

НЕЛИНЕЙНОСТЬ СПИНОРНОГО ПОЛЯ И ГЕОМЕТРИЯ ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ

Б. Саха *

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

ВВЕДЕНИЕ	272
СПИНОРНОЕ ПОЛЕ	277
Лагранжиан спинорного поля и нелинейность	277
Ковариантная производная спинорного поля	278
Тензор энергии-импульса спинорного поля	283
СПИНОРНОЕ ПОЛЕ И ЭВОЛЮЦИЯ ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ	289
Спинорное поле и сингулярность пространства-времени	290
Спинорное поле и позднее ускорение	291
СПИНОРНЫЕ МОДЕЛИ ВЕЩЕСТВА И ТЕМНОЙ ЭНЕРГИИ	292
Квинтэссенция, Λ -член, идеальная жидкость	293
Газ Чаплыгина	296
Колеблущаяся темная энергия	297
Модифицированный газ Чаплыгина	299
Квинтом-модель темной энергии	299
Газ Ван дер Ваальса	301
ПРОСТРАНСТВО-ВРЕМЯ БИАНКИ ТИПА VI	302
Решения уравнений полей	310
Асимптотическое поведение решений	313
Параметр замедления	313
Параметр уравнения состояния	314
Выбор нелинейности	314
Преимущество спинорного описания	315
Численные решения	316
ПРОСТРАНСТВО-ВРЕМЯ БИАНКИ ТИПА VI ₀	319
ПРОСТРАНСТВО-ВРЕМЯ БИАНКИ ТИПА V	326

*E-mail: bijan@jinr.ru; URL: <http://bijansaha.narod.ru>

ПРОСТРАНСТВО-ВРЕМЯ БИАНКИ ТИПА III	333
ПРОСТРАНСТВО-ВРЕМЯ БИАНКИ ТИПА I	340
ПРОСТРАНСТВО-ВРЕМЯ LRS БИАНКИ ТИПА I	345
ПРОСТРАНСТВО-ВРЕМЯ FRW	353
ФИЗИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ МОДЕЛЕЙ	367
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	372
Приложение 1	
ОТНОШЕНИЕ МЕЖДУ ИНВАРИАНТАМИ, ПОСТРОЕННЫМИ ИЗ БИЛИНЕЙНЫХ СПИНОРНЫХ ФОРМ	373
Приложение 2	
ИНВАРИАНТЫ ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ И ТЕНЗОР ЭЙНШТЕЙНА	377
Приложение 3	
ТЕНЗОР ЭНЕРГИИ-ИМПУЛЬСА СПИНОРНОГО ПОЛЯ	382
Приложение 4	
СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ	392
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	394

НЕЛИНЕЙНОСТЬ СПИНОРНОГО ПОЛЯ И ГЕОМЕТРИЯ ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ

Б. Саха *

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

В области космологических моделей Бианки типа VI, VI₀, V, III, I, LRSBI и FRW изучена роль нелинейности спинорного поля в эволюции Вселенной и самого поля. Обнаружено, что благодаря присутствию нетривиальных недиагональных компонент тензора энергии-импульса спинорного поля в анизотропном пространстве-времени выявляются некоторые существенные ограничения на метрические функции и на компоненты спинорного поля. В данной работе рассмотрена полиномиальная нелинейность, являющаяся функцией инвариантов, построенных из билинейных спинорных форм.

Обнаружено, что в модели Бианки типа VI пространства-времени в зависимости от констант связи допускается как позднее ускорение, так и колебательный способ эволюции.

В модели Бианки типа VI₀ пространства-времени благодаря специфике поведения спинорного поля имеются два различных сценария. В первом случае инварианты, образованные из билинейных спинорных форм, тривиальны, что приводит к безмассовому и линейному лагранжиану спинорного поля. Этот случай эквивалентен вакуумному решению Бианки типа VI₀ пространства-времени. Второй случай допускает ненулевые и нелинейные слагаемые, что в зависимости от знака констант связи приводит либо к ускоренному расширению Вселенной, либо, после достижения максимума, к сжатию и Большому хрусту, и создается пространственно-временная сингулярность.

В модели Бианки типа V существуют две возможности. В первом случае все метрические функции совпадают. Вселенная расширяется с ускорением, если константа самодействия положительна, в то время как отрицательное значение ведет к циклическому или периодическому решению. Во втором случае нелинейность спинорной массы и спинорного поля исчезают и Вселенная расширяется линейно во времени.

В модели Бианки типа III пространство-время останется всегда вращательно-симметричным, так что изотропия пространства-времени достигается при больших константах пропорциональности. В зависимости от знака константы связи модель допускает как ускоренный, так и осцилляторный режим расширения. Отрицательная константа связи ведет к осцилляторному расширению, положительная — к расширению с поздним ускорением. Параметр замедления (ускорения) расширения и параметр

*E-mail: bijan@jinr.ru; URL: <http://bijansaha.narod.u>

уравнения состояния (УС) в этом случае меняются со временем и находятся в согласии с современными представлениями об эволюции пространства-времени.

В модели Бианки типа I пространства-времени недиагональные компоненты приводят к трем различным возможностям. В случае полного VI пространства-времени обнаруживается, что нелинейность спинорного поля и массовый член исчезают, вследствие чего лагранжиан становится безмассовым и линейным. В двух остальных случаях пространство-время эволюционирует в сторону LRSBI или FRW Вселенной.

Если рассмотреть локально вращательно-симметричную модель VI (LRSBI), ни массовый член, ни нелинейность спинорного поля не исчезают. В этом случае в зависимости от знака константы связи имеется либо режим позднего ускорения расширения, либо осцилляторный режим эволюции. В расширяющейся Вселенной существует асимптотическая изотропизация.

Наконец, в модели FRW пространства-времени ни массовый член, ни нелинейность спинорного поля не исчезают. Как и в модели LRSBI, имеется позднее расширение или циклический режим эволюции.

Данные исследований позволяют прийти к заключению, что спинорное поле очень чувствительно к гравитационному.

Within the scope of Bianchi type-VI, VI₀, V, III, I, LRSBI and FRW cosmological models we have studied the role of nonlinear spinor field in the evolution of the Universe and the field itself. It was found that due to the presence of non-trivial non-diagonal components of the energy-momentum tensor of the spinor field in the anisotropic space-time, there occur some severe restrictions both on the metric functions and on the components of the spinor field. In this report we have considered a polynomial nonlinearity which is a function of invariants constructed from the bilinear spinor forms.

It is found that in case of a Bianchi type-VI space-time, depending on the sign of self-coupling constants, the model allows either late time acceleration or oscillatory mode of evolution.

In case of a Bianchi type-VI₀ space-time due to the specific behavior of the spinor field we have two different scenarios. In one case the invariants constructed from bilinear spinor forms become trivial, thus giving rise to a massless and linear spinor field Lagrangian. This case is equivalent to the vacuum solution of the Bianchi type-VI₀ space-time. The second case allows non-vanishing massive and nonlinear terms, and depending on the sign of coupling constants, gives rise to accelerating mode of expansion or the one that after obtaining some maximum value contracts and ends in big crunch, consequently generating space-time singularity.

In case of a Bianchi type-V model there occur two possibilities. In one case we found that the metric functions are similar to each other. In this case the Universe expands with acceleration if the self-coupling constant is taken to be a positive one, whereas a negative coupling constant gives rise to a cyclic or periodic solution. In the second case the spinor mass and the spinor field nonlinearity vanish and the Universe expands linearly in time.

In case of a Bianchi type-III model the space-time remains locally rotationally symmetric all the time, though the isotropy of space-time can be attained for a large proportionality constant. As far as evolution is concerned, depending on the sign of coupling constant the

model allows both accelerated and oscillatory mode of expansion. A negative coupling constant leads to an oscillatory mode of expansion, whereas a positive coupling constant generates expanding Universe with late time acceleration. Both deceleration parameter and EoS parameter in this case vary with time and are in agreement with modern concept of space-time evolution.

In case of a Bianchi type-I space-time the non-diagonal components lead to three different possibilities. In case of a full BI space-time we find that the spinor field non-linearity and the massive term vanish, hence the spinor field Lagrangian becomes massless and linear. In two other cases the space-time evolves into either LRSBI or FRW Universe.

If we consider a locally rotationally symmetric BI (LRSBI) model, neither the mass term nor the spinor field nonlinearity vanishes. In this case depending on the sign of coupling constant we have either late time accelerated mode of expansion or oscillatory mode of evolution. In this case for an expanding Universe we have asymptotical isotropization.

Finally, in case of a RW model neither the mass term nor the spinor field nonlinearity vanishes. Like in LRSBI case we have either late time acceleration or cyclic mode of evolution.

These findings allow us to conclude that the spinor field is very sensitive to the gravitational one.

PACS: 98.80.Cq

ВВЕДЕНИЕ

Нелинейные явления длительное время были одной из самых популярных тем. Однако нужно признать, что нелинейные классические поля не получили общего рассмотрения. Возможно, это случилось из-за математических трудностей, происходящих от неперенормируемости Ферми и других нелинейных связей [157]. Нелинейное самодействие спинорных полей может возникнуть как следствие геометрической структуры пространства-времени, точнее, вследствие существования кручения. Ранее, в 1938 г., Иваненко [101] показал, что релятивистская теория полагает в некоторых случаях самодействие четвертого порядка. Эта теория далее была развита в [102, 103, 167]. В 1950 г. Вейль [248] доказал, что, если аффинные и метрические свойства пространства-времени независимы, спинорное поле удовлетворяет линейным уравнениям в пространстве с кручением или нелинейным в римановом пространстве. Влияние нелинейных (четвертого порядка) членов в лагранжиане некоторых классических теорий было исследовано в [229]. В случае спинорного поля локально устойчивые конфигурации с минимальным энергетическим состоянием, как показано, всегда существуют для положительной константы связи. Как только самодействие имеет тип спин–спин, это позволяет приписать динамическую роль спину и судить о происхождении нелинейностей. Далее данный вопрос был прояснен в нескольких существенных работах Утиямы, Кибле и Скиамы [109, 225, 238]. Квазичастичные решения уравне-

ний классических спинорных полей были получены в [74, 75, 92]. Стабильность оптических солитонов, т. е. локализованных решений квазиспинорных систем, была проанализирована в [13]. Нелинейное спинорное поле, введенное симметричной связью между нуклонами, мюонами и лептонами, исследовано в [74] в классическом приближении. Классическое спинорное поле, определенное вариационным принципом с лагранжианом с квадратичными дираковскими и биквадратными ферми-членами, было исследовано в [75]. В простейшей схеме самодействие имеет псевдовекторный тип, но, как будет показано, оно также может получить скалярную связь [159]. Превосходный обзор проблемы представлен в [91]. Нелинейные квантовые поля Дирака были использованы Гейзенбергом [92, 93] в его амбициозной объединенной теории элементарных частиц. Сейчас интерес к ним возобновился из-за широко известной статьи Гросса и Невё [86], в которой описываются двумерные безмассовые фермионные теории поля с квадратичными взаимодействиями. Нелинейное спинорное поле в области плоскосимметричной модели гравитационного поля изучено в [178, 181, 182, 203]. Совсем недавно вариационный метод изучения решения уравнения Дирака в виде уединенной волны был применен в [129]. Нужно отметить, что нелинейное спинорное поле сыграло решающую роль в киральных моделях Скирмы и Фаддеева. Найдено, что 16-спинорное поле позволяет объединить модели Скирмы и Фаддеева, описывающие барионы и лептоны как топологические солитоны [171].

Квантовая теория в искривленном пространстве-времени была предметом огромного интереса в последнее время в связи с ее применением в космологии и астрофизике. Свидетельства существования сильных гравитационных полей во Вселенной привели к изучению квантовых эффектов материальных полей во внешнем классическом гравитационном поле. После появления статьи Паркера о скалярных полях [141] и полях со спином $1/2$ [142] некоторые авторы также рассмотрели эту тему. Космология в значительной степени основывается на решении Фридмана уравнений Эйнштейна, которое рассматривает полностью однородную и изотропную Вселенную («замкнутые» и «открытые» модели, т. е. ограниченную или неограниченную Вселенную). Главное свойство этих моделей — нестационарность. Идея расширяющейся Вселенной, вытекающая из этого свойства, подтверждена астрономическими наблюдениями, и сейчас можно без сомнения полагать, что изотропная модель представляет в общих чертах адекватное описание современного состояния Вселенной. Интерес к изучению уравнений Клейна–Гордона в анизотропных моделях возрос после того, как Ху и Паркер [97] показали, что возникновение скалярных частиц на анизотропном фоне может уничтожить анизотропию во время расширения Вселенной.

С увеличением количества наблюдаемых данных из дальнего космоса необходимость в изменении стандартной космологической парадигмы становится неизбежной. До 1998 г., когда еще не было мысли об ускоренном

расширении, доступные наблюдаемые данные хорошо соответствовали стандартной эйнштейновской модели. Открытие позднего ускорения расширения пространства-времени открыло дорогу многочисленным альтернативным моделям эволюции Вселенной.

Наиболее популярные модели темной энергии рассматривают старую эйнштейновскую теорию с новой «материей» в качестве поля источника. Это модели с Λ -членом [140, 187, 222], квинтэссенцией [50, 56, 125, 139, 185, 259], газом Чаплыгина [5, 16, 23–25, 31, 32, 106] и т. д. среди большинства исследуемых, но предложены и некоторые другие модели темной энергии. После некоторых значительных работ различных авторов [8, 94, 117, 137, 160, 173, 174, 177, 179, 180, 186, 189, 190, 192, 230], в которых показана важная роль спинорного поля в эволюции Вселенной, спинорное поле было широко использовано в моделировании темной энергии. Этот успех прямо связан с возможностью ответить на некоторые фундаментальные вопросы современной космологии:

1. Проблема первоначальной сингулярности. Одна из проблем современной космологии — наличие первоначальной сингулярности, что означает конечность времени. Основная цель введения нелинейного члена в лагранжиан спинорного поля — рассмотреть возможность устранения начальной сингулярности. В нескольких статьях [173, 174, 177, 179, 180] показано, что введение спинорного поля с подходящей нелинейностью действительно приводит к моделям Вселенной без сингулярности. Следует отметить, что в этом случае решения найдены при условии доминирования энергии:

$$\varepsilon + \sum_{\alpha} p_{\alpha} \geq 0, \quad (\text{B.1a})$$

$$\varepsilon + p_{\alpha} \geq 0, \quad \alpha = 1, 2, 3, \quad (\text{B.1б})$$

где ε — плотность энергии и p_{α} — давление вдоль трех главных направлений. Теперь, когда энергия играет доминирующую роль во Вселенной, условие доминирования энергии время от времени нарушается. Например, условие (B.1a) нарушается в моделях с обычной квинтэссенцией и космологической константой, где условие (B.1б) нарушено для темной материи. Проблема сингулярности и ее возможного устранения через спинорное поле обсуждается в [65, 147–149].

