультиплета вне массовой оболочки мы вычислили специальный, явно  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметричный сублидирующий вклад, который записывается в виде интеграла по  $3/4$  полного  $\mathcal{N} = 2$  гармонического суперпространства. Такие вклады заслуживают отдельного специального исследования.

#### 4. ОДНОПЕТЛЕВОЕ ЭФФЕКТИВНОЕ ДЕЙСТВИЕ В $\mathcal{N} = 2$ СУПЕРСИММЕТРИЧНОЙ МАССИВНОЙ ТЕОРИИ ЯНГА–МИЛЛСА

**4.1. Введение.** Проблема квантования массивной неабелевой теории Янга–Миллса имеет долгую историю (см., например, [157–162]). Обычно калибровочная инвариантность ассоциируется с безмассовостью соответствующих калибровочных полей. Однако ясно, что для понимания феноменологии частиц необходимо учитывать массивные степени свободы векторных бозонов.

В настоящее время известно несколько различных механизмов придания массы векторным полям, совместимых с калибровочной инвариантностью. Их общей чертой является увеличение числа физических степеней свободы по сравнению с безмассовой теорией. Конечно, основной общепринятой парадигмой, на которой базируется Стандартная модель, является механизм спонтанного нарушения симметрии, в котором дополнительные физические степени свободы обусловлены эффектом Хиггса. Этот эффект состоит в том, что дополнительные степени свободы берутся из хиггсовского мультиплета, содержащего скалярные хиггсовские поля. В унитарной калибровке от этого мультиплета остаются только хиггсовские бозоны, а некоторые безмассовые калибровочные поля становятся массивными за счет поглощения остальных скалярных (голдстоуновских) компонент, число которых совпадает с числом массивных калибровочных полей.

Хотя существование хиггсовского бозона экспериментально подтверждено, и этот аспект Стандартной модели полностью обоснован, однако с точки зрения развития методов квантовой теории поля могут представлять интерес и другие механизмы генерации массы бозонов и фермионов в калибровочных теориях — при естественном условии, что в спектре физических частиц не должно появляться лишних степеней свободы.

Наиболее популярной альтернативой механизму Хиггса является модель, в которой масса у калибровочных полей появляется за счет их калибровочно-инвариантной связи с действительным псевдоскалярным полем Штюкельберга [163], которое описывается нелинейной сигма-моделью. В унитарной калибровке это поле полностью поглощается продольной компонентой массивного вектора. Отличие от механизма Хиггса состоит в том, что поля Штюкельберга с самого начала преобразуются по нелинейной реализации калибровочной группы, не требующей введения каких-либо дополнительных хиггсовских полей, достраивающих нелинейные поля до линейного мультиплета\*. Достаточно полный обзор литературы, относящейся к этому методу, дан в [166]; среди многочисленных последних публикаций отметим [167].

Помимо моделей со штюкельберговскими полями можно также рассматривать неабелевы вектор-тензорные калибровочные теории с топологическими взаимодействиями. Все такие теории классически эквивалентны неабелевым теориям массивных векторных полей с полями Штюкельберга. Одни и те же степени свободы описываются любым из двух дуальных представлений. В зависимости от контекста задачи одна из формулировок может оказаться

---

\*Собственно говоря, основной мотивировкой помещения дополнительных степеней свободы в линейный мультиплет является требование перенормируемости теории, которое не выполняется в «минимальном» случае, когда эти степени свободы описываются нелинейной сигма-моделью.

удобнее другой, ввиду чего желательно знать детали обеих формулировок и их взаимосвязи\*.

Следует отметить, что подобные модели возникают в низкоэнергетическом пределе теории суперструн, а также в контексте супергравитации в высших измерениях. Так, в изученных недавно компактификациях суперструны типа II на многообразиях Калаби–Яу в присутствии нетривиальных потоков калибровочной 3-формы естественным образом проявляют себя степени свободы массивного антисимметричного тензорного поля, ответственные за один из возможных механизмов спонтанного нарушения суперсимметрии (см., например, [66]). Это обстоятельство возродило интерес к более детальному исследованию массивных  $\mathcal{N} = 1$  и  $\mathcal{N} = 2$  тензорных мультиплетов и их связей со скалярным и векторным мультиплетом (см. например, [196–199]). Отметим также, что связи с тензорными мультиплетом играют важную роль в механизме сокращения аномалий в суперструнных моделях.

Особый интерес представляет изучение квантовых свойств дуальных реализаций одного и того же представления суперсимметрии.

Теория  $\mathcal{N} = 1$  суперсимметричного массивного тензорного мультиплета как дуальной версии массивного векторного мультиплета известна достаточно давно (см., например, [39]). В  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметрии напряженность антисимметричного тензора содержится в тензорном мультиплете, который описывается аналитическим гармоническим  $\mathcal{N} = 2$  суперполем  $G^{++}$ , подчиненным определенным условиям [51]. Для безмассового тензорного мультиплета действие содержит только  $G^{++}$ , но если антисимметричный тензор имеет массу, то калибровочная инвариантность требует включения взаимодействия соответствующих штюкельберговских полей с векторным мультиплетом [67].

В данном разделе мы рассмотрим, следуя [219], квантовые свойства  $\mathcal{N} = 2$  массивной теории Янга–Миллса с использованием штюкельбергова суперполя. Эта модель является прямой  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметризацией не суперсимметричной ( $\mathcal{N} = 0$ ) массивной теории Янга–Миллса в формализме Кунимаса–Гото [171]. Некоторые аспекты этой задачи уже рассматривались в работе [173]. Там было показано, что теория конечна во втором порядке по безразмерной константе связи  $g^2$  Янга–Миллса, массовый член перенормируется, но теория неперенормируема в секторе, который содержит размерную константу связи  $m^2/g^2$ . Из этого факта авторы [173] делают заключение, что в секторе векторного мультиплета теория конечна во всех порядках петлевого разложения. Заметим, однако, что действие  $\mathcal{N} = 2$  теории Янга–Миллса в рамках формализма гармонического суперпростран-

---

\* Квантовая эквивалентность различных дуальных формулировок является более деликатной проблемой и требует отдельного анализа для каждой конкретной теории (см., например, [168, 169]).



ства [56] уже на классическом уровне записывается в виде бесконечной суммы по всем степеням потенциала векторного мультиплетта  $V^{++}$ . Кроме того, сигма-модельный лагранжиан штюкельбергова суперполя сам имеет в высшей степени нелинейный вид. Поэтому при калибровочно-ковариантном анализе квантовых свойств теории (даже на однопетлевом уровне) мы не можем ограничиться рассмотрением только простейших диаграмм, поскольку это приводит к калибровочно-неинвариантным контрчленам. Должны быть просуммированы все однопетлевые диаграммы, соответствующие эффективному действию со всеми внешними концами. В рамках обычной нековариантной диаграммной техники эта задача представляется технически очень сложной, если не безнадежной.

В этом разделе мы используем формулировку  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметричной теории и соответствующий формализм Штюкельберга в гармоническом суперпространстве [173] и применяем метод фонового поля [41], позволяющий суммировать все диаграммы с возрастающим количеством вставок для построения эффективного действия. Наши результаты близки по смыслу к результатам работ [174, 175], где была решена проблема построения инвариантных контрчленов для несуперсимметричной массивной теории Янга–Миллса вне массовой оболочки. Важным ингредиентом, необходимым для сохранения калибровочной инвариантности на всех этапах вычисления, является использование инвариантной теории возмущений, развитой для моделей главных киральных полей в работах [176–178].

Излагаемый материал организован следующим образом. В п. 4.2 описывается формулировка  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметричной массивной теории поля Янга–Миллса в гармоническом суперпространстве с учетом штюкельбергова суперполя. После исключения нефизических степеней свободы мы получаем явно калибровочно-инвариантное нелокальное выражение для массового слагаемого в лагранжиане. Можно ожидать, что именно такая форма массового члена позволит прояснить дуальную связь с теорией  $\mathcal{N} = 2$  массивного тензорного мультиплетта [67]. В п. 4.3 обсуждается процедура построения эффективного действия на основе  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметричного метода фонового поля и отмечаются особенности применения метода фонового поля к рассматриваемой теории. Пункт 4.4 посвящен вычислению однопетлевых расходимостей эффективного действия. Здесь впервые представлены калибровочно-инвариантные и явно  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметричные контрчлены, зависящие от штюкельбергова суперполя. В п. 4.5 обсуждается вывод компонентной структуры бозонного сектора одного из таких контрчленов. Пункт 4.6 содержит краткую сводку результатов раздела.

**4.2.  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметричная массивная теория Янга–Миллса в гармоническом суперпространстве.** Как уже отмечалось в предыдущих разделах, формулировка  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметричных теорий на языке суперполей, определенных на аналитическом подпространстве гармонического суперпро-

странства [56] и не подчиненных каким-либо связям, оказалась чрезвычайно полезной при исследовании квантовых эффектов в таких теориях (см., например, [41, 52]).

Напомним, что  $\mathcal{N} = 2$  векторный мультиплет с конечным числом физических и вспомогательных компонентных полей, но с бесконечным набором калибровочных степеней свободы описывается действительным аналитическим суперполем  $V^{++} = V_a^{++}T_a$ , принимающим значение в алгебре Ли калибровочной группы. Гипермультиплеты  $\omega$  и  $q^+$  с бесконечными наборами вспомогательных полей вне массовой оболочки, преобразующиеся по некоторому представлению  $R$  калибровочной группы, задаются аналитическими суперполями: вещественным суперполем  $\omega(\zeta)$  и комплексным суперполем  $q^+(\zeta)$  и ему сопряженными  $\bar{q}^+(\zeta)$  (для определения обобщенного сопряжения как комбинации комплексного сопряжения и антиподального отображения на 2-сфере, см. [56]). Скалярные компонентные поля  $\omega$ -гипермультиплета,  $\omega(x_A)$  и  $\omega^{(ij)}(x_A)$ , преобразующиеся как изоскаляр и изотриплет по отношению к  $SU(2)$ -группе внутренних изоморфизмов алгебры суперсимметрии, а также дублет вейлевских фермионов  $\psi_\alpha^i, \bar{\psi}_{i\dot{\alpha}}$  возникают как ведущие компоненты разложения  $\omega(\zeta)$  по степеням грассмановых координат  $\theta^+, \bar{\theta}^+$  и гармоник  $u_i^\pm$ . Существуют и другие мультиплеты  $\mathcal{N} = 2$  материи, обладающие конечным числом вспомогательных полей. Они описываются аналитическими суперполями, которые подчинены должным образом выбранным гармоническим связям.

Калибровочный  $\mathcal{N} = 2$  потенциал  $V^{++}$  удовлетворяет соотношению вещественности  $\widetilde{V^{++}} = V^{++}$  и преобразуется относительно калибровочных преобразований как  $\delta V^{++} = -\mathcal{D}^{++}\lambda$ , где  $\lambda$  — произвольный вещественный аналитический суперпараметр и  $\mathcal{D}^{++} = D^{++} + iV^{++} = e^{ib(z,u)}D^{++} \times e^{-ib(z,u)}$  — ковариантная гармоническая производная в аналитическом базисе\*. Суперполе  $b(z, u)$  — так называемый калибровочный мост. Калибровочная свобода, связанная с суперпараметром  $\lambda$ , позволяет устранить бесконечное количество калибровочных степеней свободы в  $V^{++}$  и выбрать калибровку Весса–Зумино, в которой это аналитическое суперполе имеет конечное число физических и вспомогательных полей, образующих векторный супермультиплет вне массовой оболочки. В состав этого мультиплета входят: векторное поле  $A_m(x)$ , комплексное скалярное поле  $M(x) + iN(x)$ , майорановский изодублет спиноров  $\lambda_\alpha^i(x), \bar{\lambda}_{\dot{\alpha}}^i(x)$  и триплет скалярных вспомогательных полей  $F^{ij}(x)$ . Как было показано в [56], все геометрические объекты теории, такие как различные связности и напряженности, выражаются в терминах единственного неограниченного потенциала  $V^{++}(\zeta, u)$ .

\*  $D^{++} = u^{+i} \frac{\partial}{\partial u^{-i}} - 2i\theta^+ \sigma^m \bar{\theta}^+ \frac{\partial}{\partial x_A^m} + \theta^{+\alpha} \frac{\partial}{\partial \theta^{-\alpha}} + \bar{\theta}^{+\dot{\alpha}} \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^{-\dot{\alpha}}}$ .

Не останавливаясь на деталях построения  $\mathcal{N} = 2$  калибровочной теории, которые были приведены в предыдущих разделах, напомним важный для дальнейшего вид действия неабелева калибровочного векторного супермультиплетта в терминах  $V^{++}$ :

$$S = \frac{1}{2g^2} \text{tr} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n} \int d^{12}z du_1 \cdots du_n \frac{V^{++}(z, u_1) \cdots V^{++}(z, u_n)}{(u_1^+ u_2^+) \cdots (u_n^+ u_1^+)} = \\ = -\frac{1}{2g^2} \text{tr} \int d^8z W^2. \quad (4.1)$$

Здесь использованы гармонические распределения  $\frac{1}{u_1^+ u_2^+}$  или, другими словами, функции Грина на сфере  $G^{(-1, -1)}(u_1, u_2)$ , которые определяются уравнением  $\partial^{++} G^{(-1, -1)}(u_1, u_2) = \delta^{(1, -1)}(u_1, u_2)$ . Правила дифференцирования и интегрирования по гармоникам были развиты в пионерской работе [56].

