

СВОЙСТВА КОНФОРМНЫХ БЛОКОВ, ГИПОТЕЗА АГТ И ПОЛИНОМЫ УЗЛОВ

А. А. Морозов *

Институт проблем передачи информации РАН, Москва

Национальный исследовательский ядерный университет МИФИ, Москва

ВВЕДЕНИЕ	1429
КОНФОРМНАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ	1440
АГТ-СООТНОШЕНИЕ	1484
ТЕОРИЯ СВОБОДНЫХ ПОЛЕЙ И ИНТЕГРАЛЫ СЕЛЬБЕРГА	1505
ТЕОРИЯ ЧЕРНА–САЙМОНСА	1518
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	1538
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	1538

*E-mail: andrey.morozov@itep.ru

СВОЙСТВА КОНФОРМНЫХ БЛОКОВ, ГИПОТЕЗА АГТ И ПОЛИНОМЫ УЗЛОВ

*А. А. Морозов**

Институт проблем передачи информации РАН, Москва

Национальный исследовательский ядерный университет МИФИ, Москва

В данном обзоре рассмотрены различные свойства корреляторов двумерной конформной теории поля. В частности, рассмотрена их связь со статистической суммой четырехмерной суперсимметричной теории. Помимо интереса, который представляет само наличие связи такого рода, данное соотношение приносит и практическую пользу. Так, известные выражения для статистической суммы суперсимметричной теории рассчитать намного проще, нежели напрямую выражения для корреляторов в конформной теории. Для этой же цели полезно и рассмотренное представление корреляторов конформной теории как матричной модели. Интегральная форма этих корреляторов позволяет обобщить полученные результаты для алгебры Вирасоро на более сложные случаи алгебры W или квантовой алгебры Вирасоро. Это позволяет рассматривать более сложные конфигурации в конформной теории поля.

Вторая часть обзора посвящена трехмерной теории Черна–Саймонса. Во многом тем вниманием, которое она привлекает в настоящее время, эта теория обязана своей связи с математической теорией узлов. Математическая теория узлов — это довольно старая область математики, которую начали изучать еще в XVII в. Основная задача этой теории состоит в построении алгоритма, позволяющего отличить друг от друга различные узлы — замкнутые контуры в трехмерном пространстве. Основным методом, используемый для достижения этой цели, состоит в построении так называемых инвариантов узлов.

In this review we describe different properties of conformal blocks of the 2D conformal field theory. In particular, the connection between conformal blocks and partition function of 4D supersymmetric theory is discussed. Besides the interest of such a connection by itself it also provides practical simplifications of calculations in both theories. For the same purpose the representation of correlators in conformal theory as a matrix model varieties can be used. Integral form of such correlators allows one to generalize the results evaluated for Virasoro algebra to more complicated cases of W -algebras and quantum Virasoro algebras. This leads to the possible studies of more complicated structures in conformal field theory.

*E-mail: andrey.morozov@itep.ru

The second part of the review is dedicated to the Chern–Simons theory. The interest which it arouses at the moment is due to its connection with the mathematical knot theory. This theory is quite an old subject that appeared in the 17th century. Its goal is to construct an algorithm which allows one to distinguish between different knots — contours in 3D space. The main approach to this problem, which is described in this review, is to construct the so-called knot invariants.

PACS: 11.25.Hf; 11.27.+d; 11.15.Yc

ВВЕДЕНИЕ

Квантовая теория поля возникла в результате слияния квантовой механики и классической теории поля. Она, с одной стороны, включает в себя вероятностную картину мира и принцип неопределенности, а с другой стороны, учитывает ограничения, связанные со специальной теорией относительности. Теории такого типа позволяют описать основные процессы, связанные с физикой элементарных частиц, атомной физикой и физикой твердого тела.

Аппаратом квантовой теории поля из квантовой механики был заимствован такой важный принцип, как разделение величин на наблюдаемые и ненаблюдаемые. Согласно данному принципу, любой величине, которую можно измерить, соответствует наблюдаемая теории, т.е. среднее значение соответствующего ей оператора. В квантовой теории поля средние значения такого типа соответствуют корреляционным функциям. Таким образом, любые физические процессы в квантовой теории поля описываются некоторыми корреляционными функциями (корреляторами). В рамках данного обзора рассмотрены свойства корреляторов двух моделей квантовой теории поля: трехмерной теории Черна–Саймонса и двумерной конформной теории поля, а также связь последней с суперсимметричными теориями.

Суперсимметричные теории в настоящее время широко изучаются в теоретической физике. Суперсимметрия — это симметрия, связывающая бозоны и фермионы — частицы с целыми и полуцелыми спинами соответственно, которые по этой причине описываются различными законами и распределениями. Согласно этой гипотетической симметрии для каждого бозона (и квантового поля, ему соответствующего) существует парный ему фермион, и наоборот. Существование такой симметрии было предположено в работах В. Акулова, Д. Волкова, Ю. Гольфанда и Е. Лихтмана [1–5]. Данная симметрия имеет очень широкое применение как в теории струн, так и в других областях теоретической физики, но экспериментальных свидетельств суперсимметрии в физике элементарных частиц пока не обнаружено. $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричная теория, которая изучается при рассмотрении АГТ-соотношения, обладает двумя симметриями такого типа.

В работе Н. Зайберга и Э. Виттена [6, 7] была подробно рассмотрена такая $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричная теория Янга–Миллса. Она включает в себя четыре различных поля: два бозонных — векторное A^a и скалярное ϕ^a и два фермионных — ψ^a и λ^a . Такая теория описывается лагранжианом

$$\mathcal{L} = \frac{1}{g^2} \text{Tr} \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{g^2 \theta^2}{32\pi^2} F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} + (D_\mu A)^\dagger D^\mu A - \frac{1}{2} [A^\dagger, A]^2 - \right. \\ \left. - i\lambda\sigma^\mu D_\mu \bar{\lambda} - i\bar{\psi}\bar{\sigma}^\mu D_\mu \psi - i\sqrt{2}[\lambda, \psi]A^\dagger - i\sqrt{2}[\bar{\lambda}, \bar{\psi}]A \right). \quad (\text{B.1})$$

Из-за наличия суперсимметрии эффективное низкоэнергетичное действие такой теории всегда можно представить с помощью голоморфной функции \mathcal{F} , называемой препотенциалом:

$$S = \frac{1}{4\pi} \text{Im} \int d^4x \text{Tr} \left[\mathcal{F}''(\phi) |\partial_\mu \phi|^2 + \mathcal{F}'(\phi) \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} (F^{\mu\nu} - i\tilde{F}^{\mu\nu}) + \dots \right) \right]. \quad (\text{B.2})$$

Специфика $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричной теории состоит, среди прочего, в наличии в ней дуальности. Математически эта дуальность выражается формулой

$$\phi_D = \frac{\partial \mathcal{F}(\phi)}{\partial \phi}, \quad \phi = \frac{\partial \mathcal{F}_D(\phi_D)}{\partial \phi_D}, \quad (\text{B.3})$$

где ϕ_D — формально введенное, согласно этой формуле, дуальное поле.

Помимо известной ранее формулы для препотенциала, рассчитанной по теории возмущений,

$$\mathcal{F}_{\text{pert}}(\phi) \sim \frac{i}{2\pi} \phi^2 \ln \frac{\phi^2}{\Lambda^2} \quad (\text{B.4})$$

Н. Зайберг и Э. Виттен предложили метод, позволяющий получить точное выражение для препотенциала, не требующий теоретико-полевых вычислений. Проблема теоретико-полевых вычислений такого точного выражения состоит в необходимости учета инстантонных поправок. Инстантоны не являются минимумом действия, т. е. решениями классических уравнений движения в теориях со спонтанным нарушением симметрии (тогда как ответ строится для некоторого вакуумного среднего a , т. е. в теории со спонтанно нарушенной симметрией). Это приводит к сингулярности инстантонных вкладов.

Один из вариантов регуляризации этой сингулярности был рассмотрен А. Лосевым, Г. Муром, Н. Некрасовым и С. Шаташвили [8–10]. Суть примененного ими подхода к вычислению инстантонных поправок состоит в том, что производится деформация теории Зайберга–Виттена с помощью двух дополнительных параметров ϵ_1 и ϵ_2 . При этом оказывается возможным посчитать интеграл по всем инстантонным состояниям, который выражается так называемой функцией Некрасова.

Четырехмерная $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричная теория вызывает в последнее время особый интерес в связи с ее предполагаемой связью с двумерной конформной теорией. Л. Алдай, Д. Гайотто и Ю. Тачикава в работе [11] предположили существование такого соотношения, получившего название соотношения Алдай–Гайотто–Тачикавы (АГТ-соотношения) или гипотезы АГТ. Согласно высказанной ими гипотезе функция Некрасова равна конформным блокам — голоморфной части корреляторов конформной теории поля. Данное соотношение позволяет решить ряд задач, связанных как с суперсимметричной теорией, так и с конформной теорией. Так, с помощью вычислений в конформной теории было получено выражение для препотенциала в суперсимметричной теории с четырьмя безмассовыми мультиплетами в фундаментальном представлении [12].

Первая часть данного обзора посвящена различным вопросам, связанным с двумерной конформной теорией. Конформной теорией поля [13, 14] называется модель квантовой теории поля, инвариантная относительно конформных преобразований. Эти преобразования, являющиеся прямым обобщением масштабных преобразований, сохраняют углы между любыми двумя направлениями, но не сохраняют расстояния. Конформная теория имеет непосредственное отношение к физике твердого тела, в частности, к теории фазовых переходов [15, 16]. Наиболее интересный случай конформной теории — это двумерная теория, потому что только в этом случае множество генераторов в теории бесконечномерно.

Еще одно важное свойство двумерной конформной теории состоит в возможности рассмотрения по отдельности голоморфных и антиголоморфных объектов. Если перейти от двумерных координат x_1 и x_2 к комплексным координатам $z = x_1 + ix_2$ и $\bar{z} = x_1 - ix_2$, то оказывается, что все объекты распадаются в комбинацию голоморфной части, зависящей только от z , и антиголоморфной, зависящей только от \bar{z} .

В данном обзоре рассматриваются не сами поля, а их корреляторы. Как и у других объектов в двумерной конформной теории, у корреляторов также можно выделить голоморфную и антиголоморфную компоненты. Для этого в коррелятор добавляют дополнительные поля, по которым позже производится суммирование. Например, коррелятор четырех полей можно описать следующей формулой:

$$\begin{aligned} \langle V_{\Delta_1, \bar{\Delta}_1}(z_1, \bar{z}_1) V_{\Delta_2, \bar{\Delta}_2}(z_2, \bar{z}_2) V_{\Delta_3, \bar{\Delta}_3}(z_3, \bar{z}_3) V_{\Delta_4, \bar{\Delta}_4}(z_4, \bar{z}_4) \rangle = \\ = \sum_{\Delta, \bar{\Delta}} C_{12}^{\Delta, \bar{\Delta}} C_{34}^{\Delta, \bar{\Delta}} B_{\Delta}(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4, c, z_1, z_2, z_3, z_4) \times \\ \times \bar{B}_{\bar{\Delta}}(\bar{\Delta}_1, \bar{\Delta}_2, \bar{\Delta}_3, \bar{\Delta}_4, c, \bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3, \bar{z}_4). \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

$C_{12}^{\Delta, \bar{\Delta}}$ и $C_{34}^{\Delta, \bar{\Delta}}$ — это структурные константы, описывающие зависимость коррелятора от конкретной конформной теории. Δ_i и $\bar{\Delta}_i$ — это голоморф-

ная и антиголоморфная части размерности поля V_i , а суммирование ведется по всевозможным промежуточным полям, которые дополнительно вводятся в коррелятор. Функции B_Δ и $\bar{B}_{\bar{\Delta}}$ называются голоморфным и антиголоморфным конформными блоками соответственно. Разложение такого вида может быть построено и для корреляторов произвольного числа полей. Далее рассматриваются только свойства голоморфных конформных блоков B . Все вычисления, однако, могут быть проведены аналогичным образом и для антиголоморфного случая.

В данном обзоре рассмотрены два метода вычисления конформных блоков. Первый основан напрямую на свойствах конформной симметрии. При этом вычисления довольно громоздки, а их сложность значительно увеличивается при рассмотрении высших порядков разложения по координатам полей в конформном блоке.

Второй метод основан на использовании конкретной конформной модели — теории свободных скалярных полей. Это одна из простейших моделей конформной теории. С помощью данной модели можно легко получить все интересующие конформные блоки. В качестве полей конформной теории при этом выступают экспоненты от скалярного поля:

$$V_\alpha(z) = e^{\alpha\phi(z)}, \quad (\text{B.6})$$

конформные размерности которых связаны с параметрами α :

$$\Delta_\alpha = \frac{1}{2}\alpha^2. \quad (\text{B.7})$$

Однако в данной модели присутствует закон сохранения — уравнение, жестко связывающее друг с другом размерности полей, входящих в конформный блок: $\sum \alpha = 0$. Тем самым эта модель не позволяет рассматривать конформный блок для произвольных размерностей полей.

Один из результатов, описанных в данном обзоре, связан с рассмотрением способа вычисления корреляторов полей с произвольной размерностью в модели свободных полей. Идея такого вычисления состоит в добавлении в корреляторы экранирующих операторов Доценко–Фатеева [17–19]. Экранирующими называются поля, которые задаются параметром b , связанным с Q следующим образом: $Q = b - 1/b$. Специфика таких полей состоит в том, что конформная размерность интегралов от них равна нулю. По этой причине добавление в выражения для корреляторов элементов вида

$$\int e^{b\phi(z)} \quad (\text{B.8})$$

не должно повлиять на конформные свойства теории. Таким образом, при добавлении экранирующих полей получается выражение для конформного

блока, включающее в себя интегралы Сельберга:

$$I_{Y'} = \prod_{i=1}^N \int_0^q dz_i \left\{ z^{Y'} \prod_{i<j}^N (z_i - z_j)^{2b^2} \prod_{i=1}^N z_i^{2b\alpha_1} (q - z_i)^{2b\alpha_2} \right\}. \quad (\text{B.9})$$

Выражения такого типа близки к матрично-модельным интегралам [20–37], что позволяет говорить о построении матричной модели, соответствующей конформному блоку. Однако связь полученных ответов в такой «деформированной» свободной теории с ответами, полученными из конформной симметрии, не очевидна и требует проверки. В данном обзоре приведена проверка того, что в первых трех порядках разложения по двойным отношениям координат полей «деформированные» константы связи действительно равны рассчитанным с помощью конформной симметрии.

АГТ-соотношение связывает между собой два описанных выше объекта — конформный блок и функцию Некрасова — для определенного состава полей конформной теории и состава материи суперсимметричной теории. Простейший и наиболее изученный случай, в котором рассматривается АГТ-соотношение, — это связь между $SU(2)$ суперсимметричной теорией Янга–Миллса и конформной теорией с полями, которые генерируются с помощью операторов Вирасоро. Но это соотношение допускает и обобщение на $SU(N)$ суперсимметричную теорию. При этом в конформной теории рассматриваются поля, которые генерируются с помощью $W^{(N)}$ алгебры. В частности, в работе [38] было рассмотрено такое соотношение для случая $N = 3$.

Кроме того, в данном обзоре рассмотрено АГТ-соотношение для двух конфигураций полей — конформного блока для нескольких внешних полей на двумерной сфере и конформного блока для одного поля на двумерном торе. Как конформный блок, так и функция Некрасова представляются рядами по двойным отношениям координат в первой теории и по непертурбативному параметру во второй. В данном обзоре рассмотрены низшие порядки этих разложений (иногда соответствующие порядки разложений будут называться «уровнем» АГТ-соотношения) и проверено, что гипотеза АГТ действительно выполняется.

Вторая часть обзора посвящена трехмерной теории Черна–Саймонса. Исходная гипотеза АГТ, предложенная в [11], описывает связь между двумерной и четырехмерной теориями. Но существуют и обобщения на теории других размерностей. Так, рассматриваются обобщения на случай двух трехмерных теорий [39–57] и трехмерной и пятимерной теорий [57]. В обоих случаях в роли (одной из) трехмерных теорий выступает теория Черна–Саймонса с действием

$$\mathcal{L}_{CS} = \frac{k}{4\pi} \left(\mathcal{A} \wedge d\mathcal{A} + \frac{2}{3} \mathcal{A} \wedge \mathcal{A} \wedge \mathcal{A} \right). \quad (\text{B.10})$$

Эта теория примечательна тем, что она является топологической теорией, т. е. ее корреляторы не зависят от координат в трехмерном пространстве. По этой причине ее изучение актуально в контексте приложений к более сложным топологическим теориям, в том числе к топологической теории струн [58].

При некоторых выборах калибровки трехмерная теория Черна–Саймонса превращается в локально невзаимодействующую теорию. Тем самым задача о нахождении корреляторов нескольких полей не представляет такого широкого интереса, как в других теориях поля. Однако, благодаря топологической инвариантности и трехмерности, большой интерес для изучения представляют корреляторы другого типа — вильсоновские средние:

$$\langle W_{\mathcal{K}} \rangle = \frac{1}{\mathcal{Z}} \int_{\mathcal{M}} [D\mathcal{A}] \text{Tr} P \exp \left(\oint_{\mathcal{K}} \mathcal{A} dx \right) \exp \left(\frac{i}{\hbar} \int_{\mathcal{M}} \mathcal{L}[A] \right), \quad (\text{B.11})$$

где \mathcal{Z} — статистическая сумма теории:

$$\mathcal{Z} = \int_{\mathcal{M}} [D\mathcal{A}] \exp \left(\frac{i}{\hbar} \int_{\mathcal{M}} \mathcal{L}[A] \right). \quad (\text{B.12})$$

Вильсоновские средние (средние значения петель Вильсона) вычисляются для различных контуров \mathcal{K} . Ключевая особенность трехмерной теории, которая не проявляется в теориях больших размерностей, состоит в том, что в трехмерном пространстве существуют нетривиальные контуры, которые нельзя свести с помощью топологических преобразований друг к другу. Такие контуры соответствуют различным узлам. Тем самым открывается большой пласт задач об изучении свойств таких вильсоновских средних для различных контуров (узлов).

Согласно работе Э. Виттена [59] средние значения петель Вильсона в теории Черна–Саймонса с калибровочной группой $SU(2)$ равны полиномам Джонса [60], построенным в математической теории узлов. Математическая теория узлов — это довольно старая область математики, которую начали изучать еще в XVII в. Главная задача этой теории состоит в построении алгоритма, позволяющего отличить друг от друга различные узлы — замкнутые контуры в трехмерном пространстве. Основным методом, используемым для достижения этой цели, состоит в построении так называемых инвариантов узлов. Одни из наиболее общих полиномов узлов — это так называемые полиномы Хосте–Окнеану–Милле–Фрейда–Ликориша–Йеттера (ХОМФЛИ)*. Полиномы Джонса являются их частным случаем.

*Иногда их еще называют полиномами ХОМФЛИ-ПТ (аббревиатура из начальных букв фамилий авторов Дж. Хосте, А. Окнеану, К. Милле, П. Фрейда, В. Ликориша, Д. Йеттера, а также Й. Пржтицкого и П. Трачука [62, 63]).

Если обобщить утверждения, сделанные Э. Виттенем, то вильсоновские средние теории Черна–Саймонса эквивалентны полиномам ХОМФЛИ. Свойства таких полиномов к настоящему времени широко изучены только для одного класса узлов, называемых торическими (так как они получаются с помощью намотки нити на тор). Однако общие свойства вильсоновских средних (полиномов ХОМФЛИ) для произвольных узлов пока мало изучены. Во многом причиной для этого служит то, что ответы для неторических узлов известны только в фундаментальном представлении. Многие известные свойства торических узлов, однако, связаны с полиномами и в высших представлениях.

В данном обзоре рассмотрены две задачи, касающиеся полиномов узлов. Одна из них связана с построением полиномов ХОМФЛИ в высших симметрических и антисимметрических представлениях для простейшего неторического узла. Вторая задача связана с описанием интегрируемых свойств полиномов торических узлов, а именно со связью полиномов ХОМФЛИ торических узлов и решений уравнений иерархии Кадомцева–Петвиашвили.

В случае теории Черна–Саймонса с произвольной калибровочной группой $SU(N)$ вильсоновские средние соответствуют полиномам ХОМФЛИ, которые являются полиномами по двум переменным q и A , связанным с константой связи теории и группой $SU(N)$:

$$q = \exp\left(\frac{k + N}{4\pi}\right), \quad A = q^N. \tag{B.13}$$

Данное соотношение между теорией узлов и теорией Черна–Саймонса интересно по той причине, что оно позволяет изучать структуру вильсоновских средних для различных контуров (узлов). Отметим также, что теория Черна–Саймонса связана и с другими физическими теориями, например, конформной теорией Весса–Зумино–Виттена [59].

Исходно в математической теории узлов полиномы ХОМФЛИ задаются с помощью набора скейн-соотношений, связывающих между собой полиномы для узлов, в которых пересечение заменяется на обратное пересечение или же на отсутствие пересечения:

$$\mathcal{K} \longleftrightarrow \begin{array}{c} \nearrow \searrow \\ \swarrow \nearrow \end{array}, \quad \mathcal{K}' \longleftrightarrow \begin{array}{c} \searrow \nearrow \\ \swarrow \nearrow \end{array}, \quad \mathcal{K}'' \longleftrightarrow \left. \begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \searrow \\ \swarrow \end{array} \right). \tag{B.14}$$

Скейн-соотношения при этом гласят, что

$$AH^{\mathcal{K}}(A, q) - A^{-1}H^{\mathcal{K}'}(A, q) = (q - q^{-1})H^{\mathcal{K}''}(A, q). \tag{B.15}$$

Топологическую инвариантность построенных таким образом полиномов можно проверить, рассмотрев движения Редемейстера:

I: A single horizontal strand is transformed into a strand with a loop above it.

II: Two parallel horizontal strands are transformed into two strands that cross each other once.

III: Three strands are transformed. On the left, two strands cross each other, and a third strand passes over both. On the right, the two strands cross each other, and the third strand passes under both.

(B.16)

С точки зрения топологических преобразований два контура совпадают тогда и только тогда, когда двумерную проекцию одного из них можно перевести в проекцию другого с помощью движений Редемейстера и плавных деформаций [61]. Из третьего движения Редемейстера следует, что полиномы ХОМФЛИ описываются произведением \mathcal{R} -матриц, так как оно эквивалентно уравнению Янга–Бакстера

$$\mathcal{R}_1 \mathcal{R}_2 \mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_2 \mathcal{R}_1 \mathcal{R}_2. \quad (\text{B.17})$$

Уравнение (B.15) при этом задает собственные значения \mathcal{R} -матрицы.

Согласно [62, 63] для того, чтобы удовлетворялось первое движение Редемейстера, полиномы ХОМФЛИ следует представлять в форме разложения по характерам квантовой группы $SU(N)$:

$$H_T^K = \sum_Q S_Q^*(A, q) h_T^{Q^K}, \quad (\text{B.18})$$

где $S_Q^*(A, q)$ — это характеры, а $h_T^{Q^K}$ — коэффициенты, определяемые для каждого узла с помощью произведения \mathcal{R} -матриц. Характеры $S_Q^*(A, q)$ при этом берутся в специальной точке, называемой топологическим локусом. Стандартная запись для характеров описывает их как функции временных переменных t_k (следы степеней группового элемента в фундаментальном представлении). Соответственно, разложение (B.18) можно обобщить путем замены топологического локуса на произвольные t_k , построив, таким образом, обобщенные полиномы ХОМФЛИ.

В данном обзоре рассмотрена связь между теорией Черна–Саймонса и интегрируемыми системами. Одни из самых хорошо изученных объектов в теории интегрируемых систем — это τ -функции иерархии Кадомцева–Петвиашвили (КП). В случае трех переменных они являются решениями

классического уравнения Кадомцева–Петвиашвили. Это уравнение допускает также обобщение на случай большего числа переменных, порождая тем самым иерархию уравнений. Соответствующие τ -функции являются решениями билинейного уравнения Хироты

$$\oint dz \exp \left[\sum_k (t_k - t'_k) z^{-k} \right] \tau \left(t_k + \frac{z^k}{k} \right) \tau \left(t'_k - \frac{z^k}{k} \right) = 0. \quad (\text{B.19})$$

В настоящее время решения данного уравнения широко изучаются, в том числе в контексте связей с различными теориями.

Как τ -функции, так и обобщенные полиномы ХОМФЛИ являются функциями от временных переменных. В данном обзоре рассмотрена связь между этими двумя объектами. При этом используются методы построения полиномов ХОМФЛИ как разложения по характерам. Так, было получено, что производящая функция обобщенных полиномов ХОМФЛИ действительно является τ -функцией КП для торических узлов. Но также оказалось, что это не всегда соблюдается для неторических узлов.

Связь с интегрируемыми системами не ясна для неторических узлов. Одна из причин состоит в том, что только для торических узлов известна наиболее общая формула для полиномов ХОМФЛИ в произвольном представлении (соответствующих вильсоновским средним с полем, преобразующимся по произвольному представлению калибровочной группы). Скейн-соотношения (B.15) также сильно усложняются при изучении высших представлений, что не позволяет использовать их для рассмотрения таких полиномов. В том числе и для прояснения связи с интегрируемыми системами возникает задача о построении полиномов ХОМФЛИ в высших представлениях для простейшего неторического узла — узла-восьмерки.

Данный обзор основан на публикациях [64–69].

Введение посвящено общему описанию рассмотренных задач и их актуальности.

Разд. 1 посвящен двумерной конформной теории поля. Рассмотрены основные свойства и элементы конформной теории.

В пп. 1.1–1.3 рассматривается теория свободных скалярных полей в контексте изучения конформной теории поля. В частности, описаны свойства корреляторов в свободной теории.

В пп. 1.4–1.8 рассмотрена методика расчета конформных блоков по диаграмме. Конформный блок, который является частью коррелятора конформной теории поля, сводится к произведению обратных матриц Шаповалова и тройных вершин. Матрица Шаповалова соответствует коррелятору двух полей. Описаны свойства тройных вершин и матрицы Шаповалова, а также приведен ряд вычисленных тройных вершин.

В п. 1.9 описаны свойства конформной теории с алгеброй $W^{(3)}$ (обобщением алгебры Вирасоро). Рассмотрены отличия от алгебры Вирасоро. Описаны способы вычисления тройных вершин, и получены основные формулы для их построения. В том числе построены рекурсивные выражения на тройные вершины с алгеброй $W^{(3)}$. Также проведены аналогичные вычисления с помощью теории свободных полей. Проверены полученные с помощью общих методов конформной теории тройные вершины в случае теории свободных полей.

Разд. 2 посвящен рассмотрению АГТ-соотношения. АГТ-соотношение подразумевает равенство между конформным блоком и функцией Некрасова (свойства конформных блоков подробно рассмотрены в разд. 1). Процедура построения функции Некрасова, необходимой при рассмотрении АГТ-соотношения, описана в п. 2.1.

В данном разделе рассмотрены две конфигурации полей конформной теории. П. 2.2 посвящен АГТ-соотношению для конформных блоков на двумерной сфере. Подробно рассмотрены случаи четырех, пяти и шести внешних полей. Из выражений для первых порядков разложений по координатам полей получены соотношения между параметрами, и проверено, что при таком выборе параметров АГТ-соотношение выполняется для второго и третьего порядков разложений. Также показано, что с помощью рассмотренных случаев можно получить связь между параметрами теорий для произвольного числа внешних полей. Показано, что первые три порядка разложения многоточечного случая (как конформного блока, так и функции Некрасова) сводятся к четырех-, пяти- и шеститочечным случаям. В п. 2.2.6 также описано множество симметрий для соотношений между параметрами. В п. 2.2.7 рассмотрены различные способы выбора диаграмм для одинакового числа полей и описаны диаграммы, которые связаны с функциями Некрасова посредством АГТ-соотношения.

В п. 2.3 рассматривается АГТ-соотношение для конформного блока для одного внешнего поля на двумерном торе. Описаны соответствующий конформный блок и функция Некрасова. В частности, в п. 2.3.1 рассмотрен предел больших размерностей конформных полей. Доказано, что конформный блок в таком пределе описывается формулой

$$q^n \mathcal{B}^{(n)} \sim \Lambda^{4n} Q_{\Delta}^{-1}([1^n], [1^n]), \quad (\text{B.20})$$

что согласуется с рассчитанным ранее в работах [70, 71] аналогичным пределом для случая четырех внешних полей на сфере.

В разд. 3 рассматривается процедура вычисления конформного блока с использованием конкретной конформной теории — теории свободных полей. Эта теория позволяет легко рассчитать все необходимые элементы, но обладает существенным ограничением — «законом сохранения», налагающим

жесткие условия на размерности полей. Для рассмотрения произвольных размерностей в конформный блок, согласно работам Доценко и Фатеева, добавляются операторные вставки специального вида, которые не изменяют конформных свойств выражений. При этом конформный блок представляется суммой интегралов, являющихся обобщением известных в математике интегралов Сельберга. Форма этого интеграла характерна для матричных моделей. В пп. 3.1–3.3 построены структурные константы для свободной теории с операторными вставками Доценко–Фатеева и проверено, что они согласуются с соответствующими результатами из разд. 1. В п. 3.4 описан метод построения соответствующего матрично-модельного выражения для конформного блока. В п. 3.5 рассмотрены свойства интегралов Сельберга.

Разд. 4 посвящен трехмерной теории Черна–Саймонса и связанным с ней задачам. Описаны основные методы построения вильсоновских средних теории Черна–Саймонса и соответствующих им полиномов ХОМФЛИ в теории узлов. В п. 4.1 описан известный алгоритм вычисления полиномов узлов в фундаментальном представлении, использующий свойства \mathcal{R} -матриц. В п. 4.2 приведен известный ответ для полиномов ХОМФЛИ для торических узлов — единственной серии, для которой известен наиболее общий ответ в произвольном представлении.

В п. 4.3 рассмотрена связь между теорией Черна–Саймонса, в частности полиномами ХОМФЛИ, и τ -функциями КП, возникающими в наиболее изученных интегрируемых системах (τ -функции такого типа являются решениями уравнений иерархии КП — обобщенных уравнений Кадомцева–Петвиашвили). Описаны свойства τ -функций КП. Для определения интегрируемых свойств полиномов ХОМФЛИ используются так называемые обобщенные полиномы ХОМФЛИ, которые получаются с помощью обобщения разложения по характерам для стандартных полиномов ХОМФЛИ (В.18),

$$\mathcal{H}_T^K = \sum_{Q \vdash n|T|} S_Q\{t\} h_Q^T(q). \quad (B.21)$$

Доказано, что производящая функция обобщенных полиномов ХОМФЛИ

$$\mathcal{H}^K\{t|\bar{t}\} = \sum_T \mathcal{H}_T^K\{t\} S_T\{\bar{t}\} = \sum_{T,Q} h_Q^T S_Q\{\bar{t}\} S_T\{t\} \quad (B.22)$$

для торических узлов является тау-функцией $\tau\{t\}$. Показано, что данное свойство не выполняется при рассмотрении простейших неторических узлов.

В п. 4.4 построен полином ХОМФЛИ в произвольном симметрическом представлении для узла-восьмерки. Приведены аргументы в пользу предложенного ответа. Построены соответствующие полиномы Оогури–Вафы. Построен полином ХОМФЛИ для узла-восьмерки в произвольном антисимметрическом представлении. Построены соответствующие цветные суперполиномы.

Благодарности. Автор благодарен В. В. Белокурову, А. П. Исаеву, А. Д. Миронову и Е. С. Суловой за критические замечания в процессе подготовки данного обзора. Также автор благодарен за полезные обсуждения и замечания А. С. Анохиной, Г. А. Аминову, С. М. Апенко, С. Б. Артамонову, Э. Т. Ахмедову, А. А. Белавину, Д. В. Васильеву, Д. М. Галахову, И. А. Даниленко, В. В. Долотину, И. А. Дынникову, П. И. Дунину-Барковскому, Е. А. Зенкевичу, А. В. Зотову, М. Э. Казаряну, С. К. Ландо, А. В. Маршакову, С. А. Миронову, А. Ю. Морозову, Н. А. Немкову, Т. Е. Панову, И. В. Полюбину, Ф. К. Попову, А. В. Пополитову, А. А. Рослomu, В. А. Рубакову, А. В. Смирнову, А. В. Слепцову, В. Г. Тураеву, Е. А. Фоминых, С. М. Харчеву, С. М. Хорошкину и Ш. Р. Шакирову. Данная работа выполнена в Институте проблем передачи информации при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 14-50-00150).

1. КОНФОРМНАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ

В этом разделе описаны основные принципы и даны определения основных элементов конформной теории поля. Также рассмотрена свободная теория бозонных полей и вычисления с помощью этой теории.

Кроме того, описаны свойства алгебры $W^{(3)}$, тройных вершин и конформных блоков, построенных с ее помощью. Получены рекурсивные формулы для тройных вершин с алгеброй $W^{(3)}$. Выполнена проверка полученных результатов с помощью методов свободной теории поля.

Конформными называются теории, инвариантные относительно конформных преобразований. В случае двумерной теории на двумерной сфере эти преобразования могут быть записаны как

$$z' = \frac{az + b}{cz + d}, \quad \bar{z}' = \frac{\bar{a}\bar{z} + \bar{b}}{\bar{c}\bar{z} + \bar{d}}, \quad (1.1)$$

где z и \bar{z} — координаты на комплексной плоскости.

Основным объектом изучения в конформной теории поля являются взаимно локальные поля $A_i(z_i, \bar{z}_i)$ и их корреляторы

$$\langle A_1(z_1, \bar{z}_1) A_2(z_2, \bar{z}_2) A_3(z_3, \bar{z}_3) \dots \rangle_{\text{CFT}}.$$

Корреляторы зависят от координат z_i и \bar{z}_i и размерностей полей и являются линейными функциями по всем полям, в них входящим.

Поля образуют алгебру с операторным разложением

$$A_i(z_i, \bar{z}_i) A_j(z_j, \bar{z}_j) = \sum_k \tilde{C}_{ij}^k(z_i, \bar{z}_i; z_j, \bar{z}_j) A_k(z_j, \bar{z}_j). \quad (1.2)$$

Эти соотношения следует понимать следующим образом: в любом корреляторе произведение любых двух полей можно заменить на соответствующую ему сумму. Конформная инвариантность теории при этом накладывает определенные условия на коэффициенты $\tilde{C}_{ij}^k(z_i, \bar{z}_i; z_j, \bar{z}_j)$. Из трансляционной симметрии следует, что эти коэффициенты не зависят от конкретных координат, а зависят только от $z_{ij} = z_i - z_j$ и $\bar{z}_{ij} = \bar{z}_i - \bar{z}_j$. Конформная инвариантность дает конкретный вид этой зависимости:

$$\tilde{C}_{ij}^k(z_i, \bar{z}_i; z_j, \bar{z}_j) = \frac{C_{ij}^k}{z_{ij}^{\Delta_1 + \Delta_2 - \Delta_k} \bar{z}_{ij}^{\bar{\Delta}_1 + \bar{\Delta}_2 - \bar{\Delta}_k}}, \quad (1.3)$$

где C_{ij}^k — комплексные числа, называемые структурными константами, они зависят от выбора конкретной конформной теории.

Пространство полей содержит симметричный бесследовый оператор тензора энергии-импульса $T^{\mu\nu}(z, \bar{z})$, удовлетворяющий уравнению непрерывности $\partial_\mu \langle T^{\mu\nu}(z, \bar{z}) X \rangle = 0$. Этот оператор возможно свести к двум независимым операторам: $T(z) = T^{zz}$ и сопряженному к нему $\bar{T}(\bar{z}) = T^{\bar{z}\bar{z}}$. Благодаря данному свойству оператора тензора энергии-импульса, а также свойствам корреляторов теории оказывается возможным рассматривать по отдельности голоморфную (т.е. зависящую от z) и антиголоморфную (зависящую от \bar{z}) части теории. Так, четырехточечный коррелятор (коррелятор четырех полей) при добавлении промежуточного поля распадается в комбинацию структурных констант теории, а также голоморфной и антиголоморфной частей, которые называются голоморфным и антиголоморфным конформными блоками соответственно [72]:

$$\begin{aligned} & \langle V_{\Delta_1, \bar{\Delta}_1}(z_1, \bar{z}_1) V_{\Delta_2, \bar{\Delta}_2}(z_2, \bar{z}_2) V_{\Delta_3, \bar{\Delta}_3}(z_3, \bar{z}_3) V_{\Delta_4, \bar{\Delta}_4}(z_4, \bar{z}_4) \rangle_{\text{CFT}} = \\ & = \sum_{\Delta, \bar{\Delta}} C_{12}^{\Delta, \bar{\Delta}} C_{34}^{\Delta, \bar{\Delta}} B_{\Delta}(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4, c, z_1, z_2, z_3, z_4) \times \\ & \quad \times \bar{B}_{\bar{\Delta}}(\bar{\Delta}_1, \bar{\Delta}_2, \bar{\Delta}_3, \bar{\Delta}_4, c, \bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3, \bar{z}_4), \quad (1.4) \end{aligned}$$

где Δ_i — размерности полей, определенные ниже в (1.128), а Δ и $\bar{\Delta}$ — размерности промежуточного поля, которое добавляется при построении конформного блока (см. п. 1.4). Структурные константы, входящие в данное выражение, определяют зависимость от конкретной теории, а конформные блоки B и \bar{B} могут быть построены, исходя только из конформных свойств теории. Голоморфный конформный блок B зависит только от голоморфных размерностей Δ и координат z , а также от центрального заряда теории c . Корреляторы большого числа полей допускают аналогичное построение, включающее в себя разложение на произведение голоморфного и антиголоморфного конформных блоков, а также части, зависящей от теории (в данном случае она описывается произведением двух структурных констант,

но при большем числе полей содержит большее число элементов). Конформный блок, соответствующий коррелятору n полей, называют n -точечным конформным блоком.

В данном обзоре будет рассматриваться только голоморфный конформный блок, но все рассуждения и вычисления для антиголоморфного конформного блока могут быть проделаны аналогичным образом. Операторное разложение для голоморфной части оператора тензора энергии-импульса $T(z)$ устроено как

$$T(z_1)T(z_2) = \frac{c}{2z_{12}^4} + \frac{2}{z_{12}^2}T(z_2) + \frac{1}{z_{12}}\partial T(z_2) + \text{несингулярная часть}. \quad (1.5)$$

Комплексное число c называется центральным зарядом теории. Оператор тензора энергии-импульса задает алгебру Вирасоро. Операторы Вирасоро L_n определены как коэффициенты ряда Лорана в разложении действия оператора тензора энергии-импульса:

$$T(z_1)A(z_2) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{L_n(z)}{z_{12}^{n+2}} A(z_2). \quad (1.6)$$

Исходя из этого определения можно получить также интегральную формулу для действия оператора Вирасоро:

$$\langle (L_{-n}A_1(z_1))A_2(z_2) \dots \rangle = \oint_{z_1} \frac{dx}{x^{n-1}} \langle T(x)A_1(z_1)A_2(z_2) \dots \rangle. \quad (1.7)$$

Будем называть операторы Вирасоро с положительными n положительными, а с отрицательными — отрицательными.

Как следствие (1.5), операторы Вирасоро образуют алгебру Вирасоро с коммутационным соотношением

$$[L_m, L_n] = \frac{m(m^2 - 1)}{12} \delta_{n+m,0} + (m - n)L_{n+m}. \quad (1.8)$$

Это соотношение можно получить следующим образом: если операторы Вирасоро действуют на поле в некоторой точке z_3 , то из формулы (1.7) следует

$$\begin{aligned} [L_m, L_n] = & \oint_{z_2+z_3} z_{13}^{m+1} T(z_1) dz_1 \oint_{z_3} z_{23}^{n+1} T(z_2) dz_2 - \\ & - \oint_{z_2+z_3} z_{13}^{n+1} T(z_1) dz_1 \oint_{z_3} z_{23}^{m+1} T(z_2) dz_2, \quad (1.9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Diagram 1} - \text{Diagram 2} &= \text{Diagram 3} + \text{Diagram 4} - \text{Diagram 5} \\
 &= \text{Diagram 6} = \frac{1}{2} (\text{Diagram 7} - \text{Diagram 8})
 \end{aligned}$$

Рис. 1. Вычисление коммутатора с помощью процедуры изменения контуров интегрирования

где контур интегрирования для оператора, который действует вторым, охватывает контур для другого оператора. Если поменять контуры местами в первом слагаемом, то получается следующее выражение (рис. 1):

$$\begin{aligned}
 [L_m, L_n] &= \oint_{z_3} z_{23}^{n+1} T(z_2) dz_2 \oint_{z_2} dz_1 z_{13}^{m+1} T(z_1) dz_1 + \\
 &\quad + \left(\oint_{z_3} z_{13}^{m+1} T(z_1) dz_1 \oint_{z_1+z_3} z_{23}^{n+1} T(z_2) dz_2 - \right. \\
 &\quad \left. - \oint_{z_2+z_3} z_{13}^{n+1} T(z_1) dz_1 \oint_{z_3} z_{23}^{m+1} T(z_2) dz_2 \right) = \\
 &= \frac{1}{2} \oint_{z_3} dz_2 \oint_{z_2} dz_1 (z_{13}^{m+1} z_{23}^{n+1} - z_{13}^{n+1} z_{23}^{m+1}) T(z_1) T(z_2) = \\
 &= \frac{1}{2} \oint_{z_3} dz_2 \oint_{z_2} dz_1 (z_{13}^{m+1} z_{23}^{n+1} - z_{13}^{n+1} z_{23}^{m+1}) \left(\frac{1}{2z_{12}^4} + \frac{2T(z_2)}{z_{12}^2} + \frac{\partial T(z_2)}{z_{12}} \right). \quad (1.10)
 \end{aligned}$$

Самая первая скобка (после первого равенства) в данном выражении обращается в ноль (для этого достаточно поменять обозначения для переменных интегрирования $z_1 \leftrightarrow z_2$ в одном из слагаемых), в оставшееся слагаемое дают вклад только расходящиеся по z_{12} компоненты из (1.5). Таким образом, правую часть (1.8) можно получить с помощью асимметризации и интегрирования по z_1 .

Любое векторное поле является собственным вектором нулевого оператора Вирасоро L_0 , при этом соответствующее собственное значение называется размерностью поля. Таким образом, размерность поля при действии оператора L_{-n} увеличивается на n . Поля, действие любыми положитель-

ными операторами Вирасоро на которые дает ноль, называют примарными:

$$\begin{aligned} L_0 V_\Delta &= \Delta V_\Delta && \text{для любых полей,} \\ L_n V_\Delta &= 0, \quad \forall n > 0 && \text{для примарных полей.} \end{aligned} \quad (1.11)$$

Поля, полученные с помощью действия отрицательных операторов Вирасоро, называются потомками данного поля. Все потомки данного примарного поля составляют его модуль Верма. Поля модуля Верма нумеруются диаграммами Юнга, т. е. упорядоченными последовательностями целых чисел:

$$V_{\Delta, Y} = L_{-Y} V_\Delta = L_{-k_N} \dots L_{-k_1} V_\Delta; \quad Y = \{k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_N\}. \quad (1.12)$$

$|Y|$ будет обозначать размер диаграммы Юнга, т. е. $|Y| = \sum k_i$.

Аналогичные построения можно провести и для антиголоморфного тензора энергии-импульса. Действие оператора \bar{L}_0 при этом будет давать сопряженную размерность поля $\bar{\Delta}$. В рамках данного обзора рассматриваются только голоморфные конформные блоки, однако аналогичные рассуждения можно провести и для антиголоморфной части.

1.1. Теория свободных полей. Простейшая конформная модель — это теория безмассового скалярного поля. В двумерном случае эта теория описывается действием $-1/8\pi \int \partial\phi \bar{\partial}\phi d^2z$. Пропагаторы этой теории равны

$$\begin{aligned} \langle \phi(z_1, \bar{z}_1) \phi(z_2, \bar{z}_2) \rangle &= \log(z_{12}) + \log(\bar{z}_{12}), \\ \langle \partial\phi(z_1, \bar{z}_1) \phi(z_2, \bar{z}_2) \rangle &= \frac{1}{z_{12}}, \quad \langle \phi(z_1, \bar{z}_1) \partial\phi(z_2, \bar{z}_2) \rangle = -\frac{1}{z_{12}}, \\ \langle \partial\phi(z_1, \bar{z}_1) \partial\phi(z_2, \bar{z}_2) \rangle &= \frac{1}{z_{12}^2}, \\ &\dots \end{aligned} \quad (1.13)$$

где $z_{ij} \equiv z_i - z_j$ и $\bar{z}_{ij} \equiv \bar{z}_i - \bar{z}_j$. По определению *нормальное упорядочение* означает, что все спаривания нормально упорядоченных операторов не рассматриваются при применении теоремы Вика. Среднее значение нормально упорядоченного оператора равно его постоянной (не зависящей от ϕ) части. В частности,

$$\begin{aligned} \prod_i \circ e^{\alpha_i \phi(z_i, \bar{z}_i)} \circ &= \left(\prod_{i < j} z_{ij}^{\alpha_i \alpha_j} \bar{z}_{ij}^{-\alpha_i \alpha_j} \right) \circ \prod_i e^{\alpha_i \phi(z_i, \bar{z}_i)} \circ, \\ &\downarrow \\ \left\langle \prod_i \circ e^{\alpha_i \phi(z_i, \bar{z}_i)} \circ \right\rangle &= \left(\prod_{i < j} z_{ij}^{\alpha_i \alpha_j} \bar{z}_{ij}^{-\alpha_i \alpha_j} \right) \delta \left(\sum_i \alpha_i \right). \end{aligned} \quad (1.14)$$

Множитель с дельта-функцией в правой части можно интерпретировать как нулевую моду функционального интеграла. В данном рассмотрении она играет

роль правила отбора (закона сохранения), которое выполняется при рассмотрении теории свободных полей.

Изучение полей $\partial\phi(z, \bar{z})$ и их производных по z , а также голоморфной части корреляторов полей $e^{\alpha\phi(z, \bar{z})}$ позволяет рассматривать только голоморфную часть теории. Поэтому в дальнейшем зависимость от \bar{z} будет опускаться.

Оператор тензора энергии-импульса в этой теории равен [73]

$$T(z) \equiv \frac{1}{2} \circ (\partial\phi)^2(z) \circ, \tag{1.15}$$

и его операторное разложение записывается как

$$\begin{aligned} T(z_1)T(z_2) &= \frac{1}{2z_{12}^4} + \frac{1}{z_{12}^2} \circ \partial\phi(z_1) \partial\phi(z_2) \circ = \\ &= \frac{c}{2z_{12}^4} + \frac{2}{z_{12}^2} T(z_2) + \frac{1}{z_{12}} \partial T(z_2) + \sum_{k \geq 0} \frac{z_{12}^k}{(k+2)!} \circ \partial^{k+1}\phi \partial\phi(z_2) \circ, \end{aligned} \tag{1.16}$$

т. е. центральный заряд теории c равен в данном случае единице. Операторы Вирасоро, таким образом, действуют на экспоненты от ϕ следующим образом:

$$\begin{aligned} T(z_1) \circ e^{\alpha\phi(z_2)} \circ &\equiv \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{z_{12}^{k+2}} \circ (L_k e^{\alpha\phi})(z_2) \circ = \\ &= \frac{\alpha^2/2}{z_{12}^2} \circ e^{\alpha\phi(z_2)} \circ + \frac{1}{z_{12}} \circ \alpha \partial\phi(z_1) e^{\alpha\phi(z_2)} \circ + \circ T(z_1) e^{\alpha\phi(z_2)} \circ = \\ &= \frac{\alpha^2}{2z_{12}^2} \circ e^{\alpha\phi(z_2)} \circ + \frac{1}{z_{12}} \circ (\partial e^{\alpha\phi})(z_2) \circ + \circ \left(\frac{(\partial\phi)^2}{2} + \alpha \partial^2\phi \right) e^{\alpha\phi(z_2)} \circ + \\ &\quad + \sum_{k>0} z_{12}^k \circ \left(\frac{\partial^k T}{k!} + \frac{\alpha \partial^{k+2}\phi}{(k+1)!} \right) e^{\alpha\phi(z_2)} \circ. \end{aligned} \tag{1.17}$$

Таким образом, в качестве примарных полей можно рассматривать экспоненты от ϕ — $\circ e^{\alpha\phi(z)} \circ$. Размерности таких полей при этом равны $\Delta_\alpha = \alpha^2/2$.

1.2. Свободная теория с $c \neq 1$. Если немного деформировать теорию, рассмотренную в п. 1.1, то можно получить теорию с $c \neq 1$. Для этого нужно деформировать тензор энергии-импульса

$$T(z) \equiv \frac{1}{2} \circ (\partial\phi)^2(z) \circ + Q \partial^2\phi(z), \tag{1.18}$$

операторное разложение которого устроено как

$$\begin{aligned} T(z_1)T(z_2) &= \frac{1-12Q^2}{2} \frac{1}{z_{12}^4} + 2Q \frac{\partial\phi(z_1) - \partial\phi(z_2)}{z_{12}^3} + \frac{1}{z_{12}^2} \circ \partial\phi(z_1) \partial\phi(z_2) \circ = \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{z_{12}^4} + \frac{2}{z_{12}^2} T(z_2) + \frac{1}{z_{12}} \partial T(z_2) + \\ &+ \sum_{k \geq 0} z_{12}^k \left(\frac{1}{(k+2)!} \circ \partial^{k+1} \phi \partial\phi(z_2) \circ + \frac{2Q}{(k+3)!} \partial^{k+4} \phi \right). \quad (1.19) \end{aligned}$$

Также, соответственно, изменяется и то, как он действует на экспоненты от ϕ :

$$\begin{aligned} T(z_1) \circ e^{\alpha\phi(z_2)} \circ &= \frac{\alpha(\alpha-2Q)}{2z_{12}^2} \circ e^{\alpha\phi(z_2)} \circ + \frac{1}{z_{12}} \circ \alpha \partial\phi(z_1) e^{\alpha\phi(z_2)} \circ + \\ &+ \circ T(z_1) e^{\alpha\phi(z_2)} \circ = \frac{(\alpha-Q)^2 - Q^2}{2z_{12}^2} \circ e^{\alpha\phi(z_2)} \circ + \frac{1}{z_{12}} \circ (\partial e^{\alpha\phi})(z_2) \circ + \\ &+ \circ \left(\frac{(\partial\phi)^2}{2} + (\alpha+Q)\partial^2\phi \right) e^{\alpha\phi(z_2)} \circ + \\ &+ \sum_{k > 0} z_{12}^k \circ \left(\frac{\partial^k T}{k!} + \frac{\alpha \partial^{k+2} \phi}{(k+1)!} \right) e^{\alpha\phi(z_2)} \circ. \quad (1.20) \end{aligned}$$

Изменится, соответственно, и закон сохранения

$$\sum_i \alpha_i = 2Q \quad (1.21)$$

на «вакуумный заряд» $2Q$.