2. Проблема изотропизации. Хотя Вселенная кажется однородной и изотропной в настоящем, нет необходимости думать, что такое описание подходит для ранних стадий развития Вселенной, данных наблюдений, гарантирующих изотропию в эру, предшествующую рекомбинации, не существует. Можно найти теоретические аргументы в пользу существования анизотропной фазы, сходящейся к изотропной [130]. С помощью Cosmic Background Explorer's differential radiometer (COBE) была обнаружена и измерена изотропия

космического микроволнового фона (СМВ) в различных угловых масштабах. Наиболее детальная к настоящему времени карта СМВ получена детектором Planck. Новая карта улучшает наше понимание возникновения и эволюции Вселенной. Картина СМВ, состоящая из света, запечатленного на небе, когда Вселенной было всего 380 000 лет, показывает малые температурные флуктуации, соответствующие областям слабо различающихся плотностей в очень ранние времена. Предполагается, что эти анизотропии скрывают в себе всю историю космической эволюции, восходящей к эпохе рекомбинации, и рассматриваются как ориентировочные геометрии и материалы Вселенной. Существует широкий консенсус среди космологов о том, что небольшие угловые космические микроволновые фоновые анизотропии были зародышами всех будущих структур, таких как современные звезды и галактики. Установлено, что введение нелинейного спинорного поля ускоряет процесс изотропизации первоначально анизотропной Вселенной [148, 177, 179, 186].

3. Позднее ускорение расширения Вселенной. Некоторые недавние исследования выявили ускоренный режим расширения Вселенной [22, 144, 145, 162, 163]. Обнаружение и дальнейшее экспериментальное подтверждение текущего космического ускорения представляют для космологов фундаментальную задачу идентификации и выявления причин такого явления. Этот факт можно согласовать с теорией, если предположить, что Вселенная в основном заполнена так называемой темной энергией. Эта форма материи (энергии) не наблюдается в лаборатории и не взаимодействует с электромагнитным излучением. Эти факты сыграли решающую роль в именовании этого объекта. В отличие от темной материи темная энергия:

- равномерно распределена по пространству;
- не переплетается под влиянием силы тяжести во всех масштабах;
- создает сильное отрицательное давление порядка энергии плотности.

Исходя из этих свойств космологи предложили ряд моделей темной энергии, которые способны объяснить текущую ускоренную фазу расширения Вселенной. В связи с этим в последнее время появился ряд работ, в которых спинорное поле рассматривается в качестве альтернативной модели для темной энергии [65, 67, 147–149, 160, 189, 190, 192, 198, 240].

Следует отметить, что большинство упомянутых работ имеют дело с космологическими моделями Бианки типа I. Результаты, полученные с использованием спинорного поля как источника космологического поля Бианки типа I, могут быть обобщены следующим образом. Подходящий выбор нелинейности спинорного поля:

- а) ускоряет процесс изотропизации [177, 180, 186];
- б) обеспечивает отсутствие сингулярности во Вселенной [177, 179, 180, 186];
- в) создает позднее ускорение расширения [160, 189, 190, 192, 230].

С учетом той роли, которую играет спинорное поле в эволюции Вселенной, естественно возникает вопрос: если спинорное поле может изменить картину эволюции, вызванной идеальной жидкостью и темной энергией, то можно ли смоделировать идеальную жидкость и темную энергию посредством спинорного поля? Утвердительный ответ на этот вопрос приведен в ряде работ [113, 200, 201, 204, 206], в которых дано спинорное описание идеальной жидкости и темной энергии, а также тщательно изучены соответствующие эволюции Вселенной для различных моделей типа Бианки.

Следует отметить, что в более ранних работах были учтены только диагональные компоненты тензора энергии-импульса спинорных полей. Недавно было показано, что из-за его специфического поведения в криволинейном пространстве-времени спинорное поле, даже когда оно зависит только от времени, обладает нетривиальными недиагональными компонентами тензора энергии-импульса. В работах [212, 214] показано, что в зависимости от типа ограничения, налагаемого на недиагональные компоненты тензора энергии-импульса, изначально пространство-время Бианки типа I может эволюционировать к LRS Бианки типа I или FRW, но в этом случае спинорное поле становится безмассовым и линейным. То же самое происходит в случае Бианки типа VI_0 пространства-времени, т. е. геометрия Бианки типа VI_0 пространства-времени не допускает существования массивного и/или нелинейного спинорного поля [215]. В последнее время мы изучили влияние нелинейного спинорного поля на геометрию пространства-времени для различных метрик [216–219]. Хотя в этой работе рассмотрены модели с изотропным давлением, следует отметить, что космологическая эволюция материи источников с небольшой анизотропией давления изучалась многими авторами [14, 15, 213].

Данная работа состоит из нескольких разделов.

В разд. 1 дано подробное описание спинорных полей и получены соответствующие уравнения и тензор энергии-импульса для спинорного поля.

В разд. 2 описывается применение спинорного поля для объяснения позднего ускорения Вселенной.

В разд. 3 с помощью нелинейного спинорного поля смоделированы различные типы жидкости и темной энергии.

В разд. 4–10 соответствующие системы уравнений Эйнштейна–Дирака тщательно проанализированы для космологических моделей Бианки типов VI_1 , V , III , I , LRSBI и FRW.

В разд. 11 физические аспекты полученных решений описаны для моделей FRW.

В заключении обсуждаются результаты, полученные в рамках вышеуказанных моделей.

1. СПИНОРНОЕ ПОЛЕ

1.1. Лагранжиан спинорного поля и нелинейность. Хотя существование фермиона со спином $1/2$ является как теоретически, так и экспериментально бесспорным фактом, это — описание *квантовых* спинорных полей, которое изначально использовалось в пределах плоского пространства-времени. Соответствующий лагранжиан имеет вид

$$L = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m_{\text{сп}}\bar{\psi}\psi, \quad (1.1)$$

который дает знаменитое уравнение Дирака

$$i\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m_{\text{сп}}\psi = 0. \quad (1.2)$$

Фок и Иваненко обобщили уравнение Дирака для электрона введением ковариантной производной спинорного поля в римановом пространстве-времени [76–78]. Для того, чтобы включить спинорные поля в аффинно-метрическую теорию гравитации, необходимо построить ковариантное дифференцирование спиноров для общей аффинной связности. Для спинорного поля ψ симметрия между ψ и $\bar{\psi}$ требует, чтобы был выбран симметризованный лагранжиан [109]. Имея это в виду, мы выбираем лагранжиан спинорного поля в следующем виде [177, 186]:

$$L_{\text{сп}} = \frac{i}{2} [\bar{\psi}\gamma^\mu\nabla_\mu\psi - \nabla_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi] - m_{\text{сп}}\bar{\psi}\psi - F, \quad (1.3)$$

где ∇_μ является ковариантной производной спинорного поля. Для сохранения лоренцовой инвариантности уравнений нелинейного спинорного поля самодействие спинорного поля F построено как некоторая произвольная функция инвариантов, полученных из реальных билинейных форм спинорного поля. Поскольку ψ и ψ^* (комплексно-сопряженная ψ) имеют четыре компоненты каждая, можно построить $4 \times 4 = 16$ независимых билинейных комбинаций:

$$S = \bar{\psi}\psi \quad (\text{скаляр — одна компонента}), \quad (1.4a)$$

$$P = i\bar{\psi}\gamma^5\psi \quad (\text{псевдоскаляр — одна компонента}), \quad (1.4б)$$

$$v^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi \quad (\text{вектор — четыре компонента}), \quad (1.4в)$$

$$A^\mu = \bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\psi \quad (\text{псевдовектор — четыре компонента}), \quad (1.4г)$$

$$Q^{\mu\nu} = \bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi \quad (\text{антисимметричный тензор — шесть компонент}), \quad (1.4д)$$

где $\sigma^{\mu\nu} = (i/2)[\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu]$ — антисимметричный тензор. Инварианты, соответствующие билинейной форме:

$$I = S^2, \quad (1.5a)$$

$$J = P^2, \quad (1.5b)$$

$$I_v = v_\mu v^\mu = (\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)g_{\mu\nu}(\bar{\psi}\gamma^\nu\psi), \quad (1.5в)$$

$$I_A = A_\mu A^\mu = (\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\psi)g_{\mu\nu}(\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\nu\psi), \quad (1.5г)$$

$$I_Q = Q_{\mu\nu}Q^{\mu\nu} = (\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi)g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}(\bar{\psi}\sigma^{\alpha\beta}\psi). \quad (1.5д)$$

Несколько интересных моделей были предложены и исследованы на основе скалярных билинейных инвариантов [86, 128, 173, 174, 177, 229], векторных билинейных инвариантов [236], аксиальных векторных билинейных инвариантов [127], скалярных и псевдоскалярных билинейных инвариантов [158, 173, 174, 177] и скалярных и векторных билинейных инвариантов [135, 232]. Следует отметить, что в большинстве случаев спинорное поле нелинейности выбирается в виде степенной функции вышеуказанных инвариантов, где степень может быть как целой, так и дробной [128].

Отметим, что в силу тождества Фирца среди пяти инвариантов только I и J независимы, так как все другие могут быть выведены через них: $I_v = -I_A = I + J$ и $I_Q = I - J$ [11, 73, 134, 234] (см. прил. 1). Поэтому имеет смысл рассматривать нелинейный член F как функцию от I и J , т. е. $F = F(I, J)$. С учетом вышесказанного рассмотрим $F = F(K)$, где K принимает одно из следующих значений: $\{I, J, I + J, I - J\}$. Такая нелинейность описывает нелинейность в самом общем виде.

Варьируя (1.3) относительно $\bar{\psi}(\psi)$, имеем уравнения спинорного поля:

$$i\gamma^\mu\nabla_\mu\psi - m_{\text{sp}}\psi - \mathcal{D}\psi - i\mathcal{G}\gamma^5\psi = 0, \quad (1.6a)$$

$$i\nabla_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu + m_{\text{sp}}\bar{\psi} + \mathcal{D}\bar{\psi} + i\mathcal{G}\bar{\psi}\gamma^5 = 0, \quad (1.6б)$$

где обозначим $\mathcal{D} = 2SF_K K_I$ и $\mathcal{G} = 2PF_K K_J$, $F_K = dF/dK$, $K_I = dK/dI$ и $K_J = dK/dJ$.

1.2. Ковариантная производная спинорного поля. В уравнении (1.3) ∇_μ обозначает ковариантную производную, его явный вид зависит от того, на что оно действует. Ковариантное дифференцирование имеет следующие стандартные свойства:

$$\nabla_\mu(AB) = (\nabla_\mu A)B + A(\nabla_\mu B), \quad (1.7)$$

$$\nabla_\mu(A^*) = (\nabla_\mu A)^*, \quad (1.8)$$

$$\nabla_\mu\gamma_\nu = 0, \quad (1.9)$$

где звездочка обозначает эрмитову сопряженность (транспонированное комплексное сопряжение). Явный вид ковариантной производной спинора задается как [39, 258]

$$\nabla_\mu \psi = \partial_\mu \psi - \Gamma_\mu \psi, \quad (1.10a)$$

$$\nabla_\mu \bar{\psi} = \partial_\mu \bar{\psi} + \bar{\psi} \Gamma_\mu, \quad (1.10b)$$

где $\Gamma_\mu(x)$ — спинорные аффинные матрицы. γ -Матрицы в предыдущих уравнениях связаны с матрицами Дирака $\bar{\gamma}$ для плоского пространства-времени следующим образом:

$$\gamma_\mu(x) = e_\mu^a(x) \bar{\gamma}_a, \quad \gamma^\mu(x) = e_a^\mu(x) \bar{\gamma}^a, \quad (1.11)$$

где e_μ^a — набор четырех ортогональных векторов (тетрад) и e_a^μ — обратное к e_μ^a :

$$e_\mu^a e_a^\nu = \delta_\mu^\nu, \quad e_\mu^a e_b^\mu = \delta_b^a. \quad (1.12)$$

Следует отметить, что для построения общековариантного уравнения Дирака надо рассматривать компоненты спинорного поля как инвариант относительно преобразования координат [150, 224]. Поэтому, когда в дополнение к системам координат тетрада определяется в каждой точке пространства-времени, спинорное поле дает представление преобразования Лоренца, которое вращает тетраду [10, 224]. Поэтому любой вектор \mathbf{V} может специфицироваться его компонентами V^μ по отношению к системе координат или координатно-инвариантными проекциями V^a вектора \mathbf{V} на поле тетрад:

$$V^a = e_\mu^a V^\mu, \quad V^\mu = e_a^\mu V^a. \quad (1.13)$$

Теперь вспомним, что в плоском пространстве-времени матрицы Дирака $\bar{\gamma}$ удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\bar{\gamma}_a \bar{\gamma}_b + \bar{\gamma}_b \bar{\gamma}_a = 2\eta_{ab}. \quad (1.14)$$

С другой стороны, метрический тензор $g_{\mu\nu}$ общей теории относительности связан с координатно-независимым метрическим тензором Минковского $\eta_{ab} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ через тетрады как

$$g_{\mu\nu}(x) = e_\mu^a(x) e_\nu^b(x) \eta_{ab}. \quad (1.15)$$

Тогда из (1.11) и (1.15) можно показать, что матрицы γ подчиняются следующей алгебре:

$$\begin{aligned} \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu &= e_\mu^a e_\nu^b \bar{\gamma}^a \bar{\gamma}^b + e_\nu^b e_\mu^a \bar{\gamma}^b \bar{\gamma}^a = \\ &= e_\mu^a e_\nu^b (\bar{\gamma}^a \bar{\gamma}^b + \bar{\gamma}^b \bar{\gamma}^a) = 2e_\mu^a e_\nu^b \eta^{ab} = 2g^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Чтобы вывести (1.16), используем тот факт, что

$$e_{\mu}^a e_{\nu}^b = e_{\nu}^b e_{\mu}^a, \quad (1.17)$$

что следует из (1.15) благодаря симметрии $g_{\mu\nu}$ и η_{ab} . Следует вспомнить, что $\bar{\gamma}_a$ и γ_{μ} тоже подчиняются следующим соотношениям [78]:

$$\gamma_{\mu} \bar{\gamma}_a + \bar{\gamma}_a \gamma_{\mu} = 2e_{\mu a}, \quad (1.18a)$$

$$\gamma^{\mu} \bar{\gamma}_a + \bar{\gamma}_a \gamma^{\mu} = 2e_a^{\mu}. \quad (1.18b)$$

Уравнение (1.15) накладывает 10 ограничений на 16 компонент тетрад. Это оставляет шесть компонент произвольными. Если поменять тетраду e_a^{μ} на \tilde{e}_a^{μ} , то вектор новой тетрады должен быть линейной комбинацией векторов старой тетрады:

$$\tilde{e}_a^{\mu} = \Lambda_a^b e_b^{\mu}. \quad (1.19)$$

Теперь

$$g_{\mu\nu} = \tilde{e}_{\mu}^a \tilde{e}_{\nu}^b \eta_{ab} = \Lambda_c^a \Lambda_d^b e_{\mu}^c e_{\nu}^d \eta_{ab} \quad (1.20)$$

дает

$$e_c^{\mu} e_d^{\nu} g_{\mu\nu} = \Lambda_c^a \Lambda_d^b \eta_{ab} = \eta_{cd}. \quad (1.21)$$

Таким образом, (1.15) налагает условие ортогональности (1.21) на матрицу Λ , это означает, что Λ — лоренцева матрица. Следовательно, группа Лоренца может рассматриваться как группа тетрадного вращения в общей теории относительности [91, 126].