Киральная, не зависящая от гармоник супернапряженность  $W = (1/4) \times (\bar{D}^+)^2 V^{--}$  определяется в терминах неаналитического суперполя

$$V^{--}(z, u) = \int du' \frac{e^{ib(z, u)} e^{-ib(z, u')} V^{++}(z, u')}{(u^+ u'^+)^2},$$

удовлетворяющего уравнению нулевой кривизны:

$$D^{++} V^{--} - D^{--} V^{++} + i[V^{++}, V^{--}] = 0. \quad (4.2)$$

В  $\lambda$ -базисе действие (4.1) инвариантно относительно калибровочных преобразований

$$g V^{++} = e^{i\lambda} (V^{++} - iD^{++}) e^{-i\lambda}, \quad V^{++} = V_a^{++} T_a, \\ \lambda = \lambda(\zeta, u) = \bar{\lambda}(\zeta, u), \quad \lambda = \lambda_a T_a. \quad (4.3)$$

Здесь  $T_a$  — генераторы калибровочной группы,

$$[T_a, T_b] = i f_{abc} T_c, \quad \text{tr}(T_a T_b) = \delta_{ab}.$$

Закон преобразования (4.3) является конечной формой инфинитезимального калибровочного преобразования, определенного выше.

Построим теперь калибровочно-инвариантное выражение для слагаемого в суперполевым действии, ответственного за массу калибровочного поля. Для этой цели воспользуемся обобщением известного формализма Кунимаса–Гото [166, 171], развитого для калибровочно-инвариантного описания массы калибровочных полей в обычной теории Янга–Миллса. В  $\mathcal{N} = 2$  суперлевой калибровочной теории этот формализм требует введения дополнительного голдстоуновского  $\omega$ -гипермультиплетта в присоединенном представлении

калибровочной группы. Тогда соответствующее массивное слагаемое в действии запишется как

$$S_m = -\frac{m^2}{2g^2} \text{tr} \int d\zeta^{(-4)} du \left[ \Omega^{-1}(V^{++} - iD^{++})\Omega \right]^2, \quad (4.4)$$

где  $\Omega = \Omega(\omega) = e^{-i\omega}$ . В такой записи\* массовое слагаемое явно инвариантно относительно одновременных преобразований (4.3) и преобразований

$${}^g\Omega = e^{i\lambda}\Omega, \quad (4.5)$$

где  ${}^g\Omega = g\Omega$  и  $g$  — тот же самый элемент калибровочной группы. Отметим, что массовое слагаемое (4.4) также инвариантно относительно правых глобальных преобразований  $g_R$ :  $(V^{++})^{g_R} = V^{++}$ ,  $\Omega^{g_R} = \Omega g_R$ . Поскольку действие  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметричной безмассовой теории Янга–Миллса (4.1) калибровочно-инвариантно, подстановка  $V^{++} \rightarrow \Omega V^{++}$  не меняет структуры действия (4.1).

Интересно привести другую, явно калибровочно-инвариантную, но нелокальную форму массового слагаемого в терминах суперполевой напряженности  $W$ . Рассмотрим действие

$$S[V^{++}, \omega] = -\frac{1}{2g^2} \text{tr} \int d^4\theta W^2 - \frac{m^2}{2g^2} \text{tr} \int d\zeta^{(-4)} du \mathcal{V}^{++}\mathcal{V}^{++}, \quad (4.6)$$

где

$$\mathcal{V}^{++} = V^{++} - L^{++}, \quad (4.7)$$

$$L^{++} = i(D^{++}\Omega)\Omega^{-1} = \int_0^1 d\tau e^{-i\tau\omega} D^{++}\omega e^{i\tau\omega} = \int_0^1 d\tau D^{++}\omega_a R_{ab}(\tau\omega) T_b^{**},$$

и запишем следующее из него уравнение движения

$$\frac{1}{4}(D^+)^2 W + m^2 \mathcal{V}^{++} = 0. \quad (4.8)$$

Поскольку  $W$  не зависит от гармоник, условием самосогласованности этого уравнения является уравнение движения для  $\omega$ -мультиплета:

$$D^{++}\mathcal{V}^{++} = 0. \quad (4.9)$$

\*Полезно иметь в виду и другую форму записи того же выражения (3.39):

$$S_m = -\frac{m^2}{2g^2} \text{tr} \int d\zeta^{(-4)} du \left[ V^{++} - i\Omega^{-1}(D^{++}\Omega + i[V^{++}, \Omega]) \right]^2.$$

В такой формулировке специфическая структура калибровочной сигма-модели оказывается более прозрачной.

\*\*Определение изотопической матрицы  $R_{ab}(\omega)$  дано ниже, см. (4.16).

Как видно из определения (4.7), компонентный состав калибровочно-ковариантного ( ${}^g\mathcal{V}^{++} = g\mathcal{V}^{++}g^{-1}$ ) потенциала  $\mathcal{V}^{++}$  определяется сложными неполиномиальными комбинациями, составленными из физических компонент векторного мультиплета в калибровке Весса–Зумино и компонент  $\omega$ -мультиплета. Однако на массовой оболочке, с условием (4.9), разложение по компонентам можно параметризовать в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{V}^{++}(\zeta, u) = & f^{++}(x_A) + (\theta^+)^2 \bar{\varphi}(x_A) + (\bar{\theta}^+)^2 \varphi(x_A) + \\ & + 2i(\theta^+ \sigma^m \bar{\theta}^+)(A_m(x_A) + \partial_m f^{+-}(x_A)) + 2[\theta^{+\alpha} \psi_\alpha^i - \bar{\theta}_\alpha^+ \bar{\psi}^{\dot{\alpha}i}] u_i^+ + \\ & + 2i[(\bar{\theta}^+)^2 \theta^{+\alpha} \partial_{\alpha\dot{\alpha}} \bar{\psi}^{\dot{\alpha}i} + (\theta^+)^2 \bar{\theta}_\alpha^+ \partial^{\dot{\alpha}\alpha} \psi_\alpha^i] u_i^- - (\theta^+)^2 (\bar{\theta}^+)^2 \square f^{--}(x_A). \end{aligned} \quad (4.10)$$

Тогда массовое слагаемое для векторной компоненты суперполя  $\mathcal{V}^{++}$  приобретает вид, подобный массовому слагаемому в формализме Штюкельберга для несуперсимметричной массивной теории поля Янга–Миллса [175]:

$$S_m = -\frac{m^2}{2g^2} \text{tr} \int d^4x du (A_m - L_m)^2,$$

где форма Картана  $L_m$  на группе определена в терминах изоскалярной  $\omega$  и изотриплетной  $\omega^{(ij)}$  физических компонент  $\omega$ -супермультиплета. Привести явное компонентное выражение для  $S_m$  технически достаточно сложно, так как для этого необходимо выполнить интегрирование по гармоникам в каждом члене бесконечного ряда в разложении формы Картана  $L_m = e^{-if^{ij}u_i^+u_j^-} \partial_m e^{if^{ij}u_i^+u_j^-}$ , где  $f^{ij} = \omega \varepsilon^{ij} + \omega^{ij}$ . Однако аналогия с соответствующей несуперсимметричной теорией очевидным образом прослеживается.

Уравнение (4.8) можно рассматривать как связь на  $\omega$ -мультиплет, которая может быть пертурбативно разрешена и в общем случае неабелевой теории. Но решение выглядит особенно просто для абелева случая:

$$\omega(\zeta_1, u_1) = \int d\zeta_2^{(-4)} du_2 G_0^{(0,0)}(1|2) D_2^{++} V^{++}(2), \quad (4.11)$$

где

$$G_0^{(0,0)}(1|2) = -\frac{1}{\square} (D_1^+)^4 (D_2^+)^4 \delta^{12}(1|2) \frac{u_1^- u_2^-}{(u_1^+ u_2^+)^3} \quad (4.12)$$

— функция Грина  $\omega$ -мультиплета [56]. Действуя оператором  $D^{++}$  на обе части (4.11), получим

$$\begin{aligned} D_1^{++} \omega(\zeta_1, u_1) = & - \int d\zeta_2^{(-4)} du_2 \frac{1}{\square} (D_1^+)^4 (D_2^+)^4 \delta^{12}(1|2) V^{++}(2) \times \\ & \times \left\{ \frac{1}{(u_1^+ u_2^+)^2} + \frac{1}{2} (D_2^{--})^2 \delta^{(2,-2)}(u_2, u_1) \right\} = \\ & = \int d\zeta_2^{(-4)} du_2 \{ \Pi_T^{(2,2)}(1|2) + \delta_A^{(2,2)}(1|2) \} V^{++}(2), \end{aligned}$$

где  $\Pi_T$  — аналитическое распределение со свойствами проекционного оператора [56]. Исключая теперь из (4.6) калибровочные степени свободы  $\omega$ , после некоторой цепочки преобразований массового слагаемого получим

$$S_m = -\frac{m^2}{2g^2} \int d\zeta_1^{(-4)} du_1 d\zeta_2^{(-4)} du_2 V^{++}(1)\Pi_T^{(2,2)}(1|2)V^{++}(2) = \\ = \frac{m^2}{2g^2} \int d^8 z_c W \frac{1}{\square} W. \quad (4.13)$$

В результате калибровочно-инвариантная форма массового члена полностью выражается через напряженности  $W$ . Очевидно, что в неабелевом случае можно также исключить  $\omega$ -мультиплет по теории возмущений в рамках полиномиального разложения по степеням  $V^{++}$ . Конечно, это разложение будет нелокальным выражением, но оно может быть локализовано посредством введения подходящих тензорных мультиплетов\*, в результате чего мы получим интересную последовательность классических дуальностей для модели, содержащей штюкельбергову суперполя  $\omega$ . Аналогичная ситуация встречается и при вычислении конденсатов  $\langle A^2 \rangle$  в теории Янга–Миллса, где нелокальный калибровочно-инвариантный функционал, связанный с  $A^2$ , содержит информацию о топологической структуре вакуума теории с неисчезающим вакуумным средним этого оператора (см. детальное обсуждение инфракрасной динамики теории Янга–Миллса в [179] и цитированной там литературе).

Дальнейшей целью данного раздела является определение эффективного действия и анализ структуры однопетлевых расходимостей в теории с действием (4.6).

\*Запишем действие для массивного тензорного мультиплета в гармоническом суперпространстве [67] в виде

$$S = \frac{1}{2} \int d\zeta^{-4} (G^{++})^2 + \frac{1}{2} m \left( \int d^8 z W \psi + \text{c. c.} \right) + \frac{1}{2} \int d^8 z W^2,$$

где  $G^{++}(z, u)$  — действительное аналитическое суперполе, подчиненное связи  $D^{++}G^{++} = 0$ . Эта связь может быть разрешена в терминах неограниченного, независящего от гармоник кирального препотенциала  $\psi(z)$  и ему сопряженного в виде  $G^{++}(z, u) = (1/8)(D^+)^2\psi(z) + (1/8)(\bar{D}^+)^2\bar{\psi}(z)$ . Суперполе  $G^{++}$  остается инвариантным при калибровочных преобразованиях:  $\delta\psi = i\Lambda$ ,  $\bar{D}_\alpha^i \Lambda = 0$ ,  $D^{\alpha i} D_\alpha^j \Lambda = \bar{D}_\alpha^i \bar{D}^{j\alpha} \bar{\Lambda}$ . Выберем функцию фиксации калибровки в виде  $F^{++} = (1/8)(D^+)^2\psi(z) - (1/8)(\bar{D}^+)^2\bar{\psi}(z)$ . Тогда интегрирование в производящем функционале по препотенциалам  $\psi, \bar{\psi}$  приводит к нелокальному массовому слагаемому для векторного мультиплета (4.13):

$$Z = \int D\psi D\bar{\psi} (\text{Det } \square) \exp \left[ \frac{i}{2} \int d\zeta^{-4} \{(G^{++})^2 + (F^{++})^2\} + \right. \\ \left. + \frac{i}{2} m \int d^8 z (W\psi + \text{c. c.}) \right] = \exp \left[ i \int d^8 z W \frac{m^2}{\square} W \right].$$

**4.3. Метод фонового поля.** Калибровочно-инвариантное разложение эффективного действия по числу петель в суперсимметричных теориях осуществляется в рамках суперполевого метода фонового поля (см., например, [37, 39] для случая  $\mathcal{N} = 1$  теорий и [41, 52] для  $\mathcal{N} = 2$  теорий). В формализме фонового поля мы должны последовательно выполнить фоново-квантовое расщепление всех полей, зафиксировать калибровочные степени свободы квантовых полей согласно процедуре Фаддеева–Попова и произвести разложение производящего функционала вершинных функций по степеням квантовых полей. При этом вклад в эффективное действие в данном порядке по числу петель дает только конечное число членов в таком разложении.

Рассмотрим теорию суперполей  $V^{++}, \omega$  с действием (4.6). В секторе  $\mathcal{N} = 2$  векторного мультиплетта  $V^{++}$  мы производим разделение  $V^{++} \rightarrow V^{++} + gv^{++}$  и повторяем все те шаги, которые соответствуют безмассовой теории [52]. В секторе  $\omega$ -супермультиплетта с нелинейным киральным лагранжианом мы должны строить разложение, используя теорию возмущений в терминах инвариантных, независящих от параметризации величин [178].

Основным моментом при фоново-квантовом разделении полей, принимающих значения в группе Ли, является нелинейное правило группового сложения элементов группы  $\Omega(\omega)$  и  $\Omega(\chi)$ , определяемое соотношением [178]

$$\Omega(\omega \oplus \chi) = \Omega(\omega)\Omega\left(\frac{m}{g}\chi\right). \quad (4.14)$$

При таком правиле сложения выражение  $\Omega(\omega \oplus \chi)$  является элементом того же пространства, что и  $\Omega(\omega)$ , и обладает тем же законом группового преобразования.