Соответствующим образом изменяются и коммутационные соотношения операторов Вирасоро

$$[L_m, L_n] = \frac{1-12Q^2}{12} m(m^2-1)\delta_{m+n,0} + (m-n)L_{n+m}. \quad (1.22)$$

В качестве примарных полей в данной теории рассматриваются экспоненты от поля ϕ $e^{\alpha\phi}$, которые параметризуются с помощью α . Из полученных формул можно выразить размерности примарных полей и центральный заряд через Q :

$$\Delta_\alpha = \frac{1}{2}\alpha(\alpha-Q), \quad c = 1 - 12Q^2. \quad (1.23)$$

В работах по конформной теории поля рассматриваются различные нормировки параметров α , заряда Q и, соответственно, их связи с размерностью Δ . Широко распространены также два других варианта нормировки — умножение на i : $\phi \rightarrow i\phi$, $\alpha \rightarrow i\alpha$, и/или на $\sqrt{2}$: $\alpha \rightarrow \sqrt{2}\alpha$ и $Q \rightarrow \sqrt{2}Q$. В дальнейшем в данном обзоре понятие размерности конформного поля также будет относиться к параметру α , при этом его связь с конформной размерностью описана в (1.23).

1.3. Корреляторы в свободной теории. Четырехточечный коррелятор можно вычислить двумя разными способами: напрямую или с помощью операторного разложения. Например,

$$\begin{aligned} \langle \partial\phi(z_1) \partial\phi(z_2) \partial\phi(z_3) \partial\phi(z_4) \rangle &\stackrel{\text{по теореме Вика}}{=} \frac{1}{z_{12}^2 z_{34}^2} + \frac{1}{z_{13}^2 z_{24}^2} + \frac{1}{z_{14}^2 z_{23}^2} = \\ &= \frac{1}{z_{12}^2 z_{34}^2} + \frac{1}{z_{24}^4} \left(\frac{1}{\left(1 + \frac{z_{12}}{z_{24}} - \frac{z_{34}}{z_{24}}\right)^2} + \frac{1}{\left(1 + \frac{z_{12}}{z_{24}}\right)^2 \left(1 - \frac{z_{34}}{z_{24}}\right)^2} \right) = \\ &= \frac{1}{z_{12}^2 z_{34}^2} + \frac{1}{z_{24}^4} \left(2 - \frac{4z_{12}}{z_{24}} + \frac{4z_{34}}{z_{24}} + \frac{6z_{12}^2}{z_{24}^2} - \frac{10z_{12}z_{34}}{z_{24}^2} + \frac{6z_{34}^2}{z_{12}^2} + \dots \right). \end{aligned} \quad (1.24)$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \langle \partial\phi(z_1) \partial\phi(z_2) \partial\phi(z_3) \partial\phi(z_4) \rangle &= \left\langle \left(\partial\phi(z_1) \partial\phi(z_2) \right) \left(\partial\phi(z_3) \partial\phi(z_4) \right) \right\rangle = \\ &= \left\langle \left(\frac{1}{z_{12}^2} + \circ \partial\phi(z_1) \partial\phi(z_2) \circ \right) \left(\frac{1}{z_{34}^2} + \circ \partial\phi(z_3) \partial\phi(z_4) \circ \right) \right\rangle = \\ &= \frac{1}{z_{12}^2 z_{34}^2} + \sum_{k,l \geq 0} \frac{z_{12}^k z_{34}^l}{k!l!} \langle \circ \partial^{k+1}\phi \partial\phi(z_2) \circ \circ \partial^{l+1}\phi \partial\phi(z_4) \circ \rangle \stackrel{\text{по теореме Вика}}{=} \\ &= \frac{1}{z_{12}^2 z_{34}^2} + \sum_{k,l \geq 0} \frac{z_{12}^k z_{34}^l}{k!l!} \frac{(k+l+1)! + (k+1)!(l+1)!}{z_{24}^{2+k+l}}. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Аналогичные вычисления можно провести и для коррелятора примарных полей:

$$\begin{aligned} \left\langle \circ e^{\alpha_1\phi(z_1)} \circ \circ e^{\alpha_2\phi(z_2)} \circ \circ e^{\alpha_3\phi(z_3)} \circ \circ e^{\alpha_4\phi(z_4)} \circ \right\rangle &= \\ &= z_{12}^{\alpha_1\alpha_2} z_{13}^{\alpha_1\alpha_3} z_{14}^{\alpha_1\alpha_4} z_{23}^{\alpha_2\alpha_3} z_{24}^{\alpha_2\alpha_4} z_{34}^{\alpha_3\alpha_4} = \\ &= z_{12}^{\alpha_1\alpha_2} z_{34}^{\alpha_3\alpha_4} z_{24}^{(\alpha_1+\alpha_2)(\alpha_3+\alpha_4)} \times \\ &\quad \times \left(1 + \frac{z_{12}}{z_{24}} \right)^{\alpha_1\alpha_4} \left(1 - \frac{z_{34}}{z_{24}} \right)^{\alpha_3\alpha_4} \left(1 + \frac{z_{12}}{z_{24}} - \frac{z_{34}}{z_{24}} \right)^{\alpha_1\alpha_3} = \\ &= z_{12}^{\alpha_1\alpha_2} z_{34}^{\alpha_3\alpha_4} z_{24}^{(\alpha_1+\alpha_2)(\alpha_3+\alpha_4)} \left(1 + \alpha_1(\alpha_3 + \alpha_4) \frac{z_{12}}{z_{24}} - \alpha_3(\alpha_1 + \alpha_2) \frac{z_{34}}{z_{24}} + \dots \right) \end{aligned} \quad (1.26)$$

и

$$\begin{aligned}
& \left\langle \circ e^{\alpha_1 \phi(z_1)} \circ \circ e^{\alpha_2 \phi(z_2)} \circ \circ e^{\alpha_3 \phi(z_3)} \circ \circ e^{\alpha_4 \phi(z_4)} \circ \right\rangle = \\
& = z_{12}^{\alpha_1 \alpha_2} z_{34}^{\alpha_3 \alpha_4} \left\langle \circ e^{\alpha_1 \phi(z_1) + \alpha_2 \phi(z_2)} \circ \circ e^{\alpha_3 \phi(z_3) + \alpha_4 \phi(z_4)} \circ \right\rangle = \\
& = z_{12}^{\alpha_1 \alpha_2} z_{34}^{\alpha_3 \alpha_4} \left\langle \circ \left(1 + z_{12} \alpha_1 \partial \phi + \frac{z_{12}^2}{2} ((\alpha_1 \partial \phi)^2 + \alpha_1 \partial^2 \phi) + \dots \right) e^{(\alpha_1 + \alpha_2) \phi(z_2)} \circ \right. \\
& \quad \left. \circ \left(1 + z_{34} \alpha_3 \partial \phi + \frac{z_{34}^2}{2} ((\alpha_3 \partial \phi)^2 + \alpha_3 \partial^2 \phi) + \dots \right) e^{(\alpha_3 + \alpha_4) \phi(z_4)} \circ \right\rangle = \\
& = z_{12}^{\alpha_1 \alpha_2} z_{34}^{\alpha_3 \alpha_4} z_{24}^{(\alpha_1 + \alpha_2)(\alpha_3 + \alpha_4)} \left(1 + \alpha_1 (\alpha_3 + \alpha_4) \frac{z_{12}}{z_{24}} - \alpha_3 (\alpha_1 + \alpha_2) \frac{z_{34}}{z_{24}} + \dots \right). \tag{1.27}
\end{aligned}$$

В общей конформной теории нет прямого способа построения многоточечного коррелятора, таким образом, остается только второй способ — построение ответа с помощью операторного разложения. Эта процедура позволяет выразить произвольный коррелятор через структурные константы операторного разложения и корреляторы двух полей. Тем не менее в данной конструкции корреляторы определяются через бесконечные суммы по промежуточным состояниям и требуют знания общих формул для корреляторов двух и трех полей.

1.4. Четырехточечный конформный блок. Конформная теория поля — это прямое обобщение теории свободных полей. При этом обобщении вместо теоремы Вика, использованной при вычислениях в свободной теории (см. п. 1.3), используется операторное разложение. Также в общем случае отсутствуют правила отбора (законы сохранения), которые были характерны для свободной теории.

Для примарных полей операторное разложение (1.2) записывается как

$$V_1(z_1, \bar{z}_1) V_2(z_2, \bar{z}_2) = \sum_{\tilde{\beta}} \frac{C_{12}^{\tilde{\beta}}}{z_{12}^{\Delta_1 + \Delta_2 - \Delta_{\tilde{\beta}}}} \frac{V_{\tilde{\beta}}(z_2, \bar{z}_2)}{\bar{z}_{12}^{\bar{\Delta}_1 + \bar{\Delta}_2 - \bar{\Delta}_{\tilde{\beta}}}}. \tag{1.28}$$

Суммирование в данном случае ведется по всем возможным полям. Один из способов представить все такие поля — рассмотреть их как элементы модулей Верма. В таком случае поля нумеруются тремя величинами: параметром β , задающим размерность поля, и диаграммами Юнга Y_β и \bar{Y}_β , которые обозначают действующие на примарное поле операторы голоморфной алгебры Вирасоро L_{-Y_β} и антиголоморфной алгебры Вирасоро $\bar{L}_{-\bar{Y}_\beta}$ соответственно. В (1.28) введено обозначение $\tilde{\beta} = \{\beta, Y_\beta, \bar{Y}_\beta\}$. Отметим, что суммирование

ведется по отдельности по всем Y_β и всем \bar{Y}_β :

$$V_1(z_1, \bar{z}_1)V_2(z_2, \bar{z}_2) = \sum_{\beta} \left(\sum_{Y_\beta} \frac{1}{z_{12}^{\Delta_1+\Delta_2-\Delta_\beta}} \sum_{\bar{Y}_\beta} \frac{1}{\bar{z}_{12}^{\bar{\Delta}_1+\bar{\Delta}_2-\bar{\Delta}_\beta}} C_{12}^{\bar{\beta}} V_\beta(z_2, \bar{z}_2) \right). \quad (1.29)$$

Также из-за свойств алгебры Вирасоро Δ_β не зависит от \bar{Y}_β , верно и обратное утверждение.

Если применить операторные разложения к трех- и четырехточечным корреляторам, то получатся следующие формулы:

$$\begin{aligned} \left\langle V_1(z_1, \bar{z}_1)V_2(z_2, \bar{z}_2)V_{\bar{\beta}}(z_4, \bar{z}_4) \right\rangle_{\text{CFT}} &= \\ &= \sum_{\bar{\beta}} \frac{C_{12}^{\bar{\alpha}}}{z_{12}^{\Delta_1+\Delta_2-\Delta_{\bar{\alpha}}} \bar{z}_{12}^{\bar{\Delta}_1+\bar{\Delta}_2-\bar{\Delta}_{\bar{\alpha}}}} \left\langle V_{\bar{\alpha}}(z_2, \bar{z}_2)V_{\bar{\beta}}(z_4, \bar{z}_4) \right\rangle_{\text{CFT}} \end{aligned} \quad (1.30)$$

и

$$\begin{aligned} \left\langle V_1(z_1, \bar{z}_1)V_2(z_2, \bar{z}_2)V_3(z_3, \bar{z}_3)V_4(z_4, \bar{z}_4) \right\rangle_{\text{CFT}} &= \\ &= \left\langle \left(V_1(z_1, \bar{z}_1)V_2(z_2, \bar{z}_2) \right) \left(V_3(z_3, \bar{z}_3)V_4(z_4, \bar{z}_4) \right) \right\rangle_{\text{CFT}} = \\ &= \sum_{\bar{\alpha}, \bar{\beta}} \frac{C_{12}^{\bar{\alpha}} C_{34}^{\bar{\beta}}}{z_{12}^{\Delta_1+\Delta_2-\Delta_{\bar{\alpha}}} \bar{z}_{12}^{\bar{\Delta}_1+\bar{\Delta}_2-\bar{\Delta}_{\bar{\alpha}}} z_{34}^{\Delta_3+\Delta_4-\Delta_{\bar{\beta}}} \bar{z}_{34}^{\bar{\Delta}_3+\bar{\Delta}_4-\bar{\Delta}_{\bar{\beta}}}} \times \\ &\quad \times \left\langle V_{\bar{\alpha}}(z_2, \bar{z}_2)V_{\bar{\beta}}(z_4, \bar{z}_4) \right\rangle_{\text{CFT}} \end{aligned} \quad (1.31)$$

(см. рис. 2). Первое из этих соотношений можно использовать для определения структурных констант C , так как оно полностью задается конформной симметрией. Коррелятор двух полей в правой части разложения для четырехточечного конформного блока также устроен довольно просто:

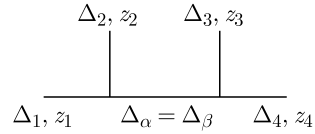


Рис. 2. Четырехточечный конформный блок

$$\begin{aligned} \left\langle V_{\bar{\alpha}}(z_2, \bar{z}_2)V_{\bar{\beta}}(z_4, \bar{z}_4) \right\rangle_{\text{CFT}} &= \\ &= \frac{1}{z_{24}^{\Delta_{\bar{\alpha}}+\Delta_{\bar{\beta}}} \bar{z}_{24}^{\bar{\Delta}_{\bar{\alpha}}+\bar{\Delta}_{\bar{\beta}}}} \delta_{\Delta_{\bar{\alpha}}, \Delta_{\bar{\beta}}} Q_{\Delta_{\bar{\alpha}}}(Y_{\bar{\alpha}}, Y_{\bar{\beta}}) \bar{Q}_{\bar{\Delta}_{\bar{\alpha}}}(\bar{Y}_{\bar{\alpha}}, \bar{Y}_{\bar{\beta}}), \end{aligned} \quad (1.32)$$

где $Q_{\Delta_\beta}(Y_\beta, Y_\gamma)$ и $\bar{Q}_{\bar{\Delta}_\beta}(\bar{Y}_\beta, \bar{Y}_\gamma)$ равны нулю при $|Y_\beta| \neq |Y_\gamma|$ и $|\bar{Y}_\beta| \neq |\bar{Y}_\gamma|$ соответственно. Голоморфный множитель $Q_{\Delta_\beta}(Y_\beta, Y_\gamma)$ в корреляторе двух полей называется матрицей Шаповалова.

Зависимость корреляторов двух полей от координат полностью задается конформной симметрией и связана с размерностями полей (см. (1.32)). Аналогичным свойством обладает и коррелятор трех полей [73]:

$$\begin{aligned} & \langle V_{\bar{\alpha}}(z_1, \bar{z}_1) V_{\bar{\beta}}(z_2, \bar{z}_2) V_{\bar{\gamma}}(z_3, \bar{z}_3) \rangle_{\text{CFT}} = \\ & = \frac{C_{\bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{\gamma}}}{z_{12}^{\Delta_{\alpha}+\Delta_{\beta}-\Delta_{\gamma}} \bar{z}_{12}^{\bar{\Delta}_{\alpha}+\bar{\Delta}_{\beta}-\bar{\Delta}_{\gamma}} z_{13}^{\Delta_{\alpha}+\Delta_{\gamma}-\Delta_{\beta}} \bar{z}_{12}^{\bar{\Delta}_{\alpha}+\bar{\Delta}_{\gamma}-\bar{\Delta}_{\beta}} z_{23}^{\Delta_{\beta}+\Delta_{\gamma}-\Delta_{\alpha}} \bar{z}_{12}^{\bar{\Delta}_{\beta}+\bar{\Delta}_{\gamma}-\bar{\Delta}_{\alpha}}}, \end{aligned} \quad (1.33)$$

где $C_{\bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{\gamma}}$ — структурные константы теории. Структурные константы можно разделить на три множителя: связанный с примарными полями и связанные с голоморфной и антиголоморфной алгебрами Вирасоро, так как операторы таких двух алгебр Вирасоро коммутируют друг с другом:

$$C_{\bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{\gamma}} = C_{\alpha\beta\gamma} C_{\alpha\beta\gamma}(Y_{\alpha}, Y_{\beta}, Y_{\gamma}) C_{\alpha\beta\gamma}(\bar{Y}_{\alpha}, \bar{Y}_{\beta}, \bar{Y}_{\gamma}). \quad (1.34)$$

Выражение для коррелятора четырех полей имеет более сложный вид. Помимо множителей, заданных конформной симметрией, в выражении присутствует также функция от двойного отношения координат $x = \frac{z_{12}z_{34}}{z_{32}z_{14}}$:

$$\begin{aligned} & \langle V_1(z_1, \bar{z}_1) V_2(z_2, \bar{z}_2) V_3(z_3, \bar{z}_3) V_4(z_4, \bar{z}_4) \rangle_{\text{CFT}} = \\ & = G(x, \bar{x}) \prod_{i<j}^4 z_{ij}^{\frac{\Delta_1+\Delta_2+\Delta_3+\Delta_4}{3}-\Delta_i-\Delta_j} \bar{z}_{ij}^{\frac{\bar{\Delta}_1+\bar{\Delta}_2+\bar{\Delta}_3+\bar{\Delta}_4}{3}-\bar{\Delta}_i-\bar{\Delta}_j}. \end{aligned} \quad (1.35)$$

Рассмотрим другое разложение для конформного блока. Его можно получить с помощью применения операторного разложения к первой паре полей в четырехточечном корреляторе:

$$\begin{aligned} & \langle (V_1(z_1, \bar{z}_1) V_2(z_2, \bar{z}_2)) V_3(z_3, \bar{z}_3) V_4(z_4, \bar{z}_4) \rangle_{\text{CFT}} = \\ & = \sum_{\bar{\beta}} z_{12}^{\Delta_{\bar{\beta}}} \bar{z}_{12}^{\bar{\Delta}_{\bar{\beta}}} C_{12}^{\bar{\beta}} \langle V_{\bar{\beta}}(z_2, \bar{z}_2) V_3(z_3, \bar{z}_3) V_4(z_4, \bar{z}_4) \rangle_{\text{CFT}}. \end{aligned} \quad (1.36)$$

Если выразить $C_{12}^{\bar{\beta}}$ с помощью (1.30), то получается выражение для $G(x, \bar{x})$ через двухточечные и трехточечные корреляторы:

$$\begin{aligned} G(x, \bar{x}) & = \sum_{\bar{\alpha}, \bar{\beta}} x^{\Delta_{\bar{\alpha}}} \bar{x}^{\bar{\Delta}_{\bar{\alpha}}} \delta_{\Delta_{\alpha}, \Delta_{\beta}} Q_{\Delta_{\alpha}}^{-1}(Y_{\alpha}, Y_{\beta}) \bar{Q}_{\bar{\Delta}_{\alpha}}^{-1}(\bar{Y}_{\alpha}, \bar{Y}_{\beta}) \times \\ & \times C_{12\alpha} C_{12\alpha}(0, 0, Y_{\alpha}) C_{12\alpha}(0, 0, \bar{Y}_{\alpha}) C_{\beta 34} C_{\beta 34}(Y_{\beta}, 0, 0) C_{\beta 34}(\bar{Y}_{\beta}, 0, 0). \end{aligned} \quad (1.37)$$

Отметим, что из-за свойств двухточечных и трехточечных корреляторов сумма по голоморфным и антиголоморфным диаграммам Юнга может производиться по отдельности:

$$G(x, \bar{x}) = \sum_{\alpha, \beta} x^{\Delta_\alpha} \bar{x}^{\bar{\Delta}_\alpha} \delta_{\Delta_\alpha, \bar{\Delta}_\alpha} C_{12\alpha} C_{\beta34} \times \\ \times \left(\sum_{Y_\alpha, Y_\beta} x^{|Y_\alpha|} Q_{\Delta_\alpha}^{-1}(Y_\alpha, Y_\beta) C_{12\alpha}(0, 0, Y_\alpha) C_{\beta34}(Y_\beta, 0, 0) \right) \times \\ \times \left(\sum_{\bar{Y}_\alpha, \bar{Y}_\beta} x^{|\bar{Y}_\alpha|} \bar{Q}_{\bar{\Delta}_\alpha}^{-1}(\bar{Y}_\alpha, \bar{Y}_\beta) C_{12\alpha}(0, 0, \bar{Y}_\alpha) C_{\beta34}(\bar{Y}_\beta, 0, 0) \right). \quad (1.38)$$

В дальнейшем будет рассматриваться только голоморфный конформный блок $B_\Delta(x)$ и его составляющие, т. е. объекты в первой скобке в (1.38):

$$B_\Delta(x) = \sum_{Y_\alpha, Y_\beta} x^{|Y_\alpha|} Q_{\Delta_\alpha}^{-1}(Y_\alpha, Y_\beta) C_{12\alpha}(0, 0, Y_\alpha) C_{\beta34}(Y_\beta, 0, 0). \quad (1.39)$$

Для вычисления такого конформного блока достаточно рассмотреть корреляторы с нулевыми антиголоморфными диаграммами Юнга. Так, для вычисления соответствующих структурных констант достаточно рассмотреть тройные вершины со следующим естественным обозначением:

$$\Gamma_{\hat{\phi}\hat{\psi}\hat{\chi}} \equiv C_{\phi, \psi, \chi} C_{\phi, \psi, \chi}(Y_\phi, Y_\psi, Y_\chi) \equiv \langle V_{\hat{\phi}}(0) V_{\hat{\psi}}(1) V_{\hat{\chi}}(\infty) \rangle, \quad (1.40)$$

где также введено обозначение $\hat{\alpha} = \{\alpha, Y_\alpha\}$.

Используя матрицу Шаповалова (1.32), на пространстве векторов состояний можно ввести скалярное произведение:

$$\langle L_{-Y_\alpha} V_\alpha | L_{-Y_\beta} V_\beta \rangle = Q_{\Delta_\alpha}(Y_\alpha, Y_\beta). \quad (1.41)$$

Подробнее свойства такого скалярного произведения рассмотрены в п. 1.5.

1.5. Форма Шаповалова. Как было указано ранее, на алгебре полей можно ввести скалярное произведение (1.41), которое линейно по обоим входящим в него полям. Также удобно, чтобы операторы Вирасоро были эрмитовыми относительно скалярного произведения:

$$\langle L_{-n} V_{\hat{\alpha}} | V_{\hat{\beta}} \rangle = \langle V_{\hat{\alpha}} | L_n V_{\hat{\beta}} \rangle. \quad (1.42)$$

Помимо данного свойства, скалярное произведение должно быть ортогонально для примарных полей:

$$\langle V_\alpha | V_\beta \rangle = \delta_{\alpha, \beta}. \quad (1.43)$$

При рассмотрении алгебры Вирасоро скалярное произведение можно определить как коррелятор полей в нуле и бесконечности, но все его значения можно также получить напрямую из указанных выше свойств.

Матрица Шаповалова $Q_{\Delta_1}(Y_1, Y_2)$ блочно-диагональна (см. табл. 1). Ее значения можно определить, рассмотрев действие оператора $L_{Y_\alpha} L_{-Y_\beta}$ на примарное поле V_β .

Таблица 1. Элементы матрицы Шаповалова для диаграмм Юнга $|Y| \leq 3$

$Y_1 \setminus Y_2$	\emptyset	[1]	[2]	[1, 1]
\emptyset	1			
[1]		2Δ		
[2]			$\frac{1}{2}(8\Delta + c)$	6Δ
[1, 1]			6Δ	$4\Delta(1 + 2\Delta)$
$Y_1 \setminus Y_2$	[3]	[2, 1]	[1, 1, 1]	
[3]	$6\Delta + 2c$	$2(8\Delta + c)$	24Δ	
[2, 1]	$2(8\Delta + c)$	$8\Delta^2 + (34 + c)\Delta + 2c$	$36\Delta(\Delta + 1)$	
[1, 1, 1]	24Δ	$36\Delta(\Delta + 1)$	$24\Delta(\Delta + 1)(2\Delta + 1)$	

Блочно-диагональная форма матрицы Шаповалова позволяет, несмотря на ее, вообще говоря, бесконечный размер, построить обратную к ней матрицу. Обратная матрица также будет иметь блочно-диагональную форму, причем каждый ее блок будет обратным к соответствующему блоку матрицы Шаповалова. При подсчете конформных блоков, согласно (1.39), используется обратная матрица Шаповалова: $D_\Delta(Y_\alpha, Y_\beta) = Q_\Delta^{-1}(Y_\alpha, Y_\beta)$.

1.6. Тройные вершины. Рассмотрим подробнее два типа тройных вершин — коррелятор (точнее, его голоморфную часть) и скалярное произведение трех полей:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\phi\chi\psi}(Y_\phi, Y_\chi, Y_\psi) &= \langle L_{-Y_\phi} V_\phi(0) L_{-Y_\chi} V_\chi(1) L_{-Y_\psi} V_\psi(\infty) \rangle, \\ \bar{\Gamma}_{\chi\phi}^\psi(Y_\chi, Y_\phi, Y_\psi) &= \langle L_{-Y_\psi} V_\psi | L_{-Y_\chi} V_\chi(1) L_{-Y_\phi} V_\phi(0) \rangle. \end{aligned} \quad (1.44)$$

Если рассматривать поля из модулей Верма, то согласно свойствам операторов Вирасоро и скалярного произведения

$$\begin{aligned} \langle L_{-n} V_{\hat{\alpha}} | V_1(1) V_2(0) \rangle &= \left\langle V_{\hat{\alpha}} \left| \oint_{0+1} x^{n+1} dx T(x) V_1(1) V_2(0) \right. \right\rangle = \\ &= \oint_1 \frac{x^{n+1} dx}{(x-1)^{k+2}} \langle V_{\hat{\alpha}} | (L_k V_1)(1) V_2(0) \rangle + \oint_0 \frac{x^{n+1} dx}{x^{k+2}} \langle V_{\hat{\alpha}} | V_1(1) (L_k V_2)(0) \rangle, \end{aligned} \quad (1.45)$$

где контуры интегрирования охватывают точки $z = 0$ и $z = 1$. Аналогичным образом можно представить и коррелятор Γ :

$$\begin{aligned} \langle (L_{-n} V_{\hat{\alpha}})(0) V_3(1) V_4(\infty) \rangle &= \oint_0 \frac{dx}{x^{n-1}} \langle T(x) V_{\hat{\alpha}}(0) V_3(1) V_4(\infty) \rangle = \\ &= - \oint_1 \frac{dx}{x^{n-1} (x-1)^{k+2}} \langle V_{\hat{\alpha}}(0) (L_k V_3)(1) V_4(\infty) \rangle + \\ &\quad + \oint_{\infty} \frac{x^{k-2} dx}{x^{n-1}} \langle V_{\hat{\alpha}}(0) V_3(1) (L_k V_4)(\infty) \rangle. \end{aligned} \quad (1.46)$$

В последний интеграл в формулах (1.45) и (1.46) дают вклад только члены с $k = n$. Эти формулы позволяют выразить тройные вершины с полями из модулей Верма через тройные вершины с примарными полями:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\phi\chi\psi}(Y_\phi, Y_\chi, Y_\psi) &= \gamma_{\phi\chi\psi}(Y_\phi, Y_\chi, Y_\psi) \langle V_\phi(0) V_\chi(1) V_\psi(\infty) \rangle, \\ \bar{\Gamma}_{\chi\phi}^\psi(Y_\chi, Y_\phi, Y_\psi) &= \bar{\gamma}_{\chi\phi}^\psi(Y_\chi, Y_\phi, Y_\psi) \langle V_\psi | V_\chi(1) V_\phi(0) \rangle, \end{aligned} \quad (1.47)$$

где γ и $\bar{\gamma}$ описываются только конформными свойствами теории и алгеброй Вирасоро, а корреляторы примарных полей зависят от выбора конкретной теории и связаны со структурными константами теории.

Отметим, что при рассмотрении алгебры Вирасоро два типа тройных вершин совпадают: $\gamma_{\phi\chi\psi} = \bar{\gamma}_{\chi\phi}^\psi$. Это свойство, однако, не выполняется при рассмотрении более сложных структур, например алгебры $W^{(3)}$, которая будет рассмотрена ниже.

1.6.1. Тройные вершины $\bar{\Gamma}$. Рассмотрим подробнее методы вычисления тройных вершин. Для примарного поля V_1 формула (1.45) сводится к

$$\begin{aligned} \langle L_{-n} V_{\hat{\alpha}} | V_1(1) V_2(0) \rangle &= (n+1) \Delta_1 \langle V_{\hat{\alpha}} | V_1(1) V_2(0) \rangle + \\ &\quad + \langle V_{\hat{\alpha}} | (L_{-1} V_1)(1) V_2(0) \rangle + \langle V_{\hat{\alpha}} | V_1(1) (L_n V_2)(0) \rangle. \end{aligned} \quad (1.48)$$

В случае, когда поле V_1 не является примарным, формула имеет несколько более сложный вид:

$$\begin{aligned} \langle L_{-n} V_{\hat{\alpha}} | V_1(1) V_2(0) \rangle &= \sum_{k>0} \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} \langle V_{\hat{\alpha}} | (L_k V_1)(1) V_2(0) \rangle + \\ &\quad + (n+1) \Delta_1 \langle V_{\hat{\alpha}} | V_1(1) V_2(0) \rangle + \langle V_{\hat{\alpha}} | (L_{-1} V_1)(1) V_2(0) \rangle + \\ &\quad + \langle V_{\hat{\alpha}} | V_1(1) (L_n V_2)(0) \rangle. \end{aligned} \quad (1.49)$$

Дополнительные слагаемые в правой части, однако, пропадают при $n = 0$.

Если примарными являются оба поля V_1 и V_2 , то для всех $n > 0$ по определению примарного поля $L_n V_2 = 0$. Если при этом рассмотреть формулу (1.48) при $n = 0$, то

$$\langle V_{\hat{\alpha}} | \underline{(L_{-1}V_1)}(1) V_2(0) \rangle = (\Delta_{\hat{\alpha}} - \Delta_1 - \Delta_2) \langle V_{\hat{\alpha}} | V_1(1)V_2(0) \rangle, \quad (1.50)$$

таким образом,

$$\langle L_{-n}V_{\hat{\alpha}} | V_1(1)V_2(0) \rangle = (\Delta_{\hat{\alpha}} + n\Delta_1 - \Delta_2) \langle V_{\hat{\alpha}} | V_1(1)V_2(0) \rangle, \quad n > 0, \quad (1.51)$$

где также использовались соотношения $L_0V_{\hat{\alpha}} = \Delta_{\hat{\alpha}}V_{\hat{\alpha}}$ и $L_0V_2 = \Delta_2V_2$. Заметим, что (1.50) остается верным, даже если V_1 не примарное поле, что не верно для (1.51). Отметим также, что в формуле (1.51) не налагается никаких ограничений на $V_{\hat{\alpha}}$, в частности, $V_{\hat{\alpha}}$ может быть непримарным полем. Если $V_{\hat{\alpha}} = L_{-Y}V_{\alpha}$ — поле из модуля Верма, то из свойств алгебры Вирасоро

$$\Delta_{\hat{\alpha}} = \Delta_{\alpha} + |Y| \quad (1.52)$$

и с помощью последовательного применения (1.51) можно получить общую формулу для $\bar{\gamma}$ для произвольной диаграммы Юнга $Y = \{k_1 \geq k_2 \geq \dots\}$:

$$\langle \underline{L_{-Y}V_{\alpha}} | V_1(1)V_2(0) \rangle = \langle V_{\alpha} | V_1(1)V_2(0) \rangle \prod_i \left(\Delta_{\alpha} + k_i\Delta_1 - \Delta_2 + \sum_{j < i} k_j \right). \quad (1.53)$$

1.6.2. Тройные вершины Γ . Для примарных V_3 и V_4 формула (1.46) сводится к

$$\begin{aligned} \langle (L_{-n}V_{\hat{\alpha}})(0) V_3(1)V_4(\infty) \rangle &= (n-1)\Delta_3 \langle V_{\hat{\alpha}}(0) V_3(1)V_4(\infty) \rangle - \\ &- \langle V_{\hat{\alpha}}(0) (L_{-1}V_3)(1) V_4(\infty) \rangle + \langle V_{\hat{\alpha}}(0) V_3(1) L_{-n}V_4(\infty) \rangle. \end{aligned} \quad (1.54)$$

При $n = 0$ эта формула приводит к соотношению

$$\langle V_{\hat{\alpha}}(0) (L_{-1}V_3)(1) V_4(\infty) \rangle = -(\Delta_{\hat{\alpha}} + \Delta_3 - \Delta_4) \langle V_{\hat{\alpha}}(0) V_3(1) V_4(\infty) \rangle, \quad (1.55)$$

что позволяет получить для произвольного $n > 0$

$$\langle (L_{-n}V_{\hat{\alpha}})(0) V_3(1)V_4(\infty) \rangle = (\Delta_{\hat{\alpha}} + n\Delta_3 - \Delta_4) \langle V_{\hat{\alpha}}(0) V_3(1)V_4(\infty) \rangle, \quad (1.56)$$

что является аналогом (1.51). Таким образом, для произвольной диаграммы Юнга Y

$$\begin{aligned} \langle (L_{-Y}V_{\alpha})(0) V_3(1)V_4(\infty) \rangle &= \\ &= \langle V_{\alpha}(0)V_3(1)V_4(\infty) \rangle \prod_i \left(\Delta_{\alpha} + k_i\Delta_3 - \Delta_4 + \sum_{j < i} k_j \right), \end{aligned} \quad (1.57)$$

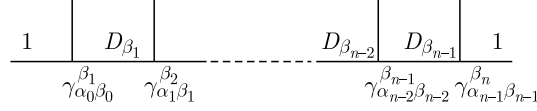


Рис. 3. Диаграммная техника для вычисления конформного блока. γ соответствуют тройным вершинам, а D — обратной матрице Шаповалова

1.7. Диаграммная техника. Приведенный в п. 1.4 способ вычисления четырехточечного конформного блока может быть обобщен и на случаи большего числа полей. С помощью операторного разложения (1.2) корреляторы любого числа полей можно свести к простейшим элементам — скалярным произведениям двух полей (см. п. 1.5) и трехточечным вершинам (см. п. 1.6). Такое разложение коррелятора естественным образом описывается диаграммной техникой. Конкретный вид диаграммы зависит от количества полей в корреляторе или конформном блоке и рода рассматриваемой поверхности. Диаграммы состоят из элементов двух типов: пропагаторов и вершин (рис. 3), связанных с обратной матрицей Шаповалова и тройными вершинами соответственно.

Процедура вычисления конформных блоков, таким образом, дается следующим алгоритмом: с помощью формулы (1.2) количество внешних полей n -точечного конформного блока уменьшается на 1, таким образом получается линейная комбинация $(n - 1)$ -точечных конформных блоков. В полученном выражении структурные константы C_{ij}^k можно представить с помощью $\bar{\Gamma}$ и матрицы Шаповалова:

$$\bar{\Gamma}_{\psi\hat{\phi}}^{\hat{\chi}} \stackrel{\text{def}}{=} \langle V_{\hat{\chi}} | V_{\psi}(1) V_{\hat{\phi}}(0) \rangle = \sum_{\xi} C_{\psi\hat{\phi}}^{\xi} \langle V_{\hat{\chi}} | V_{\xi} \rangle, \tag{1.58}$$

$$\downarrow$$

$$C_{\psi\hat{\phi}}^{\xi} = \bar{\Gamma}_{\psi\hat{\phi}}^{\hat{\chi}} \left(\langle V_{\hat{\chi}} | V_{\xi} \rangle \right)^{-1},$$

$$C_{\psi\hat{\phi}}^{\xi} = C_{\psi\hat{\phi}}^{\xi} \gamma_{\psi\hat{\phi}}^{\chi}(Y_{\psi}, Y_{\hat{\phi}}, Y_{\chi}) D_{\xi}(Y_{\chi}, Y_{\xi}). \tag{1.59}$$

Соответственно, правила построения конформного блока по диаграмме относительно просты: каждой вершине сопоставляется тройная вершина (см. п. 1.6), а каждой внутренней линии — обратная матрица Шаповалова (см. п. 1.5), после этого нужно произвести суммирование по всем полям, соответствующим внутренним линиям диаграммы.

1.8. Подсчитанные тройные вершины. Для расчетов конформных блоков, приведенных в данном обзоре, необходимо вычисление различных тройных вершин с помощью описанных выше методов. Здесь приведены некото-

рые результаты, использованные в дальнейших вычислениях:

$$\begin{aligned}
\gamma_{23}^1([1], \emptyset, \emptyset) &= -\gamma_{23}^1(\emptyset, [1], \emptyset), \\
\gamma_{23}^1([1], \emptyset, \emptyset) &= (\Delta_1 - \Delta_2 - \Delta_3), \\
\gamma_{23}^1(\emptyset, [1], \emptyset) &= (\Delta_3 + \Delta_2 - \Delta_1), \\
\gamma_{23}^1(\emptyset, \emptyset, [1]) &= (\Delta_1 + \Delta_2 - \Delta_3), \\
\gamma_{23}^1([1], [1], \emptyset) &= -(\Delta_3 + \Delta_2 - \Delta_1)(\Delta_3 + \Delta_2 - \Delta_1 + 1), \\
\gamma_{23}^1(\emptyset, [1], [1]) &= (\Delta_3 + \Delta_2 - \Delta_1)(\Delta_1 + \Delta_2 - \Delta_3 - 1) + 2\Delta_3, \\
\gamma_{23}^1([1], \emptyset, [1]) &= (\Delta_1 + \Delta_2 - \Delta_3)(\Delta_1 - \Delta_2 - \Delta_3 + 1), \\
\gamma_{23}^1([1^2], \emptyset, \emptyset) &= (\Delta_1 - \Delta_2 - \Delta_3)(\Delta_1 - \Delta_2 - \Delta_3 - 1), \\
\gamma_{23}^1(\emptyset, [1^2], \emptyset) &= (\Delta_1 - \Delta_2 - \Delta_3)(\Delta_1 - \Delta_2 - \Delta_3 - 1), \\
\gamma_{23}^1(\emptyset, \emptyset, [1^2]) &= (\Delta_1 + \Delta_2 - \Delta_3)(\Delta_1 + \Delta_2 - \Delta_3 + 1), \\
\gamma_{23}^1(\emptyset, \emptyset, [2]) &= (\Delta_1 + 2\Delta_2 - \Delta_3), \\
\gamma_{23}^1(\emptyset, [2], \emptyset) &= (\Delta_3 + 2\Delta_2 - \Delta_1), \\
\gamma_{23}^1([1], [2], \emptyset) &= (\Delta_1 - \Delta_2 - \Delta_3 - 2)(\Delta_3 + 2\Delta_2 - \Delta_1), \\
\gamma_{23}^1(\emptyset, [1], [2]) &= (\Delta_3 + \Delta_2 - \Delta_1)(\Delta_1 + 2\Delta_2 - \Delta_3 - 1), \\
\gamma_{23}^1(\emptyset, [2], [1]) &= (\Delta_3 + 2\Delta_2 - \Delta_1)(\Delta_1 + \Delta_2 - \Delta_3 - 2) + 3(\Delta_3 + \Delta_2 - \Delta_1), \\
\gamma_{23}^1(\emptyset, [1], [1^2]) &= 2\Delta_3(\Delta_1 + \Delta_2 - \Delta_3) + 2\Delta_3(\Delta_1 + \Delta_2 - \Delta_3 - 1) + \\
&\quad + (\Delta_3 + \Delta_2 - \Delta_1)(\Delta_1 + \Delta_2 - \Delta_3 - 1)^2, \\
\gamma_{23}^1(\emptyset, [1^2], [1]) &= 2(2\Delta_3 + 1)(\Delta_3 + \Delta_2 - \Delta_1) + \\
&\quad + (\Delta_1 - \Delta_2 - \Delta_3)(\Delta_1 - \Delta_2 - \Delta_3 - 1) \times \\
&\quad \times (\Delta_1 + \Delta_2 - \Delta_3 - 2), \\
\gamma_{23}^1([1], [1], [1]) &= 2\Delta_3(\Delta_1 - \Delta_2 - \Delta_3 - 1) + \\
&\quad + (\Delta_1 - \Delta_2 - \Delta_3)(\Delta_3 + \Delta_2 - \Delta_1)(\Delta_1 + \Delta_2 - \Delta_3 - 1), \\
\gamma_{23}^1([1], \emptyset, [1^2]) &= (\Delta_1 - \Delta_2 - \Delta_3 + 1)(\Delta_1 + \Delta_2 - \Delta_3)(\Delta_1 + \Delta_2 - \Delta_3 + 1), \\
\gamma_{23}^1([1], [1^2], \emptyset) &= (\Delta_1 - \Delta_2 - \Delta_3)(\Delta_1 - \Delta_2 - \Delta_3 - 1)(\Delta_1 - \Delta_2 - \Delta_3 - 2), \\
\gamma_{23}^1([1^2], \emptyset, [1]) &= (\Delta_1 - \Delta_2 - \Delta_3)(\Delta_1 - \Delta_2 - \Delta_3 - 1)(\Delta_1 + \Delta_2 - \Delta_3), \\
\gamma_{23}^1(\emptyset, [2], [2]) &= (\Delta_3 + 2\Delta_2 - \Delta_1)(\Delta_1 + 2\Delta_2 - \Delta_3 - 2) + 4\Delta_3 + \frac{c}{2}, \\
\gamma_{23}^1(\emptyset, [1^2], [2]) &= 6\Delta_3 + (\Delta_1 - \Delta_2 - \Delta_3)(\Delta_1 - \Delta_2 - \Delta_3 - 1) \times \\
&\quad \times (\Delta_1 + 2\Delta_2 - \Delta_3 - 2), \\
\gamma_{23}^1([1], [2], [1]) &= (\Delta_3 + 2\Delta_2 - \Delta_1)(\Delta_1 + \Delta_2 - \Delta_3 - 2)(\Delta_1 - \Delta_2 - \Delta_3 - 1) + \\
&\quad + 3(\Delta_3 + \Delta_2 - \Delta_1)(\Delta_1 - \Delta_2 - \Delta_3 - 1),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{23}^1([1^2], [2], \emptyset) &= (\Delta_1 - \Delta_2 - \Delta_3 - 3)(\Delta_1 - \Delta_2 - \Delta_3 - 2)(\Delta_3 + 2\Delta_2 - \Delta_1), \\ \gamma_{23}^1(\emptyset, [2], [1^2]) &= 6(\Delta_1 + \Delta_2 - \Delta_3 - 1)(\Delta_3 + \Delta_2 - \Delta_1) + \\ &\quad + (\Delta_1 + \Delta_2 - \Delta_3 - 1)(\Delta_3 + 2\Delta_2 - \Delta_1) \times \\ &\quad \times (\Delta_1 + \Delta_2 - \Delta_3 - 2) + 6\Delta_3, \\ \gamma_{23}^1([1^2], [1^2], \emptyset) &= (\Delta_1 - \Delta_2 - \Delta_3)(\Delta_1 - \Delta_2 - \Delta_3 - 1) \times \\ &\quad \times (\Delta_1 - \Delta_2 - \Delta_3 - 2)(\Delta_1 - \Delta_2 - \Delta_3 - 3), \\ \gamma_{23}^1([1], [1^3], \emptyset) &= -(\Delta_1 - \Delta_2 - \Delta_3)(\Delta_1 - \Delta_2 - \Delta_3 - 1) \times \\ &\quad \times (\Delta_1 - \Delta_2 - \Delta_3 - 2)(\Delta_1 - \Delta_2 - \Delta_3 - 3), \\ \gamma_{23}^1([1], [1^2], [1]) &= 2(2\Delta_3 + 1)(\Delta_3 + \Delta_2 - \Delta_1)(\Delta_1 - \Delta_2 - \Delta_3 - 1) + \\ &\quad + (\Delta_1 - \Delta_2 - \Delta_3)(\Delta_1 - \Delta_2 - \Delta_3 - 1)^2 \times \\ &\quad \times (\Delta_1 + \Delta_2 - \Delta_3 - 2), \\ \gamma_{23}^1(\emptyset, [1^2], [1^2]) &= 2\Delta_2\gamma_{23}^1(\emptyset, [1^2], [1]) + \gamma_{23}^1([1], [1^2], [1]) + \\ &\quad + 2(2\Delta_3 + 1)\gamma_{23}^1(\emptyset, [1], [1]). \end{aligned}$$

1.9. $W^{(3)}$ алгебра. Некоторые конформные модели с бесконечным числом примарных полей Вирасоро могут также обладать некоторыми дополнительными симметриями. Симметрии такого типа называются расширенной конформной или киральной алгеброй. Алгебра Вирасоро всегда является одной из ее составляющих, но конформная алгебра может быть и больше. Хорошо известный пример такой алгебры — алгебра токов в модели Весса–Зумино–Новикова–Виттена [59]. В данном обзоре рассмотрен другой пример конформной алгебры. Теория с r свободными полями не определяется полностью алгеброй Вирасоро, соответствующая алгебра носит название W_{r+1} .

С помощью конформной алгебры можно ввести соответствующие ей примарные поля. Один модуль Верма расширенной конформной алгебры может включать в себя бесконечное число примарных полей Вирасоро, и новые конформные блоки тогда оказываются бесконечной суммой конформных блоков Вирасоро*. Элементы модуля Верма при этом нумеруются обобщенными диаграммами Юнга \mathcal{U} . Многие из формул, полученных выше для алгебры Вирасоро, не изменяются при замещении операторов L генераторами конформной алгебры и диаграмм Y обобщенными диаграммами \mathcal{U} . Важное отличие, однако, состоит в том, что конформной алгебры может быть недостаточно для сведения всех корреляторов к корреляторам примарных полей.

*На самом деле в большинстве конформных моделей корреляторы — это суммы билинейных комбинаций голоморфных и антиголоморфных конформных блоков, т. е. в этих моделях нет взаимно-однозначного соответствия между конформным блоком и коррелятором. Это означает, что, вообще говоря, сумма голоморфных конформных блоков не имеет физического смысла.

Так, в случае алгебры $W^{(3)}$ в ответ будут входить и тройные вершины вида $\langle (W_{-1}^k V_\alpha) V_1 V_2 \rangle$, которые необходимо задать с помощью некоторых дополнительных наложенных условий. Также более сложным является и соотношение между γ и $\bar{\gamma}$, по этой причине необходимо по отдельности рассчитать тройные вершины двух типов.

Алгебра $W^{(3)}$ задается оператором $\mathcal{W}(z)$, который является аналогом оператора тензора энергии-импульса, но имеет спин $s = 3$. Разложение в ряд Лорана для оператора \mathcal{W} определяет генераторы алгебры $W^{(3)}$:

$$\mathcal{W}V(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{W_n}{z^{n+3}} V(z). \quad (1.60)$$

Эти операторы удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$\begin{aligned} [W_n, W_m] = & \frac{c}{3 \cdot 5!} (n^2 - 1)(n^2 - 4)n\delta_{n,-m} + \frac{16}{22 + 5c} (n - m)\Lambda_{n+m} + \\ & + (n - m) \left(\frac{1}{15} (n + m + 2)(n + m + 3) - \frac{1}{6} (n + 2)(m + 2) \right) L_{n+m}, \end{aligned} \quad (1.61)$$

где Λ_n — квадратичная комбинация операторов Вирасоро

$$\begin{aligned} \Lambda_n = & \sum_{k=-\infty}^{\infty} \circ L_k L_{n-k} \circ + \frac{1}{5} x_n L_n, \\ x_{2\ell} = & 1 - \ell^2, \quad x_{2\ell+1} = (2 + \ell)(1 - \ell). \end{aligned} \quad (1.62)$$

Также возможно построить и коммутационные соотношения между операторами Вирасоро и W :

$$[L_n, W_m] = (2n - m)W_{n+m}. \quad (1.63)$$

Для обобщения результатов для алгебры Вирасоро на случай $W^{(3)}$ необходимо рассмотреть обобщение матрицы Шаповалова и тройных вершин. Алгоритм вычисления матрицы Шаповалова довольно прост и требует только знания коммутационных соотношений. Для диаграмм Юнга размером $|Y| = 1$, т. е. для операторов L_{-1} и W_{-1} , она устроена как

$$Q = \begin{pmatrix} 2\Delta & 3w \\ 3w & 9D\Delta/2 \end{pmatrix}. \quad (1.64)$$

В связи с увеличением числа операторов увеличивается и размер соответствующих блоков матрицы Шаповалова. По этой причине в данном обзоре приведены только значения матрицы Шаповалова в случае алгебры $W^{(3)}$ только для диаграмм размером один (1.64) и два (табл. 2). Обобщение тройных вершин требует более детального рассмотрения.