Теперь найдем спинорное представление вращения тетрады L аналогично (1.19):

$$\tilde{\gamma}^a = \Lambda_b^a L \bar{\gamma}^b L^{-1}. \quad (1.22)$$

Поскольку матрицы Дирака $\bar{\gamma}^a$ являются постоянными в некоторых выбранных представлениях, то из условия $\tilde{\gamma}^a = \bar{\gamma}^a$ вытекает, что L — функция от Λ_b^a . Для инфинитезимального преобразования Лоренца

$$\Lambda_b^a = \delta_b^a + \varepsilon_b^a \quad (1.23)$$

можно показать, что

$$\begin{aligned} \eta_{ab} &= \Lambda_a^c \Lambda_b^d \eta_{cd} = (\delta_a^c + \varepsilon_a^c) (\delta_b^d + \varepsilon_b^d) \eta_{cd} = \\ &= \eta_{ab} + \varepsilon_{ab} + \varepsilon_{ba}, \end{aligned} \quad (1.24)$$

где квадратичный член в $\varepsilon_a^c \varepsilon_{cb}$ был проигнорирован. Тогда из (1.24) следует, что

$$\varepsilon_{ab} = -\varepsilon_{ba}, \quad (1.25)$$

т. е. шесть инфинитезимальных коэффициентов Лоренца антисимметричны. Тогда из (1.22) находим

$$\tilde{\gamma}^a L = \Lambda_b^a L \gamma^b = (\delta_b^a + \varepsilon_b^a) L \gamma^b = L \bar{\gamma}^a + \varepsilon_b^a L \gamma^b. \quad (1.26)$$

Далее с учетом $\tilde{\gamma}^a = \bar{\gamma}^a$ из (1.26) вытекает, что

$$\bar{\gamma}^a L - L \bar{\gamma}^a = [\bar{\gamma}^a, L] = \varepsilon_b^a L \gamma^b. \quad (1.27)$$

Допустим,

$$L = 1 + \frac{1}{2} \varepsilon_{cd} G^{cd}, \quad L^{-1} = 1 - \frac{1}{2} \varepsilon_{cd} G^{cd}, \quad (1.28)$$

где

$$G^{cd} = \frac{1}{4} (\bar{\gamma}^c \bar{\gamma}^d - \bar{\gamma}^d \bar{\gamma}^c) \quad (1.29)$$

— генераторы спинорного представления группы Лоренца.

Далее, учитывая, что

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}^c \bar{\gamma}^d &= \frac{1}{2} (\bar{\gamma}^c \bar{\gamma}^d + \bar{\gamma}^d \bar{\gamma}^c) + \frac{1}{2} (\bar{\gamma}^c \bar{\gamma}^d - \bar{\gamma}^d \bar{\gamma}^c) = \\ &= \frac{1}{2} \{\bar{\gamma}^c, \bar{\gamma}^d\} + \frac{1}{2} [\bar{\gamma}^c, \bar{\gamma}^d] = g^{cd} I + 2G^{cd}, \end{aligned}$$

получаем

$$G^{cd} = \frac{1}{2} \bar{\gamma}^c \bar{\gamma}^d - \frac{1}{2} g^{cd} I. \quad (1.30)$$

Найдем ковариантную производную спинора ψ , которая определяется как величина, которая при вращении тетрады преобразуется следующим образом:

$$\tilde{\psi} = L \psi, \quad (1.31)$$

тогда как сопряженное ему $\bar{\psi}$ преобразуется следующим образом:

$$\tilde{\bar{\psi}} = \bar{\psi} L^{-1}. \quad (1.32)$$

Производная спинора преобразуется как

$$\tilde{\psi}_{;\mu} = L \psi_{;\mu} + L_{;\mu} \psi, \quad (1.33)$$

что не является спинором. Но если ввести спинорную связность Γ_μ , которая преобразуется следующим образом:

$$\tilde{\Gamma}_\mu = L \Gamma_\mu L^{-1} + L_{;\mu} L^{-1}, \quad (1.34)$$

и определить ковариантную производную спинора как

$$\psi_{;\mu} = \psi_{;\mu} - \Gamma_\mu \psi, \quad (1.35)$$

то находим

$$\begin{aligned}\tilde{\psi}_{;\mu} &= \tilde{\psi}_{,\mu} - \tilde{\Gamma}_{\mu}\tilde{\psi} = L\psi_{,\mu} + L_{,\mu}\psi - (L\Gamma_{\mu}L^{-1} + L_{,\mu}L^{-1})L\psi = \\ &= L(\psi_{,\mu} - \Gamma_{\mu}\psi) = L\psi_{;\mu}.\end{aligned}\quad (1.36)$$

Таким образом, ковариантная производная спинора является спинором.

Наконец, определим ковариантную производную γ^{μ} -матриц. Принимая во внимание, что ковариантные производные спинора и его сопряженного имеют вид

$$\psi_{;\mu} = \psi_{,\mu} - \Gamma_{\mu}\psi, \quad \bar{\psi}_{;\mu} = \bar{\psi}_{,\mu} + \bar{\psi}\Gamma_{\mu}, \quad (1.37)$$

для ковариантной производной $\psi\bar{\psi}$, которая является матрицей 4×4 , имеем

$$\begin{aligned}(\psi\bar{\psi})_{;\mu} &= \psi_{;\mu}\bar{\psi} + \psi\bar{\psi}_{;\mu} = (\psi_{,\mu} - \Gamma_{\mu}\psi)\bar{\psi} + \psi(\bar{\psi}_{,\mu} + \bar{\psi}\Gamma_{\mu}) = \\ &= (\psi_{,\mu}\bar{\psi} + \psi\bar{\psi}_{,\mu}) - (\Gamma_{\mu}\psi\bar{\psi} - \psi\bar{\psi}\Gamma_{\mu}) = (\psi\bar{\psi})_{,\mu} - [\Gamma_{\mu}, \psi\bar{\psi}].\end{aligned}\quad (1.38)$$

Матрицы Дирака $\bar{\gamma}^a$ — тоже матрицы 4×4 , следовательно, преобразуются как

$$\bar{\gamma}_{;\mu}^a = \bar{\gamma}_{,\mu}^a - [\Gamma_{\mu}, \bar{\gamma}^a] = -[\Gamma_{\mu}, \bar{\gamma}^a], \quad (1.39)$$

так как $\bar{\gamma}_{;\mu}^a = 0$.

Теперь найдем закон преобразования для матриц Дирака, зависящих от времени. С одной стороны, у нас есть

$$\gamma_{;\mu}^{\nu} = \gamma_{,\mu}^{\nu} + \Gamma_{\alpha\mu}^{\nu}\gamma^{\alpha}. \quad (1.40)$$

С другой стороны, имеется

$$\gamma_{;\mu}^{\nu} = (\bar{\gamma}^a e_a^{\nu})_{;\mu} = \bar{\gamma}_{;\mu}^a e_a^{\nu} + \bar{\gamma}^a e_{a;\mu}^{\nu} = -[\Gamma_{\mu}, \bar{\gamma}^a]e_a^{\nu} = -[\Gamma_{\mu}, \gamma^{\nu}], \quad (1.41)$$

где был использован тот факт, что $e_{a;\mu}^{\nu} = 0$. Сравнивая (1.40) и (1.41), находим выражение

$$\gamma_{;\mu}^{\nu} + \Gamma_{\alpha\mu}^{\nu}\gamma^{\alpha} = -[\Gamma_{\mu}, \bar{\gamma}^{\nu}], \quad (1.42)$$

которое дает закон преобразования для матриц Дирака, зависящих от времени:

$$\gamma_{;\mu}^{\nu} + \Gamma_{\lambda\mu}^{\nu}\gamma^{\lambda} + [\Gamma_{\mu}, \gamma^{\nu}] = 0. \quad (1.43)$$

Уравнение (1.43) дает возможность найти аффинно-спинорную связность Γ_{μ} для заданного пространства-времени. Позже выведем уравнение (1.43) другим способом.

Используем $g_{\mu\nu}$ и $g^{\mu\nu}$ для опускания или поднятия индекса γ -матриц и η_{ab} или η^{ab} для опускания или поднятия индекса $\bar{\gamma}$ -матриц:

$$\gamma^{\mu} = g^{\mu\nu}\gamma_{\nu}, \quad \gamma_{\mu} = g_{\mu\nu}\gamma^{\nu}, \quad (1.44)$$

$$\bar{\gamma}^a = \eta^{ab}\bar{\gamma}_b, \quad \bar{\gamma}_a = \eta_{ab}\bar{\gamma}^b. \quad (1.45)$$

1.3. Тензор энергии-импульса спинорного поля. Выведем тензор энергии-импульса спинорного поля, которое задается в виде (1.3). Тензор энергии-импульса спинорного поля был получен многими авторами [33, 39, 76, 122, 143, 246, 255]. В этой работе будем в основном следовать процедуре, предложенной в [143].

Используя известную вариационную концепцию, соответствующий тензор энергии-импульса можно представить в виде

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{8\pi} \sqrt{-g} \frac{\delta(L_{\text{сп}}/\sqrt{-g})}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{1}{8\pi} \left(\frac{\delta L_{\text{сп}}}{\delta g^{\mu\nu}} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} L_{\text{сп}} \right). \quad (1.46)$$

В случае спинорного поля (1.46) принимает вид

$$\frac{1}{8\pi} \delta \int L_{\text{сп}} \sqrt{-g} d^4x = \int T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x. \quad (1.47)$$

Но гораздо сложнее найти вариацию для спинорного поля, так как изменение по отношению к $g_{\mu\nu}$ затрагивает не только те выражения, где они используются для построения инвариантов. При вариации спинорного поля следует помнить основополагающие отношения

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}, \quad (1.48a)$$

$$\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2g_{\mu\nu}, \quad (1.48б)$$

$$\gamma^\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma^\mu = 2\delta_\nu^\mu. \quad (1.48в)$$

Варируя (1.48a), (1.48б) и (1.48в), получаем

$$\delta\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\mu \delta\gamma^\nu + \delta\gamma^\nu \gamma^\mu + \gamma^\nu \delta\gamma^\mu = 2\delta g^{\mu\nu}, \quad (1.49a)$$

$$\delta\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\mu \delta\gamma_\nu + \delta\gamma_\nu \gamma_\mu + \gamma_\nu \delta\gamma_\mu = 2\delta g_{\mu\nu}, \quad (1.49б)$$

$$\delta\gamma^\mu \gamma_\nu + \gamma^\mu \delta\gamma_\nu + \delta\gamma_\nu \gamma^\mu + \gamma_\nu \delta\gamma^\mu = 0. \quad (1.49в)$$

Деривация (1.48б) дает

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial\gamma_\mu}{\partial x^\rho} \gamma_\nu + \gamma_\mu \frac{\partial\gamma_\nu}{\partial x^\rho} + \frac{\partial\gamma_\nu}{\partial x^\rho} \gamma_\mu + \gamma_\nu \frac{\partial\gamma_\mu}{\partial x^\rho} \right) = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho}. \quad (1.50)$$

С другой стороны, имеем

$$g_{\mu\nu}; \rho = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho} - \Gamma_{\mu\rho}^\sigma g_{\sigma\nu} - \Gamma_{\nu\rho}^\sigma g_{\mu\sigma} = 0 \quad (1.51)$$

и

$$\gamma_{\mu; \rho} = \frac{\partial\gamma_\mu}{\partial x^\rho} - \Gamma_{\mu\rho}^\sigma \gamma_\sigma := Y_{\mu\rho}. \quad (1.52)$$

Теперь построим следующее выражение:

$$\begin{aligned}
 & Y_{\mu\rho}\gamma_\nu + \gamma_\nu Y_{\mu\rho} + Y_{\nu\rho}\gamma_\mu + \gamma_\mu Y_{\nu\rho} = \\
 & = \left(\frac{\partial\gamma_\mu}{\partial x^\rho} - \Gamma_{\mu\rho}^\sigma \gamma_\sigma \right) \gamma_\nu + \gamma_\nu \left(\frac{\partial\gamma_\mu}{\partial x^\rho} - \Gamma_{\mu\rho}^\sigma \gamma_\sigma \right) + \\
 & \quad + \left(\frac{\partial\gamma_\nu}{\partial x^\rho} - \Gamma_{\nu\rho}^\sigma \gamma_\sigma \right) \gamma_\mu + \gamma_\mu \left(\frac{\partial\gamma_\nu}{\partial x^\rho} - \Gamma_{\nu\rho}^\sigma \gamma_\sigma \right) = \\
 & = \left(\frac{\partial\gamma_\mu}{\partial x^\rho} \gamma_\nu + \gamma_\mu \frac{\partial\gamma_\nu}{\partial x^\rho} \right) + \left(\frac{\partial\gamma_\nu}{\partial x^\rho} \gamma_\mu + \gamma_\nu \frac{\partial\gamma_\mu}{\partial x^\rho} \right) - \\
 & \quad - \Gamma_{\mu\rho}^\sigma (\gamma_\sigma \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\sigma) - \Gamma_{\nu\rho}^\sigma (\gamma_\sigma \gamma_\mu + \gamma_\mu \gamma_\sigma) = \\
 & = \frac{\partial}{\partial x^\rho} (\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu) - 2\Gamma_{\mu\rho}^\sigma g_{\sigma\nu} - 2\Gamma_{\nu\rho}^\sigma g_{\mu\sigma} = \\
 & = 2 \left[\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho} - \Gamma_{\mu\rho}^\sigma g_{\sigma\nu} - \Gamma_{\nu\rho}^\sigma g_{\mu\sigma} \right] = g_{\mu\nu; \rho} \equiv 0. \tag{1.53}
 \end{aligned}$$