Мы определяем расщепление суперполя  $\omega$  на фоновое суперполе  $\omega$  и квантовое суперполе  $\chi$  согласно правилу (4.14). Нетрудно показать, что фоновые  $\omega$ -поля преобразуются, как в (4.5), а квантовые поля  $\chi$  не преобразуются вовсе. При таком разделении полей на фоновые и квантовые как полный лагранжиан, так и все члены его разложения в ряд Тейлора по квантовым полям будут инвариантны относительно локальной и глобальной групп преобразований. Как следствие, получающиеся контрчлены будут автоматически инвариантны относительно классических калибровочных и глобальных групповых преобразований.

Для однопетлевых вычислений достаточно знать разложение лагранжиана до второго порядка по квантовым полям  $v^{++}, \chi$ :

$$\begin{aligned} S^{(2)} = & \frac{1}{2} \int d^{12}z du_1 du_2 \frac{v_a^{++}(1)v_a^{++}(2)}{(u_1^+ u_2^+)^2} - \\ & - \frac{1}{2} \int d\zeta^{(-4)} du \{m^2(v_a^{++})^2 - 2mD^{++}\chi_a R_{ab}v_b^{++} + \\ & + D^{++}\chi_a D^{++}\chi_a + f_{abc}D^{++}\chi_a \chi_b R_{cd}\mathcal{V}_d^{++}\}, \quad (4.15) \end{aligned}$$

где изотопическая матрица  $R_{ab}(\omega)$  возникает из определения  $\Omega T_a \Omega^{-1} = R_{ab} T_b$ . Как и в несуперсимметричном случае [175], она обладает следующими свойствами:

$$R_{ae} R_{be} = \delta_{ab}, \quad D^{++} R_{ab} = -R_{ae} f_{bec} L_c^{++}, \quad f_{abc} = R_{ad} R_{be} R_{cg} f_{deg}. \quad (4.16)$$

Мы должны также добавить к (4.15) член, фиксирующий калибровку в секторе квантового векторного суперполя. Этот член удобно выбрать в фоново-калибровочно-инвариантной форме

$$F^{(+4)} = \mathcal{D}^{++} v^{++}. \quad (4.17)$$

Кроме того, надо добавить действие духов Фаддеева–Попова и Нильсона–Каллош. Здесь мы следуем подходу, развитому в [52]. Чтобы фиксировать калибровку в функциональном интеграле  $Z = N \int \mathcal{D}v^{++} e^{iS}$ , необходимо, согласно процедуре Фаддеева–Попова, вставить в него единицу, записанную в виде  $1 = \Delta_{\text{FP}} \delta(F^{(+4)} - f^{(+4)})$ , где детерминант Фаддеева–Попова определяется как  $\Delta_{\text{FP}}[v^{++}, V^{++}] = \text{Det}[\mathcal{D}^{++}(\mathcal{D}^{++} + iv^{++})]$ . Далее мы должны вставить в функциональный интеграл единицу в виде

$$1 = \Delta_{\text{NK}} \int \mathcal{D}f^{(+4)} \exp \left\{ \frac{i}{2\alpha} \text{tr} \int d^{12}z du_1 du_2 f_{\tau}^{(+4)} \frac{(u_1^- u_2^-)}{(u_1^+ u_2^+)^3} f_{\tau}^{(+4)} \right\}.$$

Здесь  $\alpha$  — калибровочный параметр, который в дальнейшем удобно выбрать как  $\alpha = -1$ ,  $\Delta_{\text{NK}}[V^{++}]$  — детерминант Нильсена–Каллош и  $f_{\tau}^{(+4)} = e^{-ib} f^{(+4)} e^{ib}$  — калибровочно-инвариантная функция со значениями в алгебре Ли калибровочной группы. Обратим внимание на то, что детерминант Нильсена–Каллош зависит от фонового суперполя, что означает присутствие третьего духа Нильсена–Каллош. Детали процедуры вычисления этого детерминанта,  $\Delta_{\text{NK}}[V^{++}] = [\text{Det}^{-1/2}(\mathcal{D}^{++})^2] \text{Det}^{1/2} \widehat{\square}_{(4,0)}$ , приведены в [52]. Здесь  $\widehat{\square}$  — ковариантно-аналитический даламбертиан, переводящий аналитические суперполя в аналитические [52]:

$$\begin{aligned} \widehat{\square} = & -\frac{1}{2}(\mathcal{D}^+)^4 (\mathcal{D}^{--})^2 = \frac{1}{2} \mathcal{D}^{\alpha\dot{\alpha}} \mathcal{D}_{\alpha\dot{\alpha}} + \frac{i}{2} (\mathcal{D}^{+\alpha} W) \mathcal{D}_{\alpha}^- + \\ & + \frac{i}{2} (\bar{\mathcal{D}}_{\dot{\alpha}}^+ \bar{W}) \bar{\mathcal{D}}^{-\dot{\alpha}} + \frac{1}{2} \{W, \bar{W}\} - \frac{i}{4} (\bar{\mathcal{D}}^+ \bar{\mathcal{D}}^+ \bar{W}) \mathcal{D}^{--} + \frac{i}{8} [\mathcal{D}^+, \mathcal{D}^-] W. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Окончательный результат для лагранжиана, определяющего однопетлевые квантовые поправки к эффективному действию в секторе векторного мультиплета, имеет вид

$$S_2 + S_{\text{GF}} = -\frac{1}{2} \text{tr} \int d\zeta^{(-4)} du v^{++} (\widehat{\square} + m^2) v^{++}. \quad (4.19)$$



Действие духов записывается в виде

$$S_{\text{ghost}} = \text{tr} \int d\zeta^{(-4)} du b(\mathcal{D}^{++})^2 c + \frac{1}{2} \int d\zeta^{(-4)} du \phi(\mathcal{D}^{++})^2 \phi + \\ + \text{tr} \int d\zeta^{(-4)} du \rho^{(+4)} \widehat{\square}_{4,0} \sigma. \quad (4.20)$$

Здесь  $b, c$  — антикоммутирующие суперполевые духи Фаддеева–Попова;  $\rho^{(+4)}, \sigma$  — антикоммутирующие духи Нильсона–Каллош и  $\phi$  — дополнительные коммутирующие духи со значениями в алгебре Ли калибровочной группы.

Суперполевое действие для квантового поля  $\chi$  и его взаимодействия с квантовым полем  $v^{++}$  удобно записать в матричном виде

$$S_{\text{SYM}}^{(2)} + S_m^{(2)} = -\frac{1}{2} \int d\zeta^{(-4)} (v_a^{++}, \chi_a) \times \\ \times \begin{pmatrix} \widehat{\square}_{ab} + m^2 - mR_{ba}D^{++} & mD^{++}R_{ab} \\ mD^{++}R_{ab} & -\nabla^{++}D^{++} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_b^{++} \\ \chi_b \end{pmatrix}. \quad (4.21)$$

Здесь  $D^{++}$  — обычная гармоническая производная и

$$\nabla^{++}\chi_a = D^{++}\chi_a + f_{abc}\chi_b R_{cd}\mathcal{V}_d^{++} \quad (4.22)$$

представляет собой «удлиненную» производную в  $\lambda$ -базисе, где  $\Omega\mathcal{V}_a^{++}T_a\Omega^{-1}$  играет роль калибровочно-инвариантной связности. Поскольку это суперполе является аналитическим, выполняются стандартные связи  $[\nabla^{++}, \nabla_{\alpha, \dot{\alpha}}^+] = 0$ . Здесь и далее для единообразия используется обозначение  $\nabla_{\alpha, \dot{\alpha}}^+ = D_{\alpha, \dot{\alpha}}^+$ . Другие коммутационные соотношения, такие как

$$[\nabla^{++}, \nabla^{--}] = D^0, \quad [\nabla^{\mp\mp}, \nabla_{\alpha, \dot{\alpha}}^{\pm}] = \nabla_{\alpha, \dot{\alpha}}^{\mp}, \\ \{\bar{\nabla}_{\dot{\alpha}}^+, \nabla_{\alpha}^-\} = -\{\nabla_{\alpha}^+, \bar{\nabla}_{\dot{\alpha}}^-\} = 2i\nabla_{\alpha\dot{\alpha}}, \quad (4.23) \\ \{\nabla_{\alpha}^+, \nabla_{\beta}^-\} = -2i\epsilon_{\alpha\beta}\bar{\mathcal{W}}, \quad \{\bar{\nabla}_{\dot{\alpha}}^+, \bar{\nabla}_{\dot{\beta}}^-\} = 2i\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\mathcal{W},$$

в точности копируют коммутационные соотношения ковариантных производных  $\mathcal{D}_{\alpha, \dot{\alpha}}^{\pm}, \mathcal{D}^{\pm\pm, 0}$  [56] и служат определением  $\nabla_{\alpha, \dot{\alpha}}^-$  и кирального суперполя гармонически-независимой напряженности  $\mathcal{W}[\mathcal{V}^{++}] = (-1/4)(\nabla^+)^2\mathcal{V}^{--}$  и  $\bar{\mathcal{W}}[\mathcal{V}^{++}] = (-1/4)(\bar{\nabla}^+)^2\mathcal{V}^{--}$  для калибровочно-инвариантного потенциала  $\Omega\mathcal{V}^{++}\Omega^{-1}$ .

**4.4. Однопетлевые расходимости.** Перейдем к анализу однопетлевых расходимостей в рассматриваемой теории. Эффективное действие дается суммой вкладов действия квантовых суперполей духов (4.20) и действия квантовых суперполей  $v^{++}, \chi$  (4.21):

$$\Gamma^{(1)}[V^{++}, \omega] = \Gamma_1^{(1)}[V^{++}] + \Gamma_2^{(1)}[V^{++}, \mathcal{V}^{++}], \quad (4.24)$$

где  $\Gamma_1^{(1)}[V^{++}]$  — вклад духов в эффективное действие и  $\Gamma_2^{(1)}[V^{++}, \mathcal{V}^{++}]$  — вклад суперполей  $v^{++}$  и  $\chi$ . Здесь  $\mathcal{V}^{++}$  определяется выражением (4.7). Заметим, что вся зависимость эффективного действия от штюкельбергова суперполя  $\omega$  содержится в суперполе  $\mathcal{V}^{++}$ . Действия (4.20), (4.21) полностью определяют структуру пертурбативного разложения для вычисления однопетлевого эффективного действия массивной  $\mathcal{N} = 2$  теории Янга–Миллса в явно суперсимметричной и калибровочно-инвариантной форме. Далее нас будет интересовать только структура расходимостей рассматриваемой теории. Для ее анализа используем размерную регуляризацию (см. применение размерной регуляризации в суперполевых теориях в [39]) и схему минимальных вычитаний.

Вклад в однопетлевое эффективное действие, обусловленный духами, зависит только от потенциала  $V^{++}$  и в точности совпадает с соответствующим вкладом в обычной безмассовой  $\mathcal{N} = 2$  теории Янга–Миллса:

$$i\Gamma_1^{(1)}[V^{++}] = \text{Tr} \ln (\mathcal{D}^{++})^2 - \frac{1}{2} \text{Tr} \ln (\mathcal{D}^{++})^2 + \frac{1}{2} \text{Tr} \ln \widehat{\square}_{(4,0)}. \quad (4.25)$$

Поэтому мы можем без каких-либо изменений воспользоваться результатами работ [41, 52], чтобы выписать расходящуюся часть эффективного действия:

$$\Gamma_{1,\text{div}}^{(1)}[V^{++}] = -\frac{C_2}{32\pi^2\varepsilon} \text{tr} \int d^8z W^2. \quad (4.26)$$

Здесь  $C_2$  — квадратичный оператор Казимира калибровочной группы и  $\varepsilon$  — параметр размерной регуляризации.

Новые расходимости связаны с однопетлевыми поправками к эффективному действию, обусловленными квантовыми суперполями  $v^{++}$ ,  $\chi$  внутри петли и их смешиванием. Для вычисления функционального детерминанта матричного оператора в действии (4.21) удобно привести эту матрицу к диагональному виду:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & mRD^{++} & \frac{1}{\nabla^{++}D^{++}} \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \times \\ & \times \begin{pmatrix} \widehat{\square} + m^2 - m^2RD^{++} & \frac{1}{\nabla^{++}D^{++}}D^{++}R & 0 \\ 0 & & -\nabla^{++}D^{++} \end{pmatrix} \times \\ & \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{\nabla^{++}D^{++}}mD^{++}R & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Тогда все вклады в эффективное действие определяются диагональными элементами внутренней матрицы:

$$\begin{pmatrix} \widehat{\square} + m^2\Pi^T & 0 \\ 0 & -\nabla^{++}D^{++} \end{pmatrix}, \quad (4.28)$$

где величина  $\Pi^T$  определяется сравнением с (4.27). Хорошо известно, что оператор  $\widehat{\square} + m^2 \Pi^T$ , так же как и  $\widehat{\square}_{(4,0)}$ , не дает вклада в голоморфную часть эффективного действия. Тогда все возможные вклады в однопетлевой контрчлен обусловлены известным вкладом духов (4.26) и вкладом

$$\Gamma_2^{(1)}[0, \mathcal{V}^{++}] = \Gamma^{(1)}[\mathcal{V}^{++}] = \frac{i}{2} \text{Tr} \ln (\nabla^{++} D^{++}) \quad (4.29)$$

квантовых суперполей  $\chi$ , источником которого является нижний блок в (4.28). Имея целью воспользоваться известными приемами вычисления  $\Gamma^{(1)}[\mathcal{V}^{++}]$ , приведем дифференциальный оператор, присутствующий в (4.29), к виду

$$(\nabla^{++})^2 + U^{(+4)}, \quad (4.30)$$

где

$$U_{ab}^{(+4)} = \frac{1}{2} f_{abc} D^{++} \mathcal{V}_c^{++} + \frac{1}{4} f_{ace} f_{bde} \mathcal{V}_c^{++} \mathcal{V}_d^{++}. \quad (4.31)$$