Таблица 2. Элементы матрицы Шаповалова для диаграмм Юнга $|Y| = 2$ в случае алгебры $W^{(3)}$

$Q_\alpha(\mathcal{Y}, \mathcal{Y}')$	$L_{-2}V_\alpha$	$L_{-1}^2V_\alpha$	$L_{-1}W_{-1}V_\alpha$	$W_{-2}V_\alpha$	$W_{-1}^2V_\alpha$
$L_{-2}V_\alpha$	$4\Delta + 1 - 6Q^2$	6Δ	$9w$	$6w$	$\frac{45D\Delta}{2}$
$L_{-1}^2V_\alpha$	6Δ	$4\Delta(2\Delta + 1)$	$6w(2\Delta + 1)$	$12w$	$9(3D\Delta + 2w^2)$
$L_{-1}W_{-1}V_\alpha$	$9w$	$6w(2\Delta + 1)$	$9(D\Delta^2 + D\Delta + w^2)$	$18D\Delta$	$\frac{27Dw}{2}(2\Delta + 3)$
$W_{-2}V_\alpha$	$6w$	$12w$	$18D\Delta$	$72\Delta\left(\Delta + 1 - \frac{3Q^2}{2}\right)$	$108w\left(3\Delta + 1 - \frac{3Q^2}{4}\right)$
$W_{-1}^2V_\alpha$	$\frac{45D\Delta}{2}$	$9(3D\Delta + 2w^2)$	$\frac{27Dw}{2}(2\Delta + 3)$	$108w\left(3\Delta + 1 - \frac{3Q^2}{4}\right)$	$\frac{81}{4}D^2\Delta(2\Delta + 1) + 162\left(D\Delta(\Delta + 1) + 4w^2\right)$

1.9.1. Тройные вершины в алгебре $W^{(3)}$. Так как в случае алгебры $W^{(s)}$ оператор \mathcal{W} , генерирующий эту алгебру, имеет спин s , соотношения (1.45) и (1.46) изменятся:

$$\begin{aligned} \langle W_{-n} V_{\bar{\alpha}} | V_1(1) V_2(0) \rangle &= \langle V_{\bar{\alpha}} | \oint_{0+1} x^{n+s-1} dx \mathcal{W}(x) V_1(1) V_2(0) \rangle = \\ &= \oint_1 \frac{x^{n+s-1} dx}{(x-1)^{k+s}} \langle V_{\bar{\alpha}} | (W_k V_1)(1) V_2(0) \rangle + \\ &\quad + \oint_0 \frac{x^{n+s-1} dx}{x^{k+s}} \langle V_{\bar{\alpha}} | V_1(1) (W_k V_2)(0) \rangle \quad (1.65) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \langle (W_{-n} V_{\bar{\alpha}})(0) V_3(1) V_4(\infty) \rangle &= \oint_0 \frac{dx}{x^{n-s+1}} \langle \mathcal{W}(x) V_{\bar{\alpha}}(0) V_3(1) V_4(\infty) \rangle = \\ &= - \oint_1 \frac{dx}{x^{n-s+1} (x-1)^{k+s}} \langle V_{\bar{\alpha}}(0) (W_k V_3)(1) V_4(\infty) \rangle + \\ &\quad + (-)^s \oint_{\infty} \frac{x^{k-s} dx}{x^{n-s+1}} \langle V_{\bar{\alpha}}(0) V_3(1) (W_k V_4)(\infty) \rangle. \quad (1.66) \end{aligned}$$

В случае алгебры $W^{(3)}$, которая рассматривается в данном обзоре, $s = 3$, таким образом,

$$\begin{aligned} \langle W_{-n} V_{\bar{\alpha}} | V_1(1) V_2(0) \rangle &= \langle V_{\bar{\alpha}} | \oint_{0+1} x^{n+2} dx \mathcal{W}(x) V_1(1) V_2(0) \rangle = \\ &= \oint_1 \frac{x^{n+2} dx}{(x-1)^{k+3}} \langle V_{\bar{\alpha}} | (W_k V_1)(1) V_2(0) \rangle + \\ &\quad + \oint_0 \frac{x^{n+2} dx}{x^{k+3}} \langle V_{\bar{\alpha}} | V_1(1) (W_k V_2)(0) \rangle \quad (1.67) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \langle (W_{-n} V_{\bar{\alpha}})(0) V_3(1) V_4(\infty) \rangle &= \oint_0 \frac{dx}{x^{n-2}} \langle \mathcal{W}(x) V_{\bar{\alpha}}(0) V_3(1) V_4(\infty) \rangle = \\ &= - \oint_1 \frac{dx}{x^{n-2} (x-1)^{k+3}} \langle V_{\bar{\alpha}}(0) (W_k V_3)(1) V_4(\infty) \rangle - \\ &\quad - \oint_{\infty} \frac{x^{k-3} dx}{x^{n-2}} \langle V_{\bar{\alpha}}(0) V_3(1) (W_k V_4)(\infty) \rangle. \quad (1.68) \end{aligned}$$

Тройные вершины $\bar{\Gamma}$. Если поля V_1 и V_2 примарные, то соотношение (1.67) сводится к

$$\begin{aligned} \langle W_{-n} V_{\hat{\alpha}} | V_1(1) V_2(0) \rangle &= \frac{(n+2)(n+1)}{2} w_1 \langle V_{\hat{\alpha}} | V_1(1) V_2(0) \rangle + \\ &+ (n+2) \langle V_{\hat{\alpha}} | (W_{-1} V_1)(1) V_2(0) \rangle + \langle V_{\hat{\alpha}} | (W_{-2} V_1)(1) V_2(0) \rangle + \\ &+ \langle V_{\hat{\alpha}} | V_1(1) (W_n V_2)(0) \rangle. \end{aligned} \quad (1.69)$$

Если в случае алгебры Вирасоро можно было выразить тройные вершины с $L_{-1} V_1$ через тройные вершины V_1 (см. (1.50)), то в данном случае аналогичную процедуру можно проделать только для $W_{-2} V_1$:

$$\begin{aligned} \langle V_{\hat{\alpha}} | (W_{-2} V_1)(1) V_2(0) \rangle &= \\ &= (\hat{w}_{\hat{\alpha}} - w_1 - w_2) \langle V_{\hat{\alpha}} | V_1(1) V_2(0) \rangle - 2 \langle V_{\hat{\alpha}} | (W_{-1} V_1)(1) V_2(0) \rangle. \end{aligned} \quad (1.70)$$

Из полученных формул следует, что

$$\begin{aligned} \langle W_{-n} V_{\hat{\alpha}} | V_1(1) V_2(0) \rangle &= \left(\hat{w}_{\hat{\alpha}} + \frac{n(n+3)}{2} w_1 - w_2 \right) \langle V_{\hat{\alpha}} | V_1(1) V_2(0) \rangle + \\ &+ n \langle V_{\hat{\alpha}} | (W_{-1} V_1)(1) V_2(0) \rangle, \quad n > 0. \end{aligned} \quad (1.71)$$

Правую часть также можно переписать через тройные вершины, зависящие от $W_{-1} V_2$, а не от $W_{-1} V_1$:

$$\begin{aligned} \langle W_{-n} V_{\hat{\alpha}} | V_1(1) V_2(0) \rangle &= (n+1) \left(\hat{w}_{\hat{\alpha}} + \frac{n}{2} w_1 - w_2 \right) \langle V_{\hat{\alpha}} | V_1(1) V_2(0) \rangle + \\ &+ n \langle V_{\hat{\alpha}} | V_1(1) (W_{-1} V_2)(0) \rangle, \quad n > 0, \end{aligned} \quad (1.72)$$

с использованием соотношения

$$\begin{aligned} \langle W_{-1} V_{\hat{\alpha}} | V_1(1) V_2(0) \rangle &= \\ &= (\hat{w}_{\hat{\alpha}} - w_1 - w_2) \langle V_{\hat{\alpha}} | V_1(1) V_2(0) \rangle + \langle V_{\hat{\alpha}} | V_1(1) (W_{-1} V_2)(0) \rangle. \end{aligned} \quad (1.73)$$

Ключевое отличие от результатов для алгебры Вирасоро состоит в том, что в правой части соотношений (1.71) и (1.72) имеется две различные тройные вершины, а не одна.

Еще одно усложнение состоит в значении $\hat{w}_{\hat{\alpha}}$. Формулы (1.71) и (1.72) записаны в символической форме, имеющей смысл только для примарного поля $V_{\hat{\alpha}}$. В противном случае $\hat{w}_{\hat{\alpha}} V_{\hat{\alpha}} \equiv W_0 V_{\hat{\alpha}}$ не пропорционально $V_{\hat{\alpha}}$, по этой причине используется запись $\hat{w}_{\hat{\alpha}}$ вместо $w_{\hat{\alpha}}$. Так, уже для потомков

первого уровня, $L_{-1}V_\alpha$ и $W_{-1}V_\alpha$, размерности устроены как

$$\begin{aligned}\hat{w}_{\alpha, L_{-1}} L_{-1} V_\alpha &\equiv W_0(L_{-1} V_\alpha) = w_\alpha(L_{-1} V_\alpha) + 2(W_{-1} V_\alpha), \\ \hat{w}_{\alpha, W_{-1}} W_{-1} V_\alpha &\equiv W_0(W_{-1} V_\alpha) = w_\alpha(W_{-1} V_\alpha) + \frac{9D}{2}(L_{-1} V_\alpha).\end{aligned}\quad (1.74)$$

Они являются линейными комбинациями двух разных потомков (значение D указано ниже в формуле (1.128)). Это не позволяет записать (1.71) в виде простой итерационной формулы, аналогичной (1.53).

Если поля V_1 и/или V_2 не являются примарными, то необходимо также добавить некоторые дополнительные слагаемые в (1.69). Так, в случае оператора W_{-1} при непримарных полях $V_{\hat{\alpha}}$, V_1 , и V_2 выражение устроено следующим образом:

$$\begin{aligned}\langle \underline{W_{-1} V_{\hat{\alpha}}} | V_1(1) V_2(0) \rangle &= \langle \underline{W_0 V_{\hat{\alpha}}} | V_1(1) V_2(0) \rangle + 2 \langle V_{\hat{\alpha}} | \underline{(W_0 V_1)(1)} V_2(0) \rangle - \\ &- \langle V_{\hat{\alpha}} | V_1(1) \underline{(W_0 V_2)(0)} \rangle + \langle V_{\hat{\alpha}} | \underline{(W_{-1} V_1)(1)} V_2(0) \rangle + \\ &+ \langle V_{\hat{\alpha}} | \underline{(W_1 V_1)(1)} V_2(0) \rangle + \langle V_{\hat{\alpha}} | V_1(1) \underline{(W_1 V_2)(0)} \rangle.\end{aligned}\quad (1.75)$$

Если все три поля примарные, то первые три слагаемых в сумме дают член $w_\alpha + 2w_1 - w_2$, а последние два обращаются в нуль, таким образом воспроизводя (1.71) при $n = 1$.

Тройные вершины Γ . Если поля V_3 и V_4 примарные, то формула (1.68) преобразуется в

$$\begin{aligned}\langle (W_{-n} V_{\hat{\alpha}})(0) V_3(1) V_4(\infty) \rangle &= -\frac{(n-2)(n-1)}{2} w_3 \langle V_{\hat{\alpha}}(0) V_3(1) V_4(\infty) \rangle + \\ &+ (n-2) \langle V_{\hat{\alpha}}(0) (W_{-1} V_3)(1) V_4(\infty) \rangle - \langle V_{\hat{\alpha}}(0) (W_{-2} V_3)(1) V_4(\infty) \rangle - \\ &- \langle V_{\hat{\alpha}}(0) V_3(1) (W_n V_4)(\infty) \rangle.\end{aligned}\quad (1.76)$$

По аналогии со случаем $\bar{\Gamma}$ можно выразить тройные вершины с $W_{-2}V_3$ через более простые вершины:

$$\begin{aligned}\langle V_{\hat{\alpha}}(0) (W_{-2} V_3)(1) V_4(\infty) \rangle &= -(\hat{w}_{\hat{\alpha}} + w_3 + w_4) \langle V_{\hat{\alpha}}(0) V_3(1) V_4(\infty) \rangle - \\ &- 2 \langle V_{\hat{\alpha}}(0) (W_{-1} V_3)(1) V_4(\infty) \rangle.\end{aligned}\quad (1.77)$$

При $n \geq 0$, таким образом,

$$\begin{aligned}\langle (W_{-n} V_{\hat{\alpha}})(0) V_3(1) V_4(\infty) \rangle &= \\ &= \left(\hat{w}_{\hat{\alpha}} - \frac{n(n-3)}{2} w_3 + w_4 \right) \langle V_{\hat{\alpha}}(0) V_3(1) V_4(\infty) \rangle + \\ &+ n \langle V_{\hat{\alpha}}(0) (W_{-1} V_3)(1) V_4(\infty) \rangle, \quad n \geq 0.\end{aligned}\quad (1.78)$$

Правую часть также можно выразить через $W_{-1}V_4$ вместо $W_{-1}V_3$:

$$\begin{aligned} \langle (W_{-n}V_{\hat{\alpha}})(0) V_3(1) V_4(\infty) \rangle &= (n+1) \left(\hat{w}_{\hat{\alpha}} - \frac{n}{2}w_3 + w_4 \right) \langle V_{\hat{\alpha}}(0) V_3(1) V_4(\infty) \rangle - \\ &- n \langle V_{\hat{\alpha}}(0) V_3(1) (W_{-1}V_4)(\infty) \rangle, \quad n > 0, \end{aligned} \quad (1.79)$$

с помощью соотношения

$$\begin{aligned} \langle V_{\hat{\alpha}}(0) (W_{-1}V_3)(1) V_4(\infty) \rangle &= (\hat{w}_{\hat{\alpha}} - 2w_3 + w_4) \langle V_{\hat{\alpha}}(0) V_3(1) V_4(\infty) \rangle - \\ &- \langle V_{\hat{\alpha}}(0) V_3(1) (W_{-1}V_4)(\infty) \rangle. \end{aligned} \quad (1.80)$$

Сравнение полученных формул с (1.71) и (1.72) показывает, что в случае алгебры $W^{(3)}$ отсутствует прямая связь между тройными вершинами двух типов, которую можно было наблюдать в случае алгебры Вирасоро. Отметим также, что если выразить коррелятор с $W_{-n}V_4$ при $n > 0$ с помощью (1.76), то полученное выражение

$$\begin{aligned} \langle V_{\hat{\alpha}}(0) V_3(1) (W_{-n}V_4)(\infty) \rangle &= \left(w_4 - \frac{n(n+3)}{2}w_3 + \hat{w}_{\hat{\alpha}} \right) \langle V_{\hat{\alpha}}(0) V_3(1) V_4(\infty) \rangle - \\ &- n \langle V_{\hat{\alpha}}(0) (W_{-1}V_3)(1) V_4(\infty) \rangle, \quad n > 0, \end{aligned} \quad (1.81)$$

близко по форме, но все же отлично от (1.71).

В случае оператора W_{-1} для трех непримарных полей аналог соотношения (1.75) устроен как

$$\begin{aligned} \langle (W_{-1}V_{\hat{\alpha}})(0) V_3(1) V_4(0) \rangle &= \langle (W_0V_{\hat{\alpha}})(0) V_3(1) V_4(0) \rangle + \\ &+ \langle V_{\hat{\alpha}}(0) (W_0V_3)(1) V_4(0) \rangle + \langle V_{\hat{\alpha}}(0) V_3(1) (W_0V_4)(0) \rangle + \\ &+ \langle V_{\hat{\alpha}}(0) (W_{-1}V_3)(1) V_4(0) \rangle - \langle V_{\hat{\alpha}}(0) V_3(1) (W_1V_4)(0) \rangle. \end{aligned} \quad (1.82)$$

В случае трех примарных полей первые три слагаемых дают член $w_{\alpha} + w_3 + w_4$, а последнее слагаемое обращается в ноль, таким образом воспроизводя (1.78) при $n = 1$. Заметим, что, в отличие от (1.75), в правой части отсутствует слагаемое $\langle V_{\hat{\alpha}}(0) (W_1V_3)(1) V_4(0) \rangle$. Это связано с рассмотрением случая $n = 1$.

1.9.2. Вычисления в свободной теории поля. Для проверки полученных для $W^{(3)}$ алгебры соотношений здесь приведены аналогичные вычисления в свободной теории поля. Для упрощения формул рассматриваются только случаи с центральным зарядом $c = 1, 2$. Рассмотрение алгебры $W^{(3)}$ подразумевает, что ей соответствует свободная теория с двумя свободными полями.

Рассмотрим выражение (1.36). Напрямую из теории свободных полей можно получить, что при $\vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_2 + \vec{\alpha}_3 + \vec{\alpha}_4 = 0$ коррелятор устроен как

$$\begin{aligned} x^{-\vec{\alpha}_1 \vec{\alpha}_2} \langle \circ \circ e^{\vec{\alpha}_1 \vec{\phi}(x)} \circ \circ \circ e^{\vec{\alpha}_2 \vec{\phi}(0)} \circ \circ \circ e^{\vec{\alpha}_3 \vec{\phi}(1)} \circ \circ \circ e^{\vec{\alpha}_4 \vec{\phi}(\infty)} \circ \circ \rangle &\sim (1-x)^{\vec{\alpha}_1 \vec{\alpha}_3} = \\ &= 1 - (\vec{\alpha}_1 \vec{\alpha}_3)x + \frac{(\vec{\alpha}_1 \vec{\alpha}_3)(\vec{\alpha}_1 \vec{\alpha}_3 - 1)}{2} x^2 + \dots \end{aligned} \quad (1.83)$$

Аналогичное выражение можно получить, воспользовавшись формулой (1.28):

$$\begin{aligned} \langle \circ \circ e^{\vec{\alpha}_1 \vec{\phi}(x) + \vec{\alpha}_2 \vec{\phi}(0)} \circ \circ \circ e^{\vec{\alpha}_3 \vec{\phi}(1)} \circ \circ \circ e^{\vec{\alpha}_4 \vec{\phi}(\infty)} \circ \circ \rangle &= \\ &= \langle \circ \circ e^{(\vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_2) \vec{\phi}(0)} \circ \circ \circ e^{\vec{\alpha}_3 \vec{\phi}(1)} \circ \circ \circ e^{\vec{\alpha}_4 \vec{\phi}(\infty)} \circ \circ \rangle + \\ &+ x \langle \circ \circ (\vec{\alpha}_1 \partial \vec{\phi}) e^{(\vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_2) \vec{\phi}(0)} \circ \circ \circ e^{\vec{\alpha}_3 \vec{\phi}(1)} \circ \circ \circ e^{\vec{\alpha}_4 \vec{\phi}(\infty)} \circ \circ \rangle + \\ &+ \frac{x^2}{2} \langle \circ \circ ((\vec{\alpha}_1 \partial \vec{\phi})^2 + \vec{\alpha}_1 \partial^2 \vec{\phi}) e^{(\vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_2) \vec{\phi}(0)} \circ \circ \circ e^{\vec{\alpha}_3 \vec{\phi}(1)} \circ \circ \circ e^{\vec{\alpha}_4 \vec{\phi}(\infty)} \circ \circ \rangle + \dots \end{aligned} \quad (1.84)$$

Это выражение можно переписать как разложение в базисе полей из модуля Верма, связанных с алгебрами Вирасоро и $W^{(3)}$:

$$\begin{aligned} \langle \circ \circ e^{\vec{\alpha}_1 \vec{\phi}(x) + \vec{\alpha}_2 \vec{\phi}(0)} \circ \circ \circ e^{\vec{\alpha}_3 \vec{\phi}(1)} \circ \circ \circ e^{\vec{\alpha}_4 \vec{\phi}(\infty)} \circ \circ \rangle &= \\ &= C_{\alpha_1 \alpha_2}^\alpha \langle \circ \circ e^{(\vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_2) \vec{\phi}(0)} \circ \circ \circ e^{\vec{\alpha}_3 \vec{\phi}(1)} \circ \circ \circ e^{\vec{\alpha}_4 \vec{\phi}(\infty)} \circ \circ \rangle + \\ &+ x \left\{ \begin{aligned} &\frac{C_{\alpha_1 \alpha_2}^\alpha L_{-1} \langle (L_{-1} \circ \circ e^{(\vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_2) \vec{\phi}(0)} \circ \circ) \circ \circ e^{\vec{\alpha}_3 \vec{\phi}(1)} \circ \circ \circ e^{\vec{\alpha}_4 \vec{\phi}(\infty)} \circ \circ \rangle +}{C_{\alpha_1 \alpha_2}^\alpha W_{-1} \langle (W_{-1} \circ \circ e^{(\vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_2) \vec{\phi}(0)} \circ \circ) \circ \circ e^{\vec{\alpha}_3 \vec{\phi}(1)} \circ \circ \circ e^{\vec{\alpha}_4 \vec{\phi}(\infty)} \circ \circ \rangle +} \\ &\frac{C_{\alpha_1 \alpha_2}^\alpha L_{-2} \langle (L_{-2} \circ \circ e^{(\vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_2) \vec{\phi}(0)} \circ \circ) \circ \circ e^{\vec{\alpha}_3 \vec{\phi}(1)} \circ \circ \circ e^{\vec{\alpha}_4 \vec{\phi}(\infty)} \circ \circ \rangle +}{C_{\alpha_1 \alpha_2}^\alpha L_{-1}^2 \langle (L_{-1}^2 \circ \circ e^{(\vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_2) \vec{\phi}(0)} \circ \circ) \circ \circ e^{\vec{\alpha}_3 \vec{\phi}(1)} \circ \circ \circ e^{\vec{\alpha}_4 \vec{\phi}(\infty)} \circ \circ \rangle +} \end{aligned} \right. \\ &+ x^2 \left\{ \begin{aligned} &C_{\alpha_1 \alpha_2}^\alpha L_{-1} W_{-1} \langle (L_{-1} W_{-1} \circ \circ e^{(\vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_2) \vec{\phi}(0)} \circ \circ) \circ \circ e^{\vec{\alpha}_3 \vec{\phi}(1)} \circ \circ \circ e^{\vec{\alpha}_4 \vec{\phi}(\infty)} \circ \circ \rangle + \\ &C_{\alpha_1 \alpha_2}^\alpha W_{-2} \langle (W_{-2} \circ \circ e^{(\vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_2) \vec{\phi}(0)} \circ \circ) \circ \circ e^{\vec{\alpha}_3 \vec{\phi}(1)} \circ \circ \circ e^{\vec{\alpha}_4 \vec{\phi}(\infty)} \circ \circ \rangle + \\ &C_{\alpha_1 \alpha_2}^\alpha W_{-1}^2 \langle (W_{-1}^2 \circ \circ e^{(\vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_2) \vec{\phi}(0)} \circ \circ) \circ \circ e^{\vec{\alpha}_3 \vec{\phi}(1)} \circ \circ \circ e^{\vec{\alpha}_4 \vec{\phi}(\infty)} \circ \circ \rangle + \end{aligned} \right. \\ &+ \dots \end{aligned} \quad (1.85)$$

Рассмотрим подробнее связь между этими разложениями. В теории свободных полей можно рассмотреть не только разложение (1.85), но и (1.83), что и позволяет провести их сравнение в каждом порядке разложения по x .

Первый порядок разложения для одного поля и $c = 1$. В случае, когда в модели есть только одно поле ϕ , только подчеркнутые слагаемые дают вклад

в (1.85), и, так как

$$(\alpha_1 \partial \phi) e^{(\alpha_1 + \alpha_2) \phi} (0) = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} \left(\partial e^{(\alpha_1 + \alpha_2) \phi} \right) (0), \quad (1.86)$$

структурные константы равны

$$C_{\alpha_1 \alpha_2}^{(\alpha, L_{-1})} = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} \delta_{\alpha, \alpha_1 + \alpha_2}. \quad (1.87)$$

Отметим, что в данном выражении присутствует специфичный для свободной теории закон сохранения

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2. \quad (1.88)$$

Вычислим тройную вершину $\gamma_{\alpha \alpha_3 \alpha_4}(L_{-1})$. Из общей формулы для коррелятора трех примарных полей

$$\langle V(z) V_3(z_3) V_4(z_4) \rangle \sim \frac{1}{(z - z_3)^{\Delta + \Delta_3 - \Delta_4} (z - z_4)^{\Delta + \Delta_4 - \Delta_3} z_{34}^{\Delta_3 + \Delta_4 - \Delta}} \quad (1.89)$$

следует, что если взять производную по z , то

$$\begin{aligned} \langle (\partial V)(z) V_3(z_3) V_4(z_4) \rangle &= \\ &= - \langle V(z) V_3(z_3) V_4(z_4) \rangle \left(\frac{\Delta + \Delta_3 - \Delta_4}{z - z_3} + \frac{\Delta + \Delta_4 - \Delta_3}{z - z_4} \right) \xrightarrow{z_4 \rightarrow \infty} \\ &\xrightarrow{z_4 \rightarrow \infty} - \frac{\Delta + \Delta_3 - \Delta_4}{z - z_3} \langle V(z) V_3(z_3) V_4(z_4) \rangle \xrightarrow[z_3=1]{z=0} \\ &\xrightarrow[z_3=1]{z=0} (\Delta + \Delta_3 - \Delta_4) \langle V(z) V_3(z_3) V_4(z_4) \rangle, \quad (1.90) \end{aligned}$$

что согласуется с (1.51),

$$\gamma_{\alpha \alpha_3 \alpha_4}(L_{-1}) = \Delta + \Delta_3 - \Delta_4. \quad (1.91)$$

Таким образом, сравнение двух сторон (1.36) в данном случае предполагает, что

$$-\alpha_1 \alpha_3 = \sum_{\alpha} C_{\alpha_1 \alpha_2}^{(\alpha, L_{-1})} \gamma_{\alpha \alpha_3 \alpha_4}(L_{-1}) = \frac{\alpha_1 (\Delta_{\alpha_1 + \alpha_2} + \Delta_3 - \Delta_4)}{\alpha_1 + \alpha_2}. \quad (1.92)$$

Если подставить значение $\Delta_{\alpha} = \alpha^2/2$, то

$$\begin{aligned} \Delta_{\alpha_1 + \alpha_2} + \Delta_3 - \Delta_4 &= \frac{(\alpha_1 + \alpha_2)^2 + \alpha_3^2 - \alpha_4^2}{2} = \\ &= \frac{(\alpha_3 + \alpha_4)^2 + \alpha_3^2 - \alpha_4^2}{2} = \alpha_3(\alpha_3 + \alpha_4). \quad (1.93) \end{aligned}$$

Вместе с общим законом сохранения $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0$ можно показать, что соотношение (1.92) действительно выполняется.

Таким образом, явные вычисления в данном случае подтверждают полученные ранее формулы. Отметим, что в процессе данной проверки явно использовались свойства модели, такие как законы сохранения. В то же время проверяемые формулы, например, (1.36) и (1.51), не зависят от модели. По этой причине данные вычисления могут являться проверкой, но не доказательством полученных ранее формул.

Первый порядок разложения для одного поля и $c \neq 1$. Данное обобщение результатов п. 1.9.2 тривиально. Изменяются только выражения для размерностей: $\Delta_\alpha = ((\alpha - Q)^2 - Q^2)/2$ и закон сохранения $\alpha + \alpha_3 + \alpha_4 = 2Q$. При этом второй закон сохранения, $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, остается неизменным. Таким образом, вместо (1.93) получается

$$\begin{aligned} \Delta_\alpha + \Delta_3 - \Delta_4 &= \Delta_{2Q-\alpha_3-\alpha_4} + \Delta_3 - \Delta_4 = \\ &= \frac{(\alpha_3 + \alpha_4 - Q)^2 + (\alpha_3 - Q)^2 - (\alpha_4 - Q)^2 - Q^2}{2} = \\ &= \alpha_3(\alpha_3 + \alpha_4 - 2Q) = -\alpha\alpha_3 = -\alpha_3(\alpha_1 + \alpha_2), \end{aligned} \quad (1.94)$$

что, после подстановки в правую часть соотношения (1.92), обращается в единицу.

Второй порядок разложения для одного поля и $c = 1$. Во второй порядок разложения дают вклад два независимых оператора: $\circledast (\partial\phi)^2 e^{\alpha\phi} \circledast$ и $\circledast \partial^2\phi e^{\alpha\phi} \circledast$. Другой выбор базиса во втором порядке разложения дается операторами $L_{-2} \circledast e^{\alpha\phi} \circledast$ и $L_{-1}^2 \circledast e^{\alpha\phi} \circledast$. Для использования такого базиса необходимо описать, как оператор L_{-1}^2 действует на $\circledast e^{\alpha\phi} \circledast$. Для этого рассмотрим операторное разложение

$$\begin{aligned} T(x) \left(L_{-1} \circledast e^{\alpha\phi} \circledast \right) (0) &= \frac{1}{2} \circledast (\partial\phi)^2(x) \circledast \circledast \alpha \partial\phi e^{\alpha\phi}(0) \circledast = \\ &= \frac{\alpha^2}{2x^3} \circledast e^{\alpha\phi}(0) \circledast + \frac{\alpha^3 + 2\alpha}{2x^2} \circledast \partial\phi e^{\alpha\phi}(0) \circledast + \frac{\alpha}{x} \circledast (\partial^2\phi + \alpha(\partial\phi)^2) e^{\alpha\phi}(0) \circledast + \dots \end{aligned} \quad (1.95)$$

Из коэффициентов при различных степенях x следует, что

$$\begin{aligned} L_1 L_{-1} \circledast e^{\alpha\phi} \circledast &= \frac{\alpha^2}{2} \circledast e^{\alpha\phi} \circledast = \Delta_\alpha \circledast e^{\alpha\phi} \circledast, \\ L_0 L_{-1} \circledast e^{\alpha\phi} \circledast &= \frac{\alpha^3 + 2\alpha}{2} \circledast \partial\phi e^{\alpha\phi}(0) \circledast = (\Delta_\alpha + 1) L_{-1} \circledast e^{\alpha\phi} \circledast, \\ L_{-1}^2 \circledast e^{\alpha\phi} \circledast &= \circledast \left(\alpha \partial^2\phi + (\alpha \partial\phi)^2 \right) e^{\alpha\phi} \circledast = \partial^2 \circledast e^{\alpha\phi} \circledast, \end{aligned} \quad (1.96)$$

т. е. размерность $L_1 V_\alpha$ равна $\Delta_\alpha + 1$, а L_{-1}^2 действует на V_α как вторая производная. Оба утверждения на самом деле верны не только для примарных полей и не только в свободной теории поля. Также из (1.17) следует, что

$$L_{-2} \circ e^{\alpha\phi} \circ \stackrel{(1.17)}{=} \left(\frac{1}{2}(\partial\phi)^2 + \alpha\partial^2\phi \right) e^{\alpha\phi} \circ. \quad (1.97)$$

Таким образом из сравнения формул (1.84) и (1.85) во втором порядке получается

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\alpha_1^2(\partial\phi)^2 + \alpha_1\partial^2\phi) &= \\ &= C_{\alpha_1, \alpha_2}^{\alpha, L_{-2}} \left(\frac{1}{2}(\partial\phi)^2 + \alpha\partial^2\phi \right) + C_{\alpha_1, \alpha_2}^{\alpha, L_{-1}^2} (\alpha\partial^2\phi + \alpha^2(\partial\phi)^2), \end{aligned} \quad (1.98)$$

следовательно,

$$\begin{aligned} C_{\alpha_1, \alpha_2}^{\alpha, L_{-2}} &= \frac{\alpha_1(\alpha_1 - \alpha)}{1 - 2\alpha^2}, \\ C_{\alpha_1, \alpha_2}^{\alpha, L_{-1}^2} &= \frac{\alpha_1(2\alpha_1\alpha - 1)}{4\alpha^3 - 2\alpha}. \end{aligned} \quad (1.99)$$

Рассмотрим соответствующие тройные вершины γ :

$$\begin{aligned} &\left\langle \left(L_{-2} \circ e^{(\vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_2)\vec{\phi}(0)} \circ \right) \circ e^{\vec{\alpha}_3\vec{\phi}(1)} \circ \circ e^{\vec{\alpha}_4\vec{\phi}(\infty)} \circ \right\rangle = \\ &= \left(\frac{\alpha_3^2}{2} - \alpha_3\alpha \right) \left\langle \circ e^{(\vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_2)\vec{\phi}(0)} \circ \circ e^{\vec{\alpha}_3\vec{\phi}(1)} \circ \circ e^{\vec{\alpha}_4\vec{\phi}(\infty)} \circ \right\rangle, \\ &\left\langle \left(L_{-1}^2 \circ e^{(\vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_2)\vec{\phi}(0)} \circ \right) \circ e^{\vec{\alpha}_3\vec{\phi}(1)} \circ \circ e^{\vec{\alpha}_4\vec{\phi}(\infty)} \circ \right\rangle = \\ &= ((\alpha_3\alpha)^2 - \alpha_3\alpha) \left\langle \circ e^{(\vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_2)\vec{\phi}(0)} \circ \circ e^{\vec{\alpha}_3\vec{\phi}(1)} \circ \circ e^{\vec{\alpha}_4\vec{\phi}(\infty)} \circ \right\rangle. \end{aligned} \quad (1.100)$$

Используя полученные выражения, сравним (1.83) и (1.84) во втором порядке:

$$\begin{aligned} &\frac{(\alpha_1\alpha_3)(\alpha_1\alpha_3 - 1)}{2} = \\ &= \left(\frac{\alpha_1(\alpha_1 - \alpha)}{1 - 2\alpha^2} \right) \left(\frac{\alpha_3^2}{2} - \alpha_3\alpha \right) + \left(\frac{\alpha_1(2\alpha_1\alpha - 1)}{4\alpha^3 - 2\alpha} \right) ((\alpha_3\alpha)^2 - \alpha_3\alpha), \end{aligned} \quad (1.101)$$

что выполняется при $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$.

Первый порядок разложения в случае двух полей и $c = 2$. В случае модели с несколькими полями $(\vec{\alpha}_1\partial\vec{\phi})e^{(\vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_2)\vec{\phi}}$ уже не является производной примарного поля. Таким образом, уже в первом порядке необходимо разложить его в комбинацию нескольких потомков. В случае двух полей, $r = 2$,

введем обозначение $\vec{\alpha}\vec{\phi}(z) = \alpha\phi_1(z) + \beta\phi_2(z)$. Тогда

$$\begin{aligned} T(x) \circ e^{\vec{\alpha}\vec{\phi}(0)} \circ &= \frac{1}{2} \circ \left((\partial\phi_1)^2(x) + (\partial\phi_2)^2(x) \right) \circ e^{(\alpha\phi_1 + \beta\phi_2)(0)} \circ = \\ &= \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2x^2} \circ e^{(\alpha\phi_1 + \beta\phi_2)(0)} \circ + \frac{1}{x} \circ (\alpha\partial\phi_1 + \beta\partial\phi_2) e^{(\alpha\phi_1 + \beta\phi_2)(0)} \circ + \\ &+ \circ \left(\frac{1}{2}(\partial\phi_1)^2 + \frac{1}{2}(\partial\phi_2)^2 + \alpha\partial^2\phi_1 + \beta\partial^2\phi_2 \right) e^{(\alpha\phi_1 + \beta\phi_2)(0)} \circ + O(x). \end{aligned} \quad (1.102)$$

В то же время, по определению операторов Вирасоро L_n , действующих в точке $z = 0$,

$$T(x) \circ e^{\vec{\alpha}\vec{\phi}(0)} \circ = \sum_k \frac{1}{x^{k+2}} L_k \circ e^{\vec{\alpha}\vec{\phi}(0)} \circ. \quad (1.103)$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} L_n \circ e^{\vec{\alpha}\vec{\phi}} \circ &= 0 \quad \text{при } n > 0, \\ L_0 \circ e^{\vec{\alpha}\vec{\phi}} \circ &= \Delta_{\alpha,\beta} \circ e^{\vec{\alpha}\vec{\phi}} \circ = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} \circ e^{\vec{\alpha}\vec{\phi}} \circ, \\ L_{-1} \circ e^{\vec{\alpha}\vec{\phi}} \circ &= \circ (\alpha\partial\phi_1 + \beta\partial\phi_2) e^{(\alpha\phi_1 + \beta\phi_2)} \circ, \\ L_{-2} \circ e^{\vec{\alpha}\vec{\phi}} \circ &= \circ \left(\frac{1}{2}(\partial\phi_1)^2 + \frac{1}{2}(\partial\phi_2)^2 + \alpha\partial^2\phi_1 + \beta\partial^2\phi_2 \right) e^{(\alpha\phi_1 + \beta\phi_2)} \circ. \end{aligned} \quad (1.104)$$

Тем не менее уже на первом уровне операторов Вирасоро недостаточно для описания произвольного поля $\circ (A\partial\phi_1 + B\partial\phi_2) e^{\vec{\alpha}\vec{\phi}} \circ$, с помощью $L_{-1} \circ e^{\vec{\alpha}\vec{\phi}} \circ$ можно описать только специальный подкласс таких полей, для которых $B/A = \beta/\alpha$. Второй вектор в базисе, который позволяет описать все необходимые поля, устроен как $W_{-1} \circ e^{\vec{\alpha}\vec{\phi}} \circ$ и строится с помощью оператора из алгебры $W^{(3)}$. Так как в данном обзоре рассматривается только модель с двумя полями (выше рассматривался и случай одного поля, но тогда, как было описано, нужна только алгебра Вирасоро), других алгебр W не требуется.

Оператор $\mathcal{W}(z)$, с помощью которого строится алгебра $W^{(3)}$, кубичен по производным от полей $\partial\phi(z)$. Дополнительное требование состоит в том, что самое сингулярное слагаемое в операторном разложении его произведения с $T(z)$ отсутствует. Оператор тензора энергии-импульса инвариантен при действии группы $SO(2)$ на поля $\vec{\phi}$, но такие повороты должны быть зафиксированы с помощью $\mathcal{W}(z)$. Потребуем, чтобы этот оператор был симметричен относительно преобразования $\phi_2 \rightarrow -\phi_2$ и, соответственно, антисимметричен при $\phi_1 \rightarrow -\phi_1$. Следовательно, этот оператор устроен как

$\mathcal{W} = (\partial\phi_1)^3 + h\partial\phi_1(\partial\phi_2)^2$ с одним неопределенным параметром h . Операторное разложение его произведения с $T(z)$ устроено как

$$T(z)\mathcal{W}(0) = \frac{3+h}{z^4}\partial\phi_1(0) + \dots \quad (1.105)$$

Дополнительное требование равенства нулю наиболее сингулярного слагаемого с z^{-4} , или, что то же самое, того, чтобы $\mathcal{W}(z)$ было примарным полем алгебры Вирасоро, определяет h равным -3 ,

$$\mathcal{W}(z) \equiv (\partial\phi_1)^3 - 3\partial\phi_1(\partial\phi_2)^2 = \partial\phi_1((\partial\phi_1)^2 - 3(\partial\phi_2)^2) \quad (1.106)$$

и

$$T(z)\mathcal{W}(0) = \frac{3\mathcal{W}(0)}{z^2} + \frac{\partial\mathcal{W}(0)}{z} + \dots \quad (1.107)$$

Таким образом, конформная размерность $\mathcal{W}(z)$ равна 3.

Аналог формулы (1.102) для оператора \mathcal{W} устроен как

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(x) \circledast e^{\vec{\alpha}\vec{\phi}(0)} \circledast &= \frac{\alpha(\alpha^2 - 3\beta^2)}{x^3} \circledast e^{\vec{\alpha}\vec{\phi}(0)} \circledast + \frac{1}{x} \circledast 3\left(\alpha((\partial\phi_1)^2 - \right. \\ &- 2\beta\partial\phi_1\partial\phi_2 - \alpha(\partial\phi_2)^2 + (\alpha^2 - \beta^2)\partial^2\phi_1 - 2\alpha\beta\partial^2\phi_2) e^{(\alpha\phi_1 + \beta\phi_2)} \circledast + \\ &+ \frac{1}{x^2} \circledast (3(\alpha^2 - \beta^2)\partial\phi_1 - 6\alpha\beta\partial\phi_2) e^{(\alpha\phi_1 + \beta\phi_2)}(0) \circledast + O(1). \end{aligned} \quad (1.108)$$

Операторы W_n определяются по аналогии с операторами Вирасоро в (1.103):

$$W(x) \circledast e^{\vec{\alpha}\vec{\phi}(0)} \circledast = \sum_k \frac{1}{x^{k+3}} W_k \circledast e^{\vec{\alpha}\vec{\phi}(0)} \circledast, \quad (1.109)$$

и, таким образом,

$$\begin{aligned} W_n \circledast e^{\vec{\alpha}\vec{\phi}} \circledast &= 0 \quad \text{при } n > 0, \\ W_0 \circledast e^{\vec{\alpha}\vec{\phi}} \circledast &= w_{\alpha,\beta} \circledast e^{\vec{\alpha}\vec{\phi}} \circledast = \alpha(\alpha^2 - 3\beta^2) \circledast e^{\vec{\alpha}\vec{\phi}} \circledast, \\ W_{-1} \circledast e^{\vec{\alpha}\vec{\phi}} \circledast &= \circledast 3((\alpha^2 - \beta^2)\partial\phi_1 - 2\alpha\beta\partial\phi_2) e^{(\alpha\phi_1 + \beta\phi_2)} \circledast, \\ W_{-2} \circledast e^{\vec{\alpha}\vec{\phi}} \circledast &= \circledast 3(\alpha(\partial\phi_1)^2 - 2\beta\partial\phi_1\partial\phi_2 - \alpha(\partial\phi_2)^2 + \\ &+ (\alpha^2 - \beta^2)\partial^2\phi_1 - 2\alpha\beta\partial^2\phi_2) e^{(\alpha\phi_1 + \beta\phi_2)} \circledast. \end{aligned} \quad (1.110)$$

Из соотношений (1.104) и (1.110) поля первого уровня устроены как

$$\begin{aligned} \circledast \partial\phi_1 e^{(\alpha\phi_1 + \beta\phi_2)} \circledast &= \circledast \frac{1}{3(\alpha^2 - \beta^2)} (6\alpha L_{-1} + W_{-1}) e^{(\alpha\phi_1 + \beta\phi_2)} \circledast, \\ \circledast \partial\phi_2 e^{(\alpha\phi_1 + \beta\phi_2)} \circledast &= \circledast \frac{1}{3\beta(\alpha^2 - \beta^2)} (3(\alpha^2 - \beta^2)L_{-1} - \alpha W_{-1}) e^{(\alpha\phi_1 + \beta\phi_2)} \circledast. \end{aligned} \quad (1.111)$$

Таким образом, оператор, входящий в выражение для первого уровня в (1.84), можно представить в виде

$$\begin{aligned} & \circ (\vec{\alpha}_1 \partial \vec{\phi}) e^{(\alpha \phi_1 + \beta \phi_2)} \circ = \\ & = \left(\frac{(6\alpha\beta\alpha_1 + 3(\alpha^2 - \beta^2)\beta_1)}{3\beta(3\alpha^2 - \beta^2)} L_{-1} + \frac{\alpha_1\beta - \alpha\beta_1}{3\beta(3\alpha^2 - \beta^2)} W_{-1} \right) \circ e^{(\alpha \phi_1 + \beta \phi_2)} \circ. \end{aligned} \quad (1.112)$$

Тогда первые две структурные константы в (1.85), помимо тривиальной $C_{\alpha_1\alpha_2}^\alpha = 1$, равны:

$$\begin{aligned} C_{\alpha_1\alpha_2}^{\alpha, L_{-1}} &= \frac{(6\alpha\beta\alpha_1 + 3(\alpha^2 - \beta^2)\beta_1)}{3\beta(3\alpha^2 - \beta^2)}, \\ C_{\alpha_1\alpha_2}^{\alpha, W_{-1}} &= \frac{\alpha_1\beta - \alpha\beta_1}{3\beta(3\alpha^2 - \beta^2)}. \end{aligned} \quad (1.113)$$

С помощью известных выражений для $L_{-1} \circ e^{\vec{\alpha}\vec{\phi}} \circ$ и $W_{-1} \circ e^{\vec{\alpha}\vec{\phi}} \circ$ можно явно вычислить трехточечные корреляторы

$$\begin{aligned} \Gamma_{\vec{\alpha}\vec{\alpha}_3\vec{\alpha}_4}(L_{-1}) &\equiv \left\langle \left(L_{-1} \circ e^{\vec{\alpha}\vec{\phi}}(0) \circ \right) \circ e^{\vec{\alpha}_3\vec{\phi}(1)} \circ \circ e^{\vec{\alpha}_4\vec{\phi}(\infty)} \circ \right\rangle \stackrel{(1.104)}{=} \\ &= \left\langle \circ (\vec{\alpha}\partial\vec{\phi}) e^{\vec{\alpha}\vec{\phi}}(0) \circ \circ e^{\vec{\alpha}_3\vec{\phi}(1)} \circ \circ e^{\vec{\alpha}_4\vec{\phi}(\infty)} \circ \right\rangle = \\ &= -(\vec{\alpha}\vec{\alpha}_3) \left\langle \circ e^{\vec{\alpha}\vec{\phi}}(0) \circ \circ e^{\vec{\alpha}_3\vec{\phi}(1)} \circ \circ e^{\vec{\alpha}_4\vec{\phi}(\infty)} \circ \right\rangle \end{aligned} \quad (1.114)$$

и

$$\begin{aligned} \Gamma_{\vec{\alpha}\vec{\alpha}_3\vec{\alpha}_4}(W_{-1}) &\equiv \left\langle \left(W_{-1} \circ e^{\vec{\alpha}\vec{\phi}}(0) \circ \right) \circ e^{\vec{\alpha}_3\vec{\phi}(1)} \circ \circ e^{\vec{\alpha}_4\vec{\phi}(\infty)} \circ \right\rangle \stackrel{(1.110)}{=} \\ &= \left\langle \circ (3(\alpha^2 - \beta^2) \partial\phi_1 - 6\alpha\beta \partial\phi_2) e^{\vec{\alpha}\vec{\phi}}(0) \circ \circ e^{\vec{\alpha}_3\vec{\phi}(1)} \circ \circ e^{\vec{\alpha}_4\vec{\phi}(\infty)} \circ \right\rangle = \\ &= -(3(\alpha^2 - \beta^2)\alpha_3 - 6\alpha\beta\beta_3) \left\langle \circ e^{\vec{\alpha}\vec{\phi}}(0) \circ \circ e^{\vec{\alpha}_3\vec{\phi}(1)} \circ \circ e^{\vec{\alpha}_4\vec{\phi}(\infty)} \circ \right\rangle, \end{aligned} \quad (1.115)$$

где также было учтено, что спаривание с полями в бесконечности дает дополнительный множитель $(0 - \infty)$ в знаменателе и, таким образом, соответствующими слагаемыми можно пренебречь. Спаривание с полем в точке $z_3 = 1$ дает множитель $(z - z_3)^{-1} = -1$, что приводит к знаку минус в обеих формулах. Таким образом,

$$\begin{aligned} \gamma_{\vec{\alpha}\vec{\alpha}_3\vec{\alpha}_4}(L_{-1}) &= -(\alpha\alpha_3 + \beta\beta_3), \\ \gamma_{\vec{\alpha}\vec{\alpha}_3\vec{\alpha}_4}(W_{-1}) &= 3(-(\alpha^2 - \beta^2)\alpha_3 + 2\alpha\beta\beta_3). \end{aligned} \quad (1.116)$$

Эти выражения согласуются с (1.56) и (1.78) соответственно, что служит проверкой этих общих формул. Действительно, из (1.56)

$$\begin{aligned} \gamma_{\vec{\alpha}_3 \vec{\alpha}_4}(L_{-1}) &\stackrel{(1.56)}{=} \Delta_{\vec{\alpha}} + \Delta_{\vec{\alpha}_3} - \Delta_{\vec{\alpha}_4} = \\ &= \frac{(\vec{\alpha}_3 + \vec{\alpha}_4)^2 + \vec{\alpha}_3^2 - \vec{\alpha}_4^2}{2} = \vec{\alpha}_3(\vec{\alpha}_3 + \vec{\alpha}_4) = -\vec{\alpha}\vec{\alpha}_3, \end{aligned} \quad (1.117)$$

где дважды использовался закон сохранения $\vec{\alpha} + \vec{\alpha}_3 + \vec{\alpha}_4 = \vec{0}$. Аналогично, для (1.78)

$$\begin{aligned} \gamma_{\vec{\alpha}_3 \vec{\alpha}_4}(W_{-1}) &\stackrel{(1.116)}{=} 3(-(\alpha^2 - \beta^2)\alpha_3 + 2\alpha\beta\beta_3) \stackrel{(1.56)}{=} \\ &= w_{\vec{\alpha}} + w_{\vec{\alpha}_3} + w_{\vec{\alpha}_4} + 3((\alpha_3^2 - \beta_3^2)\alpha - 2\alpha_3\beta_3\beta). \end{aligned} \quad (1.118)$$

Последнее равенство является тождеством, если учесть, что $\vec{\alpha} + \vec{\alpha}_3 + \vec{\alpha}_4 = 0$. Последняя скобка в правой части является прямым аналогом (1.115) для другого расположения оператора W_{-1} . Этот случай также возможно рассмотреть с помощью теории свободных полей:

$$\begin{aligned} &\langle \circ e^{\vec{\alpha}\vec{\phi}}(0) \circ (W_{-1} \circ e^{\vec{\alpha}_3\vec{\phi}(1)} \circ) \circ e^{\vec{\alpha}_4\vec{\phi}(\infty)} \circ \rangle \stackrel{(1.110)}{=} \\ &= \langle \circ e^{\vec{\alpha}\vec{\phi}}(0) \circ \circ (3(\alpha_3^2 - \beta_3^2)\partial\phi_1 - 6\alpha_3\beta_3\partial\phi_2) e^{\vec{\alpha}_3\vec{\phi}(1)} \circ \circ e^{\vec{\alpha}_4\vec{\phi}(\infty)} \circ \rangle = \\ &= (3(\alpha_3^2 - \beta_3^2)\alpha - 6\alpha_3\beta_3\beta) \langle \circ e^{\vec{\alpha}\vec{\phi}}(0) \circ \circ e^{\vec{\alpha}_3\vec{\phi}(1)} \circ \circ e^{\vec{\alpha}_4\vec{\phi}(\infty)} \circ \rangle. \end{aligned} \quad (1.119)$$

По аналогии с (1.115) дают вклад в ответ только спаривания полей в точках $z = 0$ и $z_3 = 1$. Производная в этом случае берется по z_3 , поэтому знак минус отсутствует.

Наконец, совместив (1.113) и (1.116), можно получить

$$\begin{aligned} C_{\alpha_1\alpha_2}^{\alpha} L_{-1} \gamma_{\vec{\alpha}\vec{\alpha}_3\vec{\alpha}_4}(L_{-1}) + C_{\alpha_1\alpha_2}^{\alpha} W_{-1} \gamma_{\vec{\alpha}\vec{\alpha}_3\vec{\alpha}_4}(W_{-1}) &= \\ &= -(\alpha\alpha_3 + \beta\beta_3) \frac{(6\alpha\beta\alpha_1 + 3(\alpha^2 - \beta^2)\beta_1)}{3\beta(3\alpha^2 - \beta^2)} + \\ &+ 3(-(\alpha^2 - \beta^2)\alpha_3 + 2\alpha\beta\beta_3) \frac{\alpha_1\beta - \alpha\beta_1}{3\beta(3\alpha^2 - \beta^2)} = \\ &= -\alpha_1\alpha_3 - \beta_1\beta_3 = -\vec{\alpha}_1\vec{\alpha}_3, \end{aligned} \quad (1.120)$$

что согласуется с (1.83).