Предположим, что γ -матрицы преобразуются как

$$\gamma'_\mu = \gamma_\mu + \varepsilon^\rho Y_{\mu\rho}. \tag{1.54}$$

Принимая во внимание, что

$$\frac{1}{2} (\gamma'_\mu \gamma'_\nu + \gamma'_\nu \gamma'_\mu) = g_{\mu\nu}, \tag{1.55}$$

и вводя

$$S = I + \varepsilon^\rho \Gamma_\rho, \tag{1.56}$$

из

$$\gamma'_\mu = S^{-1} \gamma_\mu S \tag{1.57}$$

находим

$$\gamma'_\mu = (I - \varepsilon^\rho \Gamma_\rho) \gamma_\mu (I + \varepsilon^\rho \Gamma_\rho) = \gamma_\mu + \varepsilon^\rho (\gamma_\mu \Gamma_\rho - \Gamma_\rho \gamma_\mu) + \dots \tag{1.58}$$

Сравнивая (1.58) с (1.54), получим

$$Y_{\mu\rho} = \gamma_\mu \Gamma_\rho - \Gamma_\rho \gamma_\mu. \tag{1.59}$$

Вставляя $Y_{\mu\rho}$ из (1.59) в (1.52), находим

$$\frac{\partial\gamma_\mu}{\partial x^\rho} - \Gamma_{\mu\rho}^\sigma \gamma_\sigma + \Gamma_\rho \gamma_\mu - \gamma_\mu \Gamma_\rho = 0. \tag{1.60}$$

Аналогично

$$\frac{\partial\gamma^\mu}{\partial x^\rho} - \Gamma_{\rho\sigma}^\mu \gamma^\sigma + \Gamma_\rho \gamma^\mu - \gamma^\mu \Gamma_\rho = 0. \tag{1.61}$$

Теперь найдем вариацию для γ^μ , т.е. $\delta\gamma^\mu$. Так как правая часть уравнения (1.49а) содержит $\delta g^{\mu\nu}$, ищем $\delta\gamma^\mu$ в виде

$$\delta\gamma^\mu = a A_\rho \delta g^{\mu\rho}, \quad (1.62)$$

где a — некоторая постоянная и A_ρ — матрица 4×4 . Подставляя (1.62) в (1.49а), находим выражение

$$2a(A_\nu \gamma^\mu + \gamma^\mu A_\nu) \delta g^{\mu\nu} = \delta g^{\mu\nu}, \quad (1.63)$$

которое с учетом (1.48в) приводит к $a = 1/2$ и $A_\rho = \gamma_\rho$. Таким образом, имеем

$$\delta\gamma^\mu = \frac{1}{2} \gamma_\nu \delta g^{\mu\nu}. \quad (1.64)$$

Отметим, что результат, аналогичный (1.64), был получен в [39, 143], тогда как в [246] автор рассмотрел более общий случай с

$$\delta\gamma^\mu = \frac{1}{2} \gamma_\nu \delta g^{\mu\nu} + [\gamma^\mu, G], \quad (1.65)$$

где G — некоторая произвольная матрица 4×4 и

$$[\gamma^\mu, G] = \gamma^\mu G - G \gamma^\mu. \quad (1.66)$$

Теперь находим вариацию для Γ_μ . Имеем

$$\frac{\partial \gamma^\mu}{\partial x^\rho} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu \gamma^\nu + \Gamma_\rho \gamma^\mu - \gamma^\mu \Gamma_\rho = 0. \quad (1.67)$$

Вариация (1.67) дает

$$\frac{\partial \delta \gamma^\mu}{\partial x^\rho} + \delta \Gamma_{\nu\rho}^\mu \gamma^\nu + \Gamma_{\nu\rho}^\mu \delta \gamma^\nu + \delta \Gamma_\rho \gamma^\mu + \Gamma_\rho \delta \gamma^\mu - \delta \gamma^\mu \Gamma_\rho - \gamma^\mu \delta \Gamma_\rho = 0. \quad (1.68)$$

Подставляя (1.64) в (1.68), с учетом (1.67) находим

$$-2(\delta \Gamma_\rho \gamma^\mu - \gamma^\mu \delta \Gamma_\rho) = \gamma_\nu \frac{\partial \delta g^{\mu\nu}}{\partial x^\rho} + \Gamma_{\nu\rho}^\sigma \gamma_\sigma \delta g^{\mu\nu} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu \gamma_\sigma \delta g^{\sigma\nu} + 2\gamma^\nu \delta \Gamma_{\nu\rho}^\mu. \quad (1.69)$$

Принимая во внимание, что

$$\delta g_{;\rho}^{\mu\nu} = \frac{\partial \delta g^{\mu\nu}}{\partial x^\rho} + \delta(\Gamma_{\sigma\rho}^\mu g^{\sigma\nu} + \Gamma_{\sigma\rho}^\nu g^{\mu\sigma}) = 0, \quad (1.70)$$

из (1.69) после некоторых манипуляций находим

$$\delta \Gamma_\rho \gamma^\mu - \gamma^\mu \delta \Gamma_\rho = \frac{1}{2} (g^{\mu\sigma} \delta \Gamma_{\sigma\rho}^\nu - g^{\nu\sigma} \delta \Gamma_{\sigma\rho}^\mu) \gamma_\nu. \quad (1.71)$$

Так как любая матрица 4×4 может раскладываться через I, γ_μ и $\sigma_{[\mu\nu]} = (1/2)(\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu)$, ищем $\delta\Gamma_\mu$ в виде

$$\delta\Gamma_\rho = A_\rho I + B_{\rho\alpha}\gamma^\alpha + C_{\rho\alpha\beta}\sigma^{[\alpha\beta]}. \quad (1.72)$$

Тогда левая часть (1.71) может быть записана как

$$\begin{aligned} \delta\Gamma_\rho\gamma^\mu - \gamma^\mu\delta\Gamma_\rho = A_\rho(I\gamma^\mu - \gamma^\mu I) + B_{\rho\alpha}(\gamma^\alpha\gamma^\mu - \gamma^\mu\gamma^\alpha) + \\ + C_{\rho\alpha\beta}(\sigma^{[\alpha\beta]}\gamma^\mu - \gamma^\mu\sigma^{[\alpha\beta]}). \end{aligned} \quad (1.73)$$

Учитывая, что

$$\sigma^{[\alpha\beta]}\gamma^\mu - \gamma^\mu\sigma^{[\alpha\beta]} = 2(g^{\mu\beta}g^{\alpha\nu} - g^{\mu\alpha}g^{\beta\nu})\gamma_\nu, \quad (1.74)$$

и сравнивая правые части (1.71) и (1.73), находим, что $B_{\mu\nu} = 0$ и

$$C_{\rho\sigma\eta} = \frac{1}{8}(g_{\mu\eta}\delta\Gamma_{\sigma\rho}^\mu - g_{\mu\sigma}\delta\Gamma_{\eta\rho}^\mu). \quad (1.75)$$

Наконец, имеем

$$\delta\Gamma_\rho = \frac{1}{8}(g_{\mu\eta}\delta\Gamma_{\sigma\rho}^\mu - g_{\mu\sigma}\delta\Gamma_{\eta\rho}^\mu)\sigma^{[\eta\sigma]}, \quad (1.76)$$

где

$$\begin{aligned} \delta\Gamma_{\alpha\beta}^\nu = -g^{\nu\rho}g_{\rho\sigma}\Gamma_{\alpha\beta}^\sigma + \frac{1}{2}g^{\nu\mu}\left[\frac{\partial\delta g_{\alpha\mu}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial\delta g_{\mu\beta}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial\delta g_{\alpha\beta}}{\partial x^\mu}\right] = \\ = \frac{1}{2}g^{\nu\mu}[(\delta g_{\alpha\mu});_{\beta} + (\delta g_{\mu\beta});_{\alpha} - (\delta g_{\alpha\beta});_{\mu}]. \end{aligned} \quad (1.77)$$

Тогда из (1.3) получим

$$\begin{aligned} \delta L_{\text{sp}} = \frac{i}{2}[\bar{\psi}\delta\gamma^\mu\nabla_\mu\psi - \nabla_\mu\bar{\psi}\delta\gamma^\mu\psi] + \\ + \frac{i}{2}[\bar{\psi}\gamma^\mu(-\delta\Gamma_\mu)\psi + \bar{\psi}(-\delta\Gamma_\mu)\gamma^\mu\psi] = \\ = \frac{i}{2}\left[\frac{1}{2}(\bar{\psi}\gamma_\nu\nabla_\mu\psi - \nabla_\mu\bar{\psi}\gamma_\nu\psi)g^{\mu\nu} - \right. \\ \left. - \frac{1}{8}\bar{\psi}(g_{\alpha\nu}\delta\Gamma_{\beta\mu}^\nu - g_{\beta\nu}\delta\Gamma_{\alpha\mu}^\nu)(\gamma^\mu\sigma^{[\alpha\beta]} + \sigma^{[\alpha\beta]}\gamma^\mu)\psi\right]. \end{aligned} \quad (1.78)$$

Введем следующее выражение:

$$\gamma^{[\alpha\beta\mu]} = \frac{1}{3}[\gamma^\alpha\sigma^{[\beta\mu]} + \gamma^\beta\sigma^{[\mu\alpha]} + \gamma^\mu\sigma^{[\alpha\beta]}]. \quad (1.79)$$

Учитывая, что $\sigma^{[\beta\mu]} = -\sigma^{[\mu\beta]}$, можно легко показать, что $\gamma^{[\alpha\beta\mu]}$ — полностью антисимметричный. Также можно показать, что

$$\gamma^{[\alpha\beta\mu]} = \frac{1}{3} \left[\sigma^{[\beta\mu]} \gamma^\alpha + \sigma^{[\mu\alpha]} \gamma^\beta + \sigma^{[\alpha\beta]} \gamma^\mu \right]. \quad (1.80)$$

Далее, принимая во внимание, что $\sigma^{[\alpha\beta]} = \frac{1}{2} [\gamma^\alpha \gamma^\beta - \gamma^\beta \gamma^\alpha]$ и $g^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} [\gamma^\alpha \gamma^\beta + \gamma^\beta \gamma^\alpha]$, получаем

$$\sigma^{[\alpha\beta]} = g^{\alpha\beta} - \gamma^\beta \gamma^\alpha = \gamma^\alpha \gamma^\beta - g^{\alpha\beta}. \quad (1.81)$$

Тогда (1.80) можно переписать как

$$\gamma^{[\alpha\beta\mu]} = \frac{1}{2} [\gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\beta - \gamma^\beta \gamma^\alpha \gamma^\mu]. \quad (1.82)$$

Дальнейшая манипуляция дает

$$\gamma^{[\alpha\beta\mu]} = g^{\mu\alpha} \gamma^\beta - g^{\beta\alpha} \gamma^\mu + \gamma^\alpha \sigma^{[\beta\mu]}. \quad (1.83)$$

Таким образом, имеем

$$\gamma^\mu \sigma^{[\alpha\beta]} = \gamma^{[\mu\alpha\beta]} + g^{\alpha\mu} \gamma^\beta - g^{\beta\mu} \gamma^\alpha. \quad (1.84)$$

Аналогично можно доказать, что

$$\sigma^{[\alpha\beta]} \gamma^\mu = \gamma^{[\mu\alpha\beta]} - g^{\alpha\mu} \gamma^\beta + g^{\beta\mu} \gamma^\alpha. \quad (1.85)$$

Комбинируя (1.84) и (1.85), находим

$$\gamma^\mu \sigma^{[\alpha\beta]} + \sigma^{[\alpha\beta]} \gamma^\mu = \gamma^{[\mu\alpha\beta]}. \quad (1.86)$$

Подставляя (1.86) в (1.78), получим

$$\begin{aligned} \delta L_{\text{sp}} &= \frac{i}{2} \left[\frac{1}{2} (\bar{\psi} \gamma_\nu \nabla_\mu \psi - \nabla_\mu \bar{\psi} \gamma_\nu \psi) g^{\mu\nu} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{4} \bar{\psi} (g_{\alpha\nu} \delta \Gamma_{\beta\mu}^\nu - g_{\beta\nu} \delta \Gamma_{\alpha\mu}^\nu) \gamma^{[\mu\alpha\beta]} \psi \right]. \end{aligned} \quad (1.87)$$

В (1.87) $\delta \Gamma_{\alpha\mu}^\nu$ и $\delta \Gamma_{\beta\mu}^\nu$ — симметричные по (α, μ) и (β, μ) , соответственно, $\gamma^{[\mu\alpha\beta]}$ — полностью антисимметричный. Следовательно, вклад $\delta \Gamma_\mu$ в тензор энергии-импульса равен нулю. Поэтому запишем

$$\begin{aligned} \delta L_{\text{sp}} &= \frac{i}{4} (\bar{\psi} \gamma_\nu \nabla_\mu \psi - \nabla_\mu \bar{\psi} \gamma_\nu \psi) g^{\mu\nu} = \\ &= \frac{i}{4} (\bar{\psi} \gamma_\nu \nabla_\mu \psi + \bar{\psi} \gamma_\mu \nabla_\nu \psi - \nabla_\mu \bar{\psi} \gamma_\nu \psi - \nabla_\nu \bar{\psi} \gamma_\mu \psi) g^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (1.88)$$

Таким образом, найдем тензор энергии-импульса спинорного поля

$$T_{\mu}^{\rho} = \frac{i}{4} g^{\rho\nu} (\bar{\psi} \gamma_{\mu} \nabla_{\nu} \psi + \bar{\psi} \gamma_{\nu} \nabla_{\mu} \psi - \nabla_{\mu} \bar{\psi} \gamma_{\nu} \psi - \nabla_{\nu} \bar{\psi} \gamma_{\mu} \psi) - \delta_{\mu}^{\rho} L_{\text{sp}}, \quad (1.89)$$

который с учетом (1.10) может быть записан в виде

$$\begin{aligned} T_{\mu}^{\rho} &= \frac{i}{4} g^{\rho\nu} (\bar{\psi} \gamma_{\mu} \partial_{\nu} \psi + \bar{\psi} \gamma_{\nu} \partial_{\mu} \psi - \partial_{\mu} \bar{\psi} \gamma_{\nu} \psi - \partial_{\nu} \bar{\psi} \gamma_{\mu} \psi) - \\ &- \frac{i}{4} g^{\rho\nu} \bar{\psi} (\gamma_{\mu} \Gamma_{\nu} + \Gamma_{\nu} \gamma_{\mu} + \gamma_{\nu} \Gamma_{\mu} + \Gamma_{\mu} \gamma_{\nu}) \psi - \delta_{\mu}^{\rho} L_{\text{sp}} = \\ &= g^{\rho\nu} \bar{T}_{\nu\mu} - g^{\rho\nu} \tilde{T}_{\nu\mu} - \delta_{\mu}^{\rho} (2KF_K - F(K)), \end{aligned} \quad (1.90)$$