Очевидно, что точная функция Грина для оператора  $(\nabla^{++})^2$  совпадает с (4.12) после замены  $\mathcal{D}^{++} \rightarrow \nabla^{++}$ ,  $W \rightarrow \mathcal{W}$ . Функция Грина для  $\omega$ -мультиплета во внешнем поле  $U^{(+4)}$  определяется уравнением

$$[(\nabla_1^{++})^2 + U_1^{(+4)}] G_U^{(0,0)}(1|2) = \delta_A^{(4,0)}(1|2). \quad (4.32)$$

Определим аналитическое суперполевое ядро\*, учитывающее все эффекты внешнего поля

$$Q^{(4,0)}(1|2) = \delta_A^{(4,0)}(1|2) + U_1^{(+4)} G^{(0,0)}(1|2). \quad (4.33)$$

Тогда эффективное действие определяется как

$$\Gamma[\mathcal{V}^{++}] = \frac{i}{2} \text{Tr} \ln [(\nabla^{++})^2 + U^{(+4)}] = \frac{i}{2} \text{Tr} \ln (\nabla^{++})^2 + \frac{i}{2} \text{Tr} \ln Q^{(4,0)}. \quad (4.34)$$

Первый, независимый от  $U^{(+4)}$  вклад в расходимости  $\Gamma^{(1)}[\mathcal{V}^{++}]$  в точности совпадает с однопетлевым вкладом гипермультиплета во внешнем поле  $\mathcal{V}^{++}$ , т.е. определяется формулой (4.26) с заменой знака и суперполевой напряженности  $W[V^{++}]$  на напряженность  $\mathcal{W}[\mathcal{V}^{++}] = (-1/4)(\nabla^+)^2 \mathcal{V}^{--}$ , вычисляемую по потенциалу (4.7):

$${}_1\Gamma_{\text{div}}^{(1)}[\mathcal{V}^{++}] = \frac{C_2}{32\pi^2\varepsilon} \text{tr} \int d^8z \mathcal{W}^2. \quad (4.35)$$

---

\* Согласно правилу  $G^{(0,0)}(1|2) = \int d\zeta_3^{(-4)} G_U^{(0,0)}(1|3) Q^{(4,0)}(3|2)$ , где  $G^{(0,0)}(1|2)$  — функция Грина во внешнем поле  $\mathcal{V}^{++}$ , удовлетворяющая уравнению  $(\nabla_1^{++})^2 G^{(0,0)}(1|2) = \delta^{(4,0)}(1|2)$ .

На языке диаграмм разложение второго члена выражения (4.34) в ряд по степеням взаимодействия полей внутри петли с внешними вставками  $U^{(+4)}$  и пропагатором во внешнем поле  $\mathcal{V}^{++}$  записывается в виде

$$\Gamma[U^{(+4)}] = \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma_n[U^{(+4)}], \quad (4.36)$$

где  $n$ -й член соответствует суперграфу с  $n$  внешними линиями  $U^{(+4)}$ . Таким образом, (4.34) суммирует вклады с произвольным числом внешних линий  $\mathcal{V}^{++}$ .

Первый член в разложении  $\Gamma[\mathcal{V}^{++}]$  (4.29) в ряд теории возмущений по степеням  $U^{(+4)}$  равен нулю, поскольку содержит исчезающее на пределе совпадения произведение гармоник:  $u_1^- u_2^-|_{u_1=u_2} = 0$ . Во втором порядке эффективное действие имеет вид

$$\begin{aligned} {}_2\Gamma^{(1)}[\mathcal{V}^{++}] &= -\frac{i}{4} \text{tr} \int d\zeta_1^{(-4)} d\zeta_2^{(-4)} du_1 du_2 U^{(+4)}(1)U^{(+4)}(2) \times \\ &\times \frac{1}{\square_1} (\nabla_1^+)^4 (\nabla_2^+)^4 \delta^{12}(1|2) \frac{u_1^- u_2^-}{(u_1^+ u_2^+)^3} \frac{1}{\square_2} (\nabla_2^+)^4 (\nabla_1^+)^4 \delta^{12}(2|1) \frac{u_2^- u_1^-}{(u_2^+ u_1^+)^3}. \end{aligned}$$

Восстанавливая полную грасманову меру интегрирования, мы снимаем одну дельта-функцию и используем тождество  $(D_1^+)^4 (D_1^+)^4 \delta^8(\theta - \theta')|_{\theta=\theta'} = (u_1^+ u_2^+)^4$ . Далее после стандартных преобразований расходящийся вклад принимает вид

$$\begin{aligned} {}_2\Gamma_{\text{div}}^{(1)}[\mathcal{V}^{++}] &= \frac{1}{(8\pi)^2 \varepsilon} \times \\ &\times \text{tr} \int d^{12}z du_1 du_2 U^{(+4)}(z, u_1) U^{(+4)}(z, u_2) \frac{(u_1^- u_2^-)^2}{(u_1^+ u_2^+)^2}. \quad (4.37) \end{aligned}$$

Следующие члены в разложении (4.29) дают конечные вклады в эффективное действие.

Выражение (4.37) является основным результатом этого раздела. Оно представляет собой новый суперполево контрчлен в  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметричной массивной теории Янга–Миллса в формализме Штюкельберга, зависящий от фонового суперполя  $\omega$ . На массовой оболочке этот функционал не содержит гармонических сингулярностей. Это следует из того факта, что ненулевой вклад в интеграл по нечетным координатам должен содержать максимальную степень грасмановых координат в каждом из сомножителей. Но  $(\theta_1^+)^2 (\bar{\theta}_1^+)^2 (\theta_2^+)^2 (\bar{\theta}_2^+)^2 = (u_1^+ u_2^+)^4 (\theta)^4 (\bar{\theta})^4$ .

Переписанный через компонентные поля функционал (4.37) среди многих других членов содержит нестандартные контактные четырехвекторные взаимодействия и члены, необходимые для их суперсимметризации. Например,

для калибровочной группы  $SU(2)$  эти взаимодействия имеют вид  $a_m^i a_n^i a_m^j a_n^j + (a_m^i a_m^i)^2$ , где  $a_m = A_m - L_m$  — векторная компонента  $SU(2)$  суперполя  $\mathcal{V}^{++}$  (4.7). Для калибровочной группы  $SU(3)$  соответствующие взаимодействия выглядят так:  $(5/6)(a_m^a a_m^a)^2 + a_m^a a_n^a a_m^b a_n^b - d_{abe} d_{ecd} a_m^a a_n^b a_m^c a_n^d$ . Именно такой контрчлен (как препятствие для перенормируемости) возникает и в обычной несуперсимметричной массивной теории Янга–Миллса [174, 175]. Подобные отклонения от Стандартной модели ведут к интересным феноменологическим следствиям, например, для процессов  $W^+W^-$ ,  $WZ$ -рождения (см. [180] и цитированную там литературу). Заметим, что в отличие от несуперсимметричного случая [175] массовое слагаемое в  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметричной массивной теории поля Янга–Миллса не перенормируется.

Все контрчлены (4.26), (4.35), (4.37)\* явно калибровочно-инвариантны, и два последних не повторяют форму исходного лагранжиана. Ввиду этого  $\mathcal{N} = 2$  теория Янга–Миллса с массой, точно так же как и несуперсимметричная массивная теория Янга–Миллса, может рассматриваться только как низкоэнергетическая эффективная теория. Другими словами, действие (4.6) не является наиболее общим  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметричным функционалом, совместимым с локальной левой и глобальной правой симметриями теории. Для ренормируемости теории в современном смысле (см., например, [181]) в следующем порядке разложения эффективного действия по производным необходимо включить новые вершины, индуцированные функционалами (4.35), (4.37).

**4.5. О компонентной структуре  $\mathcal{N} = 2$  суперполевого функционала (4.35).** Отдельной интересной задачей является изучение специфических особенностей компонентного разложения  $\mathcal{N} = 2$  суперполевого напряжения  $\mathcal{W}$  для калибровочно-инвариантного потенциала  $\Omega\mathcal{V}^{++}\Omega^{-1}$ , который включает дополнительную степень свободы в векторном мультиплете, обусловленную штюкельберговым суперполем  $\omega$ . Очевидно, что это калибровочно-инвариантное суперполе отличается от ковариантной киральной суперполевого напряженности, построенной по препотенциалу  $\mathcal{V}^{++}$ , только матричными  $\Omega$ -обкладками, которые не дают вклада под знаком следа.

$\mathcal{N} = 2$  суперполевого формализм наиболее приспособлен для описания супермультиплетов вне массовой оболочки и их явно  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметричных взаимодействий. Переход к компонентным полям требует исключения бесконечного числа вспомогательных полей, что технически является достаточно сложной задачей. Если нахождение компонентной структуры контрчлена (4.26) не вызывает трудностей и его компонентная форма совпадает с классическим действием  $\mathcal{N} = 2$  теории Янга–Миллса [56], то компонент-

---

\*В схеме минимальных вычитаний контрчлены отличаются от расходимостей (4.26), (4.35), (4.37) только знаками.

ная форма выражений (4.35), (4.37) требует специального рассмотрения, поскольку потенциал (4.7) преобразуется однородно,  $g\mathcal{V}^{++} = e^{i\lambda}\mathcal{V}^{++}e^{-i\lambda}$ , т. е. в отличие от закона преобразования  $V^{++}$  в его законе преобразования отсутствует член с производной  $D^{++}\lambda$ . По этой причине для  $\mathcal{V}^{++}$  невозможно выбрать калибровку типа Весса–Зумино, и в секторе векторного поля потенциал  $\mathcal{V}^{++}$  содержит неустраняемые продольные степени свободы. Таким образом, задача нахождения компонентной формы суперполевого функционала (4.35) предполагает компонентное разложение  $\mathcal{W}$  без наложения калибровки на  $\mathcal{V}^{++}$ . Общее решение этой задачи в литературе не рассматривалось. Отдельные аспекты компонентной структуры массивного векторного мультиплетта без фиксации калибровки изучались в работе [184] в абелевом случае и в первом порядке разложения по константе связи — в неабелевом случае.

В этом пункте мы опишем процедуру нахождения компонентной формы суперполевого функционала (4.35) в бозонном секторе, в котором компонентный состав суперполя  $\mathcal{V}^{++}$ , необходимый для записи (4.35), (4.37) в терминах физических полей, фактически совпадает с компонентной структурой суперполя  $V^{++}$  в калибровке Весса–Зумино. Но при этом каждая компонента «обрастает» бесконечной башней взаимодействий с продольными степенями свободы, возникшими из компонентных полей  $\omega$ -гипермультиплетта.

Удобный способ нахождения компонентного состава суперполевого напряжения для нестандартных теорий основан на решении гармонического уравнения нулевой кривизны [56] для неаналитического потенциала  $\mathcal{V}^{--}$ :

$$D^{++}\mathcal{V}^{--} - D^{--}\mathcal{V}^{++} + i[\mathcal{V}^{++}, \mathcal{V}^{--}] = 0. \quad (4.38)$$

Поскольку  $\mathcal{V}^{++} = V^{++} - L^{++}$  и суперполе  $V^{++}$  претерпевает обычные калибровочные преобразования, мы можем наложить на  $V^{++}$  калибровку Весса–Зумино. В результате калибровочно-ковариантный аналитический потенциал (4.7) принимает вид (4.10):

$$\begin{aligned} \mathcal{V}^{++}(\zeta) = & f^{++}(x_A) + (\theta^+)^2\bar{\varphi}(x_A) + (\bar{\theta}^+)^2\varphi(x_A) + 2i(\theta^+\sigma^m\bar{\theta}^+)(A_m(x_A) + \\ & + \partial_m f^{+-}(x_A)) - (\theta^+)^2(\bar{\theta}^+)^2\Box f^{--}(x_A) + \text{фермионы}, \end{aligned} \quad (4.39)$$

где  $\zeta = (x_A^m, \theta^{+\alpha}, \bar{\theta}^{+\dot{\alpha}}, u_i^\pm)$  и мы сохранили обозначения для компонентной формы потенциала в калибровке Весса–Зумино. Необходимо, однако, помнить, что каждая компонента  $V_{WZ}^{++}$  должна быть дополнена бесконечным рядом по степеням взаимодействия с компонентами  $\omega$ -гипермультиплетта  $\omega(\zeta) = \omega(x_A) + \omega^{(ij)}(x_A)u_i^+u_j^- + \dots$ . Поскольку суперполевого напряжения

$$\mathcal{W} = -\frac{1}{4}(\bar{D}^+)^2\mathcal{V}^{--} \quad (4.40)$$

является  $\mathcal{N} = 2$  киральным суперполем, не зависящим от гармоник, решение уравнения (4.38) удобно искать в кирально-аналитических координатах  $Z_c =$

$(z_c, \bar{\theta}^{\pm\alpha})$ , где

$$z_c = (x_L^m, \theta^{\pm\alpha}), \quad x_L^m = x_A^m + 2i\theta^- \sigma^m \bar{\theta}^+.$$

В этом базисе каждая компонента в (4.39) разлагается как

$$f(x_A) = f(x_L) - 2i\theta^- \sigma^m \bar{\theta}^+ \partial_m f(x_L) + (\theta^-)^2 (\bar{\theta}^+)^2 \square f(x_L).$$