Модели с $c \neq 2$. Важное отличие в данном случае состоит в деформации операторов:

$$\begin{aligned} T &= \frac{(\partial\phi_1)^2 + (\partial\phi_2)^2}{2} + Q\partial^2\phi_2, \\ W &= \partial\phi_1((\partial\phi_1)^2 - 3(\partial\phi_2)^2) - \frac{3Q}{2}(\partial\phi_1\partial^2\phi_2 + 3\partial\phi_2\partial^2\phi_1) - \frac{3Q^2}{2}\partial^3\phi_2, \end{aligned} \quad (1.121)$$

где центральный заряд, соответственно, равен $c = 2(1 - 6Q^2)$ и операторное разложение (1.107) остается неизменным. Оператор тензора энергии-импульса действует на примарные поля следующим образом:

$$T(x) \circ e^{\vec{\alpha}\vec{\phi}(0)} \circ = \frac{\alpha^2 + \beta^2 - 2Q\beta}{2x^2} \circ e^{\vec{\alpha}\vec{\phi}(0)} \circ + \frac{1}{x} \circ (\partial e^{\vec{\alpha}\vec{\phi}})(0) \circ + \\ + \sum_{k \geq 0} x^k \circ \left(\frac{\partial^k T}{k!} + \frac{\vec{\alpha}\partial^{k+2}\vec{\phi}}{(k+1)!} \right) e^{\vec{\alpha}\vec{\phi}}(z_2) \circ. \quad (1.122)$$

Таким образом,

$$L_n \circ e^{\vec{\alpha}\vec{\phi}} \circ = 0 \quad \text{при } n > 0, \\ L_0 \circ e^{\vec{\alpha}\vec{\phi}} \circ = \Delta_{\alpha,\beta} \circ e^{\vec{\alpha}\vec{\phi}} \circ = \frac{\alpha^2 + \beta^2 - 2Q\beta}{2} \circ e^{\vec{\alpha}\vec{\phi}} \circ = \frac{\alpha^2 + \tilde{\beta}^2 - Q^2}{2} \circ e^{\vec{\alpha}\vec{\phi}} \circ, \\ L_{-1} \circ e^{\vec{\alpha}\vec{\phi}} \circ = \circ (\alpha \partial \phi_1 + \beta \partial \phi_2) e^{(\alpha\phi_1 + \beta\phi_2)} \circ, \\ L_{-2} \circ e^{\vec{\alpha}\vec{\phi}} \circ = \circ \left(\frac{1}{2} (\partial \phi_1)^2 + \frac{1}{2} (\partial \phi_2)^2 + \alpha \partial^2 \phi_1 + (\beta + Q) \partial^2 \phi_2 \right) e^{(\alpha\phi_1 + \beta\phi_2)} \circ, \\ L_{-1}^2 \circ e^{\vec{\alpha}\vec{\phi}} \circ = \circ \left((\alpha(\partial \phi_1) + \beta(\partial \phi_2))^2 + \alpha \partial^2 \phi_1 + \beta \partial^2 \phi_2 \right) e^{(\alpha\phi_1 + \beta\phi_2)} \circ, \\ L_{-3} \circ e^{\vec{\alpha}\vec{\phi}} \circ = \circ \left(\partial \phi_1 \partial^2 \phi_1 + \partial \phi_2 \partial^2 \phi_2 + \frac{\alpha}{2} \partial^3 \phi_1 + \right. \\ \left. + \left(\frac{\beta}{2} + Q \right) \partial^3 \phi_2 \right) e^{(\alpha\phi_1 + \beta\phi_2)} \circ. \quad (1.123)$$

Аналогично,

$$W_n \circ e^{\vec{\alpha}\vec{\phi}} \circ = 0 \quad \text{при } n > 0, \\ W_0 \circ e^{\vec{\alpha}\vec{\phi}} \circ = w_{\alpha,\beta} \circ e^{\vec{\alpha}\vec{\phi}} \circ = \alpha(\alpha^2 - 3\beta^2 + 6Q\beta - 3Q^2) \circ e^{\vec{\alpha}\vec{\phi}} \circ = \\ = \alpha(\alpha^2 - 3\tilde{\beta}^2) \circ e^{\vec{\alpha}\vec{\phi}} \circ, \\ W_{-1} \circ e^{\vec{\alpha}\vec{\phi}} \circ = \circ 3 \left(\left(\alpha^2 - \beta^2 + \frac{1}{2} Q\beta \right) \partial \phi_1 - \frac{1}{2} \alpha(4\beta - 3Q) \partial \phi_2 \right) e^{(\alpha\phi_1 + \beta\phi_2)} \circ, \\ W_{-2} \circ e^{\vec{\alpha}\vec{\phi}} \circ = \circ 3 \left(\alpha(\partial \phi_1)^2 - 2\beta \partial \phi_1 \partial \phi_2 - \alpha(\partial \phi_2)^2 + (\alpha^2 - \beta^2 - Q\beta) \partial^2 \phi_1 - \right. \\ \left. - \alpha(2\beta - Q) \partial^2 \phi_2 \right) e^{(\alpha\phi_1 + \beta\phi_2)} \circ. \quad (1.124)$$

Часто удобно использовать сдвинутые переменные $\tilde{\beta} = \beta - Q$, так как размерности полей в этом случае имеют более простую формулу:

$$\Delta = \frac{\alpha^2 + \tilde{\beta}^2 - Q^2}{2}, \quad w = \alpha(\alpha^2 - 3\tilde{\beta}^2). \quad (1.125)$$

Законы сохранения для n -точечного коррелятора при этом устроены как

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i = 0, \quad \sum_{i=1}^n \tilde{\beta}_i = (2-n)Q. \quad (1.126)$$

С помощью двукратного применения оператора \mathcal{W} можно получить, что

$$\begin{aligned} W_1 W_{-1} \circ e^{\vec{\alpha}\vec{\phi}} \circ &= 9(\alpha^2 + \beta^2 - 2Q\beta) \left(\alpha^2 + \beta^2 - 2Q\beta + \frac{3Q^2}{4} \right) \circ e^{\vec{\alpha}\vec{\phi}} \circ = \\ &= \frac{9D\Delta}{2} \circ e^{\vec{\alpha}\vec{\phi}} \circ = \frac{9D}{2} L_0 \circ e^{\vec{\alpha}\vec{\phi}} \circ, \end{aligned} \quad (1.127)$$

где

$$D = 4 \left(\alpha^2 + \beta^2 - 2Q\beta + \frac{3Q^2}{4} \right) = 8 \left(\Delta_{\alpha,\beta} + \frac{3Q^2}{8} \right) - \quad (1.128)$$

это особая величина в теории с алгеброй $W^{(3)}$. Также

$$\begin{aligned} W_0 W_{-1} \circ e^{\vec{\alpha}\vec{\phi}} \circ &= \\ &= 3\alpha(\alpha^2 - 3\beta^2 + 6Q\beta - 3Q^2) \left(\left(\alpha^2 - \beta^2 + \frac{1}{2}Q\beta \right) \partial\phi_1 - 2\alpha \left(\beta - \frac{3Q}{4} \right) \partial\phi_2 \right) + \\ &\quad + 18 \left(\alpha^2 + \beta^2 - 2Q\beta + \frac{3Q^2}{4} \right) (\alpha \partial\phi_1 + \beta \partial\phi_2) = \\ &= \left(wW_{-1} + \frac{9D}{2} L_{-1} \right) \circ e^{\vec{\alpha}\vec{\phi}} \circ, \end{aligned} \quad (1.129)$$

где D , определяемое (1.128), входит и в (1.127). Эти соотношения, (1.127) и (1.129), верны и для произвольной теории с $W^{(3)}$ симметрией (а не только для теории свободных полей):

$$W_0 W_{-1} \longrightarrow wW_{-1} + \frac{9D}{2} L_{-1}, \quad W_1 W_{-1} \longrightarrow \frac{9D}{2} L_0, \quad (1.130)$$

где стрелка обозначает, что соотношение выполняется, если операторы действуют на примарные поля. Наконец,

$$\begin{aligned} L_{-1} W_{-1} \circ e^{\vec{\alpha}\vec{\phi}} \circ &= 3 \left(\alpha \left(\alpha^2 - \beta^2 + \frac{1}{2}Q\beta \right) (\partial\phi_1)^2 - \right. \\ &\quad - \left((\alpha^2 + \beta^2)\beta - \frac{Q}{2}(3\alpha^2 + \beta^2) \right) \partial\phi_1 \partial\phi_2 - \frac{1}{2}\alpha\beta(4\beta - 3Q)(\partial\phi_2)^2 + \\ &\quad + \left(\alpha^2 - \beta^2 + \frac{1}{2}Q\beta \right) \partial^2\phi_1 - \frac{1}{2}\alpha(4\beta - 3Q)\partial^2\phi_2 \Big) e^{(\alpha\phi_1 + \beta\phi_2)} \circ = \\ &= \partial \left(W_{-1} \circ e^{\vec{\alpha}\vec{\phi}} \circ \right) \end{aligned} \quad (1.131)$$

и

$$\begin{aligned}
\frac{1}{9}W_{-1}^2 \circ e^{\bar{\alpha}\bar{\phi}} \circ = & \left(\alpha^2 - \beta^2 + \frac{1}{2}Q\beta\right) \left(\alpha^2 - \beta^2 + 1 + \frac{1}{2}Q\beta\right) (\partial\phi_1)^2 - \\
& - \left(4\alpha\beta(\alpha^2 - \beta^2 - 1) + Q\alpha(-3\alpha^2 + 5\beta^2 + 3) - \frac{3}{2}Q^2\alpha\beta\right) \partial\phi_1 \partial\phi_2 + \\
& + \left(4\alpha^2\beta^2 - \alpha^2 + \beta^2 - Q\beta\left(6\alpha^2 + \frac{1}{2}\right) + \frac{9}{4}Q^2\alpha^2\right) (\partial\phi_2)^2 + \\
& + \left(2\alpha(\alpha^2 + \beta^2) - Q\alpha\beta - \frac{3}{4}Q^2\alpha\right) \partial^2\phi_1 + \\
& + \left(2\beta(\alpha^2 + \beta^2) - \frac{1}{2}Q(\alpha^2 + 7\beta^2) + \frac{5}{4}Q^2\beta\right) \partial^2\phi_2. \quad (1.132)
\end{aligned}$$

Корреляторы могут быть напрямую вычислены с применением полученных формул. Таким образом можно проверить, что соотношения из п. 1.9.1 действительно выполняются в модели свободных полей.

Вершины $\bar{\Gamma}$ на первом уровне в случае одного поля. Рассмотрим процедуру построения тройных вершин $\bar{\Gamma}$ в свободной теории. Данная проверка несколько сложнее, чем предыдущие, так как в теории свободных полей четко определены только структурные константы C . Они связаны с вершинами $\bar{\Gamma}$ посредством матрицы Шаповалова. К счастью, матрица Шаповалова — хорошо изученный объект и потому не требует такой подробной проверки, как другие величины. Она зависит только от параметра α промежуточного состояния.

В случае, когда в модели есть только одно свободное поле, первый уровень устроен довольно просто. Размер матрицы Шаповалова равен 1×1 , и ее единственный элемент представляется

$$\begin{aligned}
\langle L_{-1}V_\alpha | L_{-1}V_\alpha \rangle &= \langle V_\alpha | L_1 L_{-1} V_\alpha \rangle \stackrel{(1.8)}{=} \langle V_\alpha | (L_{-1}L_1 + 2L_0) V_\alpha \rangle \stackrel{(1.104)}{=} \\
&= 2\Delta_\alpha \langle V_\alpha | V_\alpha \rangle = 2\Delta_\alpha. \quad (1.133)
\end{aligned}$$

Из этого соотношения и структурных констант (1.87) из модели свободных полей получаются следующие ответы для $\bar{\gamma}$:

$$\begin{aligned}
\bar{\gamma}_{\alpha_1\alpha_2;\alpha}(L_{-1}) &= C_{\alpha_1\alpha_2}^{\alpha,L_{-1}} \langle L_{-1}V_\alpha | L_{-1}V_\alpha \rangle \stackrel{(1.87) \text{ и } (1.133)}{=} \\
&= \frac{\alpha_1}{\alpha} \delta_{\alpha,\alpha_1+\alpha_2} \frac{2\alpha(\alpha - 2Q)}{2} = \alpha_1(\alpha_1 + \alpha_2 - 2Q), \quad (1.134)
\end{aligned}$$

что согласуется с (1.51), которая предполагает следующий ответ:

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}_{\alpha_1\alpha_2;\alpha}(L_{-1}) &\stackrel{(1.51)}{=} \Delta_\alpha + \Delta_1 - \Delta_2 \stackrel{\alpha=\alpha_1+\alpha_2}{=} \\ &= \frac{(\alpha_1 + \alpha_2)^2 - 2Q(\alpha_1 + \alpha_2) + \alpha_1^2 - 2Q\alpha_1 - (\alpha_2^2 - 2Q\alpha_2)}{2} = \\ &= \alpha_1(\alpha_1 + \alpha_2 - 2Q). \end{aligned} \quad (1.135)$$

Также с помощью теории свободных полей можно проверить еще одно важное соотношение (1.50):

$$\langle V_{\hat{\alpha}} | (L_{-1}V_1)(1) V_2(0) \rangle = (\Delta_{\hat{\alpha}} - \Delta_1 - \Delta_2) \langle V_{\hat{\alpha}} | V_1(1)V_2(0) \rangle. \quad (1.136)$$

Рассмотрим случай, когда $V_1 = \circledast e^{\alpha_1\phi} \circledast$ и $V_2 = \circledast e^{\alpha_2\phi} \circledast$. Тогда $L_{-1}V_1 = \circledast \alpha_1 \partial\phi e^{\alpha_1\phi} \circledast = \partial V_1$ и операторное разложение (1.28) устроено как

$$\begin{aligned} &\circledast \alpha_1 \partial\phi e^{\alpha_1\phi}(z) \circledast \circledast e^{\alpha_2\phi}(0) \circledast = \\ &= z^{\alpha_1\alpha_2-1} (\alpha_1\alpha_2 \circledast e^{(\alpha_1+\alpha_2)\phi}(0) \circledast + z \circledast \alpha_1(1 + \alpha_1\alpha_2)\partial\phi e^{(\alpha_1+\alpha_2)\phi}(0) \circledast + \dots). \end{aligned} \quad (1.137)$$

Отметим, что изначально первое слагаемое в правой части было равно $\alpha_1\alpha_2 \circledast e^{(\alpha_1\phi(z)+\alpha_2\phi(0))} \circledast$, и его разложение по степеням z содержит все члены любого порядка в разложении и дает, в том числе, поправку ко второму порядку разложения по z . Обозначив также $V_\alpha = \circledast e^{\alpha\phi} \circledast$, где $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, можно получить

$$(L_{-1}V_1)(z) V_2(0) = z^{\alpha_1\alpha_2-1} \left(\alpha_1\alpha_2 V_\alpha(0) + z \frac{\alpha_1(1 + \alpha_1\alpha_2)}{\alpha_1 + \alpha_2} L_{-1}V_\alpha(0) + \dots \right) \quad (1.138)$$

и

$$\langle V_{\hat{\alpha}} | (L_{-1}V_1)(1) V_2(0) \rangle = \alpha_1\alpha_2 \langle V_{\hat{\alpha}} | V_\alpha(0) \rangle + \frac{\alpha_1(1 + \alpha_1\alpha_2)}{\alpha_1 + \alpha_2} \langle V_{\hat{\alpha}} | L_{-1}V_\alpha(0) \rangle + \dots \quad (1.139)$$

Из-за того, что координаты полей в правой части — это точка 0, необходимые матричные элементы входят в матрицу Шаповалова, они указаны для первого уровня выше. Подставив V_α и $L_{-1}V_\alpha$ вместо $V_{\hat{\alpha}}$, можно получить

$$\begin{aligned} \langle V_\alpha | (L_{-1}V_1)(1) V_2(0) \rangle &= \alpha_1\alpha_2 \delta_{\alpha,\alpha_1+\alpha_2}, \\ \langle L_{-1}V_\alpha | (L_{-1}V_1)(1) V_2(0) \rangle &= \frac{\alpha_1(1 + \alpha_1\alpha_2)}{\alpha_1 + \alpha_2} \langle L_{-1}V_\alpha | L_{-1}V_{\alpha_1+\alpha_2} \rangle \stackrel{(1.133)}{=} \\ &= \frac{\alpha_1(1 + \alpha_1\alpha_2)}{\alpha_1 + \alpha_2} 2\Delta_\alpha \delta_{\alpha,\alpha_1+\alpha_2}. \end{aligned} \quad (1.140)$$

Коэффициенты в правой части этих формул равны

$$\alpha_1\alpha_2 = \Delta_\alpha - \Delta_1 - \Delta_2 = \frac{(\alpha_1 + \alpha_2)^2 - 2Q(\alpha_1 + \alpha_2) + \alpha_1^2 - 2Q\alpha_1 + \alpha_2^2 - 2Q\alpha_2}{2} \quad (1.141)$$

и

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_1(1 + \alpha_1\alpha_2)}{\alpha_1 + \alpha_2} ((\alpha_1 + \alpha_2)^2 - 2Q(\alpha_1 + \alpha_2)) &= (1 + \alpha_1\alpha_2)\alpha_1(\alpha_1 + \alpha_2 - 2Q) = \\ &\stackrel{(1.141)}{=} \stackrel{(1.135)}{=} (\Delta_\alpha + 1 - \Delta_1 - \Delta_2)(\Delta_\alpha + \Delta_1 - \Delta_2) = \\ &= (\Delta_{\alpha, L_{-1}} - \Delta_1 - \Delta_2)(\Delta_\alpha + \Delta_1 - \Delta_2) \end{aligned} \quad (1.142)$$

соответственно, что согласуется с (1.136). Наличие двух слагаемых в правой части (1.142) связано с тем, что (1.136) — это рекурсивное соотношение:

$$\begin{aligned} \langle L_{-1}V_\alpha | (L_{-1}V_1)(1)V_2(0) \rangle &\stackrel{(1.136)}{=} (\Delta_{\alpha, L_{-1}} - \Delta_1 - \Delta_2) \langle L_{-1}V_\alpha | V_1(1)V_2(0) \rangle = \\ &\stackrel{(1.51)}{=} (\Delta_{\alpha, L_{-1}} - \Delta_1 - \Delta_2)(\Delta_\alpha + \Delta_1 - \Delta_2) \langle V_\alpha | V_1(1)V_2(0) \rangle. \end{aligned} \quad (1.143)$$

Вершины $\bar{\Gamma}$ на втором уровне в случае одного поля. На втором уровне размер матрицы Шаповалова равен 2×2 , а ее элементы:

$$\begin{aligned} \langle L_{-1}^2V_\alpha | L_{-1}^2V_\alpha \rangle &= \langle V_\alpha | L_1^2L_{-1}^2V_\alpha \rangle \stackrel{(1.8)}{=} \\ &= \langle V_\alpha | (L_1L_{-1}L_1L_{-1} + 2L_1L_0L_{-1})V_\alpha \rangle = \\ &= \langle V_\alpha | (2L_1L_{-1}\Delta_\alpha + 2L_1L_{-1} + 2L_1L_{-1}\Delta_\alpha)V_\alpha \rangle \stackrel{(1.104)}{=} \\ &= 8\Delta_\alpha^2 + 4\Delta_\alpha \langle V_\alpha | V_\alpha \rangle = 8\Delta_\alpha^2 + 4\Delta_\alpha, \\ \langle L_{-2}V_\alpha | L_{-2}V_\alpha \rangle &= \langle V_\alpha | L_2L_{-2}V_\alpha \rangle \stackrel{(1.8)}{=} \\ &= \left\langle V_\alpha \left| \left(L_{-2}L_2 + \frac{1}{2} - 6Q^2 + 4L_0 \right) V_\alpha \right. \right\rangle \stackrel{(1.104)}{=} \frac{1}{2} - 6Q^2 + 4\Delta_\alpha, \end{aligned} \quad (1.144)$$

$$\begin{aligned} \langle L_{-1}^2V_\alpha | L_{-2}V_\alpha \rangle &= \langle L_{-2}V_\alpha | L_{-1}^2V_\alpha \rangle = \\ &= \langle V_\alpha | L_1L_1L_{-2}V_\alpha \rangle \stackrel{(1.8)}{=} 3 \langle V_\alpha | L_1L_{-1}V_\alpha \rangle = 6\Delta_\alpha. \end{aligned}$$

Используя эти выражения, а также структурные константы, обобщающие (1.99) при $c \neq 1$, возможно построить тройные вершины $\bar{\Gamma}$:

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}_{\alpha_1\alpha_2;\alpha}(L_{-2}) &= C_{\alpha_1\alpha_2}^{\alpha, L_{-2}} \langle L_{-2}V_\alpha | L_{-2}V_\alpha \rangle + C_{\alpha_1\alpha_2}^{\alpha, L_{-1}^2} \langle L_{-2}V_\alpha | L_{-1}^2V_\alpha \rangle = \\ &= \left(\frac{\alpha_1\alpha_2}{2\alpha(\alpha + Q) - 1} \right) \left(\frac{1}{2} + 4\alpha(\alpha - 2Q) - 6Q^2 \right) + \\ &+ \left(\frac{\alpha_1(2\alpha_1(\alpha + Q) - 1)}{2\alpha(2\alpha(\alpha + Q) - 1)} \right) \left(6\frac{\alpha(\alpha - 2Q)}{2} \right) = \frac{\alpha_1}{2}(3\alpha_1 + 2\alpha_2 - 6Q) \end{aligned} \quad (1.145)$$

и

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}_{\alpha_1\alpha_2;\alpha}(L_{-1}^2) &= C_{\alpha_1\alpha_2}^{\alpha,L-2} \langle L_{-1}^2 V_\alpha | L_{-2} V_\alpha \rangle + C_{\alpha_1\alpha_2}^{\alpha,L^2-1} \langle L_{-1}^2 V_\alpha | L_{-1}^2 V_\alpha \rangle = \\ &= \left(\frac{\alpha_1\alpha_2}{2\alpha(\alpha+Q)-1} \right) \left(6 \frac{\alpha(\alpha-2Q)}{2} \right) + \\ &+ \left(\frac{\alpha_1(2\alpha_1(\alpha+Q)-1)}{2\alpha(2\alpha(\alpha+Q)-1)} \right) \left(4 \frac{\alpha(\alpha-2Q)}{2} \left(2 \frac{\alpha(\alpha-2Q)}{2} + 1 \right) \right) = \\ &= \alpha_1(\alpha_1^2 + \alpha_1\alpha_2 - 2\alpha_1Q + 1)(\alpha_1 + \alpha_2 - 2Q), \quad (1.146) \end{aligned}$$

что согласуется с (1.51), которая предполагает в данном случае следующие выражения:

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}_{\alpha_1\alpha_2;\alpha}(L_{-2}) &\stackrel{(1.51)}{=} \Delta_\alpha + 2\Delta_1 - \Delta_2 \quad \alpha = \alpha_1 + \alpha_2 \\ &= \frac{(\alpha_1 + \alpha_2)^2 - 2Q(\alpha_1 + \alpha_2) + 2\alpha_1^2 - 4Q\alpha_1 - (\alpha_2^2 - 2Q\alpha_2)}{2} = \\ &= \frac{\alpha_1}{2}(3\alpha_1 + 2\alpha_2 - 6Q) \quad (1.147) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}_{\alpha_1\alpha_2;\alpha}(L_{-1}^2) &\stackrel{(1.51)}{=} (\Delta_\alpha + \Delta_1 - \Delta_2)(\Delta_\alpha + \Delta_1 - \Delta_2 + 1) \quad \alpha = \alpha_1 + \alpha_2 \\ &= \frac{(\alpha_1 + \alpha_2)^2 - 2Q(\alpha_1 + \alpha_2) + \alpha_1^2 - 2Q\alpha_1 - (\alpha_2^2 - 2Q\alpha_2)}{2} \times \\ &\times \left(\frac{(\alpha_1 + \alpha_2)^2 - 2Q(\alpha_1 + \alpha_2) + \alpha_1^2 - 2Q\alpha_1 - (\alpha_2^2 - 2Q\alpha_2)}{2} + 1 \right) = \\ &= \alpha_1(\alpha_1^2 + \alpha_1\alpha_2 - 2\alpha_1Q + 1)(\alpha_1 + \alpha_2 - 2Q). \quad (1.148) \end{aligned}$$

Вершины $\bar{\Gamma}$ в случае двух полей. В этом случае размер матрицы Шаповалова также равен 2×2 , а ее значения даются коммутационными соотношениями алгебры $W^{(3)}$:

$$Q = \begin{pmatrix} 2\Delta & 3w \\ 3w & 9D\Delta/2 \end{pmatrix}. \quad (1.149)$$

Выражения для $\bar{\Gamma}$, таким образом, могут быть построены с помощью матрицы Шаповалова и (1.113), обобщенной на случай $c \neq 2$:

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}_{\alpha_1\alpha_2;\alpha}(L_{-1}) &= C_{\alpha_1\alpha_2}^{\alpha,L-1} \langle L_{-1} V_\alpha | L_{-1} V_\alpha \rangle + C_{\alpha_1\alpha_2}^{\alpha,W-1} \langle L_{-1} V_\alpha | W_{-1} V_\alpha \rangle = \\ &= \left(\frac{-4\alpha_1\alpha\beta + 3\alpha_1\alpha Q - 2\beta_1\alpha^2 + 2\beta_1\beta^2 - \beta_1Q\beta}{-6\alpha^2\beta + 3\alpha^2Q + 2\beta^3 - Q\beta^2} \right) \left(2 \frac{\alpha(\alpha-2Q)}{2} \right) + \\ &+ \left(\frac{2(\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta)}{3(-6\alpha^2\beta + 3\alpha^2Q + 2\beta^3 - Q\beta^2)} \right) (3\alpha(\alpha^2 - 3\beta^2 + 6Q\beta - 3Q^2)) = \\ &= \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \alpha_1^2 + \beta_1^2 - \alpha_2^2 - \beta_2^2 - 2Q\beta - 2Q\beta_1 + 2Q\beta_2}{2}, \quad (1.150) \end{aligned}$$

что согласуется с (1.51):

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}_{\alpha_1 \alpha_2; \alpha}(L_{-1}) &\stackrel{(1.51)}{=} \Delta_\alpha + \Delta_1 - \Delta_2 \stackrel{\alpha=\alpha_1+\alpha_2}{=} \\ &= \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \alpha_1^2 + \beta_1^2 - \alpha_2^2 - \beta_2^2 - 2Q\beta - 2Q\beta_1 + 2Q\beta_2}{2}. \end{aligned} \quad (1.151)$$

Также возможно рассмотреть и $\langle V_{\hat{\alpha}}|(W_{-1}V_1)(1)V_2(0)\rangle$. Действительно, из матрицы Шаповалова и структурных констант можно получить

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}_{\alpha_1 \alpha_2; \alpha}(W_{-1}) &= C_{\alpha_1 \alpha_2}^{\alpha, L_{-1}} \langle W_{-1}V_\alpha | L_{-1}V_\alpha \rangle + C_{\alpha_1 \alpha_2}^{\alpha, W_{-1}} \langle W_{-1}V_\alpha | W_{-1}V_\alpha \rangle = \\ &= \left(\frac{-4\alpha_1\alpha\beta + 3\alpha_1\alpha Q - 2\beta_1\alpha^2 + 2\beta_1\beta^2 - \beta_1 Q\beta}{-6\alpha^2\beta + 3\alpha^2 Q + 2\beta^3 - Q\beta^2} \right) \times \\ &\quad \times (3\alpha(\alpha^2 - 3\beta^2 + 6Q\beta - 3Q^2)) + \\ &\quad + \left(\frac{2(\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta)}{3(-6\alpha^2\beta + 3\alpha^2 Q + 2\beta^3 - Q\beta^2)} \right) \times \\ &\quad \times \left(\frac{9\alpha(\alpha - 2Q)}{4} \left(8\frac{\alpha(\alpha - 2Q)}{2} + 3Q^2 \right) \right) = \\ &= \frac{6\alpha_1\alpha^2 - 12\beta_1\beta\alpha - 6\beta^2\alpha_1 - 18\alpha_1 Q^2 + 15Q\alpha\beta_1 + 21Q\alpha_1\beta}{2} = \\ &= w + 2w_1 - w_2 + \frac{3}{2}\alpha\beta_1 Q - 6\alpha_1\beta_1 Q - 6\beta\beta_1\alpha_1 + 9\alpha_1\beta_1^2 + \\ &\quad + \frac{9}{2}\alpha_1\beta Q + 3\alpha\alpha_1^2 - 3\alpha_1^3 - 3\alpha\beta_1^2 = \\ &= w - w_1 - w_2 + (3(\alpha_1^2 - \beta_1^2)\alpha - 6\alpha_1\beta_1\beta) + \frac{3}{2}Q(\alpha\beta_1 + 8\alpha_1\beta_1 + 3\alpha_1\beta - 6\alpha_1 Q). \end{aligned} \quad (1.152)$$

Таким образом, если учесть также (1.71) и (1.73), то

$$\begin{aligned} \langle V_{\hat{\alpha}}|(W_{-1}V_1)(1)V_2(0)\rangle &= 3 \left[\frac{\alpha\beta_1 Q}{2} - 2\alpha_1\beta_1 Q - 2\beta\beta_1\alpha_1 + 3\alpha_1\beta_1^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{2}\alpha_1\beta Q + \alpha\alpha_1^2 - \alpha_1^3 - \alpha\beta_1^2 \right] \langle V_{\hat{\alpha}}|V_1(1)V_2(0)\rangle, \\ \langle V_{\hat{\alpha}}|V_1(1)(W_{-1}V_2)(0)\rangle &= 3 \left[((\alpha_1^2 - \beta_1^2)\alpha - 2\alpha_1\beta_1\beta) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{Q}{2}(\alpha\beta_1 + 8\alpha_1\beta_1 + 3\alpha_1\beta - 6\alpha_1 Q) \right] \langle V_{\hat{\alpha}}|V_1(1)V_2(0)\rangle. \end{aligned} \quad (1.153)$$

Аналогичным образом можно рассмотреть и тройные вершины для диаграмм Юнга размером 2. В этом случае матрица Шаповалова имеет более

сложную форму (см. табл. 2). Тем не менее, используя формулы для структурных констант из п. 1.9.2, возможно повторить проделанные выше вычисления и в этом случае.

1.9.3. Примеры тройных вершин. Ниже приведен ряд вычисленных с помощью описанных здесь методов тройных вершин, необходимых для рассмотрения первых двух уровней АГТ-соотношения в случае алгебры $W^{(3)}$. Для начала приведем основные соотношения, указанные ранее, которые используются при вычислении тройных вершин.

Тройные вершины удовлетворяют рекурсивным соотношениям:

$$\langle L_{-n}V_{\bar{\alpha}} | V_1(1)V_2(0) \rangle \stackrel{(1.51)}{=} (\Delta_{\bar{\alpha}} + n\Delta_1 - \Delta_2) \langle V_{\bar{\alpha}} | V_1(1)V_2(0) \rangle, \quad n > 0, \quad (1.154)$$

$$\langle (L_{-n}V_{\bar{\alpha}})(0) | V_3(1)V_4(\infty) \rangle \stackrel{(1.56)}{=} (\Delta_{\bar{\alpha}} + n\Delta_3 - \Delta_4) \langle V_{\bar{\alpha}}(0) | V_3(1)V_4(\infty) \rangle, \quad n > 0, \quad (1.155)$$

где поля V_1, V_2, V_3 и V_4 — примарные. Также полезны при вычислениях следующие формулы:

$$\langle V_{\bar{\alpha}} | (L_{-1}V_1)(1) | V_2(0) \rangle \stackrel{(1.50)}{=} (\Delta_{\bar{\alpha}} - \Delta_1 - \Delta_2) \langle V_{\bar{\alpha}} | V_1(1)V_2(0) \rangle \quad (1.156)$$

и

$$\langle V_{\bar{\alpha}}(0) | (L_{-1}V_3)(1) | V_4(\infty) \rangle \stackrel{(1.55)}{=} -(\Delta_{\bar{\alpha}} + \Delta_3 - \Delta_4) \langle V_{\bar{\alpha}}(0) | V_3(1) | V_4(\infty) \rangle. \quad (1.157)$$

Последние два соотношения выполняются и для непримарных полей V_1 и V_3 .

Аналогичные соотношения можно привести и для алгебры $W^{(3)}$:

$$\begin{aligned} \langle W_{-n}V_{\bar{\alpha}} | V_1(1) | V_2(0) \rangle &\stackrel{(1.71)}{=} \langle W_0V_{\bar{\alpha}} | V_1(1) | V_2(0) \rangle + n \langle V_{\bar{\alpha}} | (W_{-1}V_1)(1) | V_2(0) \rangle + \\ &+ \left(\frac{n(n+3)}{2} w_1 - w_2 \right) \langle V_{\bar{\alpha}} | V_1(1) | V_2(0) \rangle, \quad n > 0, \quad (1.158) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle (W_{-n}V_{\bar{\alpha}})(0) | V_3(1) | V_4(\infty) \rangle &\stackrel{(1.78)}{=} \langle (W_0V_{\bar{\alpha}})(0) | V_3(1) | V_4(\infty) \rangle + \\ &+ \left(-\frac{n(n-3)}{2} w_3 + w_4 \right) \langle V_{\bar{\alpha}}(0) | V_3(1) | V_4(\infty) \rangle + \\ &+ n \langle V_{\bar{\alpha}}(0) | (W_{-1}V_3)(1) | V_4(\infty) \rangle, \quad n > 0, \quad (1.159) \end{aligned}$$

для примарных полей V_1, V_2, V_3 и V_4 . Также для непримарных полей

$$\begin{aligned} \langle W_{-1}V_{\bar{\alpha}} | V_1(1) | V_2(0) \rangle &\stackrel{(1.75)}{=} \langle W_0V_{\bar{\alpha}} | V_1(1) | V_2(0) \rangle + 2 \langle V_{\bar{\alpha}} | (W_0V_1)(1) | V_2(0) \rangle - \\ &- \langle V_{\bar{\alpha}} | V_1(1) | (W_0V_2)(0) \rangle + \langle V_{\bar{\alpha}} | (W_{-1}V_1)(1) | V_2(0) \rangle + \\ &+ \langle V_{\bar{\alpha}} | (W_1V_1)(1) | V_2(0) \rangle + \langle V_{\bar{\alpha}} | V_1(1) | (W_1V_2)(0) \rangle \quad (1.160) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \langle (W_{-1}V_{\bar{\alpha}})(0) V_3(1) V_4(0) \rangle &\stackrel{(1.82)}{=} \langle W_0V_{\bar{\alpha}}(0) V_3(1) V_4(0) \rangle + \\ &+ \langle V_{\bar{\alpha}}(0) (W_0V_3)(1) V_4(0) \rangle + \langle V_{\bar{\alpha}}(0) V_3(1) (W_0V_4)(0) \rangle + \\ &+ \langle V_{\bar{\alpha}}(0) (W_{-1}V_3)(1) V_4(0) \rangle - \langle V_{\bar{\alpha}}(0) V_3(1) (W_1V_4)(0) \rangle. \end{aligned} \quad (1.161)$$

Для непримарных полей V_1 и V_3 можно указать соотношения, аналогичные (1.156) и (1.157),

$$\begin{aligned} \langle V_{\bar{\alpha}}|(W_{-2}V_1)(1) V_2(0) \rangle &= (\hat{w}_{\bar{\alpha}} - w_1 - w_2) \langle V_{\bar{\alpha}}|V_1(1) V_2(0) \rangle - \\ &- 2 \langle V_{\bar{\alpha}}|(W_{-1}V_1)(1) V_2(0) \rangle \end{aligned} \quad (1.162)$$

и

$$\begin{aligned} \langle V_{\bar{\alpha}}(0) (W_{-2}V_3)(1) V_4(\infty) \rangle &= -(\hat{w}_{\bar{\alpha}} + w_3 + w_4) \langle V_{\bar{\alpha}}(0) V_3(1) V_4(\infty) \rangle - \\ &- 2 \langle V_{\bar{\alpha}}(0) (W_{-1}V_3)(1) V_4(\infty) \rangle. \end{aligned} \quad (1.163)$$

Тройные вершины $\bar{\Gamma}$. Напрямую из (1.154) и (1.158) для трех примарных полей V_{α} , V_1 и V_2 можно получить

$$\langle L_{-1}V_{\alpha} | V_1(1) V_2(0) \rangle \stackrel{(1.154)}{=} (\Delta_{\alpha} + \Delta_1 - \Delta_2) \langle V_{\alpha} | V_1(1) V_2(0) \rangle, \quad (1.164)$$

$$\begin{aligned} \langle W_{-1}V_{\alpha} | V_1(1) V_2(0) \rangle &\stackrel{(1.158)}{=} (w_{\alpha} + 2w_1 - w_2) \langle V_{\alpha} | V_1(1) V_2(0) \rangle + \\ &+ \langle V_{\bar{\alpha}}|(W_{-1}V_1)(1) V_2(0) \rangle, \end{aligned} \quad (1.165)$$

$$\langle L_{-2}V_{\alpha} | V_1(1) V_2(0) \rangle \stackrel{(1.154)}{=} (\Delta_{\alpha} + 2\Delta_1 - \Delta_2) \langle V_{\alpha} | V_1(1) V_2(0) \rangle, \quad (1.166)$$

$$\begin{aligned} \langle W_{-2}V_{\bar{\alpha}} | V_1(1) V_2(0) \rangle &\stackrel{(1.158)}{=} (w_{\alpha} + 5w_1 - w_2) \langle V_{\bar{\alpha}} | V_1(1) V_2(0) \rangle + \\ &+ 2 \langle V_{\bar{\alpha}}|(W_{-1}V_1)(1) V_2(0) \rangle. \end{aligned} \quad (1.167)$$

Если применить (1.154) два раза, то можно получить

$$\begin{aligned} \langle L_{-1}^2V_{\alpha} | V_1(1) V_2(0) \rangle &\stackrel{(1.154)}{=} ((\Delta_{\alpha} + 1) + \Delta_1 - \Delta_2) \langle L_{-1}V_{\alpha} | V_1(1) V_2(0) \rangle = \\ &\stackrel{(1.154)}{=} (\Delta_{\alpha} + \Delta_1 - \Delta_2 + 1) (\Delta_{\alpha} + \Delta_1 - \Delta_2) \langle V_{\alpha} | V_1(1) V_2(0) \rangle. \end{aligned} \quad (1.168)$$

Если применить (1.154) и (1.165), то можно получить

$$\begin{aligned} \langle L_{-1}W_{-1}V_{\alpha} | V_1(1) V_2(0) \rangle &\stackrel{(1.154)}{=} ((\Delta_{\alpha} + 1) + \Delta_1 - \Delta_2) \langle W_{-1}V_{\alpha} | V_1(1) V_2(0) \rangle = \\ &\stackrel{(1.165)}{=} (\Delta_{\alpha} + \Delta_1 - \Delta_2 + 1) ((w_{\alpha} + 2w_1 - w_2) \langle V_{\alpha} | V_1(1) V_2(0) \rangle + \\ &+ \langle V_{\bar{\alpha}}|(W_{-1}V_1)(1) V_2(0) \rangle). \end{aligned} \quad (1.169)$$

При выводе последнего соотношения также используется выражение для конформной размерности $\Delta(W_{-1}V_\alpha) = \Delta_\alpha + 1$. В правой части приведенных выражений подчеркнуты слагаемые, отличные от $\langle V_\alpha|V_1(1)V_2(0)\rangle$.

Для трех примарных полей V_α , V_1 , V_2 и для $V_{\check{\alpha}} = W_{-1}V_\alpha$ из (1.160) напрямую следует:

$$\begin{aligned} \langle W_{-1}^2V_\alpha|V_1(1)V_2(0)\rangle &\stackrel{(1.160)}{=} \\ &= \langle W_0W_{-1}V_\alpha|V_1(1)V_2(0)\rangle + 2\langle W_{-1}V_\alpha|(W_0V_1)(1)V_2(0)\rangle - \\ &- \langle W_{-1}V_\alpha|V_1(1)(W_0V_2)(0)\rangle + \langle W_{-1}V_\alpha|(W_{-1}V_1)(1)V_2(0)\rangle + \\ &+ \langle W_{-1}V_\alpha|(W_1V_1)(1)V_2(0)\rangle + \langle W_{-1}V_\alpha|V_1(1)(W_1V_2)(0)\rangle = \\ &= \langle W_0W_{-1}V_\alpha|V_1(1)V_2(0)\rangle + (2w_1 - w_2)\langle W_{-1}V_\alpha|V_1(1)V_2(0)\rangle + \\ &+ \langle W_{-1}V_\alpha|(W_{-1}V_1)(1)V_2(0)\rangle. \quad (1.170) \end{aligned}$$

Первое слагаемое в правой части можно упростить с помощью (1.130), а второе — с помощью (1.165). Для упрощения последнего слагаемого нужно использовать (1.160), только с непримарным полем $V_1 \rightarrow W_{-1}V_1$ и примарным $V_{\check{\alpha}} = V_\alpha$:

$$\begin{aligned} \langle W_{-1}V_\alpha|(W_{-1}V_1)(1)V_2(0)\rangle &\stackrel{(1.160)}{=} \\ &= \langle W_0V_\alpha|W_{-1}V_1(1)V_2(0)\rangle + 2\langle V_\alpha|(W_0W_{-1}V_1)(1)V_2(0)\rangle - \\ &- \langle V_\alpha|W_{-1}V_1(1)(W_0V_2)(0)\rangle + \langle V_\alpha|(W_{-1}^2V_1)(1)V_2(0)\rangle + \\ &+ \langle V_\alpha|(W_1W_{-1}V_1)(1)V_2(0)\rangle + \langle V_\alpha|W_{-1}V_1(1)(W_1V_2)(0)\rangle = \\ &= (w_\alpha - w_2)\langle V_\alpha|W_{-1}V_1(1)V_2(0)\rangle + 2\langle V_\alpha|(W_0W_{-1}V_1)(1)V_2(0)\rangle + \\ &+ \langle V_\alpha|(W_{-1}^2V_1)(1)V_2(0)\rangle + \langle V_\alpha|(W_1W_{-1}V_1)(1)V_2(0)\rangle. \quad (1.171) \end{aligned}$$

Если в (1.170) подставить (1.171) и (1.130), то

$$\begin{aligned} \langle W_{-1}^2V_\alpha|V_1(1)V_2(0)\rangle &= \frac{9D_\alpha}{2}\langle L_{-1}V_\alpha|V_1(1)V_2(0)\rangle + \\ &+ (w_\alpha + 2w_1 - w_2)\langle W_{-1}V_\alpha|V_1(1)V_2(0)\rangle + \\ &+ (w_\alpha + 2w_1 - w_2)\langle V_\alpha|W_{-1}V_1(1)V_2(0)\rangle + 9D_1\langle V_\alpha|(L_{-1}V_1)(1)V_2(0)\rangle + \\ &+ \langle V_\alpha|(W_{-1}^2V_1)(1)V_2(0)\rangle + \frac{9D_1\Delta_1}{2}\langle V_\alpha|V_1(1)V_2(0)\rangle. \quad (1.172) \end{aligned}$$

Если также подставить (1.165), (1.164) и (1.156), то можно получить

$$\begin{aligned}
\langle W_{-1}^2 V_\alpha | V_1(1) V_2(0) \rangle = & \\
= (w_\alpha + 2w_1 - w_2) & ((w_\alpha + 2w_1 - w_2) \langle V_\alpha | V_1(1) V_2(0) \rangle + \\
& + 2 \langle V_\alpha | (W_{-1} V_1)(1) V_2(0) \rangle) + \\
& + \frac{9D_\alpha}{2} (\Delta_\alpha + \Delta_1 - \Delta_2) \langle V_\alpha | V_1(1) V_2(0) \rangle + \\
& + 9D_1 (\Delta_\alpha - \Delta_1 - \Delta_2) \langle V_\alpha | V_1(1) V_2(0) \rangle + \\
& + \frac{9D_1 \Delta_1}{2} \langle V_\alpha | V_1(1) V_2(0) \rangle + \langle V_\alpha | (W_{-1}^2 V_1)(1) V_2(0) \rangle. \quad (1.173)
\end{aligned}$$

Вершины Г. Из (1.155) и (1.159) для трех примарных полей V_α , V_3 и W_4 можно получить

$$\langle (L_{-1} V_\alpha)(0) V_3(1) V_4(\infty) \rangle \stackrel{(1.155)}{=} (\Delta_\alpha + \Delta_3 - \Delta_4) \langle V_\alpha(0) V_3(1) V_4(\infty) \rangle, \quad (1.174)$$

$$\begin{aligned}
\langle (W_{-1} V_\alpha)(0) V_3(1) V_4(\infty) \rangle \stackrel{(1.159)}{=} & (w_\alpha + w_3 + w_4) \langle V_\alpha(0) V_3(1) V_4(\infty) \rangle + \\
& + \langle V_\alpha(0) (W_{-1} V_3)(1) V_4(\infty) \rangle, \quad (1.175)
\end{aligned}$$

$$\langle (L_{-2} V_\alpha)(0) V_3(1) V_4(\infty) \rangle \stackrel{(1.155)}{=} (\Delta_\alpha + 2\Delta_3 - \Delta_4) \langle V_\alpha(0) V_3(1) V_4(\infty) \rangle, \quad (1.176)$$

$$\begin{aligned}
\langle (W_{-2} V_\alpha)(0) V_3(1) V_4(\infty) \rangle \stackrel{(1.159)}{=} & (w_\alpha + w_3 + w_4) \langle V_\alpha(0) V_3(1) V_4(\infty) \rangle + \\
& + 2 \langle V_\alpha(0) (W_{-1} V_3)(1) V_4(\infty) \rangle. \quad (1.177)
\end{aligned}$$

В результате двух применений (1.155):

$$\begin{aligned}
\langle (L_{-1}^2 V_\alpha)(0) V_3(1) V_4(\infty) \rangle \stackrel{(1.155)}{=} & \\
= ((\Delta_\alpha + 1) + \Delta_3 - \Delta_4) & \langle L_{-1} V_\alpha(0) V_3(1) V_4(\infty) \rangle = \\
\stackrel{(1.155)}{=} & (\Delta_\alpha + \Delta_3 - \Delta_4 + 1) (\Delta_\alpha + \Delta_3 - \Delta_4) \langle V_\alpha(0) V_3(1) V_4(\infty) \rangle. \quad (1.178)
\end{aligned}$$

В результате применения (1.155) и (1.175):

$$\begin{aligned}
\langle (L_{-1} W_{-1} V_\alpha)(0) V_3(1) V_4(\infty) \rangle \stackrel{(1.155)}{=} & \\
= ((\Delta_\alpha + 1) + \Delta_3 - \Delta_4) & \langle W_{-1} V_\alpha(0) V_3(1) V_4(\infty) \rangle \stackrel{(1.175)}{=} \\
= (\Delta_\alpha + \Delta_3 - \Delta_4 + 1) & ((w_\alpha + w_3 + w_4) \langle V_\alpha(0) V_3(1) V_4(\infty) \rangle + \\
& + \langle V_\alpha(0) (W_{-1} V_3)(1) V_4(\infty) \rangle). \quad (1.179)
\end{aligned}$$

В последнем соотношении также использовалось $\Delta(W_{-1}V_\alpha) = \Delta_\alpha + 1$. В правой части подчеркнуты слагаемые, отличные от $\langle V_\alpha(0) V_3(1) V_4(0) \rangle$.

Для трех примарных V_α , V_3 и V_4 и для $V_{\check{\alpha}} = W_{-1}V_\alpha$ из (1.161) следует:

$$\begin{aligned} \langle (W_{-1}^2 V_\alpha)(0) V_3(1) V_4(0) \rangle &\stackrel{(1.161)}{=} \\ &= \langle (W_0 W_{-1} V_\alpha)(0) V_3(1) V_4(0) \rangle + \langle (W_{-1} V_\alpha)(0) (W_0 V_3)(1) V_4(0) \rangle + \\ &+ \langle (W_{-1} V_\alpha)(0) V_3(1) (W_0 V_4)(0) \rangle + \langle (W_{-1} V_\alpha)(0) (W_{-1} V_3)(1) V_4(0) \rangle - \\ &\quad - \langle (W_{-1} V_\alpha)(0) V_3(1) (W_1 V_4)(0) \rangle = \\ &= \langle (W_0 W_{-1} V_\alpha)(0) V_3(1) V_4(0) \rangle + (w_3 + w_4) \langle (W_{-1} V_\alpha)(0) V_3(1) V_4(0) \rangle + \\ &\quad + \langle (W_{-1} V_\alpha)(0) (W_{-1} V_3)(1) V_4(0) \rangle. \end{aligned} \quad (1.180)$$

Первое слагаемое в правой части можно упростить с помощью (1.130), второе — с помощью (1.175). Для упрощения последнего слагаемого нужно использовать (1.161), но для непримарного $V_1 \rightarrow W_{-1}V_1$ и примарного $V_{\check{\alpha}} = V_\alpha$:

$$\begin{aligned} \langle (W_{-1} V_\alpha)(0) (W_{-1} V_3)(1) V_4(0) \rangle &\stackrel{(1.161)}{=} \\ &= \langle W_0 V_\alpha(0) W_{-1} V_3(1) V_4(0) \rangle + \langle V_\alpha(0) (W_0 W_{-1} V_3)(1) V_4(0) \rangle + \\ &+ \langle V_\alpha(0) W_{-1} V_3(1) (W_0 V_4)(0) \rangle + \langle V_\alpha(0) (W_{-1}^2 V_3)(1) V_4(0) \rangle - \\ &\quad - \langle V_\alpha(0) V_3(1) (W_1 V_4)(0) \rangle = \\ &= (w_\alpha + w_4) \langle W_0 V_\alpha(0) W_{-1} V_3(1) V_4(0) \rangle + \langle V_\alpha(0) (W_0 W_{-1} V_3)(1) V_4(0) \rangle + \\ &\quad + \langle V_\alpha(0) (W_{-1}^2 V_3)(1) V_4(0) \rangle. \end{aligned} \quad (1.181)$$

Отметим, что в этом случае справа на одно слагаемое меньше, чем в (1.171).

Если в (1.180) подставить (1.181) и (1.130), то

$$\begin{aligned} \langle (W_{-1}^2 V_\alpha)(0) V_3(1) V_4(0) \rangle &= \frac{9D_\alpha}{2} \langle L_{-1} V_\alpha(0) V_3(1) V_4(0) \rangle + \\ &+ (w_\alpha + w_3 + w_4) \langle (W_{-1} V_\alpha)(0) V_3(1) V_4(0) \rangle + \\ &+ (w_\alpha + w_3 + w_4) \langle V_\alpha(0) W_{-1} V_3(1) V_4(0) \rangle + \\ &+ \frac{9D_3}{2} \langle V_\alpha(0) (L_{-1} V_3)(1) V_4(0) \rangle + \langle V_\alpha(0) (W_{-1}^2 V_3)(1) V_4(0) \rangle. \end{aligned} \quad (1.182)$$

Если также подставить (1.175), (1.174) и (1.157), то в итоге получается:

$$\begin{aligned} \langle (W_{-1}^2 V_\alpha)(0) V_3(1) V_4(0) \rangle &= \\ &= (w_\alpha + w_3 + w_4) \left((w_\alpha + w_3 + w_4) \langle V_\alpha(0) V_3(1) V_4(\infty) \rangle + \right. \\ &+ \left. 2 \langle V_\alpha(0) (W_{-1} V_3)(1) V_4(\infty) \rangle \right) + \frac{9D_\alpha}{2} (\Delta_\alpha + \Delta_3 - \Delta_4) \langle V_\alpha(0) V_3(1) V_4(\infty) \rangle - \\ &- \frac{9D_3}{2} (\Delta_{\check{\alpha}} + \Delta_3 - \Delta_4) \langle V_{\check{\alpha}}(0) V_3(1) V_4(\infty) \rangle + \underline{\underline{\langle V_\alpha(0) (W_{-1}^2 V_3)(1) V_4(0) \rangle}}. \end{aligned} \quad (1.183)$$

2. АГТ-СООТНОШЕНИЕ

В данном разделе рассмотрено АГТ-соотношение для двух конфигураций полей конформной теории: n полей на двумерной сфере и одного поля на двумерном торе. Также описаны способы вычисления функции Некрасова для различных комбинаций массивных мультиплетов и рассмотрена диаграммная техника для функции Некрасова.

2.1. Функция Некрасова. Для гипотезы АГТ необходимы выражения как для конформных блоков, рассмотренные в разд. 1, так и выражения для функции Некрасова — инстантонной части статистической суммы суперсимметричной теории. Рассмотрим подробнее функцию Некрасова.

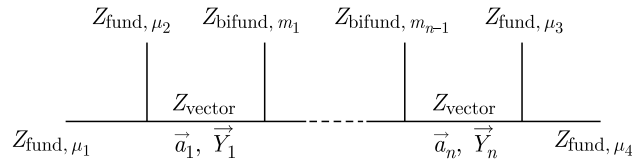


Рис. 4. Диаграмма, описывающая методику расчета функции Некрасова

Статистическая сумма по инстантонным состояниям в теории Зайберга–Виттена описывается расходящимся интегралом. Для расчета этого интеграла в [8–10] была предложена двухпараметрическая деформация суперсимметричной теории. Один из способов описать данную деформацию — рассмотреть теорию на так называемом Ω -фоне. Для этого рассматривают $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричную теорию в шестимерном пространстве с метрикой

$$ds^2 = A dz d\bar{z} + g_{I\bar{J}}(dx^I + \Omega^I_J x^J dz + \bar{\Omega}^I_J x^J d\bar{z})(dx^{\bar{I}} + \bar{\Omega}^{\bar{I}}_{\bar{J}} x^{\bar{J}} dz + \bar{\Omega}^{\bar{I}}_{\bar{J}} dx^{\bar{J}} d\bar{z}), \quad (2.1)$$

где

$$\Omega^I_J = \begin{pmatrix} 0 & \epsilon_1 & 0 & 0 \\ -\epsilon_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \epsilon_2 \\ 0 & 0 & -\epsilon_2 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

После компактификации по координатам z и \bar{z} получается деформированная четырехмерная суперсимметричная $\mathcal{N} = 2$ теория.