где примем во внимание, что ввиду (1.6) лагранжиан спинорного поля может быть выражен в виде

$$\begin{aligned} L_{\text{sp}} &= \frac{i}{2} [\bar{\psi} \gamma^{\mu} \nabla_{\mu} \psi - \nabla_{\mu} \bar{\psi} \gamma^{\mu} \psi] - m_{\text{sp}} \bar{\psi} \psi - F = \\ &= \frac{1}{2} \bar{\psi} [i\gamma^{\mu} \nabla_{\mu} \psi - m_{\text{sp}} \psi] - \frac{1}{2} [i\nabla_{\mu} \bar{\psi} \gamma^{\mu} + m_{\text{sp}} \bar{\psi}] \psi - F = \\ &= \frac{1}{2} [\mathcal{D} \bar{\psi} \psi + i\mathcal{G} \bar{\psi} \gamma^5 \psi] - \frac{1}{2} [\mathcal{D} \bar{\psi} \psi + i\mathcal{G} \bar{\psi} \gamma^5 \psi] - F = \\ &= 2(IK_I + JK_J) F_K - F(K) = 2KF_K - F(K). \end{aligned} \quad (1.91)$$

Теперь найдем спинорные аффинные связности. Матрицы спинорных аффинных связностей $\Gamma_{\mu}(x)$ однозначно определены из аддитивного произведения единичной матрицы с помощью уравнения (1.60) и могут быть выражены как

$$\Gamma_{\mu} = \frac{1}{4} \bar{\gamma}_a \gamma^{\nu} \partial_{\mu} e_{\nu}^{(a)} - \frac{1}{4} \gamma_{\rho} \gamma^{\nu} \Gamma_{\mu\nu}^{\rho}. \quad (1.92)$$

Используем матрицы Дирака в плоском пространстве-времени в форме

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}^0 &= \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad \bar{\gamma}^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \\ \bar{\gamma}^5 &= -i\bar{\gamma}^0 \bar{\gamma}^1 \bar{\gamma}^2 \bar{\gamma}^3 = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ -I & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

где σ_i — матрицы Паули:

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что матрицы $\bar{\gamma}$ и σ подчиняются следующим свойствам:

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}^i \bar{\gamma}^j + \bar{\gamma}^j \bar{\gamma}^i &= 2\eta^{ij}, \quad i, j = 0, 1, 2, 3, \\ \bar{\gamma}^i \bar{\gamma}^5 + \bar{\gamma}^5 \bar{\gamma}^i &= 0, \quad (\bar{\gamma}^5)^2 = I, \quad i = 0, 1, 2, 3, \\ \sigma^j \sigma^k &= \delta_{jk} + i\varepsilon_{jkl} \sigma^l, \quad j, k, l = 1, 2, 3, \end{aligned}$$

где $\eta_{ij} = \{1, -1, -1, -1\}$ — диагональная матрица; δ_{jk} — символ Кронекера и ε_{jkl} — полностью антисимметричная матрица с $\varepsilon_{123} = +1$.

2. СПИНОРНОЕ ПОЛЕ И ЭВОЛЮЦИЯ ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ

В предыдущем разделе дано детальное описание спинорного поля, особенно подробно написаны уравнения спинорного поля, его ковариантные производные и тензор энергии-импульса в искривленном пространстве-времени. В этом разделе увидим, насколько по-разному авторы используют спинорное поле для объяснения позднего ускорения Вселенной.

Следует отметить, что спиноры играли важную роль в математике и физике на протяжении прошлого столетия. Они теоретически моделировали частицы со спином $1/2$, такие как электрон, в случае с массой или нейтрино (массивным или безмассовым). Спиновая структура многообразий играет важную роль в современной математике, в то время как в математической физике эта структура мотивирует программу «Твистер» [36].

В рамках физики элементарных частиц все используемые спиноры — это либо спиноры Дирака или Вейля (безмассовые дираковские спиноры), либо спиноры Майораны ψ . Такие спиноры должны подчиняться полевым уравнениям первого порядка.

Прежде чем изучить последние достижения, обратимся к истории. Следует напомнить, что геометрия Римана с фундаментальной квадратичной формой ds^2 остается пригодной для объяснения гравитационных явлений, в то время как квантовые и электрические явления требуют введения геометрических понятий, которые являются новыми для геометрии Римана. Такое понятие было впервые введено Дираком в теории электронов [62]. Геометрическая природа оператора Дирака была отмечена Фоком и Иваненко в [77, 78], где они предлагали ввести операторы, аналогичные матрицам Дирака в геометрии с учетом линейной дифференциальной формы

$$ds = \sum \gamma_\nu dx_\nu, \tag{2.1}$$

квадрат которой дает обычный интервал Римана ds^2 . Это может рассматриваться как отправная точка понятия спинора в римановой геометрии. Но эта теория все еще была линейной. Только в 1938 г. Иваненко [101] ввел нелинейное спинорное поле в систему. Цель — объяснить взаимодействие между частицами. Эта теория получила дальнейшее развитие в работах [102, 103]. Далее в 1951 г. нелинейное спинорное поле, предложенное благодаря симметричным взаимодействиям между нуклонами, мюонами и лептонами, было исследовано в классической аппроксимации Финкельштейном

с соавторами [74], где они обобщили дираковский лагранжиан:

$$L_D = \int L d^4x, \quad L = \mu_0 I_0 + I_1, \quad (2.2)$$

где

$$I_0 = \psi^\dagger \psi, \quad I_1 = \frac{i}{2} [\psi^\dagger \gamma_\mu \partial_\mu \psi - (\partial_\mu \psi^\dagger) \gamma_\mu \psi] \quad (2.3)$$

и μ_0 — константа с размерностью L^{-1} и

$$L = \mu_0 I_0 + I_1 + gW(I_0, I_1, J), \quad (2.4)$$

где J указывает на другие возможные инварианты спинорного поля, g — константа связи и W является функцией инвариантов, что делает теорию нелинейной и не содержащей производных. Авторы нашли некоторые решения для соответствующих полевых уравнений. Эта теория была далее развита в [75].

Далее Кречет с коллегами продолжили изучение спинорного поля. В работе [114] они доказали эквивалентность динамики нейтрино в римановом пространстве-времени и динамики нелинейных спинорных полей Гейзенберга–Иваненко в пространстве-времени с кручением.

В 1970-е гг. много внимания было уделено безмассовым спинорным полям в криволинейных пространствах и помимо общих теорем об уравнениях взаимодействия Эйнштейна–Вейля было построено и изучено множество явных решений. В работе [94] с использованием метода гамильтониана были получены общие решения уравнений Эйнштейна–Дирака для случая, когда метрические функции и спинорные поля являются инвариантными при преобразованиях трехпараметрической группы Абеля, действующей транзитивно на пространственноподобной гиперповерхности.

2.1. Спинорное поле и сингулярность пространства-времени. Спинорное поле, насколько нам известно, впервые было использовано для решения некоторых проблем космологии в [226]. Автор этой работы исследовал возможность устранения исходной сингулярности пространства-времени в рамках внешней модели FRW пространства-времени. Далее в ряде работ Шикин с соавторами развивали это исследование в рамках космологической модели Бианки типа I, чтобы понять механизм плоского, изначально анизотропного пространства-времени [2, 3, 169, 170, 172–174]. Было показано, что введение спинорного поля в систему при некотором подходящем выборе нелинейности может генерировать регулярные решения и ускорить процесс уплощения.

Следует подчеркнуть, что в те дни мало кто рассматривал спинорное поле в космологии. Только после работы [177] 2001 г. спинорное поле стало рассматриваться как альтернативный источник для объяснения космологических проблем. Напомним, что в те дни явление позднего ускорения было

еще неизвестно. В работе [8] авторы впервые попытались объяснить инфляцию посредством спинорного поля. В этой статье авторы, рассматривавшие возможность, что классическое однородное спинорное поле может играть определенную роль в космологии, пришли к выводу о том, что соответствующий выбор самодействия мог бы создать богатое разнообразие поведений, которые сильно отличаются от их широко изучаемых скалярных партнеров. По мнению авторов, классическое спинорное поле означает набор из четырех комплекснозначных функций пространства-времени, которые преобразуются по спинорным представлениям группы Лоренца.

Хотя наличие фермионов со спином $1/2$ как теоретически, так и экспериментально бесспорно, они принадлежат к квантовому миру, подчиняясь (1.2). Непонятно, имеют ли они классические аналоги, но, как было предложено в [8], можно интерпретировать классический спинор как математическое ожидание спинора в соответствующем состоянии $|s\rangle$:

$$\psi_{cl} = \langle s | \hat{\psi} | s \rangle = \langle \hat{\psi} \rangle. \quad (2.5)$$

Тогда, принимая математическое ожидание (1.2), находим, что ψ_{cl} удовлетворяет уравнению

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_{cl} - m_{sp} \psi_{cl} = 0, \quad (2.6)$$

которое просто утверждает, что классический спинор ψ_{cl} подчиняется обычным уравнениям Дирака. Следует отметить, что математическое ожидание спинора в физическом состоянии — это комплексное число, а не грасманово число. Авторы также определили, что для того, чтобы классическое приближение был действительным, должно выполняться соотношение

$$\left| \frac{\langle \bar{\psi} \psi \rangle_{ren} - \langle \bar{\psi} \rangle_{ren} \langle \psi \rangle_{ren}}{\langle \bar{\psi} \rangle_{ren} \langle \psi \rangle_{ren}} \right| \ll 1, \quad (2.7)$$

где

$$\langle \dots \rangle_{ren} = \langle s | \dots | s \rangle - \langle 0 | \dots | 0 \rangle \quad (2.8)$$

— перенормированный партнер соответствующих величин. В работе [36] авторы предложили аналогичный способ. Как было замечено, уравнение поля первого порядка (1.2) космологически подразумевает, что среднее значение как $\rho = \bar{\psi} \psi$, так и плотности энергии свободного спинорного поля эволюционирует как плотность энергии пыли с нулевым давлением, т. е. пропорционально $(1+z)^3$, где z — красное смещение.

2.2. Спинорное поле и позднее ускорение. Дальнейшее развитие спинорной космологии было связано с поздним ускорением. После открытия ускоренного режима расширения Вселенной космологи всего мира предложили различные модели для объяснения этих новых явлений. В работе [160]

Рибас с соавторами показали, что если рассматривать потенциал взаимодействия в фермионном поле как функцию скалярных и псевдоскалярных инвариантов, то

$$F = \lambda [\beta_1 I + \beta_2 J]^n \quad (2.9)$$

может быть ответствен за периоды ускорения в эволюции Вселенной, а материальное поле будет отвечать за период замедления. Они выполняли свои исследования в рамках модели FRW. Этот результат был доработан для космологических моделей Бианки типа I в [189, 190, 192, 230]. На основе результатов, полученных в [177], некоторые авторы расширяли это изучение до 8-компонентных спинорных полей, также известных как темные спиноры. Основы теории темного спинора в инфляции представлены в [34, 36]. ELKO — поле взаимодействия через искривление со своей спиновой плотностью — изучено в [66] и далее развито в [67]. Конформное сопряжение темного спинора с гравитацией в рамках модели FRW изучено в [120].

В то же время поиск для имитации темной энергии посредством спинорного поля проводился многими авторами, и вскоре выяснилось, что нелинейность спинорного поля действительно может описать различные характеристики вещества, начиная с идеальной жидкости и кончая различными типами темной энергии. Обсудим этот вопрос в разд. 3.

В большинстве работ, сделанных до недавнего времени, рассматривались только диагональные компоненты плотности энергии-импульса спинорных полей. Авторы работы [240] впервые заметили, что учет недиагональных компонент накладывает некоторые ограничения на пространство-время. В дальнейшем это исследование было разработано в ряде работ для различных моделей Вселенной типа Бианки [212, 214–219]. Подробно остановимся на них в разд. 4–10.

Поэтому надо подчеркнуть, что наша постоянная работа над спинорным полем не только привлекает внимание разных групп, чтобы рассмотреть спинорное поле как альтернативный источник темной энергии для объяснения позднего времени ускорения, но и играет определенную роль в формировании новых направлений, таких как темный спинор.

3. СПИНОРНЫЕ МОДЕЛИ ВЕЩЕСТВА И ТЕМНОЙ ЭНЕРГИИ

В этом разделе покажем, как нелинейное спинорное поле может моделировать различные виды материи, включая темную энергию. Рассмотрим случай, когда спинорное поле зависит только от t . Подчеркнем, что для моделирования различных типов жидкости и темной энергии нужны только диагональные компоненты тензора энергии-импульса. Кроме того, в данном обзоре рассмотрим случаи, когда гравитационное поле задается моделями типа

Бианки VI, VI₀, V, III, I, LRSBI и FRW. С учетом этого запишем диагональные компоненты тензора энергии-импульса (см. прил. 1):

$$T_0^0 = m_{\text{sp}}S + F(K), \quad (3.1a)$$

$$T_1^1 = T_2^2 = T_3^3 = F(K) - 2KF_K. \quad (3.1b)$$

Далее, вспомнив, что плотность энергии $\varepsilon = T_0^0$ и главные значения давления $p_1 = -T_1^1$, $p_2 = -T_2^2$, $p_3 = -T_3^3$, из (3.1) находим

$$\varepsilon = m_{\text{sp}}S + F(K), \quad (3.2a)$$

$$p = 2KF_K - F(K). \quad (3.2b)$$

Как будет показано позже в (4.36), (4.38), (4.41) и (4.45), инварианты, построенные из билинейных спинорных форм, являются обратно пропорциональными масштабу объема V , а именно:

$$K = \frac{V_0^2}{V^2}. \quad (3.3)$$

Соотношение (3.3) справедливо для $K = I$ как для массивного, так и для безмассового спинорного поля, тогда как, если K принимает одно из следующих значений $\{J, I + J, I - J\}$, это соотношение справедливо и для безмассового спинорного поля.