Следуя работе [182], удобно представить разложение  $\mathcal{V}^{--}$  в этих координатах в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{V}^{--}(Z_c, u) = & v^{--}(x_L, \theta^\pm, u) + \bar{\theta}_\alpha^+ v^{(-3)\dot{\alpha}} + \bar{\theta}_\alpha^- v^{-\dot{\alpha}} + (\bar{\theta}^-)^2 \mathcal{A} + (\bar{\theta}^+ \bar{\theta}^-) \varphi^{--} + \\ & + \bar{\theta}^{-\dot{\alpha}} \bar{\theta}^{+\dot{\beta}} \varphi_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}^{--} + (\bar{\theta}^+)^2 v^{(-4)} + (\bar{\theta}^-)^2 \bar{\theta}_\alpha^+ \tau^{-\dot{\alpha}} + (\bar{\theta}^+)^2 \bar{\theta}_\alpha^- \tau^{(-3)\dot{\alpha}} + (\bar{\theta}^+)^2 (\bar{\theta}^-)^2 \tau^{--}. \end{aligned}$$

Заметим, что в выражение для (4.40) входят не все киральные суперполя этого разложения, а только  $\mathcal{A}$ ,  $\tau^{-\dot{\alpha}}$  и  $\tau^{--}$ . Однако фактически, как показано в работе [183], только киральное суперполе

$$\begin{aligned} \mathcal{A} = & \mathcal{A}_1 + (\theta^-)^2 \mathcal{A}_4^{++} + (\theta^- \theta^+) \mathcal{A}_5 + \theta^{-\alpha} \theta^{+\beta} \mathcal{A}_{6\alpha\beta} + \\ & + (\theta^+)^2 \mathcal{A}_7^{--} + (\theta^-)^2 (\theta^+)^2 \mathcal{A}_{10} + \text{фермионы} \end{aligned}$$

определяет компонентную бозонную структуру суперполевого функционала (4.35):

$$S_{\text{bos}} = \frac{1}{4} \text{tr} \int d^4 x_L du \left( 2\mathcal{A}_1 \mathcal{A}_{10} + 2\mathcal{A}_4^{++} \mathcal{A}_7^{--} - \frac{1}{2} \mathcal{A}_5^2 - \frac{1}{4} \mathcal{A}_6^2 \right). \quad (4.41)$$

Уравнения, определяющие компоненты суперполя  $\mathcal{A}$ , возникают как коэффициенты в разложении суперполевого уравнения (4.38) по степеням  $\theta^\pm, \bar{\theta}^\pm$ :

$$\begin{aligned} d^{++} \mathcal{A}_1 = 0, \quad d^{++} \mathcal{A}_4^{++} = 0, \quad d^{++} \mathcal{A}_5 + 4\mathcal{A}_4^{++} = 0, \quad d^{++} \mathcal{A}_{6\alpha\beta} = 0, \\ {}^{++} \mathcal{A}_7^{--} + 2\mathcal{A}_5 + [\bar{\phi}, \mathcal{A}_1] = 0, \quad d^{++} \mathcal{A}_{10} + [\bar{\phi}, \mathcal{A}_4^{++}] = 0, \end{aligned} \quad (4.42)$$

где введено обозначение

$$d^{++} = \partial^{++} + i[f^{++}, \dots].$$

Общее решение этого набора гармонических уравнений может быть записано в терминах функций Грина для оператора  $\partial^{++}$ . Так, решение для первого уравнения из цепочки (4.42) получается в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1(u) = & \varphi - i \int du_1 \frac{u^+ u_1^-}{u^+ u_1^+} [f^{++}(u_1), \mathcal{A}_1(u_1)] = \\ = & \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n \int du_1 \dots du_n \frac{u^+ u_1^-}{u^+ u_1^+} \dots \frac{u_{n-1}^+ u_n^-}{u_{n-1}^+ u_n^+} \times \\ & \times [f^{++}(u_1), [\dots, [f^{++}(u_n), \varphi]]] = e^{ib} \varphi, \end{aligned} \quad (4.43)$$

где  $\varphi$  — частное решение однородного уравнения, и неаналитический мост  $e^{ib}$  для поля  $f^{++} = -i e^{ib} \partial^{++} e^{-ib}$  может быть построен итерациями как ряд Тейлора по степеням  $f^{++}$  подобно тому, как это было сделано в работе [56].

Таким образом, каждая компонента  $\mathcal{A}$  определяется бесконечным рядом по степеням взаимодействия обычных компонент суперполя  $W$  с полем  $f^{++}$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_4^{++} &= e^{ib} \square f^{++}, \quad \mathcal{A}_7^- = 4 e^{ib} \square f^{--}, \quad \mathcal{A}_6^{\alpha\beta} = e^{ib} F^{\alpha\beta}, \\ \mathcal{A}_5 &= e^{ib} \left( -4 \square f^{+-} + \frac{1}{2} [\varphi, \bar{\varphi}] \right), \quad \mathcal{A}_{10} = e^{ib} \left( -\square \bar{\varphi} + \frac{1}{8} [\bar{\varphi}, [\bar{\varphi}, \varphi]] \right). \end{aligned} \quad (4.44)$$

Здесь компонентные поля  $f^{ij}, \varphi, \bar{\varphi}, F^{\alpha\beta}$  определяются разложением (4.39), а действие матричного оператора  $e^{ib}$  задается соотношением (4.43).

Итак, наше рассмотрение показывает, что существует формальное решение для компонент суперполевого напряженности (4.40) в неполиномиальной форме, и действие (4.41) содержит кроме стандартного действия в вес-зуминовской калибровке модифицированное взаимодействие с компонентами  $\omega$ -мультиплета, в частности включающее четвертые степени пространственно-временных производных компонентных полей  $\omega, \omega^{(ij)}$ . Нахождение более детальной компонентной формы для выражения (4.41) является технически очень сложной задачей, хотя описанная процедура в принципе позволяет найти полное решение. Заметим также, что в секторе векторного мультиплета (т. е. при выключенной зависимости от компонент  $\omega$ -мультиплета) расходимости (4.26) и (4.35) сокращаются.

#### 4.6. Итоги. Суммируем основные результаты данного раздела.

Рассмотрена  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметричная массивная теория Янга–Миллса, действие которой зависит от  $\mathcal{N} = 2$  калибровочного суперполя  $V^{++}$  и штюкельбергова гипермультиплетного суперполя  $\omega$ . Предложены различные дуально-эквивалентные формулировки этой теории, отличающиеся разными способами введения калибровочно-инвариантного массивного слагаемого в суперполевое действие.

Развит метод фонового поля, позволяющий получить петлевое разложение эффективного действия в явно калибровочно-инвариантной и  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметричной форме. Показано, что вклад штюкельбергова суперполя  $\omega$  в эффективное действие может быть записан в терминах суперполя  $\mathcal{V}^{++}$  (4.7) — специфической калибровочно-ковариантной комбинации фоновых суперполей  $V^{++}$  и  $\omega$ .

Изучена структура однопетлевых расходимостей в рассматриваемой теории. Получены явно калибровочно-инвариантные и  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметричные выражения для однопетлевых расходимостей (4.26), (4.35), (4.37). Следует обратить внимание на то, что выражение (4.37) представляет собой новый калибровочно-инвариантный и  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметричный функционал,



построенный из суперполей  $V^{++}$  и  $\omega$ . Появление этого функционала в однопетлевых расходимостях позволяет сделать заключение о (мультипликативной) неперенормируемости рассматриваемой теории. Данный функционал можно рассматривать как  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметризацию ковариантного контрчлена в несуперсимметричной теории поля Янга–Миллса [174, 175]. Однако в отличие от несуперсимметричного случая массовый член в  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметричной массивной теории Янга–Миллса не перенормируется. Таким образом, дан полный анализ  $\mathcal{N} = 2$  суперполевой структуры однопетлевых расходимостей в рассматриваемой теории. Частичной проверкой полученных результатов является переход к предельному случаю выключенного взаимодействия между векторным мультиплетом и штюкельберговым мультиплетом или, другими словами, предел нулевой массы. В этом пределе остается единственная расходимость, обусловленная однопетлевыми вкладами духов (4.26) и определяющая известное значение [41] для бета-функции в «чистой»  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметричной теории Янга–Миллса.

Рассмотрена компонентная структура контрчлена вида (4.35) в бозонном секторе. Поскольку калибровочное преобразование для  $\mathcal{V}^{++}$  (4.7) однородно, мы не можем выбрать для  $\mathcal{V}^{++}$  калибровку Весса–Зумино, обычно используемую при переходе от суперполевого описания векторного мультиплета к компонентному. В связи с этим возникает проблема нахождения компонентной формы суперполевого функционала (4.35). Предложена процедура решения этой проблемы в бозонном секторе (см. (4.41), (4.44)).

Обсудим кратко перспективы дальнейшего исследования  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметричной массивной теории Янга–Миллса. Как известно,  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметричная безмассовая теория Янга–Миллса конечна за пределами однопетлевого приближения (см., например, [52]). Вопрос о расходимостях рассматриваемой массивной теории в высших петлях остается открытым. Представляет определенный интерес нахождение конечных вкладов в однопетлевое эффективное действие и изучение эффективного действия при наличии взаимодействия массивного калибровочного  $\mathcal{N} = 2$  суперполя с гипермультиплетами. Особый интерес, на наш взгляд, представляет проблема квантовой эквивалентности массивной  $\mathcal{N} = 2$  теории Янга–Миллса в рамках формализма Штюкельберга и  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметричных неабелевых вектор-тензорных моделей, которые, как было показано, дуальны друг другу на классическом уровне.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе дан обзор методов и результатов, касающихся структуры низкоэнергетического эффективного действия в четырехмерной квантовой теории калибровочных полей с  $\mathcal{N} = 2$  и  $\mathcal{N} = 4$  суперсимметриями. Изложение основано на суперполевых формулировках исследуемых суперсимметричных

моделей. Рассмотрены общие методы построения суперполевого эффективного действия в различных суперсимметричных теориях. Обсуждается связь проблем эффективного действия в суперсимметричной теории поля с проблемами низкоэнергетического предела в теории суперструн.

Сформулируем кратко основные направления исследований, затронутые в обзоре, и полученные результаты.

- Построено разложение по производным однопетлевого эффективного действия  $\mathcal{N} = 4$  суперсимметричной теории Янга–Миллса, содержащего как поля  $\mathcal{N} = 2$  векторного мультиплетта, так и поля гипермультиплеттов. Рассмотрена формулировка  $\mathcal{N} = 4$  суперсимметричной теории Янга–Миллса в терминах  $\mathcal{N} = 1$  суперполей, и получено калибровочно-инвариантное однопетлевое эффективное действие в приближении постоянных абелевых напряженностей и постоянных полей гипермультиплеттов. Найдено представление эффективного действия в виде разложения по суперковариантным производным  $\mathcal{N} = 2$  векторного мультиплетта. В частности, таким образом получено полное  $\mathcal{N} = 4$  суперсимметричное низкоэнергетическое эффективное действие, ранее построенное в работе [146], и найдены следующие за ведущими поправки к этому действию. Развита самосогласованная процедура нахождения зависящих от гипермультиплеттов дополнений и соответствующим образом деформированных преобразований скрытой суперсимметрии, обеспечивающих  $\mathcal{N} = 4$  суперсимметрию в следующих после ведущего членах эффективного действия  $\mathcal{N} = 4$  суперсимметричной теории Янга–Миллса.

- Исследована структура гипермультиплетной зависимости низкоэнергетического эффективного действия  $\mathcal{N} = 4$  суперсимметричной теории Янга–Миллса, сформулированной в  $\mathcal{N} = 2$  гармоническом суперпространстве. Проведена процедура квантования рассматриваемой модели, и изучена структура теории возмущений. Проведено суммирование бесконечной серии ковариантных гармонических суперграфов с произвольным числом внешних линий гипермультиплетта на нетривиальном фоне  $\mathcal{N} = 2$  векторного мультиплетта, и установлена общая структура зависимости эффективного действия от суперполей гипермультиплетта. Развита метод символов операторов в  $\mathcal{N} = 2$  гармоническом суперпространстве, в рамках которого вычислено однопетлевое эффективное действие в рассматриваемой теории. Результат представлен в виде интеграла по аналитическому подпространству гармонического суперпространства. Показано, что каждый член разложения эффективного действия по спинорным ковариантным производным может быть представлен как интеграл по полному  $\mathcal{N} = 2$  суперпространству. Как следствие, дано обоснование метода, использованного в предыдущем разделе, где однопетлевое эффективное действие в секторе гипермультиплетта было найдено на языке  $\mathcal{N} = 1$  суперполей с использованием специальной фиксации калибровки и предположений о возможности реконструкции явной  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметричной формы эффективного действия.

• Построено однопетлевое низкоэнергетическое эффективное действие в  $\mathcal{N} = 2$  суперконформных, ультрафиолетово-конечных моделях, сформулированных в гармоническом суперпространстве. Изучено эффективное действие, зависящее от фонового абелева  $\mathcal{N} = 2$  суперполя векторного мультиплетта и фонового суперполя гипермультиплетта, удовлетворяющих специальным ограничениям, которые определяют структуру вакуума в данных моделях. В рамках  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметричного метода фонового поля и в предположении, что гипермультиплет удовлетворяет условиям массовой оболочки, найдено универсальное выражение для эффективного действия. Для гипермультиплетта вне массовой оболочки построен специальный явно  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметричный лидирующий вклад, который записывается как интеграл по  $3/4$  полного  $\mathcal{N} = 2$  гармонического суперпространства. В бозонном секторе этот вклад содержит члены с тремя пространственно-временными производными, подобные членам Черна–Саймонса.

• Исследована структура эффективного действия  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметричной массивной теории Янга–Миллса, построенной с использованием нелинейной сигма-модели для штюкельбергова суперполя. Развита метод фонового поля, позволяющий получить петлевое разложение эффективного действия в явно калибровочно-инвариантной и  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметричной форме. Изучена структура однопетлевых расходимостей в рассматриваемой теории. В компонентной форме контрчлены содержат нестандартные контактные четырехвекторные взаимодействия и члены, необходимые для суперсимметризации последних.

Методы, подходы и результаты, рассматриваемые в обзоре, более подробно обсуждаются в п. 1.10, 2.9, 3.6, 4.6.