Статистическая сумма по инстантонным состояниям, полученная введением двух дополнительных параметров в суперсимметричную теорию Янга–Миллса, дается функцией Некрасова [8]. Гипотеза АГТ предполагает существование определенных соотношений между конформными блоками и функциями Некрасова. Для линейной теории с $\bigotimes_{i=1}^n U(2)$ калибровочными группами

функция Некрасова (рис. 4) вычисляется по следующей формуле:

$$\begin{aligned}
 Z_{\text{inst}} = & \sum_{\vec{Y}_1, \vec{Y}_2, \dots, \vec{Y}_n} \left(\prod_{i=1}^n q_i^{|\vec{Y}_i|} Z_{\text{vector}}(\vec{a}_i, \vec{Y}_i) \right) Z_{\text{fund}}(\vec{a}_1, \vec{Y}_1, \mu_1) \times \\
 & \times Z_{\text{fund}}(\vec{a}_1, \vec{Y}_1, \mu_2) \left(\prod_{i=1}^{n-1} Z_{\text{bifund}}(\vec{a}_i, \vec{Y}_i; \vec{a}_{i+1}, \vec{Y}_{i+1}; m_i) \right) \times \\
 & \times Z_{\text{fund}}(\vec{a}_n, \vec{Y}_n, \mu_3) Z_{\text{fund}}(\vec{a}_n, \vec{Y}_n, \mu_4), \quad (2.3)
 \end{aligned}$$

где $\vec{a}_i = (a_{i,1}, a_{i,2})$ — элементы, стоящие на диагонали скалярного поля в присоединенном представлении; $\vec{Y}_i = (Y_{i1}, Y_{i2})$ — пара диаграмм Юнга, фиксирующих конкретный инстантон; q_i связаны с константами теории:

$$q_i = e^{2\pi i \tau_i}, \quad \tau_i = \frac{4\pi i}{g_i^2} + \frac{\theta_i}{2\pi}; \quad (2.4)$$

g_i и θ_i — константа связи и топологический заряд, соответствующие i -й группе $U(2)$; m_i — масса бифундаментального мультиплета, заряженного по отношению к группам $U(2)_i$ и $U(2)_{i+1}$; $\mu_{1,2,3,4}$ — массы фундаментальных полей, заряженных по отношению к одной группе, $U(2)_1$ или $U(2)_n$.

Из-за того, что инстантонная статистическая сумма факторизуется, оказывается удобным представлять ее с помощью диаграммы. Если внешняя линия соединяется с одной внешней и одной внутренней линиями, то ей сопоставляется фундаментальный мультиплет и $Z_{\text{fund}}(\vec{a}, \vec{Y}, \mu)$, а если с двумя внутренними, то бифундаментальный мультиплет и $Z_{\text{bifund}}(\vec{a}_i, \vec{Y}_i, \vec{a}_{i+1}, \vec{Y}_{i+1}, m_i)$. Внутренней линии соответствует $Z_{\text{vector}}(\vec{a}, \vec{Y})$. Каждая внутренняя линия содержит два вектора, описывающих вакуумное среднее \vec{a}_i и диаграммы Юнга \vec{Y}_i , соответствующие группе $U(2)_i$. Так, простейшему случаю для полей на двумерной сфере соответствует диаграмма на рис. 4.

Для различных составляющих функции Некрасова известны точные ответы:

$$\begin{aligned}
 Z_{\text{bifund}}(\vec{a}, \vec{Y}; \vec{b}, \vec{W}; m) = & \prod_{i,j=1}^2 \prod_{s \in Y_i} (E(a_i - b_j, Y_i, W_j, s) - m) \times \\
 & \times \prod_{t \in W_j} (\epsilon - E(b_j - a_i, W_j, Y_i, t) - m), \quad (2.5)
 \end{aligned}$$

$$E(a, Y_1, Y_2, s) = a + \epsilon_1 (k_j^T(Y_1) - i + 1) - \epsilon_2 (k_i(Y_2) - j), \quad (2.6)$$

где $k_j^T(Y)$, $k_i(Y)$ — это высота столбца и длина строки в диаграмме Юнга Y (рис. 5), $\epsilon = \epsilon_1 + \epsilon_2$. Из этого выражения можно получить ответы для

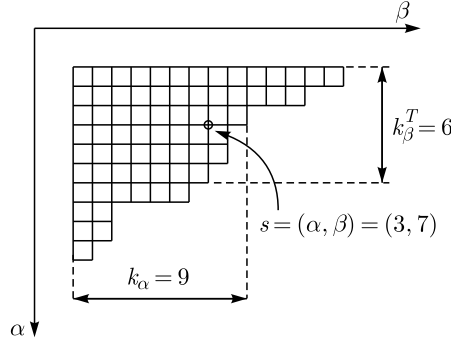


Рис. 5. Диаграмма Юнга [14, 12, 9, 8, 8, 7, 6, 2, 2, 1]. $s = (\alpha, \beta)$ — мультииндекс (координата клетки в диаграмме Юнга), $k_\beta^T(Y)$, $k_\alpha(Y)$ — высота и длина соответствующих столбца и ряда в диаграмме Юнга (так, $\alpha = 3$, $\beta = 7$ в примере на рисунке)

Z_{adj} и Z_{vector} :

$$\begin{aligned}
 Z_{\text{adj}}(\vec{a}, \vec{Y}, m) &= Z_{\text{bifund}}(\vec{a}, \vec{Y}, \vec{a}, \vec{Y}, m), \\
 Z_{\text{vector}}(\vec{a}, \vec{Y}) &= \frac{1}{Z_{\text{adj}}(\vec{a}, \vec{Y}, 0)}, \\
 Z_{\text{fund}}(\vec{a}, \vec{Y}, m) &= \prod_{i=1}^2 \prod_{s \in Y_i} (\phi(a_i, s) + m), \\
 \phi(a, s) &= a + \epsilon_1(i - 1) + \epsilon_2(j - 1).
 \end{aligned}
 \tag{2.7}$$

Ответ для инстантонной статистической суммы строится по диаграмме согласно следующим правилам: каждой внешней линии сопоставляется Z_{fund} , каждому внутреннему каналу сопоставляется Z_{vector} , а каждой внешней линии, разделяющей два внутренних канала, сопоставляется Z_{bifund} .

2.2. АГТ-соотношение для конформных блоков на сфере.

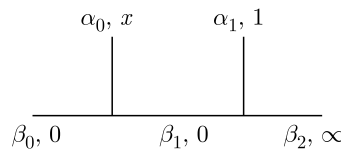
2.2.1. $U(1)$ -фактор. Выражения для функции Некрасова, описанные в п. 2.1, задают инстантонную статистическую сумму с калибровочной группой $\bigotimes_{i=1}^m SU(2)$, где m связано с конкретной конфигурацией массивных мультиплетов суперсимметричной теории. В то же время гипотеза АГТ подразумевает связь с теорией с калибровочной группой $\bigotimes_{i=1}^m U(2)$. Таким образом, возникает необходимость в добавлении к функциям Некрасова множителя, соответствующего $U(1)$ -фактору. В работе [11] приведен вид такого множителя, соответствующего функции Некрасова, связанной с четырехточечным конформным блоком (т. е. с голоморфной частью коррелятора четырех

полей). В случае произвольного числа полей этот фактор устроен как

$$Z_m^{U(1)} = \prod_{i=1}^m \prod_{j=1}^{i-3} \left(1 - \prod_{k=i-j+1}^{i-3} x_k \right)^{-\nu_j + i(i-1)/2}. \quad (2.8)$$

При этом при рассмотрении АГТ-соотношения для n -точечного конформного блока необходим $U(1)$ -фактор с $m = n - 3$.

2.2.2. Четырехточечный конформный блок



Благодаря конформной симметрии возможно зафиксировать три точки. Если зафиксировать точки $z_1 = 0$, $z_2 = 1$, $z_3 = \infty$, то конформный блок будет зависеть только от одного проективного инварианта x . Таким образом, с помощью (1.2) получается следующее выражение:

$$\begin{aligned} \langle V_{\alpha_0}(x)V_{\beta_0}(0)V_{\alpha_1}(1)V_{\beta_2}(\infty) \rangle &= \\ &= x^{-(\Delta_{\alpha_1} + \Delta_{\beta_0})} \sum_{\hat{\beta}_1, \hat{\beta}'} x^{\Delta_{\hat{\beta}_1}} \bar{\Gamma}_{\alpha_0 \beta_0}^{\hat{\beta}_1} (H^{-1})^{\hat{\beta}_1 \hat{\beta}'} \Gamma_{\hat{\beta}' \alpha_1 \beta_2}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Здесь и далее используется следующая параметризация конформной теории:

$$\Delta_{\alpha} = \frac{\alpha(\epsilon - \alpha)}{\epsilon_1 \epsilon_2}, \quad c = 1 + \frac{6\epsilon^2}{\epsilon_1 \epsilon_2}. \quad (2.10)$$

С помощью (1.59), (1.2) можно привести (2.9) к виду

$$\begin{aligned} \langle V_{\alpha_0}(x)V_{\beta_0}(0)V_{\alpha_1}(1)V_{\beta_2}(\infty) \rangle &= \\ &= x^{-(\Delta_{\alpha_0} + \Delta_{\beta_0})} \sum_{\beta_1} x^{\Delta_{\beta_1}} \left(C_{\alpha_0 \beta_0}^{\beta_1} C_{\alpha_1 \beta_1}^{\beta_2} \right) \times \\ &\times \sum_{l_1=0}^{\infty} x^{l_1} \sum_{\substack{|Y_1|=l_1 \\ Y_1'}} \gamma_{\alpha_0 \beta_0}^{\beta_1}(\emptyset, Y_1', \emptyset) D_{\beta_1}(Y_1', Y_1) \gamma_{\alpha_1 \beta_1}^{\beta_2}(\emptyset, Y_1, \emptyset) = \\ &= x^{-(\Delta_{\alpha_0} + \Delta_{\beta_0})} \sum_{\beta_1} x^{\Delta_{\beta_1}} \left(C_{\alpha_0 \beta_0}^{\beta_1} C_{\alpha_1 \beta_1}^{\beta_2} \right) \mathcal{B}_{\alpha_0 \beta_0 \alpha_1 \beta_2}(Y_1|x), \end{aligned} \quad (2.11)$$

где $\mathcal{B}_{\alpha_0 \beta_0 \alpha_1 \beta_2}(Y_1|x)$ — член разложения конформного блока в ряд по диаграммам Юнга, соответствующий диаграмме Y_1 .

Функция Некрасова для случая четырех внешних полей дается формулой

$$Z_{\text{inst}} = \sum_{\vec{Y}} q^{|\vec{Y}|} Z_{\text{vector}}(\vec{a}, \vec{Y}) \times \\ \times Z_{\text{fund}}(\vec{a}, \vec{Y}, \mu_1) Z_{\text{fund}}(\vec{a}, \vec{Y}, \mu_2) Z_{\text{fund}}(\vec{a}, \vec{Y}, \mu_3) Z_{\text{fund}}(\vec{a}, \vec{Y}, \mu_4). \quad (2.12)$$

В этом случае $U(1)$ -фактор имеет вид $(1-x)^{-\nu}$. Выражения для конформного блока и функции Некрасова даются следующими формулами.

Уровень 1:

- функция Некрасова

$$\mathcal{Z}^{(1)} = Z([1]\emptyset) + Z(\emptyset[1]) + \nu = \\ = -\frac{1}{\epsilon_1 \epsilon_2} \frac{\prod_{r=1}^4 (a + \mu_r)}{2a(2a + \epsilon)} - \frac{1}{\epsilon_1 \epsilon_2} \frac{\prod_{r=1}^4 (a - \mu_r)}{2a(2a - \epsilon)} + \nu, \quad (2.13)$$

- конформный блок

$$\mathcal{B}^{(1)} = \gamma_{\alpha_0 \beta_0}^{\beta_1}(\emptyset, \emptyset, [1]) D_{\beta_1}([1], [1]) \gamma_{\alpha_1 \beta_1}^{\beta_2}(\emptyset, [1], \emptyset) = \\ = \frac{(\Delta_{\beta_1} + \Delta_{\alpha_0} - \Delta_{\beta_0})(\Delta_{\beta_1} + \Delta_{\alpha_1} - \Delta_{\beta_2})}{2\Delta_{\beta_1}} = \\ = \frac{2\left(\frac{\epsilon^2}{4} - a^2 + \alpha_0(\epsilon - \alpha_0) - \beta_0(\epsilon - \beta_0)\right)\left(\frac{\epsilon^2}{4} - a^2 + \alpha_1(\epsilon - \alpha_1) - \beta_2(\epsilon - \beta_2)\right)}{\epsilon_1 \epsilon_2 (\epsilon^2 - 4a^2)}. \quad (2.14)$$

Уровень 2:

- функция Некрасова

$$\mathcal{Z}^{(2)} = Z([2], \emptyset) + Z(\emptyset, [2]) + Z([1, 1], \emptyset) + Z(\emptyset, [1, 1]) + \\ + Z([1], [1]) + \nu (Z([1], \emptyset) + Z(\emptyset, [1])) + \frac{\nu(\nu + 1)}{2}, \quad (2.15)$$

- конформный блок

$$\mathcal{B}^{(2)} = \gamma_{\alpha_0 \beta_0}^{\beta_1}(\emptyset, \emptyset, [2]) D_{\beta_1}([2], [2]) \gamma_{\alpha_1 \beta_1}^{\beta_2}(\emptyset, [2], \emptyset) + \\ + \gamma_{\alpha_0 \beta_0}^{\beta_1}(\emptyset, \emptyset, [2]) D_{\beta_1}([2], [1^2]) \gamma_{\alpha_1 \beta_1}^{\beta_2}(\emptyset, [1^2], \emptyset) + \\ + \gamma_{\alpha_0 \beta_0}^{\beta_1}(\emptyset, \emptyset, [1^2]) D_{\beta_1}([1^2], [2]) \gamma_{\alpha_1 \beta_1}^{\beta_2}(\emptyset, [2], \emptyset) + \\ + \gamma_{\alpha_0 \beta_0}^{\beta_1}(\emptyset, \emptyset, [1^2]) D_{\beta_1}([1^2], [1^2]) \gamma_{\alpha_1 \beta_1}^{\beta_2}(\emptyset, [1^2], \emptyset). \quad (2.16)$$

Уровень 3 :

• функция Некрасова

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}^{(3)} = & Z([3], \emptyset) + Z(\emptyset, [3]) + Z([2, 1], \emptyset) + Z([1, 1, 1], \emptyset) + \\ & + Z(\emptyset, [2, 1]) + Z(\emptyset, [1, 1, 1]) + Z([2], [1]) + Z([1], [2]) + \\ & + Z([1, 1], [1]) + Z([1], [1, 1]) + \nu(Z([2], \emptyset) + Z(\emptyset, [2]) + \\ & + Z([1, 1], \emptyset) + Z(\emptyset, [1, 1]) + Z([1], [1])) + \\ & + \frac{\nu(\nu + 1)}{2} (Z([1], \emptyset) + Z(\emptyset, [1])) + \frac{\nu(\nu + 1)(\nu + 2)}{6}, \end{aligned} \quad (2.17)$$

• конформный блок

$$\begin{aligned} \mathcal{B}^{(3)} = & \gamma_{\alpha_0\beta_0}^{\beta_1}(\emptyset, \emptyset, [3])D_{\beta_1}([3], [3])\gamma_{\alpha_1\beta_1}^{\beta_2}(\emptyset, [3], \emptyset) + \\ & + \gamma_{\alpha_0\beta_0}^{\beta_1}(\emptyset, \emptyset, [3])D_{\beta_1}([3], [2, 1])\gamma_{\alpha_1\beta_1}^{\beta_2}(\emptyset, [2, 1], \emptyset) + \\ & + \gamma_{\alpha_0\beta_0}^{\beta_1}(\emptyset, \emptyset, [3])D_{\beta_1}([3], [1^3])\gamma_{\alpha_1\beta_1}^{\beta_2}(\emptyset, [1^3], \emptyset) + \\ & + \gamma_{\alpha_0\beta_0}^{\beta_1}(\emptyset, \emptyset, [2, 1])D_{\beta_1}([2, 1], [3])\gamma_{\alpha_1\beta_1}^{\beta_2}(\emptyset, [3], \emptyset) + \\ & + \gamma_{\alpha_0\beta_0}^{\beta_1}(\emptyset, \emptyset, [2, 1])D_{\beta_1}([2, 1], [2, 1])\gamma_{\alpha_1\beta_1}^{\beta_2}(\emptyset, [2, 1], \emptyset) + \\ & + \gamma_{\alpha_0\beta_0}^{\beta_1}(\emptyset, \emptyset, [2, 1])D_{\beta_1}([2, 1], [1^3])\gamma_{\alpha_1\beta_1}^{\beta_2}(\emptyset, [1^3], \emptyset) + \\ & + \gamma_{\alpha_0\beta_0}^{\beta_1}(\emptyset, \emptyset, [1^3])D_{\beta_1}([1^3], [3])\gamma_{\alpha_1\beta_1}^{\beta_2}(\emptyset, [3], \emptyset) + \\ & + \gamma_{\alpha_0\beta_0}^{\beta_1}(\emptyset, \emptyset, [1^3])D_{\beta_1}([1^3], [2, 1])\gamma_{\alpha_1\beta_1}^{\beta_2}(\emptyset, [2, 1], \emptyset) + \\ & + \gamma_{\alpha_0\beta_0}^{\beta_1}(\emptyset, \emptyset, [1^3])D_{\beta_1}([1^3], [1^3])\gamma_{\alpha_1\beta_1}^{\beta_2}(\emptyset, [1^3], \emptyset). \end{aligned} \quad (2.18)$$

Для определения связи между параметрами суперсимметричной и конформной теории нужно решить следующую систему уравнений:

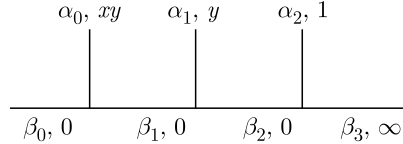
$$\begin{cases} \mathcal{B}^{(1)} = \mathcal{Z}^{(2)}, \\ \mathcal{B}^{(2)} = \mathcal{Z}^{(2)}. \end{cases} \quad (2.19)$$

Ее решения устроены как:

$$\begin{aligned} \mu_1 = -\frac{\epsilon}{2} + \alpha_0 + \beta_0, \quad \mu_2 = \frac{\epsilon}{2} + \alpha_0 - \beta_0, \quad \mu_3 = \frac{3\epsilon}{2} - \alpha_1 - \beta_2, \\ \mu_4 = \frac{\epsilon}{2} - \alpha_1 + \beta_2, \quad \nu = \frac{2\alpha_0(\epsilon - \alpha_1)}{\epsilon_1\epsilon_2}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Это не единственное возможное соотношение между параметрами. Выражения для конформного блока и функции Некрасова обладают определенными симметриями. Так, в данном случае существует семь возможных соотношений между параметрами, которые можно получить из (2.20) с помощью симметрий, описанных ниже в п. 2.2.6.

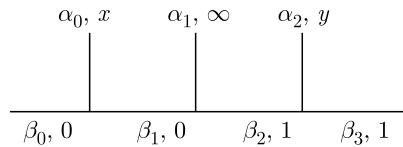
2.2.3. Пятиточечный конформный блок



Для пятиточечного конформного блока существует несколько вариантов построения диаграммы, соответствующих различному выбору точек. Здесь приведены только два из них, для пояснения того, какая диаграмма связана с функцией Некрасова согласно гипотезе АГТ. Первый из них соответствует конформному блоку, рассмотренному в [11]. Выберем точки следующим образом: $z_1 = 0$, $z_2 = xy$, $z_3 = y$, $z_4 = 1$, $z_5 = \infty$ (как и в п. 2.2.2, конформная симметрия позволяет зафиксировать три из пяти точек). В этом случае разложение конформного блока в ряд по x и y устроено следующим образом:

$$\begin{aligned}
 & \langle V_{\alpha_1}(y)V_{\alpha_0}(xy)V_{\beta_0}(0)V_{\alpha_2}(1)V_{\beta_3}(\infty) \rangle = \\
 & = (xy)^{-(\alpha_0+\beta_0)}y^{-\alpha_1} \sum_{\beta_1, \beta_2} x^{\Delta_{\beta_1}} y^{\Delta_{\beta_2}} C_{\alpha_0 \beta_0}^{\beta_1} C_{\alpha_1 \beta_1}^{\beta_2} C_{\alpha_2 \beta_2}^{\beta_3} \sum_{l_1, l_2} x^{l_1} y^{l_2} \times \\
 & \quad \times \sum_{|Y_1|=l_1, |Y_2|=l_2, Y'_1, Y'_2} \gamma_{\alpha_0 \beta_0}^{\beta_1}(\emptyset, \emptyset, Y'_1) D_{\beta_1}(Y'_1, Y_1) \times \\
 & \quad \times \gamma_{\alpha_1 \beta_1}^{\beta_2}(\emptyset, Y_1, Y'_2) D_{\beta_2}(Y'_2, Y_2) \gamma_{\alpha_2 \beta_2}^{\beta_3}(\emptyset, Y_2, \emptyset). \quad (2.21)
 \end{aligned}$$

Другой вариант построения конформного блока соответствует выбору точек $z_1 = 0$, $z_2 = x$, $z_3 = \infty$, $z_4 = y$, $z_5 = 1$:



$$\begin{aligned}
 & \langle V_{\alpha_0}(x)V_{\beta_0}(0)V_{\beta_3}(1)V_{\alpha_2}(y)V_{\alpha_1}(\infty) \rangle = \\
 & = x^{-(\Delta_{\alpha_0}+\Delta_{\beta_0})}(y-1)^{-(\Delta_{\alpha_3}+\Delta_{\beta_3})} \sum_{\beta_1, \beta_2} x^{\Delta_{\beta_1}} (y-1)^{\Delta_{\beta_2}} C_{\alpha_0 \beta_0}^{\beta_1} C_{\alpha_2 \beta_2}^{\beta_3} C_{\beta_1 \beta_2}^{\alpha_1} \times \\
 & \quad \times \sum_{l_1, l_2} \sum_{|Y_1|=l_1, |Y_2|=l_2} x^{l_1} (y-1)^{l_2} \gamma_{\alpha_0 \beta_0}^{\beta_1}(\emptyset, \emptyset, Y'_1) \times \\
 & \quad \times D_{\beta_1}(Y'_1, Y_1) \gamma_{\beta_1 \beta_2}^{\alpha_1}(Y_1, Y'_2, \emptyset) \tilde{D}_{\beta_2}(Y'_2, Y_2) \gamma_{\alpha_2 \beta_3}^{\beta_2}(\emptyset, Y_2, \emptyset), \quad (2.22)
 \end{aligned}$$

где $D_\beta(Y', Y)$ — это обратная форма Шаповалова, а $\tilde{D}_\beta(Y, Y')$ — обратная деформированная форма Шаповалова, т.е. форма, соответствующая произведению полей не в точках 0 и ∞ , а в 1 и ∞ . Соответствующие формы Шаповалова связаны следующим образом:

$$\tilde{Q}_\Delta([Y], [Y']) = \sum_k \frac{1}{k!} Q_\Delta([Y, 1^k], [Y']). \quad (2.23)$$

Эта диаграмма описывает разложение конформного блока в ряд по x и $y - 1$. Так как функция Некрасова — это ряд по малым, близким к нулю параметрам, то логично рассматривать ее связь с первой диаграммой. Гипотеза АГТ предполагает связь именно с такой диаграммой.

$U(1)$ -фактор имеет вид $(1 - x)^{-\nu_1}(1 - y)^{-\nu_2}(1 - xy)^{-\nu_3}$. Выражения для функции Некрасова и конформного блока устроены следующим образом.

Уровень **[1, 0]**:

- функция Некрасова

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}^{(1,0)} &= Z([1], [\emptyset], [\emptyset, \emptyset]) + Z([\emptyset, [1]], [\emptyset, \emptyset]) + \nu_1 = \\ &= - \frac{(a_1 + \mu_1)(a_1 + \mu_2)(a_1 - a_2 + \epsilon - m_1)(a_1 + a_2 + \epsilon - m_1)}{2\epsilon_1\epsilon_2 a_1(2a_1 + \epsilon)} - \\ &- \frac{(-a_1 + \mu_1)(-a_1 + \mu_2)(-a_1 + a_2 + \epsilon - m_1)(-a_1 + a_2 + \epsilon - m_1)}{2\epsilon_1\epsilon_2 a_1(2a_1 - \epsilon)} + \nu_1, \end{aligned} \quad (2.24)$$

- конформный блок

$$\begin{aligned} \mathcal{B}^{(1,0)} &= \gamma_{\alpha_0\beta_0}^{\beta_1}(\emptyset, \emptyset, [1]) D_{\beta_1}([1], [1]) \gamma_{\alpha_1\beta_1}^{\beta_2}(\emptyset, [1], \emptyset) = \\ &= \frac{(\Delta_{\beta_1} + \Delta_{\alpha_0} - \Delta_{\beta_0})(\Delta_{\beta_1} + \Delta_{\alpha_1} - \Delta_{\beta_2})}{2\Delta_{\beta_1}} = \\ &= \frac{2 \left(\frac{\epsilon^2}{4} - a_1^2 + \alpha_0(\epsilon - \alpha_0) - \beta_0(\epsilon - \beta_0) \right) (-a_1^2 + \alpha_1(\epsilon - \alpha_1) + a_2^2)}{\epsilon_1\epsilon_2(\epsilon^2 - 4a_1^2)}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Уровень **[0, 1]**:

- функция Некрасова

$$\begin{aligned} Z([\emptyset, \emptyset], [[1], \emptyset]) + Z([\emptyset, \emptyset], [\emptyset, [1]]) + \nu_2 &= \\ &= - \frac{(a_2 + \mu_3)(a_2 + \mu_4)(-a_1 + a_2 + m_1)(a_1 + a_2 + m_1)}{2\epsilon_1\epsilon_2 a_2(2a_2 + \epsilon)} - \\ &- \frac{(-a_2 + \mu_3)(-a_2 + \mu_4)(a_1 + a_2 - m_1)(-a_1 + a_2 - m_1)}{2\epsilon_1\epsilon_2 a_2(2a_2 - \epsilon)} + \nu_2, \end{aligned} \quad (2.26)$$

- конформный блок

$$\begin{aligned} \mathcal{B}^{(0,1)} &= \gamma_{\alpha_1\beta_1}^{\beta_2}(\emptyset, \emptyset, [1])D_{\beta_2}([1], [1])\gamma_{\alpha_2\beta_2}^{\beta_3}(\emptyset, [1], \emptyset) = \\ &= \frac{(\Delta_{\beta_2} + \Delta_{\alpha_1} - \Delta_{\beta_1})(\Delta_{\beta_2} + \Delta_{\alpha_2} - \Delta_{\beta_3})}{2\Delta_{\beta_2}} = \\ &= \frac{2(-a_2^2 + \alpha_1(\epsilon - \alpha_1) + a_1^2) \left(\frac{\epsilon^2}{4} - a_2^2 + \alpha_2(\epsilon - \alpha_2) - \beta_3(\epsilon - \beta_3) \right)}{\epsilon_1\epsilon_2(\epsilon^2 - 4a_2^2)}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Уровень **[2, 0]**:

- функция Некрасова

$$\begin{aligned} Z([2], \emptyset, [\emptyset, \emptyset]) + Z([1], [1], [\emptyset, \emptyset]) + Z([\emptyset, 2], [\emptyset, \emptyset]) + \\ + Z([1, 1], \emptyset, [\emptyset, \emptyset]) + Z([\emptyset, 1, 1], [\emptyset, \emptyset]) + \\ + \nu_1(Z([1], \emptyset, [\emptyset, \emptyset]) + Z([\emptyset, 1], [\emptyset, \emptyset])) + \frac{1}{2}\nu_1(\nu_1 + 1), \end{aligned} \quad (2.28)$$

- конформный блок

$$\begin{aligned} \mathcal{B}^{(2,0)} &= \gamma_{\alpha_0\beta_0}^{\beta_1}(\emptyset, \emptyset, [2])D_{\beta_1}([2], [2])\gamma_{\alpha_1\beta_1}^{\beta_2}(\emptyset, [2], \emptyset) + \\ &+ \gamma_{\alpha_0\beta_0}^{\beta_1}(\emptyset, \emptyset, [2])D_{\beta_1}([2], [1^2])\gamma_{\alpha_1\beta_1}^{\beta_2}(\emptyset, [1^2], \emptyset) + \\ &+ \gamma_{\alpha_0\beta_0}^{\beta_1}(\emptyset, \emptyset, [1^2])D_{\beta_1}([1^2], [2])\gamma_{\alpha_1\beta_1}^{\beta_2}(\emptyset, [2], \emptyset) + \\ &+ \gamma_{\alpha_0\beta_0}^{\beta_1}(\emptyset, \emptyset, [1^2])D_{\beta_1}([1^2], [1^2])\gamma_{\alpha_1\beta_1}^{\beta_2}(\emptyset, [1^2], \emptyset). \end{aligned} \quad (2.29)$$

Уровень **[0, 2]**:

- функция Некрасова

$$\begin{aligned} Z([\emptyset, \emptyset], [2], \emptyset) + Z([\emptyset, \emptyset], [\emptyset, 2]) + Z([\emptyset, \emptyset], [1], [1]) + \\ + Z([\emptyset, \emptyset], [1, 1], \emptyset) + Z([\emptyset, \emptyset], [\emptyset, 1, 1]) + \\ + \nu_2(Z([\emptyset, \emptyset], [1], \emptyset) + Z([\emptyset, \emptyset], [\emptyset, 1])) + \frac{1}{2}\nu_2(\nu_2 + 1), \end{aligned} \quad (2.30)$$

- конформный блок

$$\begin{aligned} \mathcal{B}^{(0,2)} &= \gamma_{\alpha_1\beta_1}^{\beta_2}(\emptyset, \emptyset, [2])D_{\beta_2}([2], [2])\gamma_{\alpha_2\beta_2}^{\beta_3}(\emptyset, [2], \emptyset) + \\ &+ \gamma_{\alpha_1\beta_1}^{\beta_2}(\emptyset, \emptyset, [2])D_{\beta_2}([2], [1^2])\gamma_{\alpha_2\beta_2}^{\beta_3}(\emptyset, [1^2], \emptyset) + \\ &+ \gamma_{\alpha_1\beta_1}^{\beta_2}(\emptyset, \emptyset, [1^2])D_{\beta_2}([1^2], [2])\gamma_{\alpha_2\beta_2}^{\beta_3}(\emptyset, [2], \emptyset) + \\ &+ \gamma_{\alpha_1\beta_1}^{\beta_2}(\emptyset, \emptyset, [1^2])D_{\beta_2}([1^2], [1^2])\gamma_{\alpha_2\beta_2}^{\beta_3}(\emptyset, [1^2], \emptyset). \end{aligned} \quad (2.31)$$

Уровень **[1, 1]**:

- функция Некрасова

$$\begin{aligned} & Z ([1], \emptyset, [1], \emptyset) + Z (\emptyset, [1], [1], \emptyset) + Z (\emptyset, [1], \emptyset, [1]) + \\ & + Z ([1], \emptyset, \emptyset, [1]) + \nu_1 (Z (\emptyset, \emptyset, [1], \emptyset) + Z (\emptyset, \emptyset, \emptyset, [1])) + \\ & + \nu_2 (Z ([1], \emptyset, \emptyset, \emptyset) + Z (\emptyset, [1], \emptyset, \emptyset)) + \nu_1 \nu_2 + \nu_3, \end{aligned} \quad (2.32)$$

- конформный блок

$$\begin{aligned} \mathcal{B}^{(1,1)} & = \\ & = \gamma_{\alpha_0 \beta_0}^{\beta_1} (\emptyset, \emptyset, [1]) D_{\beta_1} ([1], [1]) \gamma_{\alpha_1 \beta_1}^{\beta_2} (\emptyset, [1], [1]) D_{\beta_2} ([1], [1]) \gamma_{\alpha_2 \beta_2}^{\beta_3} (\emptyset, [1], \emptyset). \end{aligned} \quad (2.33)$$

Для определения связи между параметрами нужно решить следующую систему:

$$\begin{cases} \mathcal{B}^{(1,0)} = \mathcal{Z}^{(1,0)}, \\ \mathcal{B}^{(0,1)} = \mathcal{Z}^{(0,1)}, \\ \mathcal{B}^{(1,1)} = \mathcal{Z}^{(1,1)}, \\ \mathcal{B}^{(2,0)} = \mathcal{Z}^{(2,0)}, \\ \mathcal{B}^{(0,2)} = \mathcal{Z}^{(0,2)}. \end{cases} \quad (2.34)$$

Ее решение устроено следующим образом:

$$\begin{aligned} \mu_1 & = -\frac{\epsilon}{2} + \alpha_0 + \beta_0, & \mu_2 & = \frac{\epsilon}{2} + \alpha_0 - \beta_0, \\ \mu_3 & = \frac{3\epsilon}{2} - \alpha_2 - \beta_3, & \mu_4 & = \frac{\epsilon}{2} - \alpha_2 + \beta_3, & m_1 & = \alpha_1, \\ \nu_1 & = \frac{2\alpha_0(\epsilon - \alpha_1)}{\epsilon_1 \epsilon_2}, & \nu_2 & = \frac{2\alpha_1(\epsilon - \alpha_2)}{\epsilon_1 \epsilon_2}, & \nu_3 & = \frac{2\alpha_0(\epsilon - \alpha_2)}{\epsilon_1 \epsilon_2}. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Используя симметрии, рассмотренные в п.2.2.6, возможно получить и другие решения.

2.2.4. Шеститочечный конформный блок. Выберем точки $z_1 = y, z_2 = xy, z_3 = 0, z_4 = 1, z_5 = \infty$. Тогда конформный блок может быть представлен

в следующей форме:

$$\begin{aligned}
 & \langle V_{\alpha_0}(xyz)V_{\alpha_1}(yz)V_{\alpha_2}(z)V_{\beta_0}(0)V_{\alpha_3}(1)V_{\beta_4}(\infty) \rangle = \\
 & = x^{-(\Delta_{\beta_0}+\Delta_{\alpha_0})} y^{-(\Delta_{\beta_0}+\Delta_{\alpha_0}+\Delta_{\alpha_1})} z^{-(\Delta_{\beta_0}+\Delta_{\alpha_0}+\Delta_{\alpha_1}+\Delta_{\alpha_2})} \times \\
 & \quad \times \sum_{\beta_1, \beta_2, \beta_3} x^{\Delta_{\beta_1}} y^{\Delta_{\beta_2}} z^{\Delta_{\beta_3}} C_{\alpha_0, \beta_0}^{\beta_1} C_{\alpha_1, \beta_1}^{\beta_2} C_{\alpha_2, \beta_2}^{\beta_3} C_{\alpha_3, \beta_3}^{\beta_4} \times \\
 & \quad \times \sum_{l_1, l_2, l_3} x^{l_1} y^{l_2} z^{l_3} \sum_{\substack{|Y_1|=l_1, |Y_2|=l_2, |Y_3|=l_3 \\ Y'_1, Y'_2, Y'_3}} \times \\
 & \quad \times \gamma_{\alpha_0, \beta_0}^{\beta_1}(\emptyset, \emptyset, Y'_1) D_{\beta_1}(Y'_1, Y_1) \gamma_{\alpha_1, \beta_1}^{\beta_2}(\emptyset, Y_1, Y'_2) D_{\beta_2}(Y'_2, Y_2) \times \\
 & \quad \times \gamma_{\alpha_2, \beta_2}^{\beta_3}(\emptyset, Y_2, Y'_3) D_{\beta_3}(Y'_3, Y_3) \gamma_{\alpha_3, \beta_3}^{\beta_4}(\emptyset, Y_3, \emptyset). \quad (2.36)
 \end{aligned}$$

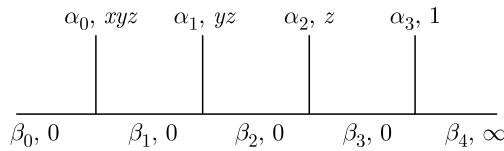


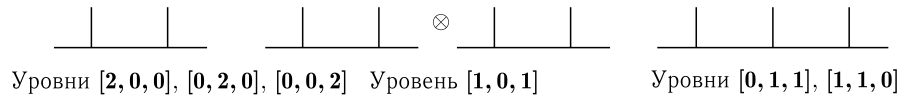
Рис. 6. Диаграмма, описывающая 6-точечный конформный блок

$U(1)$ -фактор имеет вид $(1-x)^{-\nu_1}(1-y)^{-\nu_2}(1-xy)^{-\nu_3}(1-z)^{-\nu_4}(1-yz)^{-\nu_5}(1-xyz)^{-\nu_6}$. Конкретные выражения для функции Некрасова и конформного блока довольно громоздки, по этой причине изобразим символически, какие элементы присутствуют в выражениях:

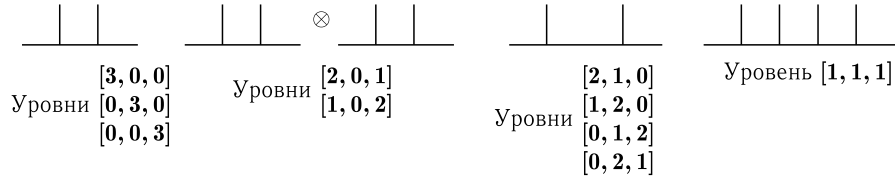
• Уровень 1



• Уровень 2



• Уровень 3



Для того, чтобы установить связь между параметрами теорий, нужно рассмотреть систему

$$\begin{cases} \mathcal{B}^{(1,0,0)} = \mathcal{Z}^{(1,0,0)}, \\ \mathcal{B}^{(0,1,0)} = \mathcal{Z}^{(0,1,0)}, \\ \mathcal{B}^{(0,0,1)} = \mathcal{Z}^{(0,0,1)}, \\ \mathcal{B}^{(1,1,0)} = \mathcal{Z}^{(1,1,0)}, \\ \mathcal{B}^{(0,1,1)} = \mathcal{Z}^{(0,1,1)}, \\ \mathcal{B}^{(1,1,1)} = \mathcal{Z}^{(1,1,1)}. \end{cases} \quad (2.37)$$

Из этой системы получаются следующие соотношения между массами и параметрами α :

$$\begin{aligned} \mu_1 &= -\frac{\epsilon}{2} + \alpha_0 + \beta_0, & \mu_2 &= \frac{\epsilon}{2} + \alpha_0 - \beta_0, & m_1 &= \alpha_1, \\ \mu_3 &= \frac{3\epsilon}{2} - \alpha_3 - \beta_4, & \mu_4 &= \frac{\epsilon}{2} - \alpha_3 + \beta_4, & m_2 &= \alpha_2, \\ \nu_1 &= \frac{2\alpha_0(\epsilon - \alpha_1)}{\epsilon_1\epsilon_2}, & \nu_2 &= \frac{2\alpha_1(\epsilon - \alpha_2)}{\epsilon_1\epsilon_2}, & \nu_3 &= \frac{2\alpha_0(\epsilon - \alpha_2)}{\epsilon_1\epsilon_2}, \\ \nu_4 &= \frac{2\alpha_2(\epsilon - \alpha_3)}{\epsilon_1\epsilon_2}, & \nu_5 &= \frac{2\alpha_1(\epsilon - \alpha_3)}{\epsilon_1\epsilon_2}, & \nu_6 &= \frac{2\alpha_0(\epsilon - \alpha_3)}{\epsilon_1\epsilon_2}. \end{aligned}$$

Применение указанных в п. 2.2.6 симметрий дает и другие решения.

2.2.5. n -точечный конформный блок. Для случая n внешних полей конформный блок, соответствующий рис. 8, представляется следующим разложением:

$$\mathcal{B} = \sum_{l_1, \dots, l_n} x_1^{l_1} \dots x_n^{l_n} \mathcal{B}^{(l_1, \dots, l_n)}, \quad (2.38)$$

$$\mathcal{B}^{(l_1, \dots, l_n)} = \sum_{\substack{|Y_1|=l_1 \\ \dots \\ |Y_n|=l_n}} \prod_{i=1}^{n+1} \sum_{Y'_i} \gamma_{i-1\beta_{i-1}}^{\beta_i}(\emptyset, Y_{i-1}, Y'_i) D_{\beta_i}(Y'_i, Y_i), \quad (2.39)$$

где $x_{n+1} = 1, l_{n+1} = 0, Y_0 \equiv \emptyset, Y_{n+1} \equiv \emptyset$.

Из рассмотрения предыдущих случаев можно заметить одну важную особенность. В случае n внешних полей конформный блок на уровнях до $(n - 4)$ -го обрезается до случаев $4, \dots, (n - 1)$ внешних полей. Нетривиальные обобщения появляются только на уровне $n - 3$ в случае, когда есть как минимум $n - 3$ ненулевых диаграммы. Таким образом, вычисление первых $n - 3$ порядков $4, \dots, n$ -точечного конформного блока гарантирует выполнение АГТ-соотношения и для первых $n - 3$ порядков для произвольного числа полей. Первый уровень всегда сводится к четырехточечному конформному блоку, второй к четырех- и пятиточечным случаям и т. д.

Это связано со свойствами функции Некрасова и конформного блока. В случае, если одна из пар диаграмм является нулевой, соответствующий элемент функции Некрасова факторизуется:

$$\begin{aligned} Z_{\text{bifund}}(\vec{a}, \vec{Y}, 0, \emptyset, m) &= (Z_{\text{fund}}(\vec{a}, \vec{Y}, \epsilon - m))^2, \\ Z_{\text{bifund}}(0, \emptyset, \vec{a}, \vec{Y}, m) &= (Z_{\text{fund}}(\vec{a}, \vec{Y}, m))^2. \end{aligned} \tag{2.40}$$

Таким образом, общее выражение для данного уровня функции Некрасова распадается в произведение выражений для фрагментов диаграммы, находящихся слева и справа от ребра, соответствующего нулевой паре диаграмм. Аналогичное свойство наблюдается и у конформного блока, так как форма Шаповалова для нулевых диаграмм равна единице.

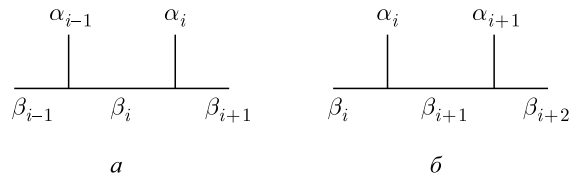


Рис. 7. Вклады в первый порядок n -точечного конформного блока

Так, для любого n -точечного случая первый порядок АГТ-соотношений сводится к четырехточечному случаю:

$$\begin{aligned} \mathcal{B} &= \sum_{|Y_i|=l_i} x^{l_i} \sum_{Y'_i} \gamma_{\alpha_{i-1}\beta_{i-1}}^{\beta_i}(\emptyset, \emptyset, Y'_i) D_{\beta_i}(Y'_i, Y_i) \gamma_{\alpha_i\beta_i}^{\beta_{i+1}}(\emptyset, Y_i, \emptyset), \\ \mathcal{Z} &= Z^{U(1)} Z_{\text{bifund}}(0, \emptyset, \vec{a}_i, \vec{Y}_i, m_{i-1}) Z_{\text{vector}}(\vec{a}_i, \vec{Y}_i) Z_{\text{bifund}}(\vec{a}_i, \vec{Y}_i, 0, \emptyset, m_i). \end{aligned} \tag{2.41}$$

Эта формула соответствует диаграмме на рис. 7, *a*. Второй порядок для случая пяти внешних полей содержит единственный элемент, не сводящийся к случаю четырех внешних полей, — слагаемое, размеры диаграмм, соответствующих внутренним ребрам которого, равны единице. В шеститочечном случае соотношения сводятся к четырехточечным диаграммам (уровни

$[2, 0, 0]$, $[0, 2, 0]$, $[0, 0, 2]$), произведению двух четырехточечных диаграмм (уровень $[1, 0, 1]$) и к пятиточечному случаю (уровни $[0, 1, 1]$, $[1, 1, 0]$). Для третьего порядка шеститочечного случая появляется еще один нетривиальный уровень — $[1, 1, 1]$. Все остальные уровни сводятся к произведению четырех- и пятиточечных случаев.

Поэтому для нахождения каждого из m_i нужно рассмотреть две серии уровней: $[0, \dots, 0, l_i, 0, \dots, 0]$, $l_i \in \mathbb{N}$, и $[0, \dots, 0, l_{i+1}, 0, \dots, 0]$, $l_{i+1} \in \mathbb{N}$. Первой серии соответствует рис. 7, а и следующие выражения:

$$\begin{aligned} \mathcal{B} &= \sum_{|Y_i|=l_i} x^{l_i} \sum_{Y'_i} \gamma_{\alpha_{i-1}\beta_{i-1}}^{\beta_i}(\emptyset, \emptyset, Y'_i) D_{\beta_i}(Y'_i, Y_i) \gamma_{\alpha_i\beta_i}^{\beta_{i+1}}(\emptyset, Y_i, \emptyset), \\ \mathcal{Z} &= Z^{U(1)} Z_{\text{bifund}}(0, \emptyset, \vec{a}_i, \vec{Y}_i, m_{i-1}) Z_{\text{vector}}(\vec{a}_i, \vec{Y}_i) Z_{\text{bifund}}(\vec{a}_i, \vec{Y}_i, 0, \emptyset, m_i). \end{aligned} \quad (2.42)$$

Второй серии соответствует рис. 7, б и следующие выражения:

$$\begin{aligned} \mathcal{B} &= \sum_{|Y_{i+1}|=l_{i+1}} x^{l_{i+1}} \sum_{Y'_i} \gamma_{\alpha_i\beta_i}^{\beta_{i+1}}(\emptyset, \emptyset, Y'_{i+1}) D_{\beta_{i+1}}(Y'_{i+1}, Y_{i+1}) \times \\ &\quad \times \gamma_{\alpha_{i+1}\beta_{i+1}}^{\beta_{i+2}}(\emptyset, Y_{i+1}, \emptyset), \\ \mathcal{Z} &= Z^{U(1)} Z_{\text{bifund}}(0, \emptyset, \vec{a}_{i+1}, \vec{Y}_{i+1}, m_i) Z_{\text{vector}}(\vec{a}_{i+1}, \vec{Y}_{i+1}) \times \\ &\quad \times Z_{\text{bifund}}(\vec{a}_{i+1}, \vec{Y}_{i+1}, 0, \emptyset, m_{i+1}). \end{aligned} \quad (2.43)$$

Таким образом, для случая n внешних полей получаются следующие соотношения между параметрами теорий:

$$\begin{aligned} \mu_1 &= -\frac{\epsilon}{2} + \alpha_0 + \beta_0, & \mu_2 &= \frac{\epsilon}{2} + \alpha_0 - \beta_0, & m_i &= \alpha_i, \\ \mu_3 &= \frac{3\epsilon}{2} - \alpha_{n-3} - \beta_{n-2}, & \mu_4 &= \frac{\epsilon}{2} - \alpha_{n-3} + \beta_{n-2}, \\ \nu_{ij} &= \frac{2\alpha_i(\epsilon - \alpha_j)}{\epsilon_1\epsilon_2}. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Также с помощью применения указанных в п. 2.2.6 симметрий можно получить и другие решения.

2.2.6. Симметрии. Множество параметров, удовлетворяющих АГТ-соотношению, обладает некоторыми симметриями. Исходя из использованной параметризации (2.10), можно заметить, что выражения не изменятся при замене $\alpha \mapsto (\epsilon - \alpha)$ для любого из α . Для всех конформных блоков на двумерной сфере, кроме случая четырех внешних полей, это единственная симметрия. Таким образом, АГТ-соотношению удовлетворяет 2^n различных наборов параметров конформной теории поля. Также не изменятся и выражения для функции Некрасова при перестановке масс μ_1 и μ_2 или

μ_3 и μ_4 , что дает четыре различных набора для функции Некрасова. Поэтому имеется 2^{n-2} всевозможных комбинаций параметров, удовлетворяющих АГТ-соотношению.

Случай четырех внешних полей является с этой точки зрения особым. В данном случае имеется также симметрия при следующей замене параметров: $\alpha_0 \leftrightarrow \beta_0$ и $\alpha_1 \leftrightarrow \beta_2$. Таким образом, в этом случае АГТ-соотношению удовлетворяют восемь различных комбинаций. Объясняется наличие такой симметрии тем, что конформный блок зависит от переменных, являющихся двойными отношениями: $x = \frac{z_{\alpha_0\beta_0}z_{\beta_2\alpha_1}}{z_{\alpha_1\beta_0}z_{\beta_2\alpha_0}}$. В случае четырех внешних полей он зависит только от одной переменной x , а потому выражения не изменятся при данной замене параметров. Для случаев многих полей разложение производится по нескольким переменным такого типа, в то время как преобразования такого вида могут сохранять только одну из них, значит, данная симметрия существует только для случая четырех внешних полей.

2.2.7. Выбор диаграмм. Благодаря наличию конформной симметрии n -точечный конформный блок зависит только от $n - 3$ проективных инвариантов. Конформный блок может быть задан для любых несовпадающих координат, в то время как функция Некрасова задана только в определенной области пространства модулей. В этой области параметры q_i малы ($q_i \ll 1$). Таким образом, получается, что функция Некрасова — это ряд по малым q_i , в то время как конформный блок — ряд по проективным инвариантам x_i . Соответственно, при сопоставлении $x_i = q_i$ получается, что поля при подсчете конформного блока должны быть взяты в точках, удовлетворяющих

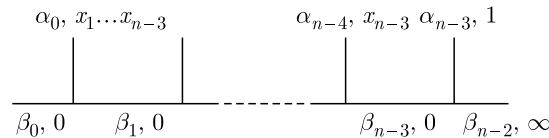


Рис. 8. Диаграмма, определяющая порядок перемножения полей в конформном блоке. Диаграмма такого типа называется гребенкой. АГТ-гипотеза задает соотношения только для диаграмм такого типа

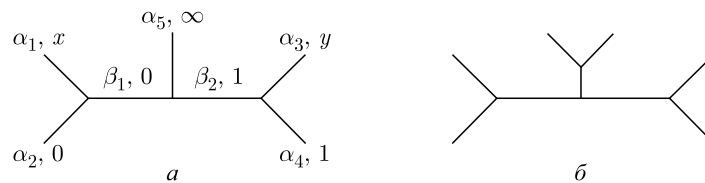


Рис. 9. Диаграммы, задающие неправильный порядок перемножения полей для пяти-точечного (а) и шеститочечного (б) конформных блоков

особым условиям:

$$\infty, 1, x_{n-3}, x_{n-3}x_{n-4}, \dots, \prod_{i=1}^{n-3} x_i, 0, \quad x_i \ll 1, \quad (2.45)$$

где n — количество внешних полей в конформном блоке. Данное условие приводит к тому, что рассмотрению подлежат только диаграммы типа гребенки (см. рис. 8). В случае пяти внешних полей при попытке подсчета конформного блока для диаграммы, представленной на рис. 9, *a*, может быть получено только разложение возле точек $y = 1$ и $x = 0$, что не согласуется с нужным для сравнения с функцией Некрасова рядом. Для шеститочечного конформного блока также существует диаграмма, не являющаяся диаграммой типа гребенки (см. рис. 9, *b*). АГТ-соотношение для него также не установлено.