3.1. Квинтэссенция, Λ -член, идеальная жидкость. Вскоре после того, как Эйнштейн предложил свою общую теорию относительности, А. Фридман, воспользовавшись этой теорией в космологии, обнаружил, что эта модель допускает нестационарную эволюцию Вселенной [79, 80]. В те времена считалось, что Вселенная наша неизменная. Поэтому для обеспечения стационарного космологического решения уравнений гравитационного поля Эйнштейн ввел фундаментальную постоянную, известную как космологическая постоянная, или Λ -член в системе [63, 64]. После того, как Хаббл экспериментально подтвердил, что Вселенная расширяется, Эйнштейн вернулся к исходной форме уравнения, сказав при этом, что модификация, которую он сделал, была самой большой ошибкой в его жизни. Λ -Член вернулся в обиход в конце 1960-х гг. на короткий срок. Наконец, после пионерской работы А. Гута [88] по инфляционной космологии, исследователи начали изучать модели с Λ -членом с большим интересом. Отличный обзор по космологической константе дан в работе [140].

С учетом космологической постоянной уравнение Эйнштейна имеет вид

$$G_\mu^\nu = R_\mu^\nu - \frac{1}{2}\delta_\mu^\nu R = -\kappa T_\mu^\nu - \delta_\mu^\nu \Lambda. \quad (3.4)$$

В 1998 г. две группы [144, 162] независимо показали, что наша Вселенная расширяется с ускорением, подтверждающим наличие темной энергии. Самая

простая форма темной энергии — положительная космологическая постоянная. Введение положительного Λ -члена, соответствующего универсальной силе отталкивания, приводит к настоящему режиму ускоренного расширения. Но это сопровождается такими теоретическими проблемами, как тонкая настройка и проблема совпадения [244]. Космологическая проблема соответствия связана с тем, что для обеспечения ускорения на сегодняшний день должна быть очень маленькая плотность энергии $\varepsilon_\Lambda \sim 10^{-8}$ эрг/см³, тогда как квантово-механические расчеты, которые суммируют вклады от всех вакуумных режимов ниже ультрафиолетовой отсечки в планковском масштабе, показывают, что плотность энергии вакуума $\varepsilon_\Lambda \sim 10^{112}$ эрг/см³. Что касается космологического совпадения, космологическая постоянная не исчезает с расширением Вселенной, тогда как плотность материи падает в обратной пропорции к объему. Это означает, что есть только мимолетный момент космологического времени, в течение которого плотность материи будет сопоставима по величине с плотностью энергии вакуума. Эта проблема космологического совпадения породила теории за пределами космологической постоянной с более общей формой темной энергии с переменной плотности энергии. Еще одна проблема, которая связана с ускоренным расширением, — это проблема вечного ускорения. Введение отрицательного Λ -члена, соответствующего дополнительной гравитационной силе, может решить данную проблему, что показано в [50, 82]. Модели с Λ -членом с противоположным знаком были рассмотрены в работах [176, 177, 180, 187].

Открытие того, что расширение Вселенной ускоряется, поощряло поиск новых видов материи. Эти материи могут вести себя как космологическая постоянная и комбинировать положительную плотность энергии и отрицательное давление. Квинтэссенция — это гипотетическая форма темной энергии, которая считается пятой фундаментальной силой. Тогда как космологическая постоянная остается постоянной во времени, квинтэссенция меняется со временем из-за ее динамичного характера, который задан уравнением состояния. Это наиболее распространенный тип темной энергии [43, 188, 222, 259] с уравнением состояния

$$w_q = \frac{p_q}{\varepsilon_q}, \quad (3.5)$$

в котором это отношение постоянно. Такое уравнение хорошо известно, именно когда $w_q \in [0, 1]$ описывает идеальную жидкость. При $w_q = -1$ оно описывает типичную космологическую постоянную (Λ -член) [140, 187, 221]. Так что для того, чтобы Вселенная, наполненная в основном подобным веществом, расширялась с ускорением, должно выполняться условие $w_q < -1/3$. Обычно постоянная w_q меняется в пределах от -1 и до $-1/3$, т.е. $w_q \in [-1, -1/3]$. Это ограничение следует отнести к следующему факту. Строгое определение w_q (как для равновесного состояния, так и для малых возмущений) предполагает, что при $w_q < 1$ скорость распространения малых

возмущений (например, звука) в квинтэссенции превышает скорость света и, следовательно, неравенство приводит к нарушению принципа причинности. Многие модели квинтэссенции ведут себя как трекерное поле, которое частично решает проблему космологической постоянной [259]. В этих моделях поле квинтэссенции имеет меньшую плотность излучения, которая медленно меняется до равенства плотности материи, что пробуждает в квинтэссенции характеристики, аналогичные темной энергии, которые в конечном счете доминируют во Вселенной.

И Λ -член, и квинтэссенция широко используются в космологии для объяснения позднего ускорения Вселенной. Но раньше, когда у нас не было никаких доказательств о режиме ускоренного роста, наиболее популярные модели эволюции были описаны идеальной жидкостью. Принимая все это во внимание, смоделируем идеальную жидкость, квинтэссенцию и Λ -член посредством спинорного поля. При этом мы отмечаем, что жидкость с баротропным уравнением состояния

$$p = W\varepsilon, \quad W = \text{const}, \quad (3.6)$$

в зависимости от значения W описывает идеальную жидкость, начиная с фантомной материи до екипротической материи, а именно

$$W = 0 \quad (\text{пыль}), \quad (3.7a)$$

$$W = 1/3 \quad (\text{излучение}), \quad (3.7б)$$

$$W \in (1/3, 1) \quad (\text{твердая Вселенная}), \quad (3.7в)$$

$$W = 1 \quad (\text{жесткая материя}), \quad (3.7г)$$

$$W \in (-1/3, -1) \quad (\text{квинтэссенция}), \quad (3.7д)$$

$$W = -1 \quad (\text{космологическая постоянная}), \quad (3.7е)$$

$$W < -1 \quad (\text{фантомная материя}), \quad (3.7ж)$$

$$W > 1 \quad (\text{екипротическая материя}). \quad (3.7з)$$

Подставляя (3.2а) и (3.2б) в (3.6), находим

$$2KF_K = (1 + W)F(K) + Wm_{\text{sp}}S. \quad (3.8)$$

Рассмотрим случай, когда $K = I = S^2$. В этом случае уравнение состояния (3.8) может быть записано в виде

$$SF_S = (1 + W)F(S) + Wm_{\text{sp}}S \quad (3.9)$$

с решением

$$F(S) = \lambda S^{1+W} - m_{\text{sp}}S, \quad \lambda = \text{const}. \quad (3.10)$$

Далее, подставляя (3.10) в (1.3), находим

$$\begin{aligned} L_{\text{sp}} &= \frac{i}{2} [\bar{\psi}\gamma^\mu\nabla_\mu\psi - \nabla_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi] - m_{\text{sp}}\bar{\psi}\psi - F = \\ &= \frac{i}{2} [\bar{\psi}\gamma^\mu\nabla_\mu\psi - \nabla_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi] - \lambda S^{1+W}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Таким образом, безмассовые спинорные поля с лагранжианом (3.11) описывают идеальную жидкость от фантома до экпиротической материи. Здесь постоянную интегрирования λ можно рассматривать как константу самодействия. Детальный анализ этого исследования приведен в работах [113, 200, 201, 204].

Теперь вспомним, что в единой нелинейной спинорной теории Гейзенберга массовый член отсутствует. По высказыванию Гейзенберга, массы частиц должны быть получены в результате квантования спинорных предматерий [92, 93]. В нелинейном обобщении классических уравнений поля массовый член не имеет того значения, которым он обладает в линейной теории, так как он не определяет полную энергию (или массу) нелинейной системы. Таким образом, чтобы смоделировать другие виды темной энергии, рассмотрим случай с безмассовым спинорным полем, подставив $m_{\text{sp}} = 0$. В этом случае из (3.6) легко находим

$$F(K) = \lambda K^{(1+W)/2} \quad (3.12)$$

с соответствующим лагранжианом

$$L_{\text{sp}} = \frac{i}{2} [\bar{\psi}\gamma^\mu\nabla_\mu\psi - \nabla_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi] - \lambda K^{(1+W)/2}. \quad (3.13)$$

3.2. Газ Чаплыгина. Для того, чтобы объединить такие два разных физических понятия, как темная материя и темная энергия, и, таким образом, соединить два физических параметра в один, предложена модель с довольно экзотическим уравнением состояния [106]

$$p_{\text{Ch}} = -\frac{A}{\varepsilon_{\text{Ch}}}. \quad (3.14)$$

В данной работе авторы описали переход Вселенной, наполненной пылью, в стремительно расширяющуюся Вселенную. Модель, предложенная в [106], обобщена в работах [23, 32]. Обобщенная модель газа Чаплыгина задается уравнением состояния

$$p_{\text{Ch}} = -\frac{A}{\varepsilon_{\text{Ch}}^\alpha}, \quad (3.15)$$

где A — положительная постоянная и $0 < \alpha \leq 1$. Обратим внимание, что изначально газ Чаплыгина был введен в аэродинамике [52]. Существует довольно большое количество работ в этой модели [4, 9, 16, 17, 20, 24, 25, 28, 31, 37, 58, 59, 68, 69, 81, 84, 85, 89, 90, 104, 116, 133, 138, 185, 223, 233].

Смоделируем газ Чаплыгина с помощью спинорного поля. В случае безмассового спинорного поля, подставляя (3.2а) и (3.2б) в (3.15) для F , находим

$$\frac{F^\alpha dF}{F^{1+\alpha} - A} = \frac{1}{2} \frac{dK}{K} \quad (3.16)$$

с решением [200, 201, 204]

$$F = \left(A + \lambda K^{(1+\alpha)/2} \right)^{1/(1+\alpha)}. \quad (3.17)$$

Лагранжиан спинорного поля в этом случае имеет вид

$$L = \frac{i}{2} [\bar{\psi} \gamma^\mu \nabla_\mu \psi - \nabla_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi] - \left(A + \lambda K^{(1+\alpha)/2} \right)^{1/(1+\alpha)}. \quad (3.18)$$

3.3. Колеблущаяся темная энергия. Обнаружение положительного ускорения порождает ряд проблем. Одной из самых загадочных тем является проблема вечного ускорения [168]. Положительный Λ -член, так же как и многие модели темной энергии, предложенные до сих пор, приводит к режиму вечного ускорения. В работе [231] авторы предложили космологическую модель циклической Вселенной, которая испытывает периодическое расширение и сжатие. Каждый цикл начинается с Большого взрыва и завершается Большим хрустом, только чтобы снова начать с Большого взрыва. Фаза подъема каждого цикла содержит эру излучения, материи и квинтэссенции. Последняя соответствует современному ускоренному режиму расширения.

В работе [70] представлено исследование космологической модели, где эффективный потенциал $V(\phi)$ может быть отрицательным при некоторых значениях ϕ . В этом случае реализуется циклическая модель Вселенной. Одним из самых простых способов достижения цикличности модели является введение отрицательного Λ -члена вместе с потенциалом системы [50, 177, 180]. Отметим, что в моделях, рассмотренных в работах [175, 177, 180], решения циклические (также известные как непериодические решения, так как масштаб объема является строго положительным и, когда он стремится к нулю, возникает физическая сингулярность, несмотря на то, что решение может быть математически продолжено и войдет в новый цикл) или осцилляторные (положительные в каждой точке пространства-времени). Мы также предложили модель квинтэссенции с модифицированным уравнением состояния [188]

$$p = W(\varepsilon - \varepsilon_{\text{cr}}), \quad W \in (-1, 0), \quad (3.19)$$

где ε_{cr} — некоторая критическая плотность энергии. Модель приводит к циклической или колебательной Вселенной. Подставляя $\varepsilon_{\text{cr}} = 0$, получаем обычную квинтэссенцию. Как видно из (3.19), давление отрицательное, пока

$\varepsilon > \varepsilon_{cr}$. Поскольку с расширением Вселенной плотность энергии уменьшается, в некоторый момент времени ε становится меньше, чем ε_{cr} , т. е. $\varepsilon < \varepsilon_{cr}$. Это приводит к положительному давлению и сужению Вселенной. Соответствующее поведение плотности энергии и давления показано на рис. 1.

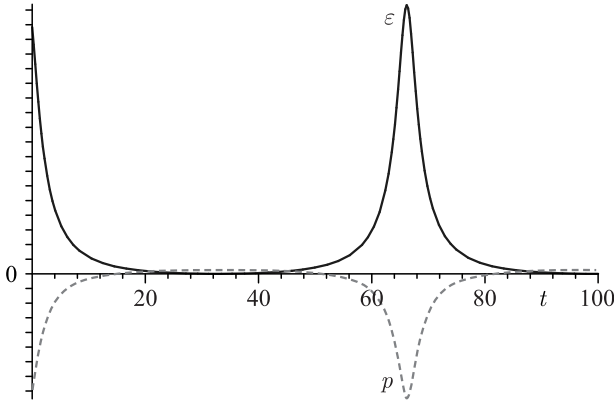


Рис. 1. Плотность энергии ε и давление p квинтэссенции с модифицированным уравнением состояния

Осциллирующая модель темной энергии с периодическим уравнением состояния в двух эквивалентных формулировках рассмотрена в [136]. Показано, что такая модель предполагает естественное объединение начальной инфляции с современным ускоряющимся режимом расширения. Модель с осциллирующей темной энергией также была изучена в [124].

Для имитации квинтэссенции с модифицированным уравнением состояния, подставляя (3.2а) и (3.2б) в (3.19), находим уравнение для нелинейности спинорного поля F

$$\frac{dF}{[(1+W)F - \varepsilon_{cr}]} = \frac{1}{2} \frac{dK}{K} \tag{3.20}$$

с решением

$$F = \lambda K^{(1+W)/2} + \frac{W}{1+W} \varepsilon_{cr}. \tag{3.21}$$

Лагранжиан соответствующего спинорного поля имеет вид

$$L = \frac{i}{2} [\bar{\psi} \gamma^\mu \nabla_\mu \psi - \nabla_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi] - \lambda K^{(1+W)/2} - \frac{W}{1+W} \varepsilon_{cr}. \tag{3.22}$$

Подставляя $\varepsilon_{cr} = 0$, получим (3.13). Цель введения квинтэссенции с модифицированным уравнением состояния — избежать проблемы вечного ускорения.

3.4. Модифицированный газ Чаплыгина. Один из подходов в современной космологии состоит в предположении, что темная энергия и темная материя являются различными проявлениями единой сущности. В соответствии с такой идеей была предложена модель модифицированного газа Чаплыгина в работе [20], получившая дальнейшее развитие в [21].

Модифицированный газ Чаплыгина задается уравнением состояния

$$p = W\varepsilon - A/\varepsilon^\alpha, \quad (3.23)$$

где W — некоторая постоянная, $A > 0$ и $0 \leq \alpha \leq 1$. Показано, что уравнение состояния модифицированного газа Чаплыгина интерполирует из эпохи преобладания материи в эпоху доминирования космологической постоянной [21]. Исследованы астрономические и космологические ограничения на параметры W , A и α в модели модифицированного газа Чаплыгина, и до сих пор нет согласия по поводу их значения.