**Благодарности.** Авторы благодарны Б. М. Зупнику, О. Лехтенфельду, С. М. Кузенко, Б. Овруту, И. Б. Самсонову и А. А. Цейтлину за многочисленные обсуждения и сотрудничество. Работа авторов частично поддержана РФФИ, проект № 15-02-06670. Работа И. Л. Б. и Н. Г. П. частично поддержана РФФИ, проект № 15-02-03594-а, и грантом для ведущих научных школ РФ, проект НШ-88.2014.2.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Heisenberg W., Euler H.* Consequences of Dirac's Theory of Positrons // *Z. Phys.* 1936. V. 98. P.714–732; arXiv:physics/0605038.
2. *Schwinger J.S. et al.* On Gauge Invariance and Vacuum Polarization // *Phys. Rev.* 1951. V. 82. P. 664–679; *Швингер Ю. С. и др.* Новейшее развитие квантовой электродинамики. М.: Изд-во иностр. лит., 1954. С. 254–283.
3. *Weinberg S.* The Quantum Theory of Fields. V. 1: Foundations. Cambridge Univ. Press, 1995. 609 p.

4. *Weinberg S.* The Quantum Theory of Fields. V. 2: Modern Applications. Cambridge Univ. Press, 1996. 489 p.
5. *Weinberg S.* The Quantum Theory of Fields. V. 3: Supersymmetry. Cambridge Univ. Press, 2000. 419 p.
6. *Peskin M., Schreder D.* An Introduction to Quantum Field Theory. Addison-Wesley Publ. Company, 1995.
7. *Buchbinder I. L., Odintsov S. D., Shapiro I. L.* Effective Action in Quantum Gravity. Bristol; Philadelphia: IOP Publ., 1992. 413 p.
8. *De Witt B. S.* Dynamical Theory of Groups and Fields. New York: Gordon and Breach, 1965. 230 p.
9. *De Witt B. S.* The Global Approach to Quantum Field Theory. The International Series of Monographs on Physics, 114. Oxford: Oxford Univ. Press, 2003.
10. *Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В.* Введение в теорию квантованных полей. М.: Наука, 1973. 416 с.
11. *Славнов А. А., Фаддеев Л. Д.* Введение в квантовую теорию калибровочных полей. М.: Наука, 1978. 240 с.
12. *Арефьева И. Я., Фаддеев Л. Д., Славнов А. А.* Производящий функционал для  $S$  матрицы в калибровочных теориях // ТМФ. 1974. Т. 21. С. 311–321.
13. *Kallosh R. E.* The Renormalization in Nonabelian Gauge Theories // Nucl. Phys. B. 1974. V. 78. P. 293.
14. *Tyutin I. V.* Gauge Invariance in Field Theory and Statistical Physics in Operator Formalism. Preprint LEBEDEV-75-39. М., 1975; arXiv:0812.0580 [hep-th].
15. *Биррелл Н., Девис П.* Квантованные поля в искривленном пространстве: Пер. с англ. М.: Мир, 1984. 356 с.
16. *Лавров П. М., Тютин И. В.* О структуре перенормировок в калибровочных теориях // ЯФ. 1981. Т. 34. С. 277–284.
17. *Воронов Б. Л., Лавров П. М., Тютин И. В.* Канонические преобразования и зависимость от калибровки в калибровочных теориях общего вида // ЯФ. 1982. Т. 36. С. 498–508.
18. *Vilkovisky G. A.* The Unique Effective Action in Quantum Field Theory // Nucl. Phys. B. 1984. V. 234. P. 125–137.
19. *Vilkovisky G. A.* The Gospel According to De Witt. Quantum Gravity / Ed. S. Christensen. Bristol: Hilger, 1983. P. 169–209.
20. *Buchbinder I. L., Lavrov P. M., Odintsov S. D.* Unique Effective Action in Kaluza–Klein Quantum Theories and Spontaneous Compactification // Nucl. Phys. B. 1988. V. 308. P. 191–202.
21. *Fradkin E. S., Tseytlin A. A.* On the New Definition of Off-Shell Effective Action // Nucl. Phys. B. 1984. V. 234. P. 509.

22. *De Witt B. S.* The Effective Action. Architecture of Fundamental Interactions at Short Distances / Eds. P. Ramond, R. Stora. Amsterdam: North Holland, 1987. P. 1023–1057.
23. *Fock V. A.* The Proper Time in Classical and Quantum Mechanics // *Izv. USSR Acad. of Sci. Phys.* 1937. No. 4, 5. P. 551–568.
24. *Minakshisundaram S.* Eigen Functions on Riemannian Manifold // *J. Ind. Math. Soc.* 1953. V. 17. P. 159–165.
25. *Seeley R. T., Bott R., Patodi V. K.* Complex Powers of an Elliptic Operator // *Proc. Symp. Pure Math.* 1967. V. 10. P. 288–307.
26. *Atiyah M. F.* On the Heat Equation and the Index Theorem // *Invert. Math.* 1973. V. 19. P. 279–330.
27. *Gilkey P. B.* The Spectral Geometry on a Riemannian Manifold // *J. Differen. Geom.* 1975. V. 110. P. 601–618.
28. *Березин Ф. А., Шубин М. А.* Уравнение Шредингера. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1983. 392 с.
29. *Шубин М. А.* Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория. М.: Наука, 1978. 350 с.
30. *Маслов В. П., Федорюк М. В.* Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики. М.: Наука, 1976. 296 с.
31. *Харт Н.* Геометрическое квантование в действии: Пер. с англ. М.: Мир, 1985. 343 с.
32. *Barvinsky A. O., Vilkovisky G. A.* The Generalized Schwinger–De Witt Technique in Gauge Theories and Quantum Gravity // *Phys. Rep. C.* 1985. V. 119. P. 1–74.
33. *Avramidi I. G.* Heat Kernel and Quantum Gravity // *Lecture Notes Phys. New Series m: Monographs.* 2000. V. m64. P. 1–149.
34. *Elizalde E. et al.* Zeta Regularization Techniques with Applications. Singapore; New Jersey; London; Hong Kong: World Sci., 1994. P. 319.
35. *Jack I., Osborn H.* Two-Loop Background Field Calculations for Arbitrary Background Fields // *Nucl. Phys. B.* 1982. V. 207. P. 474–504.
36. *Bornsen J. P., van de Ven A. E. M.* Three-Loop Yang–Mills Beta Function via the Covariant Background Field Method // *Nucl. Phys. B.* 2003. V. 657. P. 257–303.
37. *Gates S. J. et al.* Superspace, or One Thousand and One Lessons in Supersymmetry. Benjamin: Cummings, 1983. 548 p.
38. *Siegel W.* Fields. arXiv:hep-th/9912205.
39. *Buchbinder I. L., Kuzenko S. M.* Ideas and Methods of Supersymmetry and Supergravity or a Walk through Superspace. Bristol; Philadelphia: IOP Publ., 1998. 656 p.
40. *Kuzenko S. M., McArthur I. N.* On the Background Field Method beyond One Loop: A Manifestly Covariant Derivative Expansion in SuperYang–Mills Theories // *JHEP.* 2003. V. 0305. P. 015.

41. *Buchbinder I. L. et al.* The Background Field Method for  $N = 2$  Super Yang–Mills Theories in Harmonic Superspace // *Phys. Lett. B.* 1998. V. 417. P. 61–71.
42. *Buchbinder I. L. et al.* Effective Action of the  $N = 2$  Maxwell Multiplet in Harmonic Superspace // *Phys. Lett. B.* 1997. V. 412. P. 309–319.
43. *Buchbinder I. L., Kuzenko S. M., Ovrut B. A.* On the  $D = 4$ ,  $N = 2$  Nonrenormalization Theorem // *Phys. Lett. B.* 1998. V. 433. P. 335–345.
44. *Buchbinder E. I. et al.* Central Charge as the Origin of Holomorphic Effective Action in  $N = 2$  Gauge Theory // *Mod. Phys. Lett. A.* 1998. V. 13. P. 1071–1082.
45. *Eremin S., Ivanov E.* Holomorphic Effective Action of  $N = 2$  SYM Theory from Harmonic Superspace with Central Charges // *Mod. Phys. Lett. A.* 2000. V. 15. P. 1859–1878.
46. *Howe P. S., Stelle K. S., Townsend P. K.* Miraculous Ultraviolet Cancellations in Supersymmetry Made Manifest // *Nucl. Phys. B.* 1984. V. 236. P. 125.
47. *Волков Д. В., Акулов И. П.* Возможное универсальное взаимодействие нейтрино // *Письма в ЖЭТФ.* 1972. Т. 16. С. 438–440.
48. *Гольфанд Ю. А., Лихтман Е. П.* Расширение алгебры генераторов группы Пуанкаре и нарушение  $P$ -инвариантности // *Письма в ЖЭТФ.* 1971. Т. 13. С. 323–326.
49. *Огиевецкий В. И., Мезинческу Л.* Симметрии между бозонами и фермионами и суперполя // *УФН.* 1975. Т. 117. С. 637–683.
50. *Wess J., Bagger J.* *Supersymmetry and Supergravity (Revised Edition).* Princeton Univ. Press, 1992. 260 p.
51. *Galperin A. S. et al.* *Harmonic Superspace.* Cambridge, UK: Cambridge Univ. Press, 2001. 306 p.
52. *Бухбиндер Е. И. и др.* Низкоэнергетическое эффективное действие в  $N = 2$  суперсимметричных теориях поля // *ЭЧАЯ.* 2001. Т. 32. С. 1222–1290.
53. *Грин М., Шварц Дж., Виттен Е.* *Теория суперструн: Пер. с англ.* М.: Мир, 1990. 518 с.
54. *Polchinski J.* *String Theory.* V. 1, 2. Cambridge, UK: Cambridge Univ. Press, 1998. 402 p., 531 p.
55. *Schwarz J. H.* Status of Superstring and  $M$ -Theory // *Lectures Presented at the Erice Intern. School of Subnucl. Phys.* 2008; arXiv:0812.1372 [hep-th].
56. *Galperin A. et al.* Unconstrained  $N = 2$  Matter, Yang–Mills and Supergravity Theories in Harmonic Superspace // *Class. Quant. Grav.* 1984. V. 1. P. 469–498.
57. *Galperin A. et al.* Harmonic Supergraphs. Green Functions // *Class. Quant. Grav.* 1985. V. 2. P. 601–616.
58. *Galperin A. et al.* Harmonic Supergraphs. Feynman Rules and Examples // *Ibid.* P. 617–630.
59. *Zupnik B. M.* Solution of Constraints of Supergauge Theory in the Harmonic  $SU(2)/U(1)$  Superspace // *Theor. Math. Phys.* 1986. V. 69. P. 1101–1105.

60. *Zupnik B. M.* The Action of the Supersymmetric  $N = 2$  Gauge Theory in Harmonic Superspace // *Phys. Lett. B.* 1987. V. 183. P. 175–176.
61. *Buchbinder I. L. et al.* Scale Invariant Low-Energy Effective Action in  $N = 3$  SYM Theory // *Nucl. Phys. B.* 2004. V. 689. P. 91–107.
62. *Березин Ф. А.* Метод вторичного квантования. М.: Наука, 1986. 319 с.
63. *Огиевецкий В. И., Полубаринов И. В.* Нотоф и его возможные взаимодействия // *ЯФ.* 1966. Т. 4. С. 216–223.
64. *Binétruy P., Girardi G., Grimm R.* Supergravity Couplings: A Geometric Formulation // *Phys. Rep.* 2001. V. 343. P. 255–462.
65. *Dragon N. et al.*  $N = 2$  Rigid Supersymmetry with Gauged Central Charge // *Nucl. Phys. B.* 1999. V. 538. P. 411–450.
66. *Grana M.* Flux Compactifications in String Theory: A Comprehensive Review // *Phys. Rep.* 2006. V. 423. P. 91–158.
67. *Kuzenko S. M.* On Massive Tensor Multiplets // *ЖНЕР.* 2005. V. 0501. P. 041.
68. *Иванов Е. А.* Супербраны и суперсимметричные теории Борна–Инфельда как нелинейные реализации // *ТМФ.* 2001. Т. 129. С. 278–297.
69. *Иванов Е. А.* Отображение «конформные теории- $AdS$ -браны» или еще один аспект  $AdS/CFT$ -соответствия // *ТМФ.* 2004. Т. 139. С. 77–95.
70. *Bellucci S., Ivanov E., Krivonos S.* Goldstone Superfield Actions for Partially Broken  $AdS(5)$  Supersymmetry // *Phys. Lett. B.* 2003. V. 558. P. 182.
71. *Bellucci S., Ivanov E., Krivonos S.* Goldstone Superfield Actions in  $AdS(5)$  Backgrounds // *Nucl. Phys. B.* 2003. V. 672. P. 123.
72. *Seiberg N.* The Power of Holomorphy: Exact Results in 4D SUSY Field Theories. arXiv:hep-th/9408013.
73. *Seiberg N.* Naturalness versus Supersymmetric Nonrenormalization Theorems // *Phys. Lett. B.* 1993. V. 318. P. 469–475.
74. *Seiberg N.* Supersymmetry and Nonperturbative Beta Functions // *Phys. Lett. B.* 1988. V. 206. P. 75–80.
75. *Seiberg N., Witten E.* Electric-Magnetic Duality, Monopole Condensation, and Confinement in  $N = 2$  Supersymmetric Yang–Mills Theory // *Nucl. Phys. B.* 1994. V. 426. P. 19–52; Erratum. // *Ibid.* V. 430. P. 485–486.
76. *Seiberg N., Witten E.* Monopoles, Duality and Chiral Symmetry Breaking in  $N = 2$  Supersymmetric QCD // *Ibid.* V. 431. P. 484–550.
77. *Argyres P. C., Plesser M. R., Seiberg N.* The Moduli Space of  $N = 2$  SUSY QCD and Duality in  $N = 1$  SUSY QCD // *Nucl. Phys. B.* 1996. V. 471. P. 159–194.
78. *Argyres P. C., Plesser M. R., Shapere A. D.*  $N = 2$  Moduli Spaces and  $N = 1$  Dualities for  $SO(n(c))$  and  $USp(2n(c))$  SuperQCD // *Nucl. Phys. B.* 1997. V. 483. P. 172–186.
79. *Ivanov E. A., Ketov S. V., Zupnik B. M.* Induced Hypermultiplet Self-Interactions in  $N = 2$  Gauge Theories // *Nucl. Phys. B.* 1998. V. 509. P. 53–82.