2.2.8. Явные вычисления для АГТ-соотношения.

Четырехточечный конформный блок

- Уровень 1

Конформный блок = Функция Некрасова		
a^4	$-2 = -2$	(2.46)
a^2	$\epsilon^2 - 2(\alpha_0^2 - \beta_0^2 + \alpha_1^2 - \beta_2^2) -$ $-2\epsilon(\alpha_0 - \beta_0 + \alpha_1 - \beta_2)$	(2.47)
a^0	$-2(\epsilon^2/2 + \epsilon(\alpha_0 - \beta_0) - (\alpha_1^2 - \beta_0^2)) \times$ $\times (\epsilon^2/2 + \epsilon(\alpha_1 - \beta_2) - (\alpha_3^2 - \beta_2^2))$	(2.48)

- Уровень 2

Конформный блок = Функция Некрасова		
a^{10}	$16 = 16$	(2.49)
a^8	$-\{32\epsilon^2 + 18\epsilon_1\epsilon_2 +$ $+32(\epsilon(\alpha_0 - \beta_0 + \alpha_1 - \beta_2) +$ $+ \alpha_0^2 - \beta_0^2 + \alpha_1^2 - \beta_2^2)\}$ $- 18\epsilon_1\epsilon_2 - 64\nu\epsilon_1\epsilon_2$	(2.50)

Пятиточечный конформный блок

• Уровень [1, 0]

Конформный блок = Функция Некрасова

$$a_1^4 a_2^0 \quad 2 = 2 \quad (2.51)$$

$$a_1^2 a_2^2 \quad -2 = -2 \quad (2.52)$$

$$a_1^2 a_2^0 \quad -\epsilon^2/2 + 2(\alpha_0^2 + \beta_0^2 - \alpha_2^2) - = 2\mu_1\mu_2 + \\ -2\epsilon(\alpha_0 + \beta_0 - \alpha_2) \quad + (\mu_1 + \mu_2)(3\epsilon - 4m_1) + \\ + 2m_1(m_1 - \epsilon) - 4\nu_1\epsilon_1\epsilon_2 \quad (2.53)$$

$$a_1^0 a_2^2 \quad \epsilon^2/2 - 2(\beta_0 - \alpha_2)(\beta_0 + \alpha_2 - \epsilon) = \epsilon(\mu_1 + \mu_2) - 2\mu_1\mu_2 \quad (2.54)$$

$$a_1^0 a_2^0 \quad \alpha_0(\epsilon - \alpha_0)(\epsilon^2/2 + = 2m_1\mu_1\mu_2(m_1 - \epsilon) - \\ + 2(\beta_0 - \alpha_2)(\epsilon - (\beta_0 + \alpha_2))) \quad - \epsilon(\mu_1 + \mu_2)(m_1 - \epsilon)^2 + \\ + \nu_1\epsilon_1\epsilon_2\epsilon^2 \quad (2.55)$$

• Уровень [0, 1]

Конформный блок = Функция Некрасова

$$a_1^0 a_2^4 \quad 2 = 2 \quad (2.56)$$

$$a_1^2 a_2^2 \quad -2 = -2 \quad (2.57)$$

$$a_1^0 a_2^2 \quad -\epsilon^2/2 + 2(\alpha_0^2 + \beta_3^2 - \alpha_1^2) - = 2\mu_3\mu_4 + \\ -2\epsilon(\alpha_0 + \beta_3 - \alpha_1) \quad + (\mu_3 + \mu_4)(4m_1 - \epsilon) + \\ + 2m_1(m_1 - \epsilon) - 4\nu_2\epsilon_1\epsilon_2 \quad (2.58)$$

$$a_1^2 a_2^0 \quad \epsilon^2/2 - 2(\beta_3 - \alpha_1)(\beta_3 + \alpha_1 - \epsilon) = \epsilon(\mu_3 + \mu_4) - 2\mu_3\mu_4 \quad (2.59)$$

$$a_1^0 a_2^0 \quad \alpha_0(\epsilon - \alpha_0) \times = 2m_1\mu_3\mu_4(m_1 - \epsilon) - \\ \times (\epsilon^2/2 + 2(\beta_3 - \alpha_1)(\epsilon - \beta_3 - \alpha_1)) \quad - \epsilon(\mu_3 + \mu_4)m_1^2 + \nu_2\epsilon_1\epsilon_2\epsilon^2 \quad (2.60)$$

Шеститочечный конформный блок

• Уровень [1, 0, 0]

Конформный блок = Функция Некрасова		
$a_1^4 a_2^0 a_3^0$	$2 = 2$	(2.61)
$a_1^2 a_2^2 a_3^0$	$-2 = -2$	(2.62)
$a_1^2 a_2^0 a_3^0$	$\epsilon^2/2 - 2\epsilon(\alpha_0 + \alpha_1 - \beta_0) + 2m_1^2 - 4\nu_1\epsilon_1\epsilon_2 - 2\epsilon_1 m_1 - 2\epsilon_2 m_1 + 2\alpha_1^2 - 2\beta_0^2 + (3\epsilon_2 - 4m_1 + 3\epsilon_1)\sigma_1 + 2\sigma_2$	(2.63)
$a_1^0 a_2^2 a_3^0$	$\epsilon^2/2 + 2(\alpha_0 - \beta_0)(\epsilon - \alpha_0 - \beta_0) = \epsilon\sigma_1 - 2\sigma_2$	(2.64)
$a_1^0 a_2^0 a_3^0$	$1/2\alpha_1(\epsilon - \alpha_1)(\epsilon^2 - 4\epsilon(\beta_0 - \alpha_0) - 4(\alpha_0^2 + \beta_0^2)) - \nu_1\epsilon_1\epsilon_2^3 + \nu_1\epsilon_1^3\epsilon_2 + 2\nu_1\epsilon_1^2\epsilon_2^2 + (-\epsilon_2^3 - \epsilon_1^3 - m_1^2\epsilon_2 - 3\epsilon_1\epsilon_2^2 + 2\epsilon_1^2 m_1 - m_1^2\epsilon_1 + 2\epsilon_2^2 m_1 - 3\epsilon_1^2\epsilon_2 + 4\epsilon_1 m_1\epsilon_2)\sigma_1 + (-2\epsilon_2 m_1 - 2\epsilon_1 m_1 + 2m_1^2)\sigma_2$	(2.65)

• Уровень [0, 1, 0]

Конформный блок = Функция Некрасова		
$a_1^0 a_2^4 a_3^0$	$2 = 2$	(2.66)
$a_1^2 a_2^2 a_3^0$	$-2 = -2$	(2.67)
$a_1^0 a_2^2 a_3^2$	$-2 = -2$	(2.68)
$a_1^2 a_2^0 a_3^2$	$2 = 2$	(2.69)
$a_1^2 a_2^0 a_3^0$	$2\alpha_2(\epsilon - \alpha_2) = 2m_2(\epsilon - m_2)$	(2.70)
$a_1^0 a_2^2 a_3^0$	$2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) - 2\epsilon(\alpha_1 + \alpha_2) = 2m_2^2 + 2m_1^2 - 2\epsilon_1 m_2 - 2\epsilon_2 m_2 + 6\epsilon_1 m_1 + 6\epsilon_2 m_1 - 8m_1 m_2 - 4\nu_2\epsilon_1\epsilon_2$	(2.71)
$a_1^0 a_2^0 a_3^2$	$2\alpha_1(\epsilon - \alpha_1) = -2m_1^2 + 2\epsilon_1 m_1 + 2\epsilon_2 m_1$	(2.72)
$a_1^0 a_2^0 a_3^0$	$2\alpha_1\alpha_2(\epsilon - \alpha_1)(\epsilon - \alpha_2) = 8m_1\epsilon_1 m_2\epsilon_2 + 2m_1^2 m_2^2 - 2m_1^2\epsilon_1 m_2 - 2m_1^2\epsilon_2 m_2 - 6m_1\epsilon_1^2\epsilon_2 - 6m_1\epsilon_1\epsilon_2^2 + 4m_1\epsilon_1^2 m_2 + 4m_1\epsilon_2^2 m_2 - 2m_1 m_2^2\epsilon_1 - 2m_1 m_2^2\epsilon_2 + \nu_2\epsilon_1^3\epsilon_2 + 2\nu_2\epsilon_1^2\epsilon_2^2 + \nu_2\epsilon_1\epsilon_2^3 - 2m_1\epsilon_1^3 - 2m_1\epsilon_2^3$	(2.73)

• Уровень [0, 0, 1]

Конформный блок = Функция Некрасова		
$a_1^0 a_2^0 a_3^4$	$2 = 2$	(2.74)
$a_1^0 a_2^2 a_3^2$	$-2 = -2$	(2.75)
$a_1^0 a_2^2 a_3^0$	$\epsilon^2/2 + 2(\alpha_3 - \beta_4)(\epsilon - \alpha_3 - \beta_4) = \tau_1 \epsilon - 2\tau_2$	(2.76)
$a_1^2 a_2^0 a_3^2$	$-\epsilon^2/2 - 2\epsilon(\alpha_2 + \alpha_3 - \beta_4) + 2(\alpha_3^2 - \beta_4^2) = -4\nu_3 \epsilon_1 \epsilon_2 - 2\epsilon_1 m_2 -$ $- 2\epsilon_2 m_2 + 2m_2^2 - \tau_1 \epsilon_2 +$ $+ 4\tau_1 m_2 - \tau_1 \epsilon_1 + 2\tau_2$	(2.77)

• Уровень [1, 1, 1]

Конформный блок = Функция Некрасова		
$a_1^6 a_2^4 a_3^2$	$2 = 2$	(2.78)
$a_1^6 a_2^4 a_3^0$	$8\tau_2 - 4\epsilon\tau_1 = 2\epsilon^2 - 8(\alpha_3 - \beta_4)(\epsilon - \alpha_3 - \beta_4)$	(2.79)
$a_1^6 a_2^2 a_3^2$	$4\epsilon^2 + 2\epsilon_1 \epsilon_2 + = 8\epsilon_1 \epsilon_2 + 16\nu_3 \epsilon_1 \epsilon_2 - 16\tau_1 m_2 +$ $+ 16(\alpha_3 - \beta_4)(\epsilon - \alpha_3 - \beta_4) + 8\tau_1 \epsilon - 16\tau_2$	(2.80)
$a_1^4 a_2^4 a_3^4$	$32 = 32$	(2.81)
<i>etc.</i>		

2.3. АГТ-соотношение для конформных блоков на торе. Коррелятор одного внешнего поля на двумерном торе описывается диаграммой из одной тройной вершины и одной петли, соответствующей пропагатору (рис. 10).

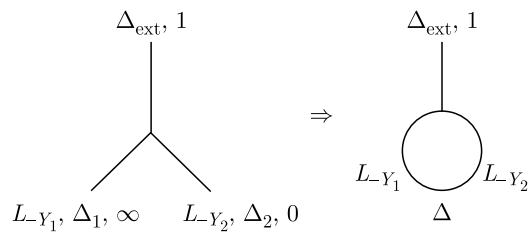


Рис. 10. Диаграмма для случая одного внешнего поля на торе

Таким образом, конформный блок в этом случае представляется формулой

$$\mathcal{B}(q) = \sum_n q^n \mathcal{B}^{(n)} = \sum_{Y_1, Y_2} q^{|Y_1|} \langle L_{-Y_1} V_1 | V_{\text{ext}}(1) L_{-Y_2} V_2(0) \rangle Q_{\Delta}^{-1}(Y_1, Y_2).$$

Помимо q конформный блок в данном случае зависит от размерностей двух полей Δ и Δ_{ext} и от центрального заряда c .

Согласно гипотезе АГТ данный конформный блок должен быть сопоставлен следующей функции Некрасова:

$$Z_{\text{inst}} = \sum_Y q^{|Y|} Z_{\text{adj}}(\vec{a}, \vec{Y}, m) Z_{\text{vector}}(\vec{a}, \vec{Y}). \quad (2.82)$$

Исходя из равенства первых порядков разложения по q $\mathcal{B}^{(1)} = Z^{(1)}$

$$\begin{aligned} \mathcal{B}^{(1)} &= \frac{\Delta_{\text{ext}}^2}{2\Delta} - \frac{\Delta_{\text{ext}}}{2\Delta} + 1, \\ Z^{(1)} &= \frac{(\epsilon_1 - m)(\epsilon_2 - m)}{\epsilon_1 \epsilon_2 (\epsilon^2 - 4a^2)} (-8a^2 + 2\epsilon^2 - 2\epsilon m + 2m^2), \end{aligned} \quad (2.83)$$

можно получить следующее соотношение между параметрами конформной и суперсимметричной теорий:

$$\Delta_{\text{ext}} = \frac{m(\epsilon - m)}{\epsilon_1 \epsilon_2}, \quad \nu = 1 - \frac{2m(\epsilon - m)}{\epsilon_1 \epsilon_2}. \quad (2.84)$$

Используя данное соотношение, можно проверить гипотезу АГТ в данном случае путем сравнения вторых порядков разложения для конформного блока и функции Некрасова.

Предел больших масс. АГТ-соотношение для асимптотически свободной калибровочной теории может быть получено путем устремления масс полей суперсимметричной теории к бесконечности. В рассматриваемом случае при этом сохраняется постоянным произведение $qm^4 = \Lambda^4$. Исходя из соотношения между параметрами теории (2.84), предел больших масс также соответствует пределу большой Δ_{ext} .

Таким образом, в данном пределе выражения для конформного блока переходят в

$$\mathcal{B}^{(1)} \underset{m \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\Delta_{\text{ext}}^2}{2\Delta} = \Delta_{\text{ext}}^2 Q_{\Delta}^{-1}([1], [1]), \quad \mathcal{B}^{(2)} \underset{m \rightarrow \infty}{\sim} \Delta_{\text{ext}}^4 Q_{\Delta}^{-1}([1^2], [1^2]). \quad (2.85)$$

Подставив в эти формулы выражение для $\Delta_{\text{ext}}^2 \sim -\Lambda^4/q$, можно предложить следующее их обобщение на произвольный порядок разложения по q :

$$q^n \mathcal{B}^{(n)} \sim \Lambda^{4n} Q_{\Delta}^{-1}([1^n], [1^n]), \quad (2.86)$$

что дает следующее выражение для конформного блока:

$$\lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ qm^4 = \Lambda^4 = \text{const}}} \mathcal{B}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \Lambda^{4n} Q_{\Delta}^{-1}([1^n], [1^n]). \quad (2.87)$$

Докажем правильность формулы (2.86). В пределе больших масс и, соответственно, большой Δ_{ext} важен лидирующий член по Δ_{ext} . $\mathcal{B}^{(n)}$ дается формулой

$$\mathcal{B}^{(n)} = \sum_{|Y_i|=|Y_j|=n} \langle L_{-Y_i} V_1 | V_2(1) L_{-Y_j} V_3(0) \rangle Q_{\Delta}^{-1}(Y_i, Y_j). \quad (2.88)$$

Можно заметить, что Q зависит только от Δ , поэтому вся зависимость от Δ_{ext} содержится в γ . Докажем теорему о том, что наибольшая степень Δ_{ext} в

$$\langle L_{-Y_i} V_1 | V_2(1) L_{-Y_j} V_3(0) \rangle \quad (2.89)$$

равна полному числу операторов Вирасоро в Y_i и Y_j . Если эта теорема верна, то наибольшая степень Δ_{ext} содержится в члене $Y_i = Y_j = [1^n]$. Также докажем, что коэффициент при этом члене равен единице. Таким образом, ведущий член в $\mathcal{B}^{(n)}$ при больших Δ_{ext} действительно равен $\Delta_{\text{ext}}^{2n} Q_{\Delta}^{-1}([1^n], [1^n])$.

Используя формулу (1.49) и подставив в нее $n = 0$, можно получить, что

$$\langle V_1 | L_{-1} V_2(1) V_3(0) \rangle = \tilde{\Delta}_{\text{ext}} \langle V_1 | V_2(1) V_3(0) \rangle \quad (2.90)$$

(здесь и далее $\tilde{\Delta}_{\text{ext}} = \Delta_{\text{ext}} +$ произвольная функция от Δ , в данном рассмотрении важна только наибольшая степень Δ_{ext} , поэтому далее будет использоваться $\tilde{\Delta}_{\text{ext}}$ вместо Δ_{ext}).

Используя метод математической индукции, докажем теорему. Базой индукции выберем уровень 0 — если нет операторов Вирасоро, то γ не зависит от Δ_{ext} потому, что она равна единице. Проанализируем поведение слагаемых в правой части формулы (1.49). Первое слагаемое равняется нулю, потому что в рассматриваемом случае V_2 — это примарное поле. Исходя из уравнения (2.90), можно сложить второе и третье слагаемые, уменьшив количество операторов Вирасоро при поле V_1 на 1 и получив множитель $n\tilde{\Delta}_{\text{ext}}$. С помощью коммутационных соотношений операторов Вирасоро в последнем слагаемом $L_n L_{-k} V_3 = L_{-k} L_n V_3 + (n+k)L_{n-k} V_3 + \delta_{n,k} \frac{cn(n^2-1)}{12}$. Поэтому, если V_3 — примарное поле, каковым оно является в рассматриваемом случае, то $L_n L_{-Y} V_3$ содержит столько же операторов Вирасоро, сколько и $L_{-Y} V_3$ с коэффициентом, не зависящим от Δ_{ext} , и, соответственно, дает меньший порядок по Δ_{ext} , чем другие слагаемые. Таким образом, если $Y_i = \{n_1, n_2, \dots, n_N\}$, то рассматриваемый коррелятор пропорционален $\prod_{i=1}^N n_i \tilde{\Delta}_{\text{ext}}$, что и доказывает данный ранее ответ. Аналогичное рассуждение можно провести и для Y_j .

Этот результат интересен еще и потому, что полученный в конформной теории поля ответ совпадает с аналогичным пределом для случая коррелятора четырех полей на сфере, полученным ранее в работах [70, 71]. Эти два предела должны совпадать согласно свойствам суперсимметричных теорий, но данное свойство далеко не очевидно в конформной теории. Таким образом, данный результат является в том числе косвенной проверкой гипотезы АГТ.

3. ТЕОРИЯ СВОБОДНЫХ ПОЛЕЙ И ИНТЕГРАЛЫ СЕЛЬБЕРГА

В данном разделе изучается возможность построения конформного блока в этой теории и проблемы, связанные с наличием в ней «закона сохранения». Оказывается, что для того, чтобы построить конформный блок с произвольными размерностями полей, необходимо вводить дополнительные множители. После введения этих множителей конформный блок представляется с помощью нетривиальных интегралов, называемых интегралами Сельберга. Подобные конструкции встречаются при изучении матричных моделей.

В п. 1.1 обсуждалась конкретная модель конформной теории — теория свободных полей. Ее преимущества заключаются в том, что любая интересующая величина может быть напрямую вычислена с помощью теоремы Вика. Однако проблема состоит в том, что в отличие от общих выражений, рассмотренных в разд. 1, в свободной теории накладываются существенные ограничения на размерности полей. Это связано с наличием закона сохранения $\sum \alpha = 0$.

Для того, чтобы несколько расширить множество изучаемых корреляторов, вместо стандартной формулы для получения структурных констант

$$\begin{aligned} \circ L_{-Y_1} V_{\Delta_1}(0) \circ \circ L_{-Y_2} V_{\Delta_2}(q) \circ &= \sum_{\Delta} q^{\Delta - \Delta_1 - \Delta_2 - |Y_1| - |Y_2|} S_{\Delta_1 \Delta_2}^{\Delta} \times \\ &\times \sum_Y q^{|Y|} C_{\Delta_1, Y_1; \Delta_2, Y_2}^{\Delta, Y} \circ L_{-Y} V_{\Delta}(0) \circ \end{aligned} \quad (3.1)$$

представляется возможным использовать следующую ее модификацию:

$$\begin{aligned} \circ L_{-Y_1} e^{\alpha_1 \phi(0)} \circ \circ L_{-Y_2} e^{\alpha_2 \phi(q)} \circ &\left(\int_0^q \circ e^{b\phi(z)} \circ dz \right)^N = \\ &= S_{\alpha_1 \alpha_2}^{\alpha_1 + \alpha_2 + bN} \sum_Y q^{|Y|} C_{\alpha_1, Y_1; \alpha_2, Y_2}^{\alpha_1 + \alpha_2 + bN, Y} \circ L_{-Y} e^{(\alpha_1 + \alpha_2 + bN)\phi(0)} \circ, \end{aligned} \quad (3.2)$$

где b удовлетворяет условию $Q = b - 1/b$. Таким образом, размерность добавленных полей нулевая и потому не изменяет конформных свойств. Идея

добавления полей такого вида в конформный блок была высказана в работе Доценко и Фатеева [17]. Представленный здесь выбор контуров интегрирования был предложен в работах [74, 75]. В данном обзоре приведена проверка того, что для диаграмм Юнга размером $|Y| \leq 3$ полученные таким образом константы связи приводят к таким же ответам, как и расчеты, основанные на общих конформных свойствах (см. разд. 1).

С помощью предложенного способа возможно изменить закон сохранения $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + bN$. Обобщив полученные данным способом ответы на произвольное, не обязательно целое, N , можно получить произвольную связь между размерностями полей.

Рассмотрим подробнее устройство таких деформированных структурных констант:

$$\begin{aligned}
& \circ e^{\alpha_1 \phi(0)} \circ \circ e^{\alpha_2 \phi(q)} \circ \prod_{i=1}^N \circ e^{b\phi(z_i)} \circ = \\
& = q^{2\alpha_1 \alpha_2} \prod_{i < j}^N (z_i - z_j)^{2b^2} \prod_{i=1}^N z_i^{2b\alpha_1} (q - z_i)^{2b\alpha_2} \times \\
& \times \circ \exp \left[\alpha_1 \phi(0) + \alpha_2 \phi(q) + b \sum_i \phi(z_i) \right] \circ = \\
& = q^{2\alpha_1 \alpha_2} \prod_{i < j}^N (z_i - z_j)^{2b^2} \prod_{i=1}^N z_i^{2b\alpha_1} (q - z_i)^{2b\alpha_2} \circ \left(1 + \frac{\left(\alpha_2 q + b \sum_{i=1}^N z_i \right) \partial \phi(0) +}{\right. \\
& + \frac{\left(\alpha_2 q + b \sum_{i=1}^N z_i \right)^2 \frac{(\partial \phi(0))^2}{2!} + \left(\alpha_2 q^2 + b \sum_{i=1}^N z_i^2 \right) \frac{\partial^2 \phi(0)}{2!} +}{2!} + \\
& + \frac{\left(\alpha_2 q + b \sum_{i=1}^N z_i \right)^3 \frac{(\partial \phi(0))^3}{3!} +}{3!} + \\
& + \frac{3 \left(\alpha_2 q + b \sum_{i=1}^N z_i \right) \left(\alpha_2 q^2 + b \sum_{i=1}^N z_i^2 \right) \frac{\partial \phi(0) \partial^2 \phi(0)}{3!} +}{3!} + \\
& \left. + \frac{\left(\alpha_2 q^3 + b \sum_{i=1}^N z_i^3 \right) \frac{\partial^3 \phi(0)}{3!} + \dots}{3!} \right) e^{(\alpha_1 + \alpha_2 + bN)\phi(0)} \circ = \\
& = q^{2\alpha_1 \alpha_2} \prod_{i < j}^N (z_i - z_j)^{2b^2} \prod_{i=1}^N z_i^{2b\alpha_1} (q - z_i)^{2b\alpha_2} \circ \left(1 + \frac{\alpha_2 q + b \sum_{i=1}^N z_i}{\alpha_1 + \alpha_2 + bN} L_{-1} + \right.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

$$+ \frac{(4(\alpha_1 + \alpha_2 + bN) + 2Q) \left(\alpha_2 q + b \sum_{i=1}^N z_i \right)^2 - \left(\alpha_2 q^2 + b \sum_{i=1}^N z_i^2 \right)}{2(\alpha_1 + \alpha_2 + bN)(4(\alpha_1 + \alpha_2 + bN)^2 + 2Q(\alpha_1 + \alpha_2 + bN) - 1)} L_{-1}^2 + \quad (3.4)$$

$$+ 2 \frac{(\alpha_1 + \alpha_2 + bN) \left(\alpha_2 q^2 + b \sum_{i=1}^N z_i^2 \right) - \left(\alpha_2 q + b \sum_{i=1}^N z_i \right)^2}{4(\alpha_1 + \alpha_2 + bN)^2 + 2Q(\alpha_1 + \alpha_2 + bN) - 1} L_{-2} +$$

$$+ \frac{AL_{-1}^3 + 2(\alpha_1 + \alpha_2 + bN)BL_{-1}L_{-2} + 2(\alpha_1 + \alpha_2 + bN)CL_{-3}}{6(\alpha_1 + \alpha_2 + bN)(4(\alpha_1 + \alpha_2 + bN)^2 + 2Q(\alpha_1 + \alpha_2 + bN) - 1)((\alpha_1 + \alpha_2 + bN)^2 + Q(\alpha_1 + \alpha_2 + bN) - 1)} +$$

$$+ \dots \Big) e^{(\alpha_1 + \alpha_2 + bN)\phi(0)} \circ, \quad (3.5)$$

где

$$A = \left(\alpha_2 q^3 + b \sum_{i=1}^N z_i^3 \right) - (\alpha_1 + \alpha_2 + bN + Q) \left(\alpha_2 q + b \sum_{i=1}^N z_i \right) \times$$

$$\times \left(\alpha_2 q^2 + b \sum_{i=1}^N z_i^2 \right) + \left(4(\alpha_1 + \alpha_2 + bN)^2 + 6Q(\alpha_1 + \alpha_2 + bN) + \right.$$

$$\left. + 2Q^2(\alpha_1 + \alpha_2 + bN) - 2 \right) \left(\alpha_2 q + b \sum_{i=1}^N z_i \right)^3, \quad (3.6)$$

$$B = -4(\alpha_1 + \alpha_2 + bN)^2 \left(\alpha_2 q^3 + b \sum_{i=1}^N z_i^3 \right) +$$

$$+ 4(\alpha_1 + \alpha_2 + bN)^2 ((\alpha_1 + \alpha_2 + bN) + Q) \left(\alpha_2 q + b \sum_{i=1}^N z_i \right) \left(\alpha_2 q^2 + b \sum_{i=1}^N z_i^2 \right) +$$

$$+ 4 \left(1 - 3(\alpha_1 + \alpha_2 + bN)^2 - 3Q(\alpha_1 + \alpha_2 + bN) \right) \left(\alpha_2 q + b \sum_{i=1}^N z_i \right)^3, \quad (3.7)$$

$$C = 2(4(\alpha_1 + \alpha_2 + bN)^2 + 2Q(\alpha_1 + \alpha_2 + bN) - 1) \left((\alpha_1 + \alpha_2 + bN)^2 \times \right.$$

$$\times \left(\alpha_2 q^3 + b \sum_{i=1}^N z_i^3 \right) - (\alpha_1 + \alpha_2 + bN) \left(\alpha_2 q + b \sum_{i=1}^N z_i \right) \left(\alpha_2 q^2 + b \sum_{i=1}^N z_i^2 \right) +$$

$$\left. + 2 \left(\alpha_2 q + b \sum_{i=1}^N z_i \right)^3 \right). \quad (3.8)$$

Одной, двумя и тремя линиями подчеркнуты вклады в первый, второй и третий порядок разложения конформного блока соответственно. В общем виде это выражение можно представить как

$$\begin{aligned} & \circ e^{\alpha_1 \phi(0)} \circ \circ e^{\alpha_2 \phi(q)} \circ \prod_{i=1}^N \circ e^{b\phi(z_i)} \circ = \\ & = \left\{ q^{2\alpha_1 \alpha_2} \prod_{i < j}^N (z_i - z_j)^{2b^2} \prod_{i=1}^N z_i^{2b\alpha_1} (q - z_i)^{2b\alpha_2} \right\} \times \\ & \times \circ \exp \left[\alpha_1 \phi(0) + \alpha_2 \phi(q) + b \sum_i \phi(z_i) \right] \circ \circ \exp \left[\alpha_1 \phi(0) + \alpha_2 \phi(q) + b \sum_i \phi(z_i) \right] \circ = \\ & = \sum_{Y, Y'} q^{|Y| - |Y'|} H_{Y'Y} z^{Y'} \circ L_{-Y} e^{(\alpha_1 + \alpha_2 + Nb)\phi(0)} \circ, \quad (3.9) \end{aligned}$$

где используются обозначения $z^Y = \prod_i z_i^{k_i}$, если $Y = \{k_1 \geq k_2 \geq \dots\}$, а $H_{Y'Y}$ — это некоторый набор не зависящих от z коэффициентов, примеры которых приведены в разложении выше. Таким образом, так как по всем переменным z производится интегрирование, структурные константы выражаются через интегралы следующего вида:

$$I_Y = \prod_{i=1}^N \int_0^q dz_i \left\{ z^Y \prod_{i < j}^N (z_i - z_j)^{2b^2} \prod_{i=1}^N z_i^{2b\alpha_1} (q - z_i)^{2b\alpha_2} \right\}. \quad (3.10)$$

Эти интегралы являются обобщением известных в математике интегралов Сельберга (в классических интегралах Сельберга $Y = \{1, 1, \dots\}$ [76–79]). Соответственно, структурные константы устроены следующим образом:

$$C_{\alpha_1; \alpha_2}^{a, Y} = \sum_{|Y'| \leq |Y|} H_{Y'Y} I_{Y'} \Big|_{q=1}. \quad (3.11)$$

3.1. $\tilde{C}_{\alpha_1 \alpha_2}^{\alpha_1 + \alpha_2 + bN}$ на первом уровне. Для построения ответов на первом уровне, т. е. ответов, соответствующих первой строке в операторном разложении (3.3), необходимы интегралы Сельберга, описанные в работах [76–79]

(см. также п. 3.5):

$$\begin{aligned}
 & q^{2\alpha_1\alpha_2} \prod_{i=1}^N \int_0^q dz_i z_i^{2b\alpha_1} (q - z_i)^{2b\alpha_2} \prod_{i<j}^N (z_i - z_j)^{2b^2} = \\
 & = q^{N+b^2N(N+1)} q^{2(\alpha_1+Nb)(\alpha_2+Nb)} \prod_{i=1}^N \int_0^1 dz_i z_i^{2b\alpha_1} (1 - z_i)^{2b\alpha_2} \prod_{i<j}^N (z_i - z_j)^{2b^2} \stackrel{(3.32)}{=} \\
 & = q^{N+b^2N(N+1)} q^{2(\alpha_1+Nb)(\alpha_2+Nb)} \times \\
 & \quad \times \prod_{j=0}^{N-1} \frac{\Gamma(1 + 2b\alpha_1 + jb^2)\Gamma(1 + 2b\alpha_2 + jb^2)\Gamma(1 + (j + 1)b^2)}{\Gamma(2 + 2b\alpha_1 + 2b\alpha_2 + (j + N - 1)b^2)\Gamma(1 + b^2)} \quad (3.12)
 \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
 & q^{2\alpha_1\alpha_2} \prod_{i=1}^N \int_0^q dz_i z_i^{2b\alpha_1} (q - z_i)^{2b\alpha_2} \prod_{i<j}^N (z_i - z_j)^{2b^2} \left(q\alpha_2 + b \sum_{i=1}^N z_i \right) = \\
 & = q^{(N+1)(1+b^2N)} q^{2(\alpha_1+Nb)(\alpha_2+Nb)} \prod_{i=1}^N \int_0^1 dz_i z_i^{2b\alpha_1} (1 - z_i)^{2b\alpha_2} \times \\
 & \quad \times \prod_{i<j}^N (z_i - z_j)^{2b^2} \left(\alpha_2 + b \sum_{i=1}^N z_i \right) \stackrel{(3.32)}{=} \stackrel{(3.33)}{=} \\
 & = q^{(N+1)(1+b^2N)} q^{2(\alpha_1+Nb)(\alpha_2+Nb)} \times \\
 & \quad \times \prod_{j=0}^{N-1} \frac{\Gamma(1 + 2b\alpha_1 + jb^2)\Gamma(1 + 2b\alpha_2 + jb^2)\Gamma(1 + (j + 1)b^2)}{\Gamma(2 + 2b\alpha_1 + 2b\alpha_2 + (N - 1 + j)b^2)\Gamma(1 + b^2)} \times \\
 & \quad \times \left(\alpha_2 + Nb \frac{1 + 2b\alpha_1 + (N - 1)b^2}{2 + 2b\alpha_1 + 2b\alpha_2 + 2(N - 1)b^2} \right). \quad (3.13)
 \end{aligned}$$

С помощью этих формул можно получить выражения для структурных констант. Рассмотрим сначала более простой случай $N = 1$, а потом его обобщение на случай произвольного N .

При $N = 1$ эти интегралы — бета-функции Эйлера:

$$\begin{aligned}
 \langle 1 \rangle & = \int_0^1 dz z^{2b\alpha_1} (1 - z)^{2b\alpha_2} = \frac{\Gamma(1 + 2b\alpha_1)\Gamma(1 + 2b\alpha_2)}{\Gamma(2 + 2b\alpha_1 + 2b\alpha_2)}, \\
 \langle \alpha_2 + bz \rangle & = \int_0^1 dz z^{2b\alpha_1} (1 - z)^{2b\alpha_2} (\alpha_2 + bz) = \\
 & = \frac{\Gamma(1 + 2b\alpha_1)\Gamma(1 + 2b\alpha_2)}{\Gamma(2 + 2b\alpha_1 + 2b\alpha_2)} \left(\alpha_2 + b \frac{1 + 2b\alpha_1}{2 + 2b\alpha_1 + 2b\alpha_2} \right). \quad (3.14)
 \end{aligned}$$

Согласно (3.2) и (3.3), первая из этих формул задает значение

$$\tilde{S}_{\alpha_1\alpha_2}^{\alpha_1+\alpha_2+b} \stackrel{(3.14)}{=} \frac{\Gamma(1+2b\alpha_1)\Gamma(1+2b\alpha_2)}{\Gamma(2+2b\alpha_1+2b\alpha_2)}, \quad (3.15)$$

а вторая пропорциональна произведению $\tilde{S}_{\alpha_1\alpha_2}^{\alpha_1+\alpha_2+b} \tilde{C}_{\alpha_1\alpha_2}^{\alpha_1+\alpha_2+b, L-1}$. Таким образом, «деформированная» структурная константа $\tilde{C}_{\alpha_1\alpha_2}^{\alpha_1+\alpha_2+b, L-1}$ задается отношением двух интегралов:

$$\begin{aligned} \tilde{C}_{\alpha_1\alpha_2}^{\alpha_1+\alpha_2+b, L-1} &= \frac{\langle \alpha_2 + bz \rangle}{\langle 1 \rangle} \frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2 + b} \stackrel{(3.14)}{=} \\ &= \left(\alpha_2 + b \frac{1+2b\alpha_1}{2+2b\alpha_1+2b\alpha_2} \right) \frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2 + b}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Вычисления, опирающиеся на общие конформные свойства, дают в данном случае следующий ответ:

$$\begin{aligned} C_{\alpha_1\alpha_2}^{\alpha_1+\alpha_2+b, L-1} &= \frac{\Delta_2 + \Delta - \Delta_1}{2\Delta} \stackrel{(1.23)}{=} \\ &= \frac{\alpha_2(\alpha_2 - Q) + (\alpha_1 + \alpha_2 + b)(\alpha_1 + \alpha_2 + b - Q) - \alpha_1(\alpha_1 - Q)}{2(\alpha_1 + \alpha_2 + b)(\alpha_1 + \alpha_2 + b - Q)} = \\ &= \frac{2\alpha_2(\alpha_1 + \alpha_2) + 2b\alpha_1 + 2\alpha_2/b + 1}{2(\alpha_1 + \alpha_2 + b)(\alpha_1 + \alpha_2 + 1/b)} = \\ &= \left(\alpha_2 + b \frac{1+2b\alpha_1}{2+2b\alpha_1+2b\alpha_2} \right) \frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2 + b} = \\ &\stackrel{(3.14)}{=} \frac{\langle \alpha_2 + bz \rangle}{\langle 1 \rangle} \frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2 + b} \stackrel{(3.16)}{=} \tilde{C}_{\alpha_1\alpha_2}^{\alpha_1+\alpha_2+b, L-1}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Аналогично, для произвольного N :

$$\begin{aligned} C_{\alpha_1\alpha_2}^{\alpha_1+\alpha_2+bN, L-1} &= \frac{\Delta_2 + \Delta - \Delta_1}{2\Delta} = \\ &= \frac{\alpha_2(\alpha_2 - Q) + (\alpha_1 + \alpha_2 + bN)(\alpha_1 + \alpha_2 + bN - Q) - \alpha_1(\alpha_1 - Q)}{2(\alpha_1 + \alpha_2 + bN)(\alpha_1 + \alpha_2 + bN - Q)} = \\ &= \left(\alpha_2 + bN \frac{1+2b\alpha_1 + (N-1)b^2}{2+2b\alpha_1+2b\alpha_2+2(N-1)b^2} \right) \frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2 + bN} = \\ &= \frac{\langle \alpha_2 + b \sum_i z_i \rangle}{\langle 1 \rangle} \frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2 + bN} = \tilde{C}_{\alpha_1\alpha_2}^{\alpha_1+\alpha_2+bN, L-1} \end{aligned} \quad (3.18)$$

и

$$\begin{aligned} \tilde{S}_{\alpha_1\alpha_2}^{\alpha_1+\alpha_2+bN} &\stackrel{(3.12)}{=} \\ &= \prod_{j=0}^{N-1} \frac{\Gamma(1+2b\alpha_1+jb^2)\Gamma(1+2b\alpha_2+jb^2)}{\Gamma(2+2b\alpha_1+2b\alpha_2+(N-1+j)b^2)} \prod_{j=1}^N \frac{\Gamma(1+jb^2)}{\Gamma(1+b^2)}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Полученные ответы для структурных констант \tilde{C} могут быть аналитически продолжены на произвольные (не обязательно целые) значения N и, таким образом, на произвольные размерности $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + bN$. Аналитическое продолжение ответа для \tilde{S} несколько сложнее, также коэффициенты S специфичны для данной теории и, вообще говоря, не всегда разлагаются в произведение голоморфной и антиголоморфной части. По этой причине выражения, с которыми имеет смысл сравнивать полученные ответы для \tilde{S} , не ясны.

3.2. $\tilde{C}_{\alpha_1\alpha_2}^{\alpha_1+\alpha_2+bN}$ на втором уровне. На втором уровне не достаточно классических интегралов Сельберга (3.32) и (3.33), также нужны и обобщенные интегралы (3.35), описанные в п. 3.5. Два интеграла, входящие в (3.4), равны

$$\begin{aligned} &q^{2\alpha_1\alpha_2} \prod_{i=1}^N \int_0^q dz_i z_i^{2b\alpha_1} (q-z_i)^{2b\alpha_2} \prod_{i<j}^N (z_i-z_j)^{2b^2} \left(\alpha_2 q^2 + b \sum_{i=1}^N z_i^2 \right) = \\ &= q^{(N+1)(1+b^2N)+1} q^{2(\alpha_1+Nb)(\alpha_2+Nb)} \prod_{i=1}^N \int_0^1 dz_i z_i^{2b\alpha_1} (1-z_i)^{2b\alpha_2} \times \\ &\times \prod_{i<j}^N (z_i-z_j)^{2b^2} \left(\alpha_2 + b \sum_{i=1}^N z_i^2 \right) \stackrel{(3.32) \text{ и } (3.35)}{=} \\ &= q^{(N+1)(1+b^2N)+1} q^{2(\alpha_1+Nb)(\alpha_2+Nb)} \times \\ &\times \prod_{j=0}^{N-1} \frac{\Gamma(1+2b\alpha_1+jb^2)\Gamma(1+2b\alpha_2+jb^2)\Gamma(1+(j+1)b^2)}{\Gamma(2+2b\alpha_1+2b\alpha_2+(N-1+j)b^2)\Gamma(1+b^2)} \times \\ &\times \left[\begin{aligned} &\alpha_2 + Nb \times \\ &\times \frac{(4\alpha_1^2 b^2 + 4\alpha_1\alpha_2 b^2 + 6\alpha_1 b^3 N - 8\alpha_1 b^3 + 4b^3 \alpha_2 N - 4b^3 \alpha_2 + 8\alpha_1 b +}{2(2\alpha_1 b + 2\alpha_2 b + 2b^2 N - 3b^2 + 2)(2\alpha_1 b + 2\alpha_2 b + 2b^2 N - 2b^2 + 3)(\alpha_1 b + \alpha_2 b + b^2 N - b^2 + 1)} \\ &\rightarrow \frac{+4\alpha_2 b + 4 + 3b^4 N^2 - 7b^4 N + 4b^4 + 7b^2 N - 9b^2}{2(2\alpha_1 b + 2\alpha_2 b + 2b^2 N - 3b^2 + 2)(2\alpha_1 b + 2\alpha_2 b + 2b^2 N - 2b^2 + 3)(\alpha_1 b + \alpha_2 b + b^2 N - b^2 + 1)} \end{aligned} \right] \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
 & q^{2\alpha_1\alpha_2} \prod_{i=1}^N \int_0^q dz_i z_i^{-2b\alpha_1} (q - z_i)^{-2b\alpha_2} \prod_{i < j}^N (z_i - z_j)^{-2b^2} \left(\alpha_2 q + b \sum_{i=1}^N z_i \right)^2 = \\
 & = q^{(N+1)(1+b^2N)+1} q^{2(\alpha_1+Nb)(\alpha_2+Nb)} \prod_{i=1}^N \int_0^1 dz_i z_i^{2b\alpha_1} (1 - z_i)^{2b\alpha_2} \times \\
 & \times \prod_{i < j}^N (z_i - z_j)^{2b^2} \left(\alpha_2 + b \sum_{i=1}^N z_i \right)^2 \stackrel{(3.32)}{=} \stackrel{(3.35)}{=} \\
 & = q^{(N+1)(1+b^2N)+1} q^{2(\alpha_1+Nb)(\alpha_2+Nb)} \times \\
 & \times \prod_{j=0}^{N-1} \frac{\Gamma(1 + 2b\alpha_1 + jb^2)\Gamma(1 + 2b\alpha_2 + jb^2)\Gamma(1 + (j+1)b^2)}{\Gamma(2 + 2b\alpha_1 + 2b\alpha_2 + (N-1+j)b^2)\Gamma(1 + b^2)} \times \\
 & \left(\begin{aligned}
 & \times \alpha_2^2 + 2N\alpha_2 b \frac{1+2b\alpha_1+(N-1)b^2}{2+2b\alpha_1+2b\alpha_2+2(N-1)b^2} + N(N-1)b^2 \times \\
 & \times \frac{(2\alpha_1 b + b^2 N - b^2 + 1)(2\alpha_1 b + b^2 N - 2b^2 + 1)}{2(\alpha_1 b + \alpha_2 b + b^2 N - b^2 + 1)(2\alpha_1 b + 2\alpha_2 b + 2b^2 N - 3b^2 + 2)} + Nb^2 \times \\
 & \times \frac{(4\alpha_1^2 b^2 + 4\alpha_1 \alpha_2 b^2 + 6\alpha_1 b^3 N - 8\alpha_1 b^3 + 4b^3 \alpha_2 N - 4b^3 \alpha_2 +}{2(2\alpha_1 b + 2\alpha_2 b + 2b^2 N - 3b^2 + 2)(2\alpha_1 b + 2\alpha_2 b + 2b^2 N - 2b^2 + 3)(\alpha_1 b + \alpha_2 b + b^2 N - b^2 + 1)} \\
 & \rightarrow \frac{+8\alpha_1 b + 4\alpha_2 b + 4 + 3b^4 N^2 - 7b^4 N + 4b^4 + 7b^2 N - 9b^2)(2\alpha_1 b + b^2 N - b^2 + 1)}{2(2\alpha_1 b + 2\alpha_2 b + 2b^2 N - 3b^2 + 2)(2\alpha_1 b + 2\alpha_2 b + 2b^2 N - 2b^2 + 3)(\alpha_1 b + \alpha_2 b + b^2 N - b^2 + 1)} \end{aligned} \right).
 \end{aligned}$$

3.3. Обобщение на высшие уровни. Конкретные формулы на уровнях выше второго слишком громоздки для того, чтобы приводить их здесь. Однако в любом частном случае уравнения (3.2) могут быть легко проверены с помощью относительно простых компьютерных вычислений при условии, что известен следующий набор объектов.

Матрица $\mathcal{L}_{Y Y'}$ описывает действие операторов Вирасоро на примарные поля свободной теории:

$$L_{-Y} e^{\alpha\phi} = \sum_{|Y'|=|Y|} \mathcal{L}_{Y Y'}(\alpha) \circ J^{Y'} e^{\alpha\phi} \circ, \tag{3.20}$$

где $J^Y = \partial^{n_1} \phi \partial^{n_2} \phi \dots$

Вектор \mathcal{E}_Y описывает разложение

$$\exp \left[\alpha_1 \phi(0) + \alpha_2 \phi(q) + b \sum_i \phi(z_i) \right] = \sum_Y \mathcal{E}_Y(q, \vec{z}) J^Y(0) e^{(\alpha_1 + \alpha_2 + bN)\phi(0)}. \tag{3.21}$$

До третьего уровня включительно элементы этого вектора приведены в явной форме в формулах (3.3)–(3.5).

Если Y_1 и Y_2 в (3.2) — это нетривиальные диаграммы, то вместо \mathcal{E}_Y необходим более сложный объект $\mathcal{E}_Y^{Y_1 Y_2}$, описывающий разложение

$$\begin{aligned} \circ J^{Y_1} e^{\alpha_1 \phi(0)} \circ \circ J^{Y_2} e^{\alpha_2 \phi(q)} \circ \circ e^{b \sum_i \phi(z_i)} \circ = \\ = \sum_Y \mathcal{E}_Y^{Y_1 Y_2}(q, \vec{z}) \circ J^Y(0) e^{(\alpha_1 + \alpha_2 + bN)\phi(0)} \circ. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Векторы \mathcal{E}_Y на самом деле являются функциями от переменных $\{z_i\}$, т. е. описываются следующим образом:

$$\mathcal{E}_Y = \sum_{Y'} \hat{\mathcal{E}}_{Y Y'} z^{Y'}. \quad (3.23)$$

При этом в данном случае размеры диаграмм могут быть и разными, должно только выполняться условие $|Y'| \leq |Y|$.

В результате интегрирования по переменным z формула (3.23) переходит в

$$\langle \mathcal{E}_Y \rangle = \sum_{Y'} \hat{\mathcal{E}}_{Y Y'} I^Y, \quad (3.24)$$

где $I^Y = \langle z^Y \rangle$ — это обобщенные интегралы Сельберга, описанные в п. 3.5.

Явная проверка соотношения

$$\tilde{C}_{Y_1 Y_2}^Y = C_{Y_1 Y_2}^Y \quad (3.25)$$

на первых двух уровнях была проделана выше, в п. 3.1 и 3.2. Так как в данном обзоре приведены все формулы и для третьего уровня, то возможно также проверить, что это соотношение выполняется и на этом уровне.

3.4. Переход от операторного разложения к конформному блоку. Выражение (3.2) можно использовать для вычисления не только модифицированных структурных констант, но и конформных блоков в целом. Если обозначить операторное разложение в левой части (3.2) как $V_1(0) *_{N} V_2(q)$, то конформный блок соответствует комбинации таких произведений. Например,

$$\langle ((V_1(x_1) *_{N_{12}} V_2(x_2)) *_{N_{(12)3}} V_3(x_3)) *_{N_{((12)3)4}} V_4(x_4) * \dots \rangle \quad (3.26)$$

в случае пятиточечного блока, изображенного на рис. 11, или

$$\langle ((V_1(x_1) *_{N_{12}} V_2(x_2)) *_{N_{(12)(34)}} (V_3(x_3) *_{N_{34}} V_4(x_4))) *_{N_{((12)(34))5}} V_5(x_5) * \dots \rangle \quad (3.27)$$

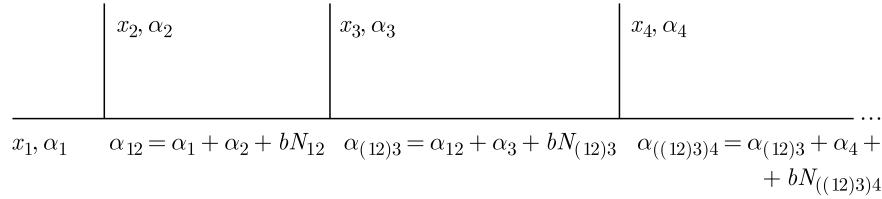


Рис. 11. Конформный блок типа гребенки, рассмотренный, в частности, в п. 2.2 и [11]. Переменные x здесь удовлетворяют условию $0 = x_1 \ll x_2 \ll x_3 \ll x_4 \ll \dots$. Указаны параметры α , конформные размерности соответствующих полей при этом равны $\Delta = \alpha(\alpha - b + 1/b)$. Промежуточные размерности определяются в том числе и переменным N , и только после аналитического продолжения на произвольные значения N они могут принимать произвольные значения

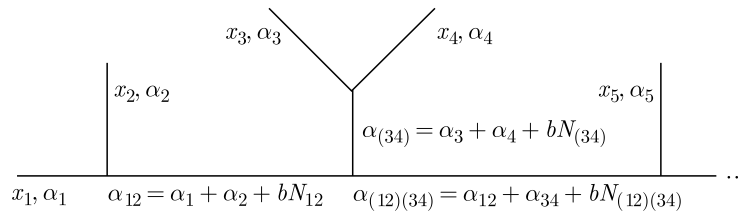


Рис. 12. Конформный блок типа звезды, для которого на данный момент не определено АГТ-соотношение (неизвестен соответствующий набор функций Некрасова). Тем не менее возможно написать соответствующее такому конформному блоку представление Доценко–Фатеева, см. (3.27)

в шеститочечном случае, изображенном на рис. 12. Для получения полного выражения, соответствующего произвольным размерностям, выражения, полученные из (3.26) и (3.27), нужно аналитически продолжить на произвольные значения всех N .