Подставляя (3.2а) и (3.2б) в (3.23), находим

$$\frac{F^\alpha dF}{[(1+W)F^{1+\alpha} - A]} = \frac{1}{2} \frac{dK}{K} \quad (3.24)$$

с решением

$$F = \left[\frac{A}{1+W} + \lambda K^{(1+\alpha)(1+W)/2} \right]^{1/(1+\alpha)}. \quad (3.25)$$

Соответствующий лагранжиан спинорного поля имеет вид

$$L = \frac{i}{2} [\bar{\psi} \gamma^\mu \nabla_\mu \psi - \nabla_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi] - \left[\frac{A}{1+W} + \lambda K^{(1+\alpha)(1+W)/2} \right]^{1/(1+\alpha)}. \quad (3.26)$$

Легко проверить, что при $W = 0$ нелинейный член (3.25) совпадает с обобщенным газом Чаплыгина, т.е. с (3.17), тогда как при $A = 0$ (3.25) совпадает с лагранжианом для квинтэссенции, т.е. (3.12).

3.5. Квинтом-модель темной энергии. Для того, чтобы понять поведение уравнения состояния темной энергии (3.6) с $w_{\text{quint}} > -1$ в прошлом и с $w_{\text{quint}} < -1$ в настоящее время, была предложена квинтом-модель темной энергии в [71]. Квинтом-модель представляет собой динамическую модель темной энергии, и по сравнению с другими моделями темной энергии она определяет космическую эволюцию другим образом. Одной из характеристик квинтом-модели является тот факт, что ее уравнение состояния может плавно переходить в значение $w_{\text{quint}} = -1$ [41]. Напротив, в (3.5), где w_q является постоянной, в квинтом-модели это зависит от времени и может быть задано уравнением состояния

$$w_{\text{quint}}(t) = -r - \frac{s}{t^2}, \quad (3.27)$$

где r и s — некоторые параметры. Многие авторы воспользовались квинтом-моделью для того, чтобы генерировать скачущую Вселенную. Спинорное описание квинтом-модели дано в [42]. Следуя [42], построим соответствующее спинорное поле с нелинейностью. При этом сначала запишем параметр уравнения состояния. С учетом (3.2а) и (3.2б) для безмассового спинорного поля имеем

$$w_{\text{quint}} = \frac{p}{\varepsilon} = \frac{2KF_K - F(K)}{F(K)} = -1 + \frac{2KF_K}{F}. \quad (3.28)$$

Поскольку плотность энергии ε должна быть положительной, $F(K) = \varepsilon$ также должна быть положительной. Для $w_{\text{quint}} > -1$ в (3.28) мы должны иметь $F_K > 0$, а для $w_{\text{quint}} < -1$ мы должны иметь $F_K < 0$. Более того, из (3.3) мы видим, что для расширения Вселенной K является убывающей функцией времени. Принимая все это во внимание, мы, как в [42], построим три сценария:

1. Сценарий квинтом-А, который описывает, как Вселенная эволюционирует от фазы квинтэссенции с $w_{\text{quint}} > -1$ в фантомную фазу с $w_{\text{quint}} < -1$. В этом случае

$$F_K > 0 \rightarrow F_K < 0.$$

В качестве примера можно рассмотреть

$$F(K) = \lambda [(K - b)^2 + c], \quad F_K = 2\lambda(K - b), \quad (3.29)$$

где b и c — некоторые положительные постоянные. В этом случае $F(K) > 0$. Что касается F_K , на начальном этапе, когда Вселенная достаточно мала, т. е. если $V \ll 1$, $K = V_0^2/V^2$ является довольно большим, $F_K > 0$. Это приводит к $w_{\text{quint}} > -1$, т. е. у нас есть фаза, подобная квинтэссенции. В $K = b$ имеем $F_K = 0$ с параметром уравнения состояния $w_{\text{quint}} = -1$. После того, как Вселенная расширяется, K будет небольшим, следовательно, $F_K < 0$. В результате имеем фантомно-подобную фазу с $w_{\text{quint}} < -1$. Под этот выбор у нас есть

$$w_{\text{quint}} = -1 + \frac{4K(K - b)}{[(K - b)^2 + c]}. \quad (3.30)$$

2. Сценарий квинтом-В, который описывает, как Вселенная эволюционирует от фантомной фазы с $w_{\text{quint}} < -1$ к фазе квинтэссенции с $w_{\text{quint}} > -1$. В этом случае имеем

$$F_K < 0 \rightarrow F_K > 0.$$

В [42] предложено $F = \lambda [-(K - b)K + c]$. Хотя в этом случае условие $F_K < 0 \rightarrow F_K > 0$ выполняется, функция F , а следовательно, и плот-

ность энергии становятся отрицательными в ранней стадии эволюции. Поэтому предлагаем

$$F(K) = \frac{\lambda}{[(K-b)^2 + c]}, \quad F_K = -\frac{2\lambda(K-b)}{[(K-b)^2 + c]^2}. \quad (3.31)$$

Как видно, значение $F(K)$ всегда положительно. Из (3.31) можно легко проверить, что в начальной стадии эволюции, когда K является большим, $F_K < 0$. Это фантомно-подобная фаза с $w_{\text{quint}} < -1$. С расширением Вселенной K становится малым. При $K = b$ имеем $F_K = 0$, т.е. $w_{\text{quint}} = -1$. Далее при уменьшении K значение F_K становится положительным, что порождает фазу, подобную квинтэссенции с $w_{\text{quint}} > -1$. В этом случае имеем

$$w_{\text{quint}} = -1 - \frac{4K(K-b)}{[(K-b)^2 + c]}. \quad (3.32)$$

3. Сценарий квинтом-С, когда F_K меняет знак более одного раза. В этом случае имеем новый квинтом-сценарий и параметр уравнения состояния проходит значение -1 много раз. Можно предположить, что

$$F(K) = \lambda [K(K-b)^2 + c], \quad F_K = \lambda(K-b)(3K-b). \quad (3.33)$$

Из (3.33) имеем $F(K) > 0$, и F_K меняет знак более одного раза. В этом случае

$$w_{\text{quint}} = -1 - \frac{2K(K-b)(3K-b)}{[K(K-b)^2 + c]}. \quad (3.34)$$

Отметим, что (3.34) может быть смоделировано с помощью $F(K) = c + \sin(K)$, где $c > 1$ и, следовательно, $F(K) > 0$. В этом случае $F_K = \cos(K)$ имеет знакопеременное значение.

3.6. Газ Ван дер Ваальса. Космологические модели с бинарной смесью газа Ван дер Ваальса и идеальной жидкостью и/или темной энергией были недавно рассмотрены в ряде работ [115, 187, 198]. Было установлено, что в случае газа Ван дер Ваальса давление изначально отрицательное и с течением времени (в эволюции) становится положительным. Это отрицательное давление (силу отталкивания) можно рассматривать как источник начальной инфляции. Со временем давление становится положительным и скорость расширения замедляется.

Газ Ван дер Ваальса может быть задан уравнением состояния [115]

$$p = \frac{8W_{\text{vdw}}\varepsilon}{3 - \varepsilon} - 3\varepsilon^2, \quad (3.35)$$

где W_{vdw} — некоторая постоянная. В предыдущем уравнении давление p и плотность энергии ε описаны в терминах безразмерных переменных и параметр W_{vdw} связан пониженной температурой.

Подставляя (3.2а) и (3.2б) для безмассового спинорного поля, имеем

$$2KF_K = \frac{F(3F^2 - 10F + (3 + 8W_{\text{vdw}}))}{3 - F}, \quad (3.36)$$

которое в случае $W_{\text{vdw}} = 1/2$ может быть переписано в виде

$$6\frac{dF}{F} - 7\frac{dF}{F-1} + 3\frac{dF}{3F-7} = 7\frac{dK}{K} \quad (3.37)$$

с решением

$$\frac{F^6(3F-7)}{(F-1)^7} = K_0K^7, \quad (3.38)$$

где K_0 — некоторая постоянная. Вернемся к этому в разд. 10, где будем изучать эволюцию Вселенной, наполненной газом Ван дер Ваальса, излучением и модифицированным газом Чаплыгина для того, чтобы продемонстрировать преимущество использования спинорного описания различных видов материи.

4. ПРОСТРАНСТВО-ВРЕМЯ БИАНКИ ТИПА VI

Модель Бианки типа VI описывает анизотропную, но однородную Вселенную. Учитывая важность этой модели, в связи с наличием магнитных полей в галактиках, которое было доказано рядом астрофизических наблюдений, многие авторы изучали эволюцию Вселенной в рамках космологической модели Бианки типа VI (BVI) [100, 155, 202, 210, 213, 228, 242, 256]. Недавно было установлено, что в случае модели BVI условие соразмерности вместе с недиагональными уравнениями Эйнштейна приводят к изотропности тензора энергии-импульса, т. е. $T_1^1 = T_2^2 = T_3^3$ [213].

Спинорное описание темной энергии в рамках модели BVI дано в работах [206, 219].

Гравитационное поле в этом случае задается анизотропной моделью Бианки типа VI пространства-времени [179, 199, 210]:

$$ds^2 = dt^2 - a_1^2 e^{-2mx_3} dx_1^2 - a_2^2 e^{2nx_3} dx_2^2 - a_3^2 dx_3^2, \quad (4.1)$$

где метрические функции a_1 , a_2 и a_3 зависят от времени и m и n — некоторые произвольные постоянные. Отметим, что при подходящем выборе m , n , а также метрических функций a_1 , a_2 , a_3 в (4.1) метрика BVI порождает разные модели типа Бианки (см. прил. 2).

Далее будем исследовать существование сингулярности (особой точки) гравитационного поля при помощи инвариантных характеристик пространства-времени. В общей теории относительности эти инварианты состоят из

тензора кривизны и метрики. В отличие от электродинамики, где имеется только два инварианта ($J_1 = F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ и $J_2 = \star F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$), в четырехмерном пространстве-времени Римана существуют 14 независимых инвариантов [131] (см. прил. 2). Вместо того, чтобы исследовать все эти 14 инвариантов, можно рассмотреть только три из них, а именно скалярную кривизну $I_1 = R$, $I_2 = R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$ и скаляр Кретчмана $I_3 = R_{\alpha\beta\mu\nu}R^{\alpha\beta\mu\nu}$. В любой точке пространства-времени инварианты I_1, I_2, I_3 должны быть финитными. Теперь перепишем эти инварианты подробно, в терминах масштаба объема V :

$$I_1 = R = -\frac{2}{V} \left[\ddot{V} - \dot{a}_1 \dot{a}_2 a_3 - a_1 \dot{a}_2 \dot{a}_3 - \dot{a}_1 a_2 \dot{a}_3 - \frac{a_1 a_2}{a_3} (m^2 - mn + n^2) \right], \quad (4.2a)$$

$$I_2 = (R_0^0)^2 + (R_1^1)^2 + (R_2^2)^2 + (R_3^3)^2 + R_3^0 R_0^3, \quad (4.2b)$$

$$I_3 = 4 \left[(R_{01}^{01})^2 + (R_{02}^{02})^2 + (R_{03}^{03})^2 + (R_{12}^{12})^2 + (R_{31}^{31})^2 + (R_{23}^{23})^2 \right], \quad (4.2b)$$

где масштаб объема V определяется как

$$V = a_1 a_2 a_3. \quad (4.3)$$

Из (4.2) следует, что $I_1 \propto 1/V$, $I_2 \propto 1/V^2$ и $I_3 \propto 1/V^2$. Следует обратить внимание на то, что все другие инварианты состоят из двух или нескольких тензоров Риччи, поэтому $I_i \propto 1/V^p$, где p — число тензоров, входящих в соответствующий инвариант. Отсюда заключаем, что любая пространственно-временная точка, где $V \rightarrow 0$, является сингулярной точкой.

Для метрики (4.1) выберем нетривиальные компоненты тетрадного 4-вектора следующим образом:

$$e_0^{(0)} = 1, \quad e_1^{(1)} = a_1 e^{-mx_3}, \quad e_2^{(2)} = a_2 e^{nx_3}, \quad e_3^{(3)} = a_3. \quad (4.4)$$

Тогда из (1.92) находим следующие выражения для спинорной аффинной связности (см. прил. 3):

$$\Gamma_0 = 0, \quad (4.5a)$$

$$\Gamma_1 = \frac{1}{2} \left(\dot{a}_1 \bar{\gamma}^1 \bar{\gamma}^0 - m \frac{a_1}{a_3} \bar{\gamma}^1 \bar{\gamma}^3 \right) e^{-mx_3}, \quad (4.5b)$$

$$\Gamma_2 = \frac{1}{2} \left(\dot{a}_2 \bar{\gamma}^2 \bar{\gamma}^0 + n \frac{a_2}{a_3} \bar{\gamma}^2 \bar{\gamma}^3 \right) e^{nx_3}, \quad (4.5b)$$

$$\Gamma_3 = \frac{1}{2} \dot{a}_3 \bar{\gamma}^3 \bar{\gamma}^0. \quad (4.5g)$$

Рассмотрим спинорное поле, зависящее только от времени t , т. е. $\psi = \psi(t)$. Как показано в прил. 3, в этом случае компоненты тензора энергии-импульса имеют вид

$$T_0^0 = m_{\text{сп}} S + F(K), \quad (4.6a)$$

$$T_1^1 = F(K) - 2KF_K, \quad (4.6б)$$

$$T_2^2 = F(K) - 2KF_K, \quad (4.6в)$$

$$T_3^3 = F(K) - 2KF_K, \quad (4.6г)$$

$$T_1^0 = -\frac{(n-2m)e^{-mx_3}}{4} \frac{a_1}{a_3} A^2, \quad (4.6д)$$

$$T_2^0 = -\frac{(m-2n)e^{nx_3}}{4} \frac{a_2}{a_3} A^1, \quad (4.6е)$$

$$T_3^0 = 0, \quad (4.6ж)$$

$$T_2^1 = \frac{a_2 e^{(m+n)x_3}}{4a_1} \left[\left(\frac{\dot{a}_1}{a_1} - \frac{\dot{a}_2}{a_2} \right) A^3 - \frac{m+n}{a_3} A^0 \right], \quad (4.6з)$$

$$T_3^1 = \frac{a_3 e^{mx_3}}{4a_1} \left(\frac{\dot{a}_3}{a_3} - \frac{\dot{a}_1}{a_1} \right) A^2, \quad (4.6и)$$

$$T_3^2 = \frac{a_3 e^{-nx_3}}{4a_2} \left(\frac{\dot{a}_2}{a_2} - \frac{\dot{a}_3}{a_3} \right) A^1. \quad (4.6к)$$

Как видно из (4.6), нетривиальность недиагональных компонент тензора энергии-импульса напрямую связана со спинорными аффинными связностями Γ_i .