80. *Osborn H.* Topological Charges for  $N = 4$  Supersymmetric Gauge Theories and Monopoles of Spin 1 // *Phys. Lett. B.* 1979. V. 83. P. 321–330.
81. *Henningson M.* Extended Superspace, Higher Derivatives and  $SL(2, Z)$  Duality // *Nucl. Phys. B.* 1996. V. 458. P. 445–455.
82. *Dine M., Seiberg N.* Comments on Higher Derivative Operators in Some SUSY Field Theories // *Phys. Lett. B.* 1997. V. 409. P. 239–244.
83. *Yung A.* Higher Derivative Terms in the Effective Action of  $N = 2$  SUSY QCD from Instantons // *Nucl. Phys. B.* 1998. V. 512. P. 79–102.
84. *Dorey N. et al.* Instantons, Higher Derivative Terms, and Nonrenormalization Theorems in Supersymmetric Gauge Theories // *Phys. Lett. B.* 1997. V. 408. P. 213–221.
85. *Periwal V., von Unge R.* Accelerating D-branes // *Phys. Lett. B.* 1998. V. 430. P. 71–76.
86. *De Wit B., Grisaru M.T., Rocek M.* Nonholomorphic Corrections to the One Loop  $N = 2$  Super Yang–Mills Action // *Phys. Lett. B.* 1996. V. 374. P. 297–303.
87. *Buchbinder I.L., Kuzenko S.M.* Comments on the Background Field Method in Harmonic Superspace: Nonholomorphic Corrections in  $N = 4$  SYM // *Mod. Phys. Lett. A.* 1998. V. 13. P. 1623–1636.
88. *Buchbinder E.I., Buchbinder I.L., Kuzenko S.M.* Nonholomorphic Effective Potential in  $N = 4$   $SU(n)$  SYM // *Phys. Lett. B.* 1999. V. 446. P. 216–223.
89. *Lowe D.A., von Unge R.* Constraints on Higher Derivative Operators in Maximally Supersymmetric Gauge Theory // *JHEP.* 1998. V. 9811. P. 014.
90. *Fradkin E.S., Tseytlin A.A.* Quantum Properties of Higher Dimensional and Dimensionally Reduced Supersymmetric Theories // *Nucl. Phys. B.* 1983. V. 227. P. 252.
91. *Бухбиндер И.Л.* Расходимости эффективного действия во внешнем суперкалибровочном поле // *ЯФ.* 1982. Т. 36. С. 509–512.
92. *Ohrndorf T.* An Example of an Explicitly Calculable Supersymmetric Low-Energy Effective Lagrangian: The Heisenberg–Euler Lagrangian of Supersymmetric QED // *Nucl. Phys. B.* 1986. V. 273. P. 165.
93. *Ohrndorf T.* The Effective Lagrangian of Supersymmetric Yang–Mills Theory // *Phys. Lett. B.* 1986. V. 176. P. 421.
94. *Кузенко С.М., Яревская Ж.В.* Суперполево эффективное действие в  $N = 1$ ,  $D = 4$  суперсимметричных калибровочных теориях // *ЯФ.* 1993. Т. 56. С. 193–200.
95. *Kuzenko S.M., Tyler S.J.* Supersymmetric Euler–Heisenberg Effective Action: Two-Loop Results // *JHEP.* 2007. V. 0705. P. 081.
96. *McArthur I.N., Gargett T.D.* A “Gaussian” Approach to Computing Supersymmetric Effective Actions // *Nucl. Phys. B.* 1997. V. 497. P. 525–540.
97. *Jack I., Jones D.R.T., West P.* Not the No-renormalization Theorem? // *Phys. Lett. B.* 1991. V. 258. P. 382–385.



98. *Buchbinder I. L., Kuzenko S., Yarevskaya Zh.* Supersymmetric Effective Potential: Superfield Approach // *Nucl. Phys. B.* 1994. V. 411. P. 665–692.
99. *Бухбиндер И. Л., Кузенко С. М., Петров А. Ю.* Суперполевого эффективный потенциал в двухпетлевом приближении // *ЯФ.* 1996. Т. 59, № 1. С. 157–162.
100. *Buchbinder I. L., Kuzenko S. M., Petrov A. Yu.* Superfield Chiral Effective Potential // *Phys. Lett. B.* 1994. V. 321. P. 372–377.
101. *Buchbinder I. L., Petrov A. Yu.* Holomorphic Effective Potential in General Chiral Superfield Model // *Phys. Lett. B.* 1999. V. 461. P. 209–217.
102. *Buchbinder I. L., Cvetič M., Petrov A. Yu.* One-Loop Effective Potential of  $N = 1$  Supersymmetric Theory and Decoupling Effects // *Nucl. Phys. B.* 2000. V. 571. P. 358–418.
103. *Grisaru M. T., Roček M., von Unge R.* Effective Kahler Potentials // *Phys. Lett. B.* 1996. V. 383. P. 415–421.
104. *Buchbinder I. L., Kuzenko S. M., Petrov A. Yu.* Superfield Chiral Effective Potential // *Phys. Lett. B.* 1994. V. 321. P. 372–377.
105. *Buchbinder I. L., Kuzenko S. M., Petrov A. Yu.* Superfield Effective Potential in the Two-Loop Approximation // *Yad. Fiz.* 1996. V. 59. P. 157–162.
106. *Pickering A., West P.* The One-Loop Effective Super-Potential and Non-Holomorphicity // *Phys. Lett. B.* 1996. V. 383. P. 54–62.
107. *Kuzenko S. M., McArthur I. N.* Effective Action of  $N = 4$  Super Yang–Mills:  $N = 2$  Superspace Approach // *Phys. Lett. B.* 2001. V. 506. P. 140–146.
108. *Kuzenko S. M., McArthur I. N.* Hypermultiplet Effective Action:  $N = 2$  Superspace Approach // *Ibid.* V. 513. P. 213–222.
109. *Kuzenko S. M., McArthur I. N.* On the Two-Loop Four Derivative Quantum Corrections in 4-D  $N = 2$  Superconformal Field Theories // *Nucl. Phys. B.* 2004. V. 683. P. 3–26.
110. *Kuzenko S. M.* Exact Propagators in Harmonic Superspace // *Phys. Lett. B.* 2004. V. 600. P. 163–170.
111. *Kuzenko S. M.* Self-Dual Effective Action of  $N = 4$  SYM Revisited // *JHEP.* 2005. V. 0503. P. 008.
112. *van Holten J. W.* Rigid Symmetries and BRST Invariance in Gauge Theories // *Phys. Lett. B.* 1988. V. 200. P. 507–512.
113. *Kuzenko S. M., McArthur I. N.* Quantum Metamorphosis of Conformal Symmetry in  $N = 4$  Super Yang–Mills Theory // *Nucl. Phys. B.* 2002. V. 640. P. 78–94.
114. *Kuzenko S. M., McArthur I. N.* On Quantum Deformation of Conformal Symmetry: Gauge Dependence via Field Redefinitions // *Phys. Lett. B.* 2002. V. 544. P. 357–366.
115. *Kuzenko S. M., McArthur I. N., Theisen S.* Low-Energy Dynamics from Deformed Conformal Symmetry in Quantum 4-D  $N = 2$  SCFTS // *Nucl. Phys. B.* 2003. V. 660. P. 131–155.

116. *Maldacena J. M.* The Large  $N$  Limit of Superconformal Field Theories and Supergravity // *Adv. Theor. Math. Phys.* 1998. V. 2. P. 231–252.
117. *Gopakumar R.* From Free Fields to *AdS* // *Phys. Rev. D.* 2004. V. 70. P. 025009.
118. *Gorsky A., Lysov V.* From Effective Actions to the Background Geometry // *Nucl. Phys. B.* 2005. V. 718. P. 293–318.
119. *Fradkin E. S., Tseytlin A. A.* Nonlinear Electrodynamics from Quantized Strings // *Phys. Lett. B.* 1985. V. 163. P. 123.
120. *Metsaev R. R., Tseytlin A. A.* On Loop Corrections to String Theory Effective Actions // *Nucl. Phys. B.* 1988. V. 298. P. 109.
121. *Tseytlin A. A.* Born–Infeld Action, Supersymmetry and String Theory // *The Many Faces of the Superworld* / Ed. M. A. Shifman. World Sci. Publ. Co, 1999. P. 417–452.
122. *Born M.* Quantum Theory of the Electromagnetic Field // *Proc. Roy. Soc. A.* 1934. V. 143. P. 410–437.
123. *Born M., Infeld L.* Foundations of the New Field Theory // *Ibid.* V. 144. P. 425–451.
124. *Gonzalez-Rey F. et al.* Self-Dual Effective Action of  $N = 4$  Super-Yang–Mills // *Nucl. Phys. B.* 1999. V. 54. P. 218–242.
125. *Kuzenko S. M., Theisen S.* Supersymmetric Duality Rotations // *JHEP.* 2000. V. 0003. P. 034.
126. *Ivanov E. A., Zupnik B. M.*  $\mathcal{N} = 3$  Supersymmetric Born–Infeld Theory // *Nucl. Phys. B.* 2001. V. 618. P. 3–20.
127. *Ivanov E.* Towards Higher  $N$  Superextensions of Born–Infeld Theory // *Изв. вузов. Физика.* 2002. Т. 7. С. 47–56.
128. *Kuzenko S. M., Theisen S.* Nonlinear Self-Duality and Supersymmetry // *Fortsh. Phys.* 2001. V. 49. P. 273–309.
129. *Cecotti S., Ferrara S.* Supersymmetric Born–Infeld Lagrangians // *Phys. Lett. B.* 1987. V. 187. P. 335.
130. *Bergshoeff E. A., de Roo M., Sevrin A.* Towards a Supersymmetric Non-Abelian Born–Infeld Theory // *Intern. J. Mod. Phys. A.* 2001. V. 16. P. 750–758.
131. *Ketov S. V.* A Manifestly  $N = 2$  Supersymmetric Born–Infeld Action // *Mod. Phys. Lett. A.* 1999. V. 14. P. 501–510.
132. *Ketov S. V.*  $N = 1$  and  $N = 2$  Supersymmetric Nonabelian Born–Infeld Actions from Superspace // *Phys. Lett. B.* 2000. V. 491. P. 207–213.
133. *Refolli A., Terzi N., Zanon D.* Non-Abelian  $N = 2$  Supersymmetric Born–Infeld Action // *Ibid.* V. 486. P. 337–345.
134. *Bagger J., Galperin A.* A New Goldstone Multiplet for Partially Broken Supersymmetry // *Phys. Rev. D.* 1997. V. 55. P. 1091–1098.
135. *Roček M., Tseytlin A. A.* Partial Breaking of Global  $D = 4$  Supersymmetry, Constrained Superfields, and Three-Brane Actions // *Phys. Rev. D.* 1999. V. 59. P. 106001.

136. *Bellucci S., Ivanov E., Krivonos S.* Superworldvolume Dynamics of Superbranes from Nonlinear Realizations // *Phys. Lett. B.* 2000. V. 482. P. 233.
137. *Bellucci S., Ivanov E., Krivonos S.*  $N = 2$  and  $N = 4$  Supersymmetric Born–Infeld Theories from Nonlinear Realizations // *Phys. Lett. B.* 2001. V. 502. P. 279–290.
138. *Bellucci S., Ivanov E., Krivonos S.* Towards the Complete  $N = 2$  Superfield Born–Infeld Action with Partially Broken  $N = 4$  Supersymmetry // *Phys. Rev. D.* 2001. V. 64. P. 025014.
139. *Aharony O. et al.* Large  $N$  Field Theories, String Theory and Gravity // *Phys. Rep.* 2000. V. 323. P. 183–386.
140. *D'Hoker E., Freedman D.Z.* Supersymmetric Gauge Theories and the *ADS/CFT* Correspondence. arXiv:hep-th/0201253.
141. *Chepelev I., Tseytlin A.A.* Long Distance Interactions of Branes: Correspondence between Supergravity and SuperYang–Mills Descriptions // *Nucl. Phys. B.* 1998. V. 515. P. 73–113.
142. *Paban S., Sethi S., Stern M.* Supersymmetry and Higher Derivative Terms in the Effective Action of Yang–Mills Theories // *JHEP.* 1998. V. 9806. P. 012.
143. *Drummond J.M. et al.* Integral Invariants in  $N = 4$  SYM and the Effective Action for Coincident D-branes // *JHEP.* 2003. V. 0308. P. 016.
144. *Buchbinder I.L., Kuzenko S.M., Tseytlin A.A.* On Low-Energy Effective Actions in  $N = 2$ ,  $N = 4$  Superconformal Theories in Four Dimensions // *Phys. Rev. D.* 2000. V. 62. P. 045001.
145. *Buchbinder I.L., Petrov A. Yu., Tseytlin A.A.* Two-Loop  $N = 4$  Super Yang–Mills Effective Action and Interaction between D3-branes // *Nucl. Phys. B.* 2002. V. 621. P. 179–207.
146. *Buchbinder I.L., Ivanov E.A.* Complete  $N = 4$  Structure of Low-Energy Effective Action in  $N = 4$  Super Yang–Mills Theories // *Phys. Lett. B.* 2002. V. 524. P. 208–216.
147. *Buchbinder I.L., Ivanov E.A., Petrov A. Yu.* Complete Low-Energy Effective Action in  $N = 4$  SYM: A Direct  $N = 2$  Supergraph Calculation // *Nucl. Phys. B.* 2003. V. 653. P. 64–84.
148. *Ketov S.V.* Quantum Nonlinear Sigma Models: From Quantum Field Theory to Supersymmetry, Conformal Field Theory, Black Holes and Strings. Berlin: Springer, 2000. 420 p.
149. *Волков Д. В.* Феноменологические лагранжианы // *ЭЧАЯ.* 1973. Т. 4. С. 3–41.
150. *Zumino B.* Supersymmetry and Kähler Manifolds // *Phys. Lett. B.* 1979. V. 87. P. 203.
151. *Alvarez-Gaumé L., Freedman D.Z.* Geometrical Structure and Ultraviolet Finiteness in the Supersymmetric Sigma Model // *Commun. Math. Phys.* 1981. V. 80. P. 443.
152. *Hitchin N.J. et al.* Hyperkähler Metrics and Supersymmetry // *Commun. Math. Phys.* 1987. V. 108. P. 535.