Среднее значение в формулах (3.26) и (3.27) определено согласно свойствам теории свободных полей

$$\langle L_{-Y} e^{\alpha\phi(x)} \rangle \sim \delta_{Y,0} \delta_{\alpha,Q}. \tag{3.28}$$

Отметим, что произведение $*_N$ определено в (3.2) асимметричным образом: в результате получается оператор в точке 0, т. е. в той точке, где находилось первое из умножаемых полей. По этой причине произведение $*_N$ не

является ассоциативным:

$$\begin{aligned} (V_1(x_1) *_{N} V_2(x_2)) *_{M} V_3(x_3) &\equiv \\ &\equiv V_1(x_1)V_2(x_2)V_3(x_3) \left(\int_{x_1}^{x_2} \circ e^{b\phi} \circ \right)^N \left(\int_{x_1}^{x_3} \circ e^{b\phi} \circ \right)^M, \end{aligned} \quad (3.29)$$

тогда как

$$\begin{aligned} V_1(x_1) *_{N} (V_2(x_2) *_{M} V_3(x_3)) &\equiv \\ &\equiv V_1(x_1)V_2(x_2)V_3(x_3) \left(\int_{x_1}^{x_2} \circ e^{b\phi} \circ \right)^N \left(\int_{x_2}^{x_3} \circ e^{b\phi} \circ \right)^M. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Отличие состоит в контурах интегрирования в последнем множителе. Таким образом, существенна расстановка скобок в выражениях (3.26) и (3.27). На практике вычисления в конформной теории определяются, как было описано в п. 2.2.6, упорядочением по порядку малости переменных x : $0 = x_1 \ll x_2 \ll x_3 \ll x_4 \ll \dots$ в (3.26) и $0 = x_1 \ll x_2 \ll x_3 \ll x_5, x_4 - x_3 \ll x_3$ в (3.27), и, таким образом, диаграммы таких двух типов соответствуют различным областям значений переменных, в которых вычисляется конформный блок.

3.5. Интегралы Сельберга и их обобщение. Интегралы Сельберга, определенные как

$$I_Y = \prod_{i=1}^N \int_0^q dz_i \left\{ z^Y \prod_{i < j}^N (z_i - z_j)^{2\beta} \prod_{i=1}^N z_i^a (q - z_i)^c \right\}, \quad (3.31)$$

где $z^Y = z_1^{n_1} z_2^{n_2} \dots$, $Y = \{n_1 \geq n_2 \geq \dots\}$, — это прямое обобщение бета-функции Эйлера, представимой также произведением гамма-функций. Интегралы Сельберга естественным образом нумеруются диаграммами Юнга Y , но хорошо изучены только в случае диаграмм, состоящих из одного столбца $[1^n]$. В случае более сложных диаграмм интегралы содержат дополнительные полиномиальные множители, которые не разлагаются в произведение линейных элементов. Однако для проверок, приведенных в данном обзоре в пп. 3.2 и 3.3, необходимы ответы и для интегралов такого типа.

В [76–79] было получено, что

$$I[0] = \prod_{j=1}^N \frac{\Gamma(\beta j + 1)}{\Gamma(\beta + 1)} \prod_{j=0}^{N-1} \frac{\Gamma(a + \beta j + 1)\Gamma(c + \beta j + 1)}{\Gamma(a + c + (N - 1 + j)\beta + 2)}, \quad (3.32)$$

$$I[1] = \frac{a + (N - 1)\beta + 1}{a + c + (2N - 2)\beta + 2} I[0] \quad (3.33)$$

и, в более общем случае,

$$I[1^n] = I[0] \prod_{j=1}^n \frac{a + (N - j)\beta + 1}{a + c + (2N - j - 1)\beta + 2}. \quad (3.34)$$

Если диаграмма Юнга Y состоит из $k > 1$ столбцов, то результатов [76–79] не достаточно, и $I[Y]$ содержит дополнительные множители, полиномы степени $2k - 2$. В частности, с помощью обобщения результатов для конкретных значений N можно получить:

$$\begin{aligned} I[2] &= \frac{a^2 + ac + (3N - 4)a\beta + 2(N - 1)\beta c + 4a + 2c + 4 + (N - 1)(3N - 4)\beta^2 + (7N - 9)\beta}{(a + c + (2N - 3)\beta + 2)(a + c + (2N - 2)\beta + 3)} I[1] = \\ &= \frac{(a + (N - 1)\beta + 1)(a^2 + ac + (3N - 4)a\beta + 2(N - 1)\beta c + (N - 1)(3N - 4)\beta^2 + 4a + 2c + (7N - 9)\beta + 4)}{(a + c + (2N - 3)\beta + 2)(a + c + (2N - 2)\beta + 2)(a + c + (2N - 2)\beta + 3)} \\ &\quad \times I[0], \quad (3.35) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I[21] &= \\ &= \frac{(a + (N - 2)\beta + 1)(a + (N - 1)\beta + 1) I[0]}{(a + c + (2N - 4)\beta + 2)(a + c + (2N - 3)\beta + 2)(a + c + (2N - 2)\beta + 2)(a + c + (2N - 2)\beta + 3)} \times \\ &\quad \times (a^2 + ac + (3N - 5)a\beta + (2N - 3)\beta c + \\ &\quad + 3(N - 1)(N - 2)\beta^2 + 4a + 2c + (7N - 12)\beta + 4) \quad (3.36) \end{aligned}$$

и, в общем случае,

$$\begin{aligned} I[21^n] &= I[0] \times \\ &\times \left(\frac{a^2 + ac + (3N - 4)(N - 1)\beta^2 + (3N - 4)a\beta + 2(N - 1)c\beta + 4a + 2c + (7N - 9)\beta + 4}{a + c + (2N - 2)\beta + 3} - n\beta \right) \times \\ &\quad \times \frac{\prod_{j=1}^{n+1} (a + (N - j)\beta + 1)}{\prod_{j=1}^{n+2} (a + c + (2N - j - 1)\beta + 2)}. \quad (3.37) \end{aligned}$$

В случае трех столбцов

$$\begin{aligned} I[3] &= [(a + (N - 1)\beta + 1) I[0] P[3]] / [(a + c + (2N - 4)\beta + 2) \times \\ &\quad \times (a + c + (2N - 3)\beta + 2)(a + c + (2N - 2)\beta + 2)(a + c + (2N - 2)\beta + 3) \times \\ &\quad \times (a + c + (2N - 2)\beta + 4)], \quad (3.38) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 P[3] = & (a+3)(a+2)(a+c-\beta+2)(a+c-2\beta+2)+ \\
 & + (N-1)\beta((a+c+2)(6a^2+5ac+32a+11c+40+4\beta^2)+ \\
 & + 2\beta(a+2c+2)(2a+c+5))+ \\
 & + (N-1)(N-2)\beta^2((16a^2+21ac+5c^2+80a+52c+98)+ \\
 & + 2\beta(20a+16c+51)+36\beta^2)+ \\
 & + 2(N-1)(N-2)(N-3)\beta^3(10a+24\beta+7c+26)+ \\
 & + 10(N-1)(N-2)(N-3)(N-4)\beta^4. \quad (3.39)
 \end{aligned}$$

Возможно получить выражения и без неприводимых полиномов для $I[Y]$ с помощью рассмотрения линейных комбинаций таких интегралов. Так,

$$\begin{aligned}
 I[2] + \frac{(N-1)\beta}{1+\beta} I[11] = \\
 = \frac{1+N\beta}{1+\beta} \frac{(a+(N-1)\beta+1)(a+(N-1)\beta+2)}{(a+c+(2N-2)\beta+2)(a+c+(2N-2)\beta+3)} I[0]. \quad (3.40)
 \end{aligned}$$

Отметим, что таким образом можно получить только разложения на линейные множители. Множитель $(a+c+(2N-3)\beta+2)$, который входил в знаменатели как $I[2]$, так и $I[11]$, сокращается при рассмотрении такой комбинации.

Интегралы Сельберга $I[Y]$ удовлетворяют ряду соотношений. Из-за того, что $\prod_i^N (1-z_i) = 1 - \sum_{i=1}^N z_i + \sum_{i<j}^N z_i z_j - \dots$, выполняется следующее условие:

$$\begin{aligned}
 I_{c+1}[0] = I_c[0] - N I_c[1] + \frac{N(N-1)}{2} I_c[11] - \dots = \\
 = \sum_{n=0}^N \frac{(-)^n N!}{n!(N-n)!} I_c[1^n], \quad (3.41)
 \end{aligned}$$

что верно для интегралов из (3.34). Такое соотношение включает в себя только диаграммы Юнга из одного столбца.

Аналогичным образом из разложения

$$\prod_i^N (1-z_i)^2 = 1 - 2 \sum_{i=1}^N z_i + \sum_{i=1}^N z_i^2 + 2 \sum_{i<j}^N z_i z_j - \dots$$

следует, что

$$I_{c+2}[0] = I_c[0] - 2N I_c[1] + N I_c[2] + N(N-1) I_c[11] - \dots \quad (3.42)$$

Это соотношение включает в себя только диаграммы Юнга из двух столбцов (диаграммы из одной строки — это частный случай при $k_2 = 0$).

По аналогии с приведенными примерами, из рассмотрения разложения для $\prod_i^N (1 - z_i)^m$ можно построить разложение интеграла $I_{c+m}[0]$ в сумму интегралов с диаграммами Юнга с m' -столбцами, где $m' \leq m$. Более того, аналогичные соотношения можно написать и для $I_{c+m}[Y]$ с произвольной диаграммой Юнга Y .

4. ТЕОРИЯ ЧЕРНА–САЙМОНСА

В данном разделе описаны основные свойства теории Черна–Саймонса и ее связь с теорией узлов. Также приведен метод для вычисления вильсоновских средних. Приведен известный ответ для полиномов торических узлов.

Теория Черна–Саймонса — это трехмерная топологическая калибровочная теория поля с векторным полем \mathcal{A} . Она описывается топологически инвариантным, т. е. не зависящим от метрики, лагранжианом:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{CS}} &= \frac{k}{4\pi} \left(\mathcal{A} \wedge d\mathcal{A} + \frac{2}{3} \mathcal{A} \wedge \mathcal{A} \wedge \mathcal{A} \right) = \\ &= \frac{k}{4\pi} \varepsilon^{ijk} \left(\delta_{ab} \mathcal{A}_i^a \partial_j \mathcal{A}_k^b + \frac{2}{3} \lambda_{abc} \mathcal{A}_i^a \mathcal{A}_j^b \mathcal{A}_k^c \right). \end{aligned} \quad (4.1)$$

Данная теория в настоящее время представляет большой интерес, так как это простейшая теория, обладающая нетривиальными топологическими свойствами.

Из того, что теория Черна–Саймонса калибровочно инвариантна, следует возможность выбора конкретной калибровки. Наиболее распространены два выбора калибровки: временная $\mathcal{A}_0^a = 0$ и голоморфная $\mathcal{A}_z^a = \mathcal{A}_1^a + i\mathcal{A}_2^a = 0$. В обоих случаях теория вырождается в теорию без взаимодействия, поэтому изучение корреляторов вида $\langle \mathcal{A}_1(x_1) \mathcal{A}_2(x_2) \dots \rangle$ не представляется интересной задачей. Однако в трехмерной топологической теории существует нетривиальный коррелятор другого типа — среднее значение петли Вильсона:

$$\langle W_{\mathcal{K}} \rangle = \frac{1}{\mathcal{Z}} \int_{\mathcal{M}} [D\mathcal{A}] \text{Tr} P \exp \left(\oint_{\mathcal{K}} \mathcal{A} dx \right) \exp \left(\frac{i}{\hbar} \int_{\mathcal{M}} \mathcal{L}[A] \right). \quad (4.2)$$

Здесь \mathcal{Z} — статистическая сумма теории:

$$\mathcal{Z} = \int_{\mathcal{M}} [DA] \exp \left(\frac{i}{\hbar} \int_{\mathcal{M}} \mathcal{L}[A] \right), \quad (4.3)$$

а \mathcal{K} — контур, вдоль которого считается петля Вильсона. Из-за того, что исследуемая теория трехмерна, даже при тривиальной топологии пространства, например, $\mathcal{M} = S^3$, возможны контуры \mathcal{K} , которые топологически различны. Таким образом, основной объект исследования в трехмерной теории Черна–Саймонса — это средние значения петель Вильсона для различных контуров \mathcal{K} .

В 1989 г. Э. Виттен предположил [59], что средние значения петель Вильсона трехмерной теории Черна–Саймонса с полем \mathcal{A} , преобразующимся по калибровочной группе $SU(2)$, равны полиномам Джонса из математической теории узлов [60]. Для произвольной группы $SU(N)$ данное предположение естественным образом обобщается на равенство соответствующих вильсоновских средних и полиномов Хосте–Окнеану–Милле–Фрейда–Ликориша–Йеттера (ХОМФЛИ) [62, 63]. Предположение о связи трехмерной теории Черна–Саймонса и математической теории узлов и, в частности, вильсоновских средних и полиномов узлов логично в свете топологичности теории Черна–Саймонса и соответствия вильсоновских средних контуру в трехмерном пространстве — узлу.

В математической теории узлов полиномы ХОМФЛИ $H^{\mathcal{K}}(A, q)$ определяются при помощи так называемых скейн-соотношений. Эти соотношения устанавливают связь между полиномами трех узлов/зацеплений*, плоские диаграммы которых связаны следующим образом. На каждой из нитей выбирается некоторое направление, после чего выбирается некоторое пересечение в плоской диаграмме узла. Три сравниваемых узла/зацепления при этом соответствуют замене данного пересечения на следующие фрагменты:

$$\mathcal{K} \longleftrightarrow \begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array}, \quad \mathcal{K}' \longleftrightarrow \begin{array}{c} \nwarrow \\ \swarrow \end{array}, \quad \mathcal{K}'' \longleftrightarrow \left. \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowleft \end{array} \right) \left(. \quad (4.4)$$

Скейн-соотношения в этом случае гласят:

$$AH^{\mathcal{K}}(A, q) - A^{-1}H^{\mathcal{K}'}(A, q) = (q - q^{-1})H^{\mathcal{K}''}(A, q). \quad (4.5)$$

Вместе с заданием полинома ХОМФЛИ для простейшего узла — «неузла», $H^{\circ}(A, q) = 1$, скейн-соотношения позволяют однозначно определить полином ХОМФЛИ любого узла или зацепления. Полином ХОМФЛИ — это

*Зацеплением называют совокупность нескольких (двух и более) контуров, которые могут быть сцеплены друг с другом.

лоранов полином по переменным A и q . Согласно [62, 63] построенные таким образом полиномы ХОМФЛИ действительно являются топологическими инвариантами. Этот факт основывается на том, что две двумерные диаграммы представляют собой один и тот же трехмерный узел или зацепление, если, и только если, одна может быть преобразована в другую с помощью плавных деформаций и трех движений Редемейстера:

$$\begin{array}{l}
 \text{I:} \quad \text{---} \longleftrightarrow \text{---} \text{---} \\
 \text{II:} \quad \text{---} \longleftrightarrow \text{---} \text{---} \\
 \text{III:} \quad \text{---} \longleftrightarrow \text{---} \text{---}
 \end{array} \tag{4.6}$$

Зафиксируем временную калибровку в теории Черна–Саймонса $\mathcal{A}_0^a = 0$. В этом случае лагранжиан теории превращается в

$$\tilde{\mathcal{L}}_{\text{CS}} = \frac{k}{4\pi} \delta_{ab} (\mathcal{A}_1^a \partial_0 \mathcal{A}_2^b - \mathcal{A}_2^a \partial_0 \mathcal{A}_1^b). \tag{4.7}$$

Тем самым, в данной теории нет взаимодействия, и пропагатор тривиален:

$$D(x, y) \sim \delta(x^1 - y^1) \delta(x^2 - y^2) \theta(x^0 - y^0). \tag{4.8}$$

Из-за выбранной калибровки не важно, как контур петли Вильсона зависит от x^0 . Тем самым контур (узел) можно заменить на его двумерную проекцию на плоскость $x^0 = 0$. Тогда ответ для вильсоновского среднего дается произведением пропагаторов, находящихся в точках пересечений двумерной проекции. Исходя из топологической инвариантности ответа для среднего значения петли Вильсона (которая обусловлена топологической инвариантностью самой теории) произведение пропагаторов должно удовлетворять движениям Редемейстера (4.6). Третье движение Редемейстера представляет собой уравнение Янга–Бакстера на операторы, сопоставленные проекторам:

$$\mathcal{R}_1 \mathcal{R}_2 \mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_2 \mathcal{R}_1 \mathcal{R}_2. \tag{4.9}$$

Решениями данного уравнения являются \mathcal{R} -матрицы [80]. Таким образом, петлю Вильсона можно представить как произведение некоторого числа \mathcal{R} -матриц, соответствующих пересечениям двумерной диаграммы узла. Теории

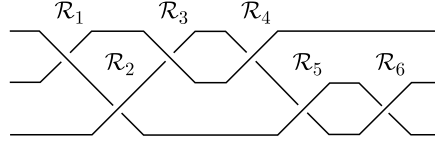


Рис. 13. Пример косы из трех нитей. Ответ для полинома узла можно получить с использованием выражения $\mathcal{R}_1\mathcal{R}_2\mathcal{R}_3\mathcal{R}_4\mathcal{R}_5\mathcal{R}_6$

Черна–Саймонса с калибровочной группой $SU_q(N)$ и константой связи k при этом соответствуют полиномы ХОМФЛИ от следующих A и q :

$$q = \exp\left(\frac{k + N}{4\pi}\right), \quad A = q^N. \quad (4.10)$$

Проще всего описать данный метод построения полиномов узлов при помощи представления узла в форме косы (рис. 13). Из третьего движения Редемейстера следует, что ответ представляется произведением \mathcal{R} -матриц: $\mathcal{R}_1\mathcal{R}_2\mathcal{R}_3\mathcal{R}_4\mathcal{R}_5\mathcal{R}_6$. Но третьего движения Редемейстера недостаточно для того, чтобы ответ был топологическим инвариантом. Для этого необходимо, чтобы выполнялись все три движения. Из второго движения следует, что матрица, соответствующая обратному пересечению, — это обратная матрица: $\mathcal{R}_3 = \mathcal{R}_4^{-1}$. Наиболее сложным является первое движение Редемейстера. Оно соответствует изменению числа нитей в косе. Из необходимости выполнения первого движения Редемейстера можно получить [62, 63], что окончательный ответ дается разложением по характерам группы $SU_q(N)$. При рассмотрении вильсоновского среднего косы с m нитями от связности, преобразующейся по представлению T калибровочной группы $SU_q(N)$, в разложение входят представления с диаграммами Юнга размером $m|T|$, где $|T|$ — размер диаграммы T :

$$H_T^K = \sum_{Q \vdash n|T|} S_Q^*(A, q) \text{Tr}_Q \left(\prod_i \mathcal{R}_i \right) = \sum_{Q \vdash n|T|} S_Q^*(A, q) h_R^T(q), \quad (4.11)$$

где Tr_Q — это след по представлению Q ; S_Q^* — это характер представления Q группы $SU_q(N)$, взятый в специальной точке, называемой топологическим локусом, а h_R^T — коэффициенты разложения по характерам.

Характер S_Q удобнее всего представлять как функцию от временных переменных, т. е. следов степеней группового элемента в фундаментальном представлении:

$$S_Q = S_Q\{t\}, \quad t_k = \sum x^k. \quad (4.12)$$

При подстановке (4.12) в (4.11) для топологической инвариантности при первом движении Редемейстера (изменении числа нитей в косе) необходимо под-

ставлять специальные значения t_k , соответствующие топологическому локусу:

$$S_Q^*(A, q) = S_Q \left\{ t_k = \frac{A^k - A^{-k}}{q^k - q^{-k}} \right\}. \quad (4.13)$$

Характеры на топологическом локусе, несмотря на меньшую общность, обладают относительно простым алгоритмом их вычисления. Этот алгоритм описывается так называемой формулой крюков [81]:

$$S_Q^*(A, q) = \prod_{(i,j) \in Q} \frac{Aq^{i-j} - A^{-1}q^{j-i}}{q^{h_{i,j}} - q^{-h_{i,j}}} \quad \begin{array}{c} i \quad k \\ \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & & & & \\ \hline & \mathbf{x} & & & \\ \hline & & & & \\ \hline & & & & \\ \hline & & & & \\ \hline \end{array} \\ j \end{array} \quad (4.14)$$

$h_{i,j} = k + l + 1.$

То есть характер в данном случае можно найти с помощью произведения по всем клеткам диаграммы Юнга. Каждый множитель при этом строится, исходя из положения клетки в диаграмме Юнга. $h_{i,j}$ равно сумме расстояний до конца столбца и конца строки.

4.1. ХОМФЛИ в фундаментальном представлении. Опираясь на теорию представлений, можно найти, как устроены коэффициенты разложения по характерам для различного числа нитей в косе [82]. Если рассматривать узлы, представимые косой с $m = 2$ нитями, которые характеризуются одним параметром n — числом пересечений в косе (если рассматриваемая коса состоит из обратных пересечений, то $n < 0$), то ответ представляется в виде

$$H_{[1]}^{(n)} = q^n S_2^*(A) + \left(-\frac{1}{q}\right)^n S_{11}^*(A) = q^n S_2^*(A) + \left(q \rightarrow -\frac{1}{q}\right). \quad (4.15)$$

Выражения для узлов, представимые косой с тремя нитями, имеют несколько более сложную форму. В такой косе возможны пересечения двух типов (см. рис. 13) — соответствующие пересечению двух верхних линий ($\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_3$ и \mathcal{R}_4 на рисунке) и двух нижних линий ($\mathcal{R}_2, \mathcal{R}_5$ и \mathcal{R}_6 на рисунке). Если параметризовать эту косу набором чисел $\{a_1, b_1, a_2, b_2, \dots\}$, где a_i и b_i обозначают число верхних и нижних пересечений (на рис. 13 изображена коса, параметризуемая в этом случае последовательностью $\{1, -1, 0, -2\}$), то ответ для полинома ХОМФЛИ дается формулой

$$H_{[1]}^{(a_1, b_1, a_2, b_2, \dots)} = q^{\sum_i (a_i + b_i)} S_3^*(A) + \left(-\frac{1}{q}\right)^{\sum_i (a_i + b_i)} S_{111}^*(A) + \left(\text{Tr}_{2 \times 2} \widehat{\mathcal{R}}_2^{a_1} U_2 \widehat{\mathcal{R}}_2^{b_1} U_2^\dagger \widehat{\mathcal{R}}_2^{a_2} U_2 \widehat{\mathcal{R}}_2^{b_2} U_2^\dagger \dots\right) S_{21}^*(A). \quad (4.16)$$

Выражения для косы с $m = 4$ нитями могут быть построены аналогичным образом:

$$\begin{aligned} \mathcal{B} &= (\mathcal{R} \otimes I \otimes I)^{a_1} (I \otimes \mathcal{R} \otimes I)^{b_1} (\mathcal{R} \otimes I \otimes ssI)^{c_1} \times \\ &\quad \times (\mathcal{R} \otimes I \otimes I)^{a_2} (I \otimes \mathcal{R} \otimes I)^{b_2} (\mathcal{R} \otimes I \otimes I)^{c_2} \dots : \\ H_{[1]}^{(a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, \dots)} &= q^{\sum_i (a_i + b_i + c_i)} S_4^*(A) + \left(-\frac{1}{q}\right)^{\sum_i (a_i + b_i + c_i)} S_{1111}^*(A) + \\ &\quad + \left(\text{Tr}_{2 \times 2} \widehat{\mathcal{R}}_2^{a_1} U_2 \widehat{\mathcal{R}}_2^{b_1} U_2^\dagger \widehat{\mathcal{R}}_2^{c_1 + a_2} U_2 \widehat{\mathcal{R}}_2^{b_2} U_2^\dagger \widehat{\mathcal{R}}_2^{c_2 + a_3} \dots \right) S_{22}^*(A) + \\ &\quad + \left\{ \left(\text{Tr}_{3 \times 3} \widehat{\mathcal{R}}_3^{a_1} U_3 \widehat{\mathcal{R}}_3^{b_1} V_3 U_3 \widehat{\mathcal{R}}_3^{c_1} U_3^\dagger V_3^\dagger U_3^\dagger \widehat{\mathcal{R}}_3^{a_2} U_3 \widehat{\mathcal{R}}_3^{b_2} V_3 U_3 \widehat{\mathcal{R}}_3^{c_2} U_3^\dagger V_3^\dagger U_3^\dagger \dots \right) S_{31}^*(A) + \right. \\ &\quad \left. + (q \rightarrow -1/q) \right\}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Матрицы, входящие в эти формулы, могут быть получены с помощью теории представлений. \mathcal{R} -матрицы представляют собой решения уравнения Янга–Бакстера (4.9), а матрицы U и V — это матрицы смешивания, связанные с коэффициентами Рака:

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{R}}_2 &= \begin{pmatrix} q & \\ & -1/q \end{pmatrix}, \quad \widehat{\mathcal{R}}_3 = \begin{pmatrix} q & & \\ & q & \\ & & -1/q \end{pmatrix}, \\ U_2 &= \begin{pmatrix} c_2 & s_2 \\ -s_2 & c_2 \end{pmatrix}, \quad U_3 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & c_2 & s_2 \\ & -s_2 & c_2 \end{pmatrix}, \quad V_3 = \begin{pmatrix} c_3 & s_3 \\ -s_3 & c_3 \\ & & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Индексы связаны с размерами матриц, коэффициенты в матрицах смешивания U и V равны:

$$c_k = \frac{1}{[k]_q}, \quad s_k = \sqrt{1 - c_k^2} = \frac{\sqrt{[k-1]_q [k+1]_q}}{[k]_q}, \quad (4.19)$$

где введено обозначение для квантового числа $[k]_q = \frac{q^k - q^{-k}}{q - q^{-1}}$. Эти формулы позволяют получить полиномы ХОМФЛИ в фундаментальном представлении для произвольного узла, описываемого косой с двумя, тремя или четырьмя нитями.

4.2. Полиномы ХОМФЛИ торических узлов. Полиномы ХОМФЛИ в старших (нефундаментальных) представлениях носят название цветных полиномов ХОМФЛИ. Наиболее хорошо изученный класс узлов — это торические узлы. Торическим узлом $T[m, n]$ называется узел, который получается

с помощью намотки нити на тор m и n раз по одному и другому направлению соответственно. В этом случае известен точный вид коэффициентов h_R^Q в общем виде, т. е. для всех торических узлов $[m, n]$ [83–85]:

$$h_R^Q = q^{\frac{n}{m} \varkappa_Q} C_R^Q, \quad (4.20)$$

где C_R^Q можно получить с помощью «процедуры Адамса»:

$$S_R(p^{[m]}) = \sum_Q C_R^Q S_Q(p), \quad p_k^{[m]} = p_{mk}, \quad (4.21)$$

а \varkappa_Q определяется представлением (диаграммой Юнга) $Q = \{Q_1, Q_2, \dots\}$:

$$\varkappa_Q = \frac{1}{2} \sum_i Q_i(Q_i - 2i + 1) = \sum_{(i,j) \in Q} (i - j). \quad (4.22)$$

4.3. Обобщенные ХОМФЛИ и τ -функции. Как было сказано выше, характер представления обычно дается выражением от временных переменных t . По этой причине полином ХОМФЛИ имеет логичное обобщение — обобщенный полином ХОМФЛИ \mathcal{H}_R^K , который получается из выражения (4.11) заменой переменных $t^* \rightarrow t$:

$$\mathcal{H}_T^K = \sum_{Q \vdash n|T|} S_Q\{t\} h_Q^T(q). \quad (4.23)$$

Введем также производящую функцию обобщенных полиномов ХОМФЛИ для данного узла, описывающую ответ для произвольного представления:

$$\mathcal{H}^K\{t|\bar{t}\} = \sum_T \mathcal{H}_T^K\{t\} S_T\{\bar{t}\} = \sum_{T,Q} h_Q^T S_Q\{\bar{t}\} S_T\{t\}. \quad (4.24)$$

Аналогичную функцию можно построить и для зацепления. Основное отличие этого случая от случая узлов состоит в том, что у каждой компоненты зацепления может быть свое представление, поэтому суммирование надо производить по всем возможным представлениям для каждой компоненты:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^K\{t|\bar{t}^{(a)}\} &= \sum_{T_1 T_2 \dots T_l} \mathcal{H}_{T_1 T_2 \dots T_l}^K\{t\} \prod_{a=1}^l S_{T_a}\{\bar{t}^{(a)}\} = \\ &= \sum_{T,Q} h_Q^T S_Q\{t\} \prod_{a=1}^l S_{T_a}\{\bar{t}^{(a)}\}, \end{aligned} \quad (4.25)$$

где l — число компонент зацепления.

4.3.1. τ -функции. τ -функциями КП, которые рассматриваются в данном обзоре, называются решения билинейного уравнения Хироты [86–97]:

$$\oint dz \exp \left[\sum_k (t_k - t'_k) z^{-k} \right] \tau \left(t_k + \frac{z^k}{k} \right) \tau \left(t'_k - \frac{z^k}{k} \right) = 0. \quad (4.26)$$

Как функции от временных переменных, они могут быть представлены разложением по характерам $S_R\{t\}$, так как характеры образуют базис в пространстве функций от временных переменных:

$$\tau\{p|g\} = \sum_Q g_Q S_Q\{p\}. \quad (4.27)$$

Из уравнения Хироты можно получить, что коэффициенты g_Q такого разложения должны удовлетворять бесконечному набору билинейных соотношений Плюккера:

$$\begin{aligned} & \underline{g_{[22]}g_{[0]} - g_{[21]}g_{[1]} + g_{[2]}g_{[11]} = 0,} \\ & g_{[32]}g_{[0]} - g_{[31]}g_{[1]} + g_{[3]}g_{[11]} = 0, \\ & \underline{g_{[221]}g_{[0]} - g_{[211]}g_{[1]} + g_{[2]}g_{[111]} = 0,} \\ & g_{[42]}g_{[0]} - g_{[41]}g_{[1]} + g_{[4]}g_{[11]} = 0, \\ & g_{[33]}g_{[0]} - g_{[31]}g_{[2]} + g_{[3]}g_{[21]} = 0, \\ & g_{[321]}g_{[0]} - g_{[311]}g_{[1]} + g_{[3]}g_{[111]} = 0, \\ & g_{[222]}g_{[0]} - g_{[211]}g_{[11]} + g_{[21]}g_{[111]} = 0, \\ & g_{[2211]}g_{[0]} - g_{[2111]}g_{[1]} + g_{[2]}g_{[1111]} = 0, \\ & \dots \end{aligned} \quad (4.28)$$

4.3.2. Сравнение $\mathcal{H}^{\mathcal{K}}\{t|\bar{t}\}$ и $\tau\{t\}$. Так как обобщенные полиномы ХОМ-ФЛИ и τ -функции являются функциями от временных переменных, то логично провести их сравнение. Условие равенства этих двух величин $\mathcal{H}^{\mathcal{K}}\{t|\bar{t}\} = \tau\{\bar{t}\}$ эквивалентно, согласно уравнениям (4.24) и (4.27), условию

$$g_Q = \sum_R h_R^Q S_R(\bar{t}). \quad (4.29)$$

Торические узлы. Рассмотрим выражения для торических узлов. Функции \varkappa_Q , входящие в выражение (4.20), являются собственными значениями характеров S_Q при действии на них простейшим оператором разрезания-склейки [98, 99]

$$\hat{W}_{[2]} S_Q(t) = \varkappa_Q S_Q(t). \quad (4.30)$$

Этот оператор задается формулой

$$\hat{W}_{[2]} = \frac{1}{2} \sum_{a,b} \left[(a+b)p_a p_b \frac{\partial}{\partial p_{a+b}} + ab p_{a+b} \frac{\partial^2}{\partial p_a \partial p_b} \right], \quad p_n = t_n/n. \quad (4.31)$$

Используя формулу Коши для характеров

$$\sum_R S_R\{t\} S_R\{\bar{t}\} = \exp \sum_k k t_k \bar{t}_k, \quad (4.32)$$

можно получить, что производящая функция обобщенных полиномов ХОМФЛИ для торических узлов описывается формулой

$$\mathcal{H}^{[m,n]}\{t, \bar{t}\} = q^{-\frac{n}{m} \hat{W}(t)} \exp \left(\sum_k m k t_{mk} \bar{t}_k \right). \quad (4.33)$$

Экспонента от t -переменных — это простейшая τ -функция уравнения КП. Из-за того, что оператор разрезания-склейки \hat{W} является элементом группы $GL(\infty)$, его действие сохраняет КП-интегрируемость по переменной t [97, 100–102], т. е. при действии на решение уравнения Хироты получается тоже решение уравнения Хироты. Таким образом, для произвольного торического узла производящая функция $\mathcal{H}^{[m,n]}\{t, \bar{t}\}$ действительно является τ -функцией КП по переменным t (но не по переменным \bar{t}).

Аналогичные рассуждения могут быть проведены и для торических зацеплений. $\mathcal{H}\{t|\bar{t}^{(a)}\}$ также является τ -функцией с переопределенными параметрами $\bar{t}_k \rightarrow \sum_{a=1}^l \bar{t}_k^{(a)}$:

$$\mathcal{H}^{[m,n]}\{t|\bar{t}^{(a)}\} = q^{-\frac{n}{m} \hat{W}(t)} \exp \left[\sum_k m k t_{mk} \left(\sum_{a=1}^l \bar{t}_k^{(a)} \right) \right]. \quad (4.34)$$

Неторические узлы. В случае неторических узлов такая производящая функция, вообще говоря, не является τ -функцией КП. Для того, чтобы проверить этот факт, рассмотрим первое нетривиальное соотношение Плюккера (4.28) для $g_Q = \sum_T h_T^Q S_T(\bar{t})$ и 4-нитевой узел. Так как в данном случае $g_0 = 1$, $g_{[1]} = g_{[2]} = g_{[11]} = g_{[21]} = 0$, то для того, чтобы соотношение (4.28) выполнялось, необходимо, чтобы $g_{[22]} = h_{[1]}^{[22]} = 0$. Это соотношение выполняется для торических узлов, но не всегда выполняется для других узлов. Действительно, для простейших 4-нитевых узлов из таблицы Рольфсена (до восьми пересечений) эти коэффициенты не равны нулю, см. табл. 3 [82].

Таким образом, для всех этих узлов соотношение Плюккера (4.28) не удовлетворяется (торические узлы с четырьмя нитями имеют более восьми пересечений).

Таблица 3. Коэффициенты $h_{[1]}^{[22]}$ для 4-нитевых узлов до восьми пересечений

Узел	$h_{[1]}^{[22]}$
6 ₁	$q^{-1} - q^1$
7 ₂	$-q^7 + q^5 - 2q^3 + 3q^1 - 3q^{-1} + 2q^{-3} - q^{-5} + q^{-7}$
7 ₄	$(q - q^{-1})(q^6 - q^4 + 3q^2 - 1 + 3q^{-2} - q^{-4} + q^{-6})$
7 ₆	$-q^7 + 2q^5 - 3q^3 + 3q^1 - 3q^{-1} + 3q^{-3} - 2q^{-5} + q^{-7}$
7 ₇	$-q^7 + 3q^5 - 4q^3 + 5q^1 - 5q^{-1} + 4q^{-3} - 3q^{-5} + q^{-7}$
8 ₄	$(q - q^{-1})(q^4 - q^2 + 1 - q^{-2} + q^{-4})$
8 ₆	$(q - q^{-1})(q^2 + 1 + q^{-2})(q^2 - 1 + q^{-2})$
8 ₁₁	$-q^3 + q^{-3}$
8 ₁₃	$(q - q^{-1})(q^4 - q^2 + 1 - q^{-2} + q^{-4})$
8 ₁₄	$(q - q^{-1})(q^2 + 1 + q^{-2})(q^2 - 1 + q^{-2})$
8 ₁₅	$(q - q^{-1})(q^6 - 2q^4 + 2q^2 - 3 + 2q^{-2} - 2q^{-4} + q^{-6})$

4.4. Цветные полиномы ХОМФЛИ для узла 4₁. В контексте рассмотрения интегрируемых свойств узлов (см. п. 4.3), а также других свойств цветных полиномов узлов возникает вопрос о вычислении цветных полиномов (т.е. полиномов в нефундаментальных представлениях) различных узлов и зацеплений. К настоящему времени общие ответы известны для очень малого числа узлов, например, для класса торических узлов (см. п. 4.2).

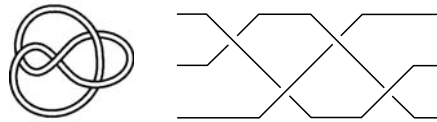


Рис. 14. Узел-восьмерка и его простейшее представление в виде косы

Простейший неторический узел называется узлом-восьмеркой (в таблице узлов он носит название 4₁). Он представляется косой с тремя нитями (см. рис. 14). С помощью методов, описанных в п.4.1, а также их обобщения на случай симметрических представлений [103, 104], можно получить полиномы ХОМФЛИ для простейших нефундаментальных представлений:

$$\frac{H_{[0]}^{4_1}(A|q)}{S_{[0]}^*(A|q)} = 1,$$

$$\frac{H_{[1]}^{4_1}(A|q)}{S_{[1]}^*(A|q)} = A^2 - q^2 + 1 - q^{-2} + A^{-2} = 1 + \{Aq\}\{Aq^{-1}\},$$

$$\begin{aligned} \frac{H_{[2]}^{4_1}(A|q)}{S_{[2]}^*(A|q)} &= q^4 A^4 - (q^6 + q^4 - q^2 + q^{-2}) A^2 + (q^6 - q^4 + 3 - q^{-4} + q^{-6}) - \\ &\quad - (q^2 - q^{-2} + q^{-4} + q^{-6}) A^{-2} + q^{-4} A^{-4} = \\ &= 1 + [2]\{Aq^2\}\{Aq^{-1}\} + \{Aq^3\}\{Aq^2\}\{A\}\{Aq^{-1}\}, \end{aligned} \quad (4.35)$$

$$\begin{aligned} \frac{H_{[3]}^{4_1}(A|q)}{S_{[3]}^*(A|q)} &= 1 + [3]\{Aq^3\}\{Aq^{-1}\} + [3]\{Aq^4\}\{Aq^3\}\{A\}\{Aq^{-1}\} + \\ &\quad + \{Aq^5\}\{Aq^4\}\{Aq^3\}\{Aq\}\{A\}\{Aq^{-1}\}. \end{aligned}$$

Здесь и далее используется обозначение $\{x\} = x - x^{-1}$, а также обозначение для квантовых чисел, использованное в п. 4.3: $[k]_q = \frac{q^k - q^{-k}}{q - q^{-1}}$. Из этих формул можно построить обобщенную формулу для произвольного симметрического представления:

$$H_{[p]}^{4_1}(A|q) = S_{[p]}^*(A|q) \left(1 + \sum_{k=1}^p \frac{[p]_q!}{[k]_q! [p-k]_q!} \prod_{i=0}^{k-1} \{Aq^{p+i}\} \{Aq^{i-1}\} \right). \quad (4.36)$$

Под $[k]_q!$ понимается квантовый факториал, т. е. $[k]_q! = \prod_{i=1}^k [i]_q$.

4.4.1. ХОМФЛИ для произвольного антисимметричного представления. Полиномы ХОМФЛИ и их разложение по характерам обладают Z_2 -симметрией при преобразовании

$$A, q, S_Q^* \longleftrightarrow A, -\frac{1}{q}, S_{Q'}^*, \quad (4.37)$$

где Q' — это транспонированная диаграмма Юнга Q . Существенным для данной симметрии является свойство характеров, состоящее в том, что характеры, как функции от временных переменных (см. (4.12) и (4.13)), удовлетворяют формуле $S_{Q'}\{t_k\} = S_Q\{(-1)^{k-1} t_k\}$. Эта симметрия позволяет преобразовать ответ (4.36) для диаграммы Юнга с одной строкой $Q = [p]$ в ответ для транспонированной диаграммы, т. е. для произвольной диаграммы $Q = [1^p] = \underbrace{[1, 1, \dots, 1]}_{p \text{ элементов}}$:

$$H_{[1^p]}^{4_1}(A|q) = S_{[1^p]}^*(A|q) \left(1 + \sum_{k=1}^p \frac{[p]_q!}{[k]_q! [p-k]_q!} \prod_{j=0}^{k-1} \{Aq^{-p-j}\} \{Aq^{-j+1}\} \right). \quad (4.38)$$

Все дополнительные знаки, появляющиеся при транспонировании диаграммы в характерах S_Q^* , не проявляются в конечном ответе. Соответствующие ха-

рактеры на топологическом локусе равны

$$S_{[1^p]}^*(A|q) = \prod_{j=1}^p \frac{\{Aq^{1-j}\}}{\{q^j\}}. \quad (4.39)$$

Несколько примеров (4.38) приведены ниже:

$$\begin{aligned} \frac{H_{[11]}^{4_1}(A|q)}{S_{[11]}^*(A|q)} &= 1 + [2]\{Aq^{-2}\}\{Aq\} + \{Aq^{-3}\}\{Aq^{-2}\}\{A\}\{Aq\}, \\ \frac{H_{[111]}^{4_1}(A|q)}{S_{[111]}^*(A|q)} &= 1 + [3]\{Aq^{-3}\}\{Aq^1\} + [3]\{Aq^{-4}\}\{Aq^{-3}\}\{A\}\{Aq\} + \\ &+ \{Aq^{-5}\}\{Aq^{-4}\}\{Aq^{-3}\}\{Aq^{-1}\}\{A\}\{Aq\}. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Правые части этих выражений вырождаются в единицу при $A = q^2$ и $A = q^3$ соответственно. $S_{111}^*(A|q)$ также равно нулю при $A = q^2$.

4.4.2. Проверка цветного ХОМФЛИ. Приведем несколько аргументов в пользу (4.36). Во-первых, ответ (4.36) обобщает известные примеры (4.35), полученные ранее в работах [103,105] (для $[p] = [2]$) и [104] (для $[p] = [3], [4]$).

Во-вторых, в пределе $q \rightarrow 1$ это выражение зависит от представления специальным образом. Такой предел полинома ХОМФЛИ носит название специального полинома:

$$\mathfrak{H}_T^{\mathcal{K}}(A) = \lim_{q \rightarrow 1} \frac{H_T^{\mathcal{K}}(A|q)}{S_T^*(A|q)}. \quad (4.41)$$

Известно, что специальный полином для любого представления является просто степенью специального полинома фундаментального представления [106]:

$$\mathfrak{H}_T^{\mathcal{K}}(A) = \left(\mathfrak{H}_{[1]}^{\mathcal{K}}(A) \right)^{|T|}. \quad (4.42)$$

Это свойство выполняется для всех \mathcal{K} и T [107–113]. Отметим, что предел берется при фиксированном значении A , и как полиномы ХОМФЛИ H_T , так и характеры S_T^* в этом пределе имеют сингулярность вида $(q - q^{-1})^{-|T|}$, где $|T|$ — это количество клеток в диаграмме Юнга T . Специальный полином, являющийся их отношением, однако, имеет вполне определенную форму.

В-третьих, правильным образом устроен и предел этого выражения при $A \rightarrow 1$, который носит название полинома Александра [61, 106]:

$$\mathfrak{A}_T^{\mathcal{K}}(q) = \lim_{A \rightarrow 1} \frac{H_T^{\mathcal{K}}(A|q)}{S_T^*(A|q)}. \quad (4.43)$$

Полиномы Александера также имеют весьма простую зависимость от представления T , если оно описывается диаграммой-крюком (диаграммой, все клетки которой находятся в первом столбце или первой строке) [103, 106, 111]:

$$\mathfrak{A}_T^{\mathcal{K}}(q) = \mathfrak{A}_{[1]}^{\mathcal{K}}(q^{|T|}). \quad (4.44)$$

То есть полином Александера в представлении T — это полином в фундаментальном представлении, но от переменной $q^{|T|}$. Полученный ответ удовлетворяет данному условию.

В-четвертых, в пределе $A = q^2$ приведенный ответ воспроизводит известные ответы для полиномов Джонса.

В-пятых, в точке $A = q^N$, $q = \exp\left(\frac{\pi i}{N+p-1}\right)$, он воспроизводит формулу из [114]:

$$\frac{{}^*H_{[p]}^{4_1}}{{}^*S_{[p]}}\left(A = q^N \mid q = \exp\left(\frac{i\pi}{N+p-1}\right)\right) = \left(1 + \sum_{j=1}^p \prod_{i=0}^{j-1} \left(2 \sin \frac{(p-i)\pi}{N+p-1}\right)^2\right). \quad (4.45)$$

В-шестых, выражение (4.38), напрямую связанное преобразованием симметрии с формулой (4.36), равно нулю при $A = q^N$, если $N < p$, и равна полиномам узлов при $N = p$. Это свойство следует из теории представлений. При рассмотрении конкретной группы $SU(N)$ следует положить $A = q^N$. С другой стороны, в группе $SU(N)$ отсутствуют все представления $[1^p]$ при $N < p$, а при $N = p$ представления тривиальны.

В-седьмых, полученный ответ согласуется с гипотезой Оогури–Вафы (см. п. 4.4.3).

Первые два утверждения из этого списка — это не независимые проверки, так как они использовались при выводе формулы (4.36). Однако остальные пять утверждений независимы от вывода формулы.

4.4.3. Проверка гипотезы Оогури–Вафы. Из цветных полиномов ХОМФЛИ можно построить также другой класс полиномов $f_T^{\mathcal{K}}$, называемый полиномами Оогури–Вафы (ОВ) [58, 115–117]. В случае узла-восьмерки полиномы ОВ частично факторизуются и, таким образом, их форма несколько проще, чем у полиномов ХОМФЛИ. Они определяются производящими функциями для всех представлений

$$\log \left(\sum_T \mathcal{H}_T^{\mathcal{K}}\{t_k|q\} S_R\{\bar{t}_k\} \right) = \sum_n \sum_T \frac{1}{n} f_T^{\mathcal{K}}\{t_k^{(n)}|q^n\} S_T\{\bar{t}_k^{(n)}\}, \quad (4.46)$$

где $\mathcal{H}_T^{\mathcal{K}}$ — это обобщенный полином ХОМФЛИ (см. п. 4.3), $\{\bar{t}_k\}$ — это дополнительный набор временных переменных, а $\bar{t}_k^{(n)} \equiv \bar{p}_{nk}$ — это их преобразование Адамса [83]. На топологическом локусе (4.13) это соотношение

вырождается до

$$\log \left(\sum_T H_T^K(A|q) S_T \{ \bar{t}_k \} \right) = \sum_n \sum_T \frac{1}{n} f_T^{K*}(A^n|q^n) S_T \{ \bar{t}_k^{(n)} \}. \quad (4.47)$$

Гипотеза Оогури–Вафы предполагает [58, 115–117], что, как и отношение H_T/S_T^* , отношение $f_T^*/S_{[1]}^*$ — это всегда полином с целыми коэффициентами. Это означает, что f_T^* всегда пропорционален $S_{[1]}^*$ в пределе $q \rightarrow 1$ при фиксированном A (пределе специального полинома). Таким образом, полиномы ОВ в данном пределе менее сингулярны, чем полиномы ХОМФЛИ H_T^* , которые пропорциональны S_T^* .

Простейшие полиномы Оогури–Вафы равны

$$\begin{aligned} f_{[1]} &= \mathcal{H}_{[1]}, \\ f_{[2]} &= \mathcal{H}_{[2]} - \frac{1}{2} \mathcal{H}_{[1]}^2 - \frac{1}{2} \mathcal{H}_{[1]}^{(2)}, \\ f_{[3]} &= \mathcal{H}_{[3]} - \mathcal{H}_{[1]} \mathcal{H}_{[2]} + \frac{1}{3} \mathcal{H}_{[1]}^3 - \frac{1}{3} \mathcal{H}_{[1]}^{(3)}, \\ f_{[4]} &= \mathcal{H}_{[4]} - \mathcal{H}_{[1]} \mathcal{H}_{[3]} - \frac{1}{2} \mathcal{H}_{[2]}^2 + \mathcal{H}_{[1]}^2 \mathcal{H}_{[2]} - \frac{1}{4} \mathcal{H}_{[1]}^4 + \frac{1}{2} \mathcal{H}_{[2]}^{(2)} + \frac{1}{4} \left(\mathcal{H}_{[1]}^{(2)} \right)^2, \end{aligned} \quad (4.48)$$

где $\mathcal{H}_T^{(n)} \{ t_k | q \} \equiv \mathcal{H}_T \{ t_k^{(n)} | q^n \}$ и $H_T^{(n)}(A|q) \equiv H_T(A^n|q^n)$.

Из выражения (4.36) простейшие полиномы Оогури–Вафы для узла-восьмерки равны:

$$\begin{aligned} \frac{f_{[0]}^{4_1^*}(A|q)}{S_{[1]}^*(A|q)} &= 0, \\ \frac{f_{[1]}^{4_1^*}(A|q)}{S_{[1]}^*(A|q)} &= A^2 - (q^2 - 1 + q^{-2}) + A^{-2}, \\ \frac{f_{[2]}^{4_1^*}(A|q)}{S_{[1]}^*(A|q)} &= \{A\} \{A/q\} \{Aq^2\} \{A^2q^2\}, \\ \frac{f_{[3]}^{4_1^*}(A|q)}{S_{[1]}^*(A|q)} &= \{A\} \{A/q\} \{Aq\} \{Aq^2\} \times \\ &\quad \times \left((q^8 + q^4 + q^2)A^4 - (q^6 - q^4 - 1)A^2 - \right. \\ &\quad \left. - (q^2 - 2 + q^{-2}) - (q^{-6} - q^{-4} - 1)A^{-2} + (q^{-8} + q^{-4} + q^{-2})A^{-4} \right), \end{aligned} \quad (4.49)$$

$$\frac{f_{[4]}^{4_1^*}(A|q)}{S_{[1]}^*(A|q)} = \{A\}\{A/q\}\{Aq\}\{Aq^2\} \times$$

$$\begin{aligned} & \times \left((q^{19} + q^{15} + q^{13} + 2q^{11} + q^9 + 2q^7 + q^5 + q^3)A^7 - \right. \\ & - (q^{17} + q^{15} + q^{13} + 2q^{11} + 2q^9 + 2q^7 + q^5)A^5 + \\ & + (q^{13} + q^9 - q^5 - q^3 - 2q^{-1})A^3 + \\ & + (q^7 + q^5 + q^3 + 2q - q^{-5})A + \\ & + (q^{-7} + q^{-5} + q^{-3} + 2q^{-1} - q^5)A^{-1} + \\ & + (q^{-13} + q^{-9} - q^{-5} - q^{-3} - 2q^1)A^{-3} - \\ & - (q^{-17} + q^{-15} + q^{-13} + 2q^{-11} + 2q^{-9} + 2q^{-7} + q^{-5})A^{-5} + \\ & \left. + (q^{-19} + q^{-15} + q^{-13} + 2q^{-11} + q^{-9} + 2q^{-7} + q^{-5} + q^{-3})A^{-7} \right) \\ & \dots \end{aligned}$$

Для этих полиномов гипотеза Оогури–Вафы очевидно выполняется.