Из (1.6) можно записать уравнения для билинейных спинорных форм (1.4):

$$\dot{S}_0 + \mathcal{G} A_0^0 = 0, \quad (4.7a)$$

$$\dot{P}_0 - \Phi A_0^0 = 0, \quad (4.7б)$$

$$\dot{A}_0^0 - \frac{m-n}{a_3} A_0^3 + \Phi P_0 - \mathcal{G} S_0 = 0, \quad (4.7в)$$

$$\dot{A}_0^3 - \frac{m-n}{a_3} A_0^0 = 0, \quad (4.7г)$$

$$\dot{v}_0^0 - \frac{m-n}{a_3} v_0^3 = 0, \quad (4.7д)$$

$$\dot{v}_0^3 - \frac{m-n}{a_3} v_0^0 + \Phi Q_0^{30} + \mathcal{G} Q_0^{21} = 0, \quad (4.7е)$$

$$\dot{Q}_0^{30} - \Phi v_0^3 = 0, \quad (4.7ж)$$

$$\dot{Q}_0^{21} - \mathcal{G} v_0^3 = 0, \quad (4.7з)$$

где обозначены $S_0 = SV$, $P_0 = PV$, $A_0^\mu = A_\mu V$, $v_0^\mu = v^\mu V$, $Q_0^{\mu\nu} = Q^{\mu\nu} V$ и $\Phi = m_{\text{сп}} + \mathcal{D}$.

Комбинируя эти уравнения, получим два первых интеграла:

$$(S_0)^2 + (P_0)^2 + (A_0^0)^2 - (A_0^3)^2 = C_1 = \text{const}, \quad (4.8a)$$

$$(Q_0^{30})^2 + (Q_0^{21})^2 + (v_0^3)^2 - (v_0^0)^2 = C_2 = \text{const}. \quad (4.8б)$$

Рассмотрим уравнения Эйнштейна. С учетом (П2.18) и (4.6) имеем

$$\frac{\ddot{a}_2}{a_2} + \frac{\ddot{a}_3}{a_3} + \frac{\dot{a}_2 \dot{a}_3}{a_2 a_3} - \frac{n^2}{a_3^2} = \kappa (F(K) - 2KF_K), \quad (4.9a)$$

$$\frac{\ddot{a}_3}{a_3} + \frac{\ddot{a}_1}{a_1} + \frac{\dot{a}_3 \dot{a}_1}{a_3 a_1} - \frac{m^2}{a_3^2} = \kappa (F(K) - 2KF_K), \quad (4.9б)$$

$$\frac{\ddot{a}_1}{a_1} + \frac{\ddot{a}_2}{a_2} + \frac{\dot{a}_1 \dot{a}_2}{a_1 a_2} + \frac{mn}{a_3^2} = \kappa (F(K) - 2KF_K), \quad (4.9в)$$

$$\frac{\dot{a}_1 \dot{a}_2}{a_1 a_2} + \frac{\dot{a}_2 \dot{a}_3}{a_2 a_3} + \frac{\dot{a}_3 \dot{a}_1}{a_3 a_1} - \frac{m^2 - mn + n^2}{a_3^2} = \kappa (m_{\text{сп}} S + F(K)), \quad (4.9г)$$

$$(m - n) \frac{\dot{a}_3}{a_3} - m \frac{\dot{a}_1}{a_1} + n \frac{\dot{a}_2}{a_2} = 0, \quad (4.9д)$$

$$0 = -\frac{(n - 2m) e^{-mx_3}}{4} \frac{a_1}{a_3} A^2, \quad (4.9е)$$

$$0 = -\frac{(m - 2n) e^{nx_3}}{4} \frac{a_2}{a_3} A^1, \quad (4.9ж)$$

$$0 = \frac{e^{a_2(m+n)x_3}}{4 a_1} \left[\left(\frac{\dot{a}_1}{a_1} - \frac{\dot{a}_2}{a_2} \right) A^3 - \frac{m+n}{a_3} A^0 \right], \quad (4.9з)$$

$$0 = \frac{a_3 e^{mx_3}}{4 a_1} \left(\frac{\dot{a}_3}{a_3} - \frac{\dot{a}_1}{a_1} \right) A^2, \quad (4.9и)$$

$$0 = \frac{a_3 e^{-nx_3}}{4 a_2} \left(\frac{\dot{a}_2}{a_2} - \frac{\dot{a}_3}{a_3} \right) A^1. \quad (4.9к)$$

Из (4.9е) и (4.9ж) непосредственно находим

$$A^2 = 0, \quad \text{и} \quad A^1 = 0. \quad (4.10)$$

Ввиду (4.10) отношения (4.9и) и (4.9к) выполняются без наложения каких-либо ограничений на метрические функции. Из (4.9з) находим следующее соотношение между A^0 и A^3 :

$$\left(\frac{\dot{a}_1}{a_1} - \frac{\dot{a}_2}{a_2} \right) A^3 = \frac{m+n}{a_3} A^0. \quad (4.11)$$

Подставляя (4.11) в (4.7г), находим

$$\frac{m+n}{m-n} \frac{A_0^3}{A_0^3} = \left(\frac{\dot{a}_1}{a_1} - \frac{\dot{a}_2}{a_2} \right) \quad (4.12)$$

с решением

$$(A_0^3)^{\frac{m+n}{m-n}} = X_{03} \left(\frac{a_1}{a_2} \right), \quad X_{03} = \text{const.} \quad (4.13)$$

С другой стороны, из (4.9д) находим следующие соотношения между метрическими функциями:

$$a_3 = X_0 \left(\frac{a_1^m}{a_2^n} \right)^{1/(m-n)}. \quad (4.14)$$

Таким образом, недиагональные компоненты уравнения Эйнштейна не только связывают различные метрические функции, как было найдено в [179], но и накладывают некоторые ограничения на компоненты спинорного поля.

Чтобы найти метрические функции явно, надо решить диагональные уравнения системы Эйнштейна. Суммирование уравнений (4.9а), (4.9б), (4.9в) и трижды (4.9г) дает

$$\ddot{V} = 2 \frac{m^2 - mn + n^2}{a_3^2} V + \frac{3\kappa}{2} [m_{\text{sp}} S + 2(F - KF_K)] V. \quad (4.15)$$

Явное присутствие a_3 в (4.15) заставляет наложить дополнительные условия. В ранних работах [179] предлагались две различные ситуации, а именно: приняли $a_3 = \sqrt{V}$ и $a_3 = V$, что дало возможность найти точные решения для метрических функций.

В случае $a_3 = V$ с учетом (4.3) и (4.14) находим следующие выражения для a_1 и a_2 :

$$a_1 = \left[\frac{V}{X_0} \right]^{\frac{m-n}{m+n}}, \quad a_2 = \left[\frac{V}{X_0} \right]^{\frac{n-m}{m+n}}. \quad (4.16)$$

Уравнение для нахождения V в этом случае имеет вид

$$\ddot{V} = 2 \frac{m^2 - mn + n^2}{V} + \frac{3\kappa}{2} [m_{\text{sp}} S + 2(F - KF_K)] V. \quad (4.17)$$

С другой стороны, приняв $a_3 = \sqrt{V}$, находим

$$a_1 = X_0^{\frac{n-m}{m+n}} V^{\frac{m}{2(m+n)}}, \quad a_2 = X_0^{\frac{m-n}{n}} V^{\frac{n}{2(m+n)}}. \quad (4.18)$$

Уравнение для V в этом случае имеет вид

$$\ddot{V} = 2 [m^2 - mn + n^2] + \frac{3\kappa}{2} [m_{\text{sp}} S + 2(F - KF_K)] V. \quad (4.19)$$

В недавних работах [205, 208] введено условие пропорциональности, которое широко используется в литературе. Потребуем, чтобы расширение было пропорционально компоненте тензора сдвига, а именно:

$$\vartheta = N_3 \sigma_3^3. \quad (4.20)$$

Мотивация для такого предположения объясняется ссылкой на работу Торна [237]. По наблюдениям соотношения скорости и красного смещения для внегалактических источников предполагается, что расширение Вселенной Хаббла изотропно сегодня в пределах $\approx 30\%$ [107, 118]. Точнее, исследование красного смещения дает предел

$$\frac{\sigma}{H} \leq 0,3 \quad (4.21)$$

на отношение сдвига σ к постоянной Хаббла H в окрестности нашей Галактики к настоящему времени. Коллинс с соавторами [57] указали, что для пространственно-однородной метрики нормальная конгруэнтность в однородном расширении удовлетворяет условию $\sigma/\theta = \text{const}$. При условии пропорциональности также обнаружено, что распределение энергии-импульса в модели строго изотропно, что абсолютно справедливо в нашем случае.

Находим расширения и сдвиг для метрики BVI. Расширение задается формулой

$$\vartheta = u^\mu_{;\mu} = u^\mu_\mu + \Gamma^\mu_{\mu\alpha} u^\alpha, \quad (4.22)$$

а сдвиг выражением

$$\sigma^2 = \frac{1}{2} \sigma_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} \quad (4.23)$$

с

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2} [u_{\mu;\alpha} P_\nu^\alpha + u_{\nu;\alpha} P_\mu^\alpha] - \frac{1}{3} \vartheta P_{\mu\nu}, \quad (4.24)$$

где вектор проекции P :

$$P^2 = P, \quad P_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - u_\mu u_\nu, \quad P^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu - u^\mu u_\nu. \quad (4.25)$$

В сопутствующей системе координат имеем $u^\mu = (1, 0, 0, 0)$. В этом случае находим

$$\vartheta = \frac{\dot{a}_1}{a_1} + \frac{\dot{a}_2}{a_2} + \frac{\dot{a}_3}{a_3} = \frac{\dot{V}}{V} \quad (4.26)$$

и

$$\sigma_1^1 = -\frac{1}{3} \left(-2 \frac{\dot{a}_1}{a_1} + \frac{\dot{a}_2}{a_2} + \frac{\dot{a}_3}{a_3} \right) = \frac{\dot{a}_1}{a_1} - \frac{1}{3} \vartheta, \quad (4.27a)$$

$$\sigma_2^2 = -\frac{1}{3} \left(-2 \frac{\dot{a}_2}{a_2} + \frac{\dot{a}_3}{a_3} + \frac{\dot{a}_1}{a_1} \right) = \frac{\dot{a}_2}{a_2} - \frac{1}{3} \vartheta, \quad (4.27b)$$

$$\sigma_3^3 = -\frac{1}{3} \left(-2 \frac{\dot{a}_3}{a_3} + \frac{\dot{a}_1}{a_1} + \frac{\dot{a}_2}{a_2} \right) = \frac{\dot{a}_3}{a_3} - \frac{1}{3} \vartheta. \quad (4.27b)$$

Тогда получим

$$\sigma^2 = \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^3 \left(\frac{\dot{a}_i}{a_i} \right)^2 - \frac{1}{3} \vartheta^2 \right] = \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^3 H_i^2 - \frac{1}{3} \vartheta^2 \right]. \quad (4.28)$$

Как видно из (4.26), (4.27) и (4.28), выражения для расширения, сдвига и компонент тензора сдвига не зависят от параметров m и n , следовательно, будет то же самое для других моделей Бианки, которые вытекают из (4.1).

Подставляя (4.14) в (4.26), (4.27) и (4.28), находим

$$\vartheta = \frac{2m - n}{m - n} \frac{\dot{a}_1}{a_1} + \frac{m - 2n}{m - n} \frac{\dot{a}_2}{a_2} \quad (4.29)$$

и

$$\sigma_1^1 = \frac{m - 2n}{3(m - n)} \left(\frac{\dot{a}_1}{a_1} - \frac{\dot{a}_2}{a_2} \right), \quad (4.30a)$$

$$\sigma_2^2 = \frac{n - 2m}{3(m - n)} \left(\frac{\dot{a}_1}{a_1} - \frac{\dot{a}_2}{a_2} \right), \quad (4.30б)$$

$$\sigma_3^3 = \frac{m + n}{3(m - n)} \left(\frac{\dot{a}_1}{a_1} - \frac{\dot{a}_2}{a_2} \right). \quad (4.30в)$$

С учетом (4.14), (4.27в), (4.3) из (4.20) получим

$$a_1 = \left[\frac{X_1^{(m-n)/(m-2n)}}{X_0} V \right]^{\frac{1}{3} + N_3 \frac{m-2n}{m+n}}, \quad (4.31a)$$

$$a_2 = X_1 \left[\frac{X_1^{(m-n)/(m-2n)}}{X_0} V \right]^{\frac{1}{3} + N_3 \frac{n-2m}{m+n}}, \quad (4.31б)$$

$$a_3 = X_0 X_1^{-n/(m-n)} \left[\frac{X_1^{(m-n)/(m-2n)}}{X_0} V \right]^{\frac{1}{3} + N_3}, \quad (4.31в)$$

где X_1 — постоянная интегрирования. Далее, учитывая, что $V = a_1 a_2 a_3$, из (4.31) находим

$$X_1^{\frac{m-n}{m-2n} + \frac{m-2n}{m-n}} = 1, \quad (4.32)$$

где либо $X_1 = 1$, либо $\frac{m-n}{m-2n} + \frac{m-2n}{m-n} = 0$. Так как $(m-n)^2 + (m-2n)^2 \neq 0$, заключаем, что $X_1 = 1$. Таким образом, для метрических функций получим

$$a_1 = \left[\frac{V}{X_0} \right]^{\frac{1}{3} + N_3 \frac{m-2n}{m+n}}, \quad a_2 = \left[\frac{V}{X_0} \right]^{\frac{1}{3} + N_3 \frac{n-2m}{m+n}}, \quad a_3 = X_0 \left[\frac{V}{X_0} \right]^{\frac{1}{3} + N_3}. \quad (4.33)$$

Уравнение для V может быть получено из уравнения Эйнштейна (4.9а)–(4.9г), которое после некоторой манипуляции выглядит как

$$\ddot{V} = 2(m^2 - mn + n^2)X_0^{2N_3-4/3}V^{1/3-2N_3} + \frac{3\kappa}{2} [m_{\text{сп}}S + 2(F(K) - KF_K)]V. \quad (4.34)$$

Как видно, подставляя $N_3 = 2/3$ в (4.33) и (4.34), получаем (4.16) и (4.17) соответственно, тогда как для $N_3 = 1/6$ и $X_0 = 1$ получаем (4.18) и (4.19) соответственно.

Для того