153. *Bagger J., Witten E.* Matter Coupling in  $N = 2$  Supergravity // Nucl. Phys. B. 1983. V. 222. P. 1.
154. *Kuzenko S.M.* Lectures on Nonlinear Sigma-Models in Projective Superspace // J. Phys. A. 2010. V. 43. P. 443001.
155. *Kazakov D.I.* Renormalization Properties of Softly Broken SUSY Gauge Theories. arXiv:hep-ph/0208200.
156. *Weinberg S.* Phenomenological Lagrangians // Phys. A. 1979. V. 96. P. 327.
157. *Славнов А.А., Фаддеев Л.Д.* Безмассовые и массивные поля Янга–Миллса // ТМФ. 1970. Т. 3. С. 18–23.
158. *Славнов А.А.* Массивные калибровочные поля // ТМФ. 1972. Т. 10. С. 305–328.
159. *Вайнштейн А.И., Хриплович И.Б.* О пределе нулевой массы и ренормируемости в теории массивного поля Янга–Миллса // ЯФ. 1971. Т. 13. С. 198–211.
160. *Veltman M.* Perturbation Theory of Massive Yang–Mills Fields // Nucl. Phys. B. 1968. V. 7. P. 637–650.
161. *t’Hooft G.* Renormalization of Massless Yang–Mills Fields // Nucl. Phys. B. 1971. V. 33. P. 173–199.
162. *t’Hooft G.* Renormalizable Lagrangians for Massive Yang–Mills Fields // Ibid. V. 35. P. 167–188.
163. *Stueckelberg T. C. G.* Interaction Energy in Electrodynamics and in the Field Theory of Nuclear Forces // Helv. Phys. Acta. 1938. V. 11. P. 225–244.
164. *Kalb M., Ramond P.* Classical Direct Interstring Action // Phys. Rev. D. 1974. V. 9. P. 2273.
165. *Nambu Y.* Magnetic and Electric Confinement of Quarks // Phys. Rep. 1976. V. 23. P. 250–253.
166. *Ruegg H., Ruiz-Altaba M.* The Stueckelberg Field // Intern. J. Mod. Phys. A. 2004. V. 19. P. 3265–3348.
167. *Bettinelli D., Ferrari R., Quadri A.* A Massive Yang–Mills Theory Based on the Nonlinearly Realized Gauge Group // Phys. Rev. D. 2008. V. 77. P. 045021.
168. *Fradkin E.S., Tseytlin A.A.* Quantum Equivalence of Dual Field Theories // Ann. Phys. 1985. V. 162. P. 31.
169. *Buchbinder I.L., Kuzenko S.M.* Quantization of the Classically Equivalent Theories in the Superspace of Simple Supergravity and Quantum Equivalence // Nucl. Phys. B. 1988. V. 308. P. 162–190.
170. *Славнов А.А., Фролов С.А.* Квантование неабелевых антисимметричных тензорных полей // ТМФ. 1988. Т. 75. С. 201–211.
171. *Kinimasa T., Goto T.* Generalization of the Stueckelberg Formalism to the Massive Yang–Mills Field // Prog. Theor. Phys. 1967. V. 37. P. 452–464.
172. *Арефьева И.Я., Славнов А.А.* Геометрическое происхождение модели Хиггса // ТМФ. 1980. Т. 44. С. 3–16.

173. *Khelashvili G. A., Ogievetsky V. I.* Nonrenormalizability of the Massive  $N = 2$  Super Yang–Mills Theory // *Mod. Phys. Lett. A.* 1991. V. 6. P. 2143–2154.
174. *Shizuya K.* Renormalization of Two-Dimensional Massive Yang–Mills Theory and Nonrenormalizability of Its Four-Dimensional Version // *Nucl. Phys. B.* 1977. V. 121. P. 125.
175. *Kafiev Yu. N.* Massive Yang–Mills Fields: Gauge Invariance and One-Loop Counterterm // *Nucl. Phys. B.* 1982. V. 201. P. 341–351.
176. *Славнов А. А., Фаддеев Л. Д.* Инвариантная теория возмущений для нелинейных киральных лагранжианов // *ТМФ.* 1971. Т. 8. С. 297–307.
177. *Первушин В. Н.* О квантовании киральных теорий // *ТМФ.* 1975. Т. 22. С. 291–299.
178. *Казаков Д. И., Первушин В. Н., Пушкин С. В.* Инвариантная перенормировка для теорий с нелинейной симметрией // *ТМФ.* 1977. Т. 31. С. 169–176.
179. *Capri M. A. L. et al.* A Study of the Gauge Invariant, Nonlocal Mass Operator  $\text{Tr} \int d^4 \times F_{\mu\nu}(D^2)^{-1} F_{\mu\nu}$  in Yang–Mills Theories // *Phys. Rev. D.* 2005. V. 72. P. 105016.
180. *Cvetič G., Grosse-Knetter C., Kogerler R.* Two and Three Vector Boson Production in  $e^+e^-$  Collisions within the BESS Model // *Intern. J. Mod. Phys. A.* 1994. V. 9. P. 5313–5358.
181. *Gomis J. J., Weinberg S.* Are Nonrenormalizable Gauge Theories Renormalizable? // *Nucl. Phys. B.* 1996. V. 469. P. 473–487.
182. *Buchbinder I. L. et al.* Gauge Theory in Deformed  $N = (1, 1)$  Superspace // *Phys. Part. Nucl.* 2008. V. 39. P. 759–797.
183. *Ferrara S. et al.* Non-Anticommutative Chiral Singlet Deformation of  $N = (1, 1)$  Gauge Theory // *Nucl. Phys. B.* 2005. V. 704. P. 154–180.
184. *Волков Г. Г., Масликов А. А.* Компонентная структура  $N = 2$  суперЯнга-Миллса теории в гармоническом суперпространстве // *ЯФ.* 1994. Т. 57. С. 351–360.
185. *Ovrut B. A., Wess J.* Supersymmetric  $R_\xi$  Gauge and Radiative Symmetry Breaking // *Phys. Rev. D.* 1982. V. 25. P. 409–466.
186. *Heslop P. J., Howe P. S.* Aspects of  $N = 4$  SYM // *JHEP.* 2004. V. 0401. P. 058.
187. *Drummond J. M. et al.* Integral Invariants in  $N = 4$  SYM and the Effective Actions for Coincident D-branes // *JHEP.* 2003. V. 0308. P. 016.
188. *Howe P. S., Stelle K. S., West P. C.* A Class of Finite Four-Dimensional Supersymmetric Field Theories // *Phys. Lett. B.* 1983. V. 124. P. 55.
189. *Aharony O. et al.* Field Theory Questions for String Theory Answers // *Nucl. Phys. B.* 1997. V. 493. P. 177–197.
190. *Kachru S., Silverstein E.* 4-D Conformal Theories and Strings on Orbifolds // *Phys. Rev. Lett.* 1998. V. 80. P. 4855–4858.
191. *Lawrence A., Nekrasov N., Vafa C.* On Conformal Field Theories in Four Dimensions // *Nucl. Phys. B.* 1998. V. 533. P. 199–209.

192. Douglas M. R., Moore G. W. D-branes, Quivers, and ALE Instantons. arXiv:hep-th/9603167.
193. Tseytlin A. A., Zarembo K. Magnetic Interactions of D-branes and Wess–Zumino Terms in Super Yang–Mills Effective Actions // Phys. Lett. B. 2000. V. 474. P. 95–102.
194. Intriligator K. A. Anomaly Matching and a Hopf–Wess–Zumino Term in 6d,  $N = (2, 0)$  Field Theories // Nucl. Phys. B. 2000. V. 581. P. 257–273.
195. Argyres P. C. et al. Higher-Derivative Terms in  $N = 2$  Supersymmetric Effective Actions // JHEP. 2003. V. 0307. P. 060.
196. Louis J., Micu A. Type 2 Theories Compactified on Calabi–Yau Threefolds in the Presence of Background Fluxes // Nucl. Phys. B. 2002. V. 635. P. 395–431.
197. Louis J., Schulgin W. Massive Tensor Multiplets in  $N = 1$  Supersymmetry // Fortschr. Phys. 2005. V. 53. P. 235–245.
198. D’Auria R., Sommovigo L., Vaula S.  $N = 2$  Supergravity Lagrangian Coupled to Tensor Multiplets with Electric and Magnetic Fluxes // JHEP. 2004. V. 0411. P. 028.
199. D’Auria R., Ferrara S. Dyonic Masses from Conformal Field Strengths in D Even Dimensions // Phys. Lett. B. 2005. V. 606. P. 211–217.
200. Siegel W. Hidden Ghosts // Phys. Lett. B. 1980. V. 93. P. 170.
201. Sezgin E., van Nieuwenhuizen P. Renormalizability Properties of Antisymmetric Tensor Fields Coupled to Gravity // Phys. Rev. D. 1980. V. 22. P. 301.
202. Duff M. J., van Nieuwenhuizen P. Quantum Inequivalence of Different Field Representations // Phys. Lett. B. 1980. V. 94. P. 179.
203. Grisaru M. T. et al. Energy Momentum Tensors, Supercurrents, (Super)Traces and Quantum Equivalence // Nucl. Phys. B. 1984. V. 247. P. 157.
204. Bastianelli F., Benincasa P., Giombi S. Worldline Approach to Vector and Antisymmetric Tensor Fields // JHEP. 2005. V. 0504. P. 010.
205. Bastianelli F., Benincasa P., Giombi S. Worldline Approach to Vector and Antisymmetric Tensor Fields. II // Ibid. P. 114.
206. Scherk J., Schwarz J. H. How to Get Masses from Extra Dimensions // Nucl. Phys. B. 1979. V. 153. P. 61–88.
207. Howe P. S., West P. C. Superconformal Invariants and Extended Supersymmetry // Phys. Lett. B. 1997. V. 400. P. 307.
208. Howe P. S., West P. C. Three Point Functions in  $N = 4$  Yang–Mills // Phys. Lett. B. 1998. V. 444. P. 341.
209. Kuzenko S. M., Theisen S. Correlation Functions of Conserved Currents in  $N = 2$  Superconformal Theory // Class. Quant. Grav. 2000. V. 17. P. 665.
210. Galperin A. et al. Hyperkahler Metrics and Harmonic Superspace // Commun. Math. Phys. 1986. V. 103. P. 515.
211. Pletnev N. G., Banin A. T. Covariant Technique of Derivative Expansion of One-Loop Effective Action // Phys. Rev. D. 1999. V. 60. P. 105017–105037.

- 
212. *Pletnev N. G., Banin A. T.* Application of Symbol Operator Technique for Effective Action Computation // Intern. J. Mod. Phys. A. 2002. V. 17. P. 825–828.
213. *Banin A. T., Buchbinder I. L., Pletnev N. G.* Low-Energy Effective Action of  $\mathcal{N} = 2$  Gauge Multiplet by Hypermultiplet Matter // Nucl. Phys. B. 2001. V. 598. P. 371–399.
214. *Banin A. T., Buchbinder I. L., Pletnev N. G.* On Low-Energy Effective Action in  $\mathcal{N} = 2$  Super Yang–Mills Theories on Non-Abelian Background // Phys. Rev. D. 2002. V. 66. P. 045021–045041.
215. *Banin A. T., Buchbinder I. L., Pletnev N. G.* One-Loop Effective Action for  $\mathcal{N} = 4$  SYM Theory in the Hypermultiplet Sector — Leading Low-Energy Approximation and Beyond // Phys. Rev. D. 2003. V. 68. P. 065024–065050.
216. *Buchbinder I. L., Pletnev N. G.* Construction of One-Loop  $N = 4$  SYM Effective Action on the Mixed Branch in the Harmonic Superspace Approach // JHEP. 2005. V. 0509. P. 073.
217. *Banin A. T., Buchbinder I. L., Pletnev N. G.* On Quantum Properties of the Four-Dimensional Generic Chiral Superfield Model // Phys. Rev. D. 2006. V. 74. P. 045010.
218. *Buchbinder I. L., Pletnev N. G.* Hypermultiplet Dependence of One-Loop Effective Action in the  $N = 2$  Superconformal Theories // JHEP. 2007. V. 0704. P. 096.
219. *Бухбиндер И. Л., Плетнев Н. Г.* Однопетлевое эффективное действие в  $N = 2$  суперсимметричной теории массивного поля Янга–Миллса // ТМФ. 2008. Т. 157. С. 22–40.