В специальном пределе $q \rightarrow 1$ соответствующие специальные полиномы Оогури–Вафы $f_T(A) \equiv \lim_{q \rightarrow 1} \frac{f_T^*(A|q)}{S_{[1]}^*(A|q)}$ равны

$$\begin{aligned} f_{[0]}(A) &= 1, \\ f_{[1]}(A) &= 1 + \{A\}^2, \\ f_{[2]}(A) &= \{A\}^3 \{A^2\}, \\ f_{[3]}(A) &= \{A\}^4 (3A^4 + A^2 + A^{-2} + 3A^{-4}), \\ f_{[4]}(A) &= 2\{A\}^3 \{A^2\} (5A^6 - 10A^4 + 9A^2 - 7 + 9A^{-2} - 10A^{-4} + 5A^{-6}), \\ & \dots \end{aligned} \tag{4.50}$$

Эти полиномы обладают нетривиальной зависимостью от представления и не могут быть выражены через специальные полиномы $\mathfrak{H}_T(A)$: поправки высших порядков по $1 - q$ также дают вклад в $f_{[T]}(A)$.

4.4.4. Цветные суперполиномы узла-восьмерки. Формула (4.36) допускает различные обобщения. Эта формула представляет собой сумму по поддиаграммам диаграммы Юнга T . Ниже будет рассмотрена возможность суперполиномиальной (β -) деформации (4.36).

β -деформация подразумевает, что сдвиги по горизонтальной и вертикальной осям в диаграмме Юнга дают множители q и t^{-1} , а не q и q^{-1} , как в случае полиномов ХОМФЛИ. Универсального правила замены в биномиальных коэффициентах, однако, не известно. β -деформация имела бы простую форму,

если бы сумма по клеткам диаграммы Юнга содержала только *единичные* коэффициенты. Это означает, что для того, чтобы такая деформация была прямолинейной, формулу (4.36) нужно сначала привести к такой форме.

В данном случае такая возможность есть. Так,

$$[p]_q \{Aq^{p+i}\} \{Aa^{i-1}\} = \sum_{i=1}^p \{Aq^{2(p-i)+1}\} \{Aq^{-1}\}, \quad (4.51)$$

т. е. этот вклад может быть переписан как сумма по клеткам диаграммы Юнга с единичными коэффициентами. Эта формула предполагает, что каждой клетке диаграммы Юнга $[p]$ с координатами $(i, 1) \in [p]$ соответствует произведение $Z_i(A) = \{Aq^{2(p-i)+1}\} \{Aq^{-1}\}$. Далее,

$$\begin{aligned} \frac{[p][p-1]}{[2]} \{Aq^{p+i+1}\} \{Aq^{p+i}\} \{A\} \{Aq^{-1}\} &= \\ &= \sum_{1 \leq i < i' \leq p} \{Aq^{2(p-i)+1}\} \{Aq^{-1}\} \{Aq^{2(p-i')+2}\} \{A\} = \sum_{1 \leq i < i' \leq p} Z_i(A) Z_{i'}(Aq), \end{aligned} \quad (4.52)$$

т. е. параметр во втором множителе в $Z_{i'}$ сдвигается на q . В общем виде (4.36) может быть переписана в следующей форме:

$$\begin{aligned} \frac{H_{[p]}^{A_1}(A|q)}{S_{[p]}^*(A|q)} &= \sum_{k=0}^p \frac{[p]_q!}{[k]_q! [p-k]_q!} \prod_{i=1}^k Z_i(A) = \\ &= \sum_{k=0}^p \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq p} Z_{i_1}(A) Z_{i_2}(Aq) Z_{i_3}(Aq^2) \dots Z_{i_k}(Aq^{k-1}). \end{aligned} \quad (4.53)$$

Эта формула обладает простой β -деформацией, для этого достаточно произвести замену $Z_i(A) = \{Aq^{2(p-i)+1}\} \{Aq^{-1}\}$ на $\mathfrak{Z}_i(A) = \{Aq^{2(p-i)+1}\} \{At^{-1}\}$. Полученная формула описывает цветной суперполином узла-восьмерки в произвольном симметрическом представлении $[p]$:

$$\frac{\mathcal{P}_{[p]}^{A_1^*}(A|q, t)}{M_{[p]}^*(A|q, t)} = \sum_{k=0}^p \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq p} \mathfrak{Z}_{i_1}(A) \mathfrak{Z}_{i_2}(Aq) \mathfrak{Z}_{i_3}(Aq^2) \dots \mathfrak{Z}_{i_k}(Aq^{k-1}). \quad (4.54)$$

(Знаменатель в левой части — это значение полинома Макдональда на топологическом локусе. Это обычный выбор для суперполинома неузла, см. [106].) Приведем два аргумента в пользу данного выражения.

Во-первых, при $t = q$ выражение (4.54) воспроизводит ответ для полиномов ХОМФЛИ (4.36).

Во-вторых, после стандартной замены переменных [106, 118]

$$t = \mathbf{q}, \quad q = -\mathbf{qt}, \quad A = \mathbf{a}\sqrt{-\mathbf{t}} \quad (4.55)$$

суперполином (4.54) действительно является полиномом по всем своим переменным $\mathbf{a}^{\pm 1}$, $\mathbf{q}^{\pm 1}$, $\mathbf{t}^{\pm 1}$ с положительными коэффициентами, что является одной из ключевых характеристик суперполинома, так как каждый множитель $\bar{\mathfrak{Z}}_i(Aq^s)$ положителен в новых переменных:

$$\begin{aligned} \bar{\mathfrak{Z}}_i(Aq^s) &= \frac{(1 - A^2q^{4(p-i)+2+2s})(t^2 - A^2q^{2s})}{(A^2tq)q^{2(p-i+s)}} = \\ &= \frac{(1 + \mathbf{a}^2\mathbf{t}(\mathbf{qt})^{4(p-i)+2+2s})(\mathbf{q}^2 + \mathbf{a}^2\mathbf{t}(\mathbf{qt})^{2s})}{\mathbf{a}^2 \cdot (\mathbf{qt})^{2(p-i+s+1)}}. \end{aligned} \quad (4.56)$$

Симметрия (4.37) также допускает естественное обобщение на случай β -деформации (см. также [119, 120]):

$$(q, t) \longrightarrow (-t^{-1}, -q^{-1}) \quad \text{или} \quad (\mathbf{q}, \mathbf{t}) \longrightarrow (1/\mathbf{qt}, \mathbf{t}). \quad (4.57)$$

Это позволяет получить из (4.54) аналогичную формулу для суперполиномов в антисимметричных представлениях:

$$\frac{{}^*\mathcal{P}_{[1^p]}^{4_1}(A|q, t)}{{}^*M_{[1^p]}(A|q, t)} = \sum_{k=0}^p \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq p} \bar{\mathfrak{Z}}_{i_1}(A)\bar{\mathfrak{Z}}_{i_2}(At^{-1})\bar{\mathfrak{Z}}_{i_3}(At^{-2}) \dots \bar{\mathfrak{Z}}_{i_k}(At^{-k+1}), \quad (4.58)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{\mathfrak{Z}}_i(At^{-s}) &= \frac{(1 - A^2t^{-4(p-i)-2-2s})(q^{-2} - A^2t^{-2s})}{(A^2/tq)t^{-2(p-i+s)}} = \\ &= \frac{(1 + \mathbf{a}^2\mathbf{tq}^{-4(p-i)-2-2s})(1 + \mathbf{a}^2\mathbf{t}^3\mathbf{q}^{2(1-s)})}{\mathbf{a}^2 \cdot \mathbf{t}^2\mathbf{q}^{-2(p-i+s)}}. \end{aligned} \quad (4.59)$$

Функция $\bar{\mathfrak{Z}}_i$ также является полиномом с положительными коэффициентами по переменным (4.55). Для иллюстрации приведем несколько простейших примеров суперполиномов узла-восьмерки:

$$\frac{{}^*\mathcal{P}_{[1]}^{4_1}(A|q, t)}{{}^*M_{[1]}(A|q, t)} = 1 + \{Aq\}\{At^{-1}\} = 1 + \mathbf{t}^2\mathbf{a}^2 + \mathbf{q}^{-2}\mathbf{t}^{-1} + \mathbf{q}^2\mathbf{t} + \mathbf{t}^{-2}\mathbf{a}^{-2},$$

$$\begin{aligned} \frac{{}^*\mathcal{P}_{[2]}^{4_1}(A|q, t)}{{}^*M_{[2]}(A|q, t)} &= \\ &= 1 + \{Aq\}\{At^{-1}\} + \{Aq^3\}\{At^{-1}\} + \{Aq^3\}\{At^{-1}\}\{Aq^2\}\{Aqt^{-1}\} = \\ &= \mathbf{a}^4 \mathbf{q}^4 \mathbf{t}^8 + \mathbf{a}^2 (\mathbf{q}^{-2} \mathbf{t} + \mathbf{t}^2 + \mathbf{t}^3 + \mathbf{q}^2 \mathbf{t}^4 + \mathbf{q}^4 \mathbf{t}^5 + \mathbf{q}^6 \mathbf{t}^7) + \mathbf{q}^6 \mathbf{t}^4 + \mathbf{q}^4 \mathbf{t}^3 + \\ &+ \mathbf{q}^2 \mathbf{t}^2 + \mathbf{q}^2 \mathbf{t} + 3 + \mathbf{q}^{-2} \mathbf{t}^{-1} + \mathbf{q}^{-2} \mathbf{t}^{-2} + \mathbf{q}^{-4} \mathbf{t}^{-3} + \mathbf{q}^{-6} \mathbf{t}^{-4} + \mathbf{a}^{-2} (\mathbf{q}^2 \mathbf{t}^{-1} + \\ &\quad + \mathbf{t}^{-2} + \mathbf{t}^{-3} + \mathbf{q}^{-2} \mathbf{t}^{-4} + \mathbf{q}^{-4} \mathbf{t}^{-5} + \mathbf{q}^{-6} \mathbf{t}^{-7}) + \mathbf{a}^{-4} \mathbf{q}^{-4} \mathbf{t}^{-8}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{{}^*\mathcal{P}_{[11]}^{4_1}(A|q, t)}{{}^*M_{[11]}(A|q, t)} &= \\ &= 1 + \{Aq\}\{At^{-1}\} + \{Aq\}\{At^{-3}\} + \{Aq\}\{At^{-3}\}\{At^{-2}\}\{Aqt^{-1}\} = \\ &= \mathbf{a}^4 \mathbf{q}^{-4} \mathbf{t}^4 + \mathbf{a}^2 (\mathbf{q}^2 \mathbf{t}^3 + \mathbf{t}^2 + \mathbf{t}^3 + \mathbf{q}^{-2} \mathbf{t}^2 + \mathbf{q}^{-4} \mathbf{t} + \mathbf{q}^{-6} \mathbf{t}) + \mathbf{q}^{-6} \mathbf{t}^{-2} + \\ &+ \mathbf{q}^{-4} \mathbf{t}^{-1} + \mathbf{q}^{-2} + \mathbf{q}^{-2} \mathbf{t}^{-1} + 3 + \mathbf{q}^2 \mathbf{t} + \mathbf{q}^2 + \mathbf{q}^4 \mathbf{t} + \mathbf{q}^6 \mathbf{t}^2 + \mathbf{a}^{-2} (\mathbf{q}^{-2} \mathbf{t}^{-3} + \\ &\quad + \mathbf{t}^{-2} + \mathbf{t}^{-3} + \mathbf{q}^2 \mathbf{t}^{-2} + \mathbf{q}^4 \mathbf{t}^{-1} + \mathbf{q}^6 \mathbf{t}^{-1}) + \mathbf{a}^{-4} \mathbf{q}^4 \mathbf{t}^{-4}, \quad (4.60) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{{}^*\mathcal{P}_{[3]}^{4_1}(A|q, t)}{{}^*M_{[3]}(A|q, t)} &= \\ &= \mathbf{a}^6 \mathbf{q}^{12} \mathbf{t}^{18} + \mathbf{a}^4 (\mathbf{t}^7 \mathbf{q}^2 + \mathbf{t}^8 \mathbf{q}^4 + \mathbf{t}^9 \mathbf{q}^4 + \mathbf{t}^{10} \mathbf{q}^6 + \mathbf{t}^{11} \mathbf{q}^6 + \mathbf{t}^{12} \mathbf{q}^8 + \\ &\quad + \mathbf{t}^{13} \mathbf{q}^{10} + \mathbf{t}^{15} \mathbf{q}^{12} + \mathbf{t}^{17} \mathbf{q}^{14}) + \mathbf{a}^2 (\mathbf{t}^{-2} \mathbf{q}^{-6} + \mathbf{t}^{-1} \mathbf{q}^{-4} + \mathbf{q}^{-4} + 2\mathbf{t} \mathbf{q}^{-2} + \\ &\quad + \mathbf{t}^2 \mathbf{q}^{-2} + 2\mathbf{t}^2 + 2\mathbf{t}^3 + 3\mathbf{t}^4 \mathbf{q}^2 + \mathbf{t}^5 \mathbf{q}^2 + \mathbf{t}^5 \mathbf{q}^4 + 4\mathbf{t}^6 \mathbf{q}^4 + 2\mathbf{t}^7 \mathbf{q}^6 + 2\mathbf{t}^8 \mathbf{q}^6 + \\ &\quad + 2\mathbf{t}^9 \mathbf{q}^8 + \mathbf{t}^{10} \mathbf{q}^8 + \mathbf{t}^{10} \mathbf{q}^{10} + \mathbf{t}^{11} \mathbf{q}^{10} + \mathbf{t}^{12} \mathbf{q}^{12} + \mathbf{t}^{14} \mathbf{q}^{14}) + \mathbf{t}^{-9} \mathbf{q}^{-12} + \\ &\quad + \mathbf{t}^{-8} \mathbf{q}^{-10} + \mathbf{t}^{-7} \mathbf{q}^{-8} + \mathbf{t}^{-6} \mathbf{q}^{-8} + 3\mathbf{t}^{-5} \mathbf{q}^{-6} + \mathbf{t}^{-4} \mathbf{q}^{-6} + \mathbf{t}^{-4} \mathbf{q}^{-4} + 4\mathbf{t}^{-3} \mathbf{q}^{-4} + \\ &\quad + 3\mathbf{t}^{-2} \mathbf{q}^{-2} + 3\mathbf{t}^{-1} \mathbf{q}^{-2} + \mathbf{t}^{-1} + 5 + \mathbf{t} + 3\mathbf{t} \mathbf{q}^2 + 3\mathbf{t}^2 \mathbf{q}^2 + 4\mathbf{t}^3 \mathbf{q}^4 + \mathbf{t}^4 \mathbf{q}^4 + \mathbf{t}^4 \mathbf{q}^6 + \\ &\quad + 3\mathbf{t}^5 \mathbf{q}^6 + \mathbf{t}^6 \mathbf{q}^8 + \mathbf{t}^7 \mathbf{q}^8 + \mathbf{t}^8 \mathbf{q}^{10} + \mathbf{t}^9 \mathbf{q}^{12} + \mathbf{a}^{-2} (\mathbf{t}^{-14} \mathbf{q}^{-14} + \mathbf{t}^{-12} \mathbf{q}^{-12} + \\ &\quad + \mathbf{t}^{-11} \mathbf{q}^{-10} + \mathbf{t}^{-10} \mathbf{q}^{-10} + \mathbf{t}^{-10} \mathbf{q}^{-8} + 2\mathbf{t}^{-9} \mathbf{q}^{-8} + 2\mathbf{t}^{-8} \mathbf{q}^{-6} + 2\mathbf{t}^{-7} \mathbf{q}^{-6} + 4\mathbf{t}^{-6} \mathbf{q}^{-4} + \\ &\quad + \mathbf{t}^{-5} \mathbf{q}^{-4} + \mathbf{t}^{-5} \mathbf{q}^{-2} + 3\mathbf{t}^{-4} \mathbf{q}^{-2} + 2\mathbf{t}^{-3} + 2\mathbf{t}^{-2} + \mathbf{t}^{-2} \mathbf{q}^2 + 2\mathbf{t}^{-1} \mathbf{q}^2 + \mathbf{q}^4 + \mathbf{t} \mathbf{q}^4 + \\ &\quad + \mathbf{t}^2 \mathbf{q}^6) + \mathbf{a}^{-4} (\mathbf{t}^{-17} \mathbf{q}^{-14} + \mathbf{t}^{-15} \mathbf{q}^{-12} + \mathbf{t}^{-13} \mathbf{q}^{-10} + \mathbf{t}^{-12} \mathbf{q}^{-8} + \mathbf{t}^{-11} \mathbf{q}^{-6} + \\ &\quad + \mathbf{t}^{-10} \mathbf{q}^{-6} + \mathbf{t}^{-9} \mathbf{q}^{-4} + \mathbf{t}^{-8} \mathbf{q}^{-4}) + \mathbf{t}^{-7} \mathbf{q}^{-2}) + \mathbf{a}^{-6} \mathbf{t}^{-18} \mathbf{q}^{-12}, \end{aligned}$$

...

Заметим, что эти выражения для суперполиномов, несмотря на то, что они являются естественным обобщением полиномов ХОМФЛИ, не настолько хорошо проверены, как (4.36), так как пока нет ответов, с которыми можно было бы их сравнить. Однако известная формула Данфельда–Гукова–Расмуссена [121] для суперполиномов в фундаментальном представлении $R = [1]$ воспроизводится (4.36), как и ответы для диаграмм с двумя клетками, $R = [2]$

и $R = [11]$ (они связаны преобразованием симметрии (4.57)) [120]. Этот список аргументов, однако, меньше по сравнению с приведенным для полиномов ХОМФЛИ в п. 4.4.2, и необходимы дальнейшие проверки.

4.5. Разностные уравнения на полиномы ХОМФЛИ и суперполиномы.

Цветные полиномы Джонса в представлении $T = [p]$, как известно, удовлетворяют *линейным* разностным уравнениям по переменной p [119, 122–125]*. Возникает естественный вопрос о существовании таких уравнений для суперполиномов (4.54). Как ожидается, должен существовать набор таких уравнений, заменяющий собой набор условий Вирасоро в матричных моделях [86–95]. Этот набор определяет (квантовую) спектральную кривую и служит начальной точкой для топологической рекурсии [31, 34, 35, 126–131]. К настоящему времени наибольший прогресс в этом направлении достигнут для цветных (супер)полиномов Джонса, в частности, рекурсия для узла восьмерки 4_1 исследовалась в [132] с помощью \mathcal{A} -полиномов. Первое из уравнений такого типа для суперполиномов написано в [119] для трилистника 3_1 (и для серии торических узлов $(2, 2k + 1)$), где оно получено из явного выражения для цветных суперполиномов, определенных с помощью метода «эволюции» [106].

Аналогичную процедуру можно проделать и для явного выражения (4.54). Также возможно исследовать эти уравнения для произвольных A . Оказывается, что наиболее естественное линейное уравнение имеет форму, отличную от рассматриваемой обычно: они включают в себя вариацию не только по p , но и по A . Такие «базовые» уравнения являются уравнениями первого порядка, в то время как при $A = q^N$ и фиксированном N аналогичные уравнения являются разностными уравнениями порядка N по переменной p . В случае суперполиномов также естественно ожидать, что будет существовать два «базовых» уравнения, связанных со сдвигами по вертикали и по горизонтали в диаграмме Юнга T . Тем не менее только одно из этих уравнений можно напрямую получить из приведенных выше выражений, так как они записаны только для диаграмм, состоящих из одной строки $T = [p]$ ** . Для того, чтобы получить такое разностное уравнение, введем новое обозначение, выявляющее зависимость от p . А именно, вместо $\mathfrak{Z}_i(A) = \{Aq^{2(p-i)+1}\}\{At^{-1}\}$ введем $\mathfrak{Z}_{I|J} = \{Aq^I\}\{At^{-J}\}$, таким образом, $\mathfrak{Z}_i = \mathfrak{Z}_{2p-2i+1|1}$. Также для описания уравнения понадобится оператор дилатации $\hat{D}_q: A \rightarrow qA$,

$$\mathfrak{Z}_{I|J}^{(s)}(A) = \hat{D}_q^s \mathfrak{Z}_{I|J}(A) = \mathfrak{Z}_{I|J}(q^s A) = \{Aq^{I+s}\}\{Aq^s t^{-J}\}. \quad (4.61)$$

*Еще более интересным является вопрос о существовании нелинейных уравнений, обобщающих билинейные уравнения Хироты, рассмотренные в случае торических узлов в п. 4.3.

**Другое уравнение, в направлении t , можно соответственно получить из набора полиномов для диаграмм $T = [1^p]$ в (4.58), но для того, чтобы рассмотреть оба уравнения одновременно, необходимо исследовать ответ для произвольной диаграммы T .

В этих обозначениях простейшие нормированные суперполиномы $P_{[p]} = \frac{{}^*P_{[p]}^{4_1}(A|q, t)}{{}^*M_{[p]}(A|q, t)}$, построенные с помощью (4.54), равны:

$$\begin{aligned} P_{[0]} &= 1, \\ P_{[1]} &= 1 + \mathfrak{Z}_{1|1}, \\ P_{[2]} &= 1 + \left(\mathfrak{Z}_{3|1} + \mathfrak{Z}_{1|1}\right) + \mathfrak{Z}_{3|1}\mathfrak{Z}_{1|1}^{(1)}, \\ P_{[3]} &= 1 + \left(\mathfrak{Z}_{5|1} + \mathfrak{Z}_{3|1} + \mathfrak{Z}_{1|1}\right) + \left(\mathfrak{Z}_{5|1}\mathfrak{Z}_{3|1}^{(1)} + \mathfrak{Z}_{5|1}\mathfrak{Z}_{1|1}^{(1)} + \mathfrak{Z}_{3|1}\mathfrak{Z}_{1|1}^{(1)}\right) + \mathfrak{Z}_{5|1}\mathfrak{Z}_{3|1}^{(1)}\mathfrak{Z}_{1|1}^{(2)}, \\ &\dots \end{aligned} \tag{4.62}$$

Тогда

$$\begin{aligned} P_{[1]} - P_{[0]} &= \mathfrak{Z}_{1|1} = \mathfrak{Z}_{1|1}P_{[0]}, \\ P_{[2]} - P_{[1]} &= \mathfrak{Z}_{3|1} \left(1 + \mathfrak{Z}_{1|1}^{(1)}\right) = \mathfrak{Z}_{3|1}P_{[1]}^{(1)}, \\ P_{[3]} - P_{[2]} &= \mathfrak{Z}_{5|1} \left(1 + \mathfrak{Z}_{1|1}^{(1)} + \mathfrak{Z}_{3|1}^{(1)} + \mathfrak{Z}_{3|1}^{(1)}\mathfrak{Z}_{1|1}^{(2)}\right) = \mathfrak{Z}_{5|1}P_{[2]}^{(1)}, \\ &\dots \end{aligned} \tag{4.63}$$

и в общем виде

$$P_{[p+1]}(A) - P_{[p]}(A) = \mathfrak{Z}_{2p+1|1}(A)P_{[p]}^{(1)}(A) = \{Aq^{2p+1}\}\{At^{-1}\}P_{[p]}(qA), \tag{4.64}$$

где t — параметр в уравнении. Аналогичные уравнения на нормированные полиномы ХОМФЛИ можно получить, положив $t = q$:

$$h(A, p+1) - h(A, p) - \left(A^2q^{2p} + \frac{1}{A^2q^{2p}} - q^{2p+2} - \frac{1}{q^{2p+2}}\right)h(qA, p) = 0, \tag{4.65}$$

где $h(A, p) = H_{[p]}^{4_1}(A)/S_{[p]}^*(A)$. Это уравнение можно переписать в терминах «квантовых \mathcal{A} -полиномов»,

$$\hat{\mathcal{A}} \left(\frac{{}^*\mathcal{H}_{[p]}^{4_1}(A|q)}{{}^*\mathcal{S}_{[p]}(A|q)} \right) = 0, \quad \hat{\mathcal{A}} \equiv \hat{l} - 1 - \left(A^2\hat{m}^2 + \frac{1}{A^2\hat{m}^2} - q^2\hat{m}^2 - \frac{1}{q^2\hat{m}^2}\right)\hat{D}, \tag{4.66}$$

где \hat{l} и \hat{m} — это операторы, действующие как $\hat{l}f(A, p) = f(A, p+1)$ и $\hat{m}f(A, p) = q^p f(A, p)$. Как уже было сказано, это уравнение отличается от стандартного уравнения на полиномы Джонса, так как оно включает в себя две переменных: p (представление) и A (группу), с другой стороны, это разностное уравнение первого порядка, тогда как уравнение на полиномы Джонса — разностное уравнение второго порядка по одной переменной p . Можно ожидать, что обобщением этих уравнений от одной переменной на случай $A = q^N$ при $N > 2$ будут уравнения более высоких порядков, однако для произвольного A не ясно, существует ли вообще уравнение такого типа.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Описанные в данном обзоре результаты касаются двух теорий — трехмерной теории Черна–Саймонса и двумерной конформной теории поля, а также связи последней с суперсимметричными теориями. Изученные вопросы, связанные с двумерной конформной теорией, позволяют рассматривать ряд задач как в конформной, так и в суперсимметричной теории. Соотношение между этими двумя теориями, с одной стороны, дает возможность значительно упростить вычисление корреляторов конформной теории, так как вычислительные статсуммы суперсимметричной теории дается значительно более простым алгоритмом, нежели равный ей конформный блок. С другой стороны, такое соотношение позволяет рассматривать ряд предельных случаев, которые устроены довольно сложно в суперсимметричном случае, но соответствующие выражения могут быть построены с использованием конформной теории.

Аналогичной цели служит и рассмотренное интегральное представление конформного блока. Построенные выражения могут быть легко обобщены на случай произвольных алгебр, что позволяет рассматривать различные обобщения как конформной теории, так и соотношений с суперсимметричной теорией. Также сходство такого представления с интегралами матричных моделей открывает ряд задач о связях с теориями, представимыми в таком виде.

Результаты, полученные в рамках изучения теории Черна–Саймонса, относятся к большому пласту задач, связанных с изучением вильсоновских средних и полиномов узлов. Трехмерная теория Черна–Саймонса — это топологическая теория. В трехмерном пространстве в отличие от больших размерностей существуют замкнутые контуры с нетривиальной топологией. Это открывает ряд задач о свойствах корреляторов, соответствующих таким контурам, — вильсоновских средних. Однако к настоящему времени даже общие ответы для таких вильсоновских средних известны только для одного класса контуров — торических узлов. В данном обзоре была рассмотрена связь таких известных ответов для торических узлов и интегрируемых свойств. Полученное соотношение при обобщении его на другие узлы может привести к выражению их через известные операторы разрезания-склейки, что значительно упростит их описание. К сожалению, такое обобщение пока не ясно. Также были получены первые результаты для вильсоновских средних в высших представлениях для простейшего неторического узла — узла-восьмерки. Это открывает возможности для дальнейшего расширения множества известных ответов на неторические узлы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Волков Д. В., Акулов В. П. О возможном универсальном взаимодействии нейтрино // Письма в ЖЭТФ. 1972. Т. 16. С. 621–624.
2. Volkov D. V., Akulov V. P. Is the Neutrino a Goldstone Particle? // Phys. Lett. B. 1973. V. 46. P. 109–110.

3. Акулов В. П., Волков Д. В. Голдстоуновские поля со спином половина // ТМФ. 1972. Т. 18. С. 39–50.
4. Гольфанд Ю. А., Лихтман Е. П. Расширение алгебры генераторов Пуанкаре и нарушение P -инвариантности // Письма в ЖЭТФ. 1971. Т. 13. С. 452–455.
5. Весс Ю., Беггер Д. Суперсимметрия и супергравитация. М.: Мир, 1986.
6. Seiberg N., Witten E. Electric-Magnetic Duality, Monopole Condensation, and Confinement in $\mathcal{N} = 2$ Supersymmetric Yang–Mills Theory // Nucl. Phys. B. 1994. V. 426. P. 19; arXiv:hep-th/9407087.
7. Bilal A. Duality in $\mathcal{N} = 2$ SUSY $SU(2)$ Yang–Mills Theory: A Pedagogical Introduction to the Work of Seiberg and Witten. arXiv:hep-th/9601007.
8. Nekrasov N. Seiberg–Witten Prepotential from Instanton Counting // Adv. Theor. Math. Phys. 2003. V. 7. P. 831–864 (arXiv:hep-th/0206161).
9. Losev A., Nekrasov N., Shatashvili S. Issues in Topological Gauge Theory // Nucl. Phys. B. 1998. V. 534. P. 549–611; arXiv:hep-th/9711108.
10. Losev A., Nekrasov N., Shatashvili S. Testing Seiberg–Witten Solution // Strings, Branes and Dualities. Cargese, 1997. P. 359–372; arXiv:hep-th/9801061; Losev A., Moore G., Nekrasov N., Shatashvili S. Four-Dimensional Avatars of Two-Dimensional RCFT // Nucl. Phys. Proc. Suppl. 1996. V. 46. P. 130–145; arXiv:hep-th/9509151.
11. Alday L., Gaiotto D., Tachikawa Y. Liouville Correlation Functions from Four-Dimensional Gauge Theories // Lett. Math. Phys. 2010. V. 91. P. 167–197; arXiv:0906.3219.
12. Marshakov A., Mironov A., Morozov A. Zamolodchikov Asymptotic Formula and Instanton Expansion in $N = 2$ SUSY $N_f = 2N_c$ QCD // JHEP. 2009. V. 11. P. 048; arXiv:0909.3338.
13. Замолодчиков А., Замолодчиков Ал. Конформная теория поля и критические явления в двумерных системах. М.: МЦНМО, 2009.
14. Belavin A. A., Polyakov A. M., Zamolodchikov A. B. Infinite Conformal Symmetry in Two-Dimensional Quantum Field Theory // Nucl. Phys. B. 1984. V. 241. P. 333–380.
15. Поляков А. М. Конформная симметрия критических флуктуаций // Письма в ЖЭТФ. 1970. Т. 12. С. 538–541.
16. Поляков А. М. Негамильтонов подход в конформной теории поля // ЖЭТФ. 1974. Т. 66. С. 23–42.
17. Dotsenko Vl., Fateev V. Conformal Algebra and Multipoint Correlation Functions in 2d Statistical Models // Nucl. Phys. B. 1984. V. 240. P. 312–348.
18. Marshakov A., Mironov A., Morozov A. Generalized Matrix Models as Conformal Field Theories: Discrete Case // Phys. Lett. B. 1991. V. 265. P. 99.
19. Kharchev S. et al. Conformal Matrix Models as an Alternative to Conventional Multi-Matrix Models // Nucl. Phys. B. 1993. V. 404. P. 17–750.
20. Dijkgraaf R., Vafa C. Matrix Models, Topological Strings, and Supersymmetric Gauge Theories // Nucl. Phys. B. 2002. V. 644. P. 3–20; arXiv:hep-th/0206255.
21. Dijkgraaf R., Vafa C. On Geometry and Matrix Models // Nucl. Phys. B. 2002. V. 644. P. 21–39; arXiv:hep-th/0207106.
22. Dijkgraaf R., Vafa C. A Perturbative Window into Non-Perturbative Physics. arXiv:hep-th/0208048.

23. *Chekhov L., Mironov A.* Matrix Models vs. Seiberg–Witten/Whitham Theories // Phys. Lett. B. 2003. V. 552. P. 293–302; arXiv:hep-th/0209085.
24. *Itoyama H., Morozov A.* The Dijkgraaf–Vafa Prepotential in the Context of General Seiberg–Witten Theory // Nucl. Phys. B. 2003. V. 657. P. 53–78; arXiv:hep-th/0211245.
25. *Itoyama H., Morozov A.* Experiments with the WDVV Equations for the Gluino-Condensate Prepotential: the Cubic. Two-Cut Case // Phys. Lett. B. 2003. V. 555. P. 287–295; arXiv:hep-th/0211259.
26. *Itoyama H., Morozov A.* Calculating Gluino-Condensate Prepotential // Prog. Theor. Phys. 2003. V. 109. P. 433–463; arXiv:hep-th/0212032.
27. *Itoyama H., Morozov A.* Gluino-Condensate. CIV-DV Prepotential from Its Whitham-Time Derivatives // Intern. J. Mod. Phys. A. 2003. V. 18. P. 5889–5906; arXiv:hep-th/0301136.
28. *Klemm A., Marino M., Theisen S.* Gravitational Corrections in Supersymmetric Gauge Theory and Matrix Models // JHEP. 2003. V. 03. P. 051; arXiv:hep-th/0211216.
29. *Chekhov L. et al.* DV and WDVV // Phys. Lett. B. 2003. V. 562. P. 323–338; arXiv:hep-th/0301071.
30. *Chekhov L. et al.* Complex Geometry of Matrix Models // Proc. of Steklov Inst. Math. 2005. V. 251. P. 254; arXiv:hep-th/0506075.
31. *Alexandrov A., Mironov A., Morozov A.* Partition Functions of Matrix Models as the First Special Functions of String Theory. I: Finite Size Hermitean 1-matrix Model // Intern. J. Mod. Phys. A. 2004. V. 19. P. 4127; arXiv:hep-th/0310113.
32. *Alexandrov A., Mironov A., Morozov A.* Unified Description of Correlators in Non-Gaussian Phases of Hermitean Matrix Model // Intern. J. Mod. Phys. A. 2006. V. 21. P. 2481–2518; arXiv:hep-th/0412099.
33. *Alexandrov A., Mironov A., Morozov A.* Solving Virasoro Constraints in Matrix Models // Fortsch. Phys. 2005. V. 53. P. 512–521; arXiv:hep-th/0412205.
34. *Александров А. С., Миронов А. Д., Морозов А. А.* // ТМФ. 2007. Т. 150. С. 179–192; arXiv:hep-th/0605171.
35. *Alexandrov A., Mironov A., Morozov A.* Instantons and Merons in Matrix Models // Physica D. 2007. V. 235. P. 126–167; arXiv:hep-th/0608228.
36. *Миронов А. Д.* Матричные модели и матричные интегралы // ТМФ. 2006. Т. 146. С. 63–72; arXiv:hep-th/0506158.
37. *Moore G., Seiberg N.* Classical and Quantum Conformal Field Theory // Commun. Math. Phys. 1989. V. 123. P. 177–254.
38. *Mironov A., Morozov A.* On AGT Relation in the Case of $U(3)$ // Nucl. Phys. B. 2010. V. 825. P. 1–37; arXiv:0908.2569.
39. *Terashima Yu., Yamazaki M.* $SL(2, R)$ Chern–Simons, Liouville, and Gauge Theory on Duality Walls // JHEP. 2011. V. 08. P. 135; arXiv:1103.5748.
40. *Gaiotto D.* $N = 2$ Dualities. arXiv:0904.2715.
41. *Gaiotto D., Moore G., Neitzke A.* Wall-Crossing, Hitchin Systems, and the WKB Approximation. arXiv:0907.3987.
42. *Dimofte T., Gukov S., Soibelman Y.* Quantum Wall Crossing in $N = 2$ Gauge Theories // Lett. Math. Phys. 2011. V. 95. P. 1–25; arXiv:0912.1346.

43. *Kontsevich M., Soibelman Y.* Stability Structures, Motivic Donaldson–Thomas Invariants and Cluster Transformations. arXiv:0811.2435.
44. *Fock V., Goncharov A.* Moduli Spaces of Local Systems and Higher Teichmüller Theory // *Publ. Math. Inst. Hautes Etudes Sci.* 2006. V. 103. P. 1–211; arXiv:math/0311149.
45. *Pestun V.* Localization of the Four-Dimensional $N = 4$ SYM to a Two-Sphere and $1/8$ BPS Wilson Loops. arXiv:0906.0638.
46. *Nekrasov N., Witten E.* The Omega Deformation, Branes, Integrability, and Liouville Theory // *JHEP.* 2010. V. 09. P. 092; arXiv:1002.0888.
47. *Awata H., Kanno H.* Macdonald Operators and Homological Invariants of the Colored Hopf Link // *J. Phys. A.* 2011. V. 44. P. 375201; arXiv:0910.0083.
48. *Gorsky E.* q, t -Catalan Numbers and Knot Homology. arXiv:1003.0916.
49. *Dimofte T., Gukov S., Hollands L.* Vortex Counting and Lagrangian 3-manifolds. arXiv:1006.0977.
50. *Dijkgraaf R., Fuji H., Manabe M.* The Volume Conjecture, Perturbative Knot Invariants, and Recursion Relations for Topological Strings // *Nucl. Phys. B.* 2011. V. 49. P. 166–211; arXiv:1010.4542.
51. *Hosomichi K., Lee S., Park J.* AGT on the S -Duality Wall // *JHEP.* 2010. V. 12. P. 079; arXiv:1009.0340.
52. *Hosomichi K., Lee S., Park J.* Notes on SUSY Gauge Theories on Three-Sphere // *JHEP.* 2011. V. 03. P. 127; arXiv:1012.3512.
53. *Hosomichi K., Lee S., Park J.* SUSY Gauge Theories on Squashed Three-Spheres. arXiv:1102.4716.
54. *Witten E.* Analytic Continuation of Chern–Simons Theory. arXiv:1001.2933.
55. *Witten E.* Fivebranes and Knots. arXiv:1101.3216.
56. *Dolan F., Spiridonov V., Vartanov G.* From 4d Superconformal Indices to 3d Partition Functions // *Phys. Lett. B.* 2011. V. 704. P. 234–241; arXiv:1104.1787.
57. *Галахов Д.М. и др.* О трехмерном обобщении соответствия Алдая–Гайотто–Тачикавы // *ТМФ.* 2012. Т. 172. С. 73–99; arXiv:1104.2589.
58. *Ooguri H., Vafa C.* Knot Invariants and Topological Strings // *Nucl. Phys. B.* 2000. V. 577. P. 419–438; arXiv:hep-th/9912123.
59. *Witten E.* Quantum Field Theory and Jones Polynomials // *Commun. Math. Phys.* 1989. V. 121. P. 351–399.
60. *Kauffman L.H.* On Knots. Princeton: Princeton Univ. Press, 1987.
61. *Прасолов В.В., Сосинский А.Б.* Узлы, зацепления, косы и трехмерные многообразия. М.: МЦНМО, 1997.
62. *Hoste J. et al.* A New Polynomial Invariant of Knots and Links // *Bull. Am. Math. Soc.* 1985. V. 12. P. 239–246.
63. *Przytycki J., Traczyk P.* Conway Algebras and Skein Equivalence of Links // *Proc. Am. Math. Soc.* 1987. V. 100. P. 744–748.
64. *Alba V., Morozov And.* Check of AGT Relation for Conformal Blocks on Sphere // *Nucl. Phys. B.* 2010. V. 840. P. 441–468; arXiv:0912.2535.
65. *Alba V., Morozov And.* Non-Conformal Limit of AGT Relation from the 1-point Torus Conformal Block // *JETPh Lett.* 2009. V. 90. P. 803–807; arXiv:0911.0363.

66. *Миронов А. Д. и др.* Вычисления в конформной теории, необходимые для проверки гипотезы Алдая–Гайотто–Тачикавы // ТМФ. 2010. Т. 165. С. 503–542; arXiv:0908.2064.
67. *Mironov A., Morozov A., Morozov A.* Conformal Blocks and Generalized Selberg Integrals // Nucl. Phys. B. 2011. V. 843. P. 534–557; arXiv:1003.5752.
68. *Mironov A., Morozov A., Morozov A.* Character Expansion for HOMFLY Polynomials. I. Integrability and Difference Equations // Strings, Gauge Fields, and the Geometry Behind: The Legacy of Maximilian Kreuzer. Singapore: World Sci. Publ., 2013. P. 101–118; arXiv:1112.5754.
69. *Itoyama H. et al.* HOMFLY and Superpolynomials for Figure Eight Knot in All Symmetric and Antisymmetric Representations // JHEP. 2012. V. 7. P. 131; arXiv:1203.5978.
70. *Marshakov A., Mironov A., Morozov A.* On Non-Conformal Limit of the AGT Relations // Phys. Lett. B. 2009. V. 682. P. 125–129; arXiv:0909.2052.
71. *Gaiotto D.* Asymptotically Free $\mathcal{N} = 2$ Theories and Irregular Conformal Blocks. arXiv:0908.0307.
72. *Itoyama H., Mironov A., Morozov A.* Matching Branches of Non-Perturbative Conformal Block at Its Singularity Divisor. arXiv:1406.4750.
73. *Di Francesco P., Mathieu P., Senechal D.* Conformal Field Theory. N. Y.: Springer-Verlag, 1997.
74. *Mironov A., Morozov A., Shakhov Sh.* Matrix Model Conjecture for Exact BS Periods and Nekrasov Functions // JHEP. 2010. V. 02. P. 030; arXiv:0911.5721.
75. *Mironov A., Morozov A., Shakhov Sh.* Conformal Blocks as Dotsenko–Fateev Integral Discriminants // Intern. J. Mod. Phys. A. 2010. V. 25. P. 3173–3207; arXiv:1001.0563.
76. *Selberg A.* Bemerkninger om et Multipelt Integral // Norsk. Mat. Tidsskr. 1944. V. 24. P. 71.
77. *Iguri S., Mansour T.* Some Recursive Formulas for Selberg-Type Integrals // J. Phys. A: Math. Theor. 2010. V. 43. P. 065201; arXiv:0912.3507.
78. *Ole Warnaar S., Selberg A.* Integral for the Lie Algebra A_n // J. Phys. A: Math. Theor. 2008. V. 41. P. 025209; arXiv:0708.1139.
79. *Ole Warnaar S.* The sl_3 Selberg Integral // Adv. Math. 2010. V. 224. P. 499–524; arXiv:0901.4176.
80. *Turaev V. G.* The Yang–Baxter Equation and Invariants of Links // Invent. Math. 1988. V. 92. P. 527–553.
81. *Fulton W.* Young Tableaux, with Applications to Representation Theory and Geometry. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1997.
82. *Mironov A., Morozov A., Morozov A.* Character Expansion for HOMFLY Polynomials. II. Fundamental Representation. Up to Five Strands in Braid // JHEP. 2012. V. 03. P. 034; arXiv:1112.2654.
83. *Rosso M., Jones V. F. R.* On the Invariants of Torus Knots Derived from Quantum Groups // J. Knot Theory Ramifications. 1993. V. 2. P. 97–112.
84. *Labastida J. M. F., Marino M.* A New Point of View in the Theory of Knot and Link Invariants // J. Knot Theory Ramifications. 2002. V. 11. P. 173; arXiv:math/0104180.

85. *Lin X.-S., Zheng H.* On the Hecke Algebras and the Colored HOMFLY Polynomial // *Trans. Am. Math. Soc.* 2010. V. 362. P. 1–18; arXiv:math/0601267.
86. *Kharchev S. et al.* Unification of All String Models with $c < 1$ // *Phys. Lett. B.* 1992. V. 275. P. 311–314; arXiv:hep-th/9111037.
87. *Kharchev S. et al.* Towards Unified Theory of 2d Gravity // *Nucl. Phys. B.* 1992. V. 380. P. 181–240; arXiv:hep-th/9201013.
88. *Kharchev S. et al.* Generalized Kontsevich Model Versus Toda Hierarchy and Discrete Matrix Models // *Nucl. Phys. B.* 1993. V. 397. P. 339–378; arXiv:hep-th/9203043.
89. *Морозов А. Ю.* Теория струн — что это такое? // *УФН.* 1992. Т. 162, № 8. С. 84–175.
90. *Морозов А. Ю.* Интегрируемость и матричные модели // *УФН.* 1994. Т. 164. С. 3–62; arXiv:hep-th/9303139.
91. *Morozov A.* Matrix Models as Integrable Systems // *Particles and Fields. CRM Ser. in Math. Phys.* 1999. P. 127–210; arXiv:hep-th/9502091.
92. *Morozov A.* Challenges of Matrix Models // *String Theory: From Gauge Interactions to Cosmology: Proc. of NATO Advanced Study Inst. Cargese, 2005.* P. 129–162; arXiv:hep-th/0502010.
93. *Mironov A.* 2d Gravity and Matrix Models. I. 2d Gravity // *Intern. J. Mod. Phys. A.* 1994. V. 9. P. 4355 (hep-th/9312212).
94. *Mironov A.* Quantum Deformations of τ -Functions, Bilinear Identities and Representation Theory. arXiv:hep-th/9409190.
95. *Mironov A.* τ -Function within Group Theory Approach and Its Quantization. arXiv:q-alg/9711006.
96. *Kharchev S. et al.* Generalized Kazakov–Migdal–Kontsevich Model: Group Theory Aspects // *Intern. J. Mod. Phys. A.* 1995. V. 10. P. 2015; arXiv:hep-th/9312210.
97. *Alexandrov A. et al.* Integrability of Hurwitz Partition Functions. I. Summary // *J. Phys. A: Math. Theor.* 2012. V. 45. P. 045209; arXiv:1103.4100.
98. *Миронов А. Д., Морозов А. А., Натанзон С. М.* Полный набор операторов разрезания и склейки в теории Гурвица–Концевича // *ТМФ.* 2011. Т. 166. С. 3–27; arXiv:0904.4227.
99. *Mironov A., Morozov A., Natanzon S.* Algebra of Differential Operators Associated with Young Diagrams // *J. Geom. Phys.* 2012. V. 62. P. 148–155; arXiv:1012.0433.
100. *Okounkov A.* Toda Equations for Hurwitz Numbers // *Math. Res. Lett.* 2000. V. 7. P. 447–453; arXiv:math/0004128.
101. *Mironov A., Morozov A.* Virasoro Constraints for Kontsevich–Hurwitz Partition Function // *JHEP.* 2009. V. 02. P. 024; arXiv:0807.284.
102. *Kazarian M.* KP Hierarchy for Hodge Integrals. arXiv:0809.3263.
103. *Itoyama H. et al.* Character Expansion for HOMFLY Polynomials. III. All 3-Strand Braids in the First Symmetric Representation // *Intern. J. Mod. Phys. A.* 2012. V. 27. P. 1250099; arXiv:1204.4785.
104. *Itoyama H. et al.* Eigenvalue Hypothesis for Racah Matrices and HOMFLY Polynomials for 3-Strand Knots in Any Symmetric and Antisymmetric Representations // *Intern. J. Mod. Phys. A.* 2013. V. 28. P. 1340009; arXiv:1209.6304.

-
105. *Ramadevi P., Sarkar T.* On Link Invariants and Topological String Amplitudes // Nucl. Phys. B. 2001. V. 600. P. 487–511; arXiv:hep-th/0009188.
 106. *Dunin-Barkowski P. et al.* Superpolynomials for Toric Knots from Evolution Induced by Cut-and-Join Operators // JHEP. 2013. V. 03. P. 021; arXiv:1106.4305.
 107. *Мионов А. Д., Морозов А. А., Слепцов А. В.* Разложение по родам для полиномов ХОМФЛИ // ТМФ. 2013. Т. 177. С. 179–221; arXiv:1303.1015.
 108. *Mironov A., Morozov A., Sleptsov A.* On Genus Expansion of Knot Polynomials and Hidden Structure of Hurwitz Tau-Functions // Eur. Phys. J. C. 2013. V. 73. P. 2492; arXiv:1304.7499.
 109. *Lin X.-S., Zheng H.* On the Hecke Algebras and the Colored HOMFLY Polynomial. arXiv:math.QA/0601267.
 110. *Zhu S.* Colored HOMFLY Polynomial via Skein Theory. arXiv:1206.5886.
 111. *Анохина А. С., Морозов А. А.* Процедура каблирования для раскрашенных полиномов ХОМФЛИ // ТМФ. 2014. Т. 178. С. 3–68; arXiv:1307.2216.
 112. *Morozov Ant.* Special Colored Superpolynomials and Their Representation-Dependence // JHEP. 2012. V. 12. P. 116; arXiv:1208.3544.
 113. *Morozov Ant.* The First-Order Deviation of Superpolynomial in an Arbitrary Representation from the Special Polynomial // JETPh Lett. 2013. V. 97. P. 171–172; arXiv:1211.4596.
 114. *Kawagoe K.* Limits of the HOMFLY Polynomials of the Figure-Eight Knot // Intelligence of Low Dimensional Topology. 2006. P. 143–150. Singapore: World Sci. Publ., 2007.
 115. *Labastida J., Marino M.* Polynomial Invariants for Torus Knots and Topological Strings // Commun. Math. Phys. 2001. V. 217. P. 423–449; arXiv:hep-th/0004196.
 116. *Labastida J. M. F., Marino M., Vafa C.* Knots, Links and Branes at Large N // JHEP. 2000. V. 11. P. 007; arXiv:hep-th/0010102.
 117. *Marino M., Vafa C.* Framed Knots at Large N . arXiv:hep-th/0108064.
 118. *Aganagic M., Shakirov Sh.* arXiv:1105.5117.
 119. *Fuji H., Gukov S., Sulkowski P.* (with an appendix by *Hidetoshi Awata*). Volume Conjecture: Refined and Categorified // Adv. Theor. Math. Phys. 2012. V. 16. P. 1669–1777; arXiv:1203.2182.
 120. *Gukov S., Stosic M.* Homological Algebra of Knots and BPS States. arXiv:1112.0030.
 121. *Dunfield N. M., Gukov S., Rasmussen J.* The Superpolynomial for Knot Homologies // Exp. Math. 2006. V. 15. P. 129–159; arXiv:math/0505662.
 122. *Gelca R.* On the Relation between the A -polynomial and the Jones Polynomial // Math. Proc. of Cambridge Philos. Soc. 2002. V. 133. P. 311–323; arXiv:math/0004158.
 123. *Gelca R., Sain J.* The Noncommutative A -ideal of a $(2, 2p + 1)$ -torus Knot Determines Its Jones Polynomial // J. Knot Theory Ramifications. 2003. V. 12. P. 187–201; arXiv:math/0201100.
 124. *Gukov S.* Three-Dimensional Quantum Gravity, Chern-Simons Theory, and the A -Polynomial // Commun. Math. Phys. 2005. V. 255. P. 577–627; arXiv:hep-th/0306165.

125. *Garoufalidis S., Le T.* The Colored Jones Function Is q -Holonomic // *Geometry and Topology*. 2005. V. 9. P. 1253–1293; arXiv:math/0309214.
126. *Alexandrov A., Mironov A., Morozov A.* BGWM as Second Constituent of Complex Matrix Model // *JHEP*. 2009. V. 12. P. 053; arXiv:0906.3305.
127. *Alexandrov A. et al.* Partition Functions of Matrix Models as the First Special Functions of String Theory. II. Kontsevich Model // *Intern. J. Mod. Phys. A*. 2009. V. 24. P. 4939–4998; arXiv:0811.2825.
128. *Eynard B.* All Genus Correlation Functions for the Hermitian 1-matrix Model // *JHEP*. 2004. V. 0411. P. 031; arXiv:hep-th/0407261.
129. *Chekhov L., Eynard B.* Hermitean Matrix Model Free Energy: Feynman Graph Technique for All Genera // *JHEP*. 2006. V. 0603. P. 014; arXiv:hep-th/0504116.
130. *Chekhov L., Eynard B.* Matrix Eigenvalue Model: Feynman Graph Technique for All Genera // *JHEP*. 2006. V. 0612. P. 026; arXiv:math-ph/0604014.
131. *Orantin N.* Symplectic Invariants, Virasoro Constraints and Givental Decomposition. arXiv:0808.0635.
132. *Dijkgraaf R., Fuji H., Manabe M.* The Volume Conjecture, Perturbative Knot Invariants, and Recursion Relations for Topological Strings // *Nucl. Phys. B*. 2011. V. 849. P. 166–211; arXiv:1010.4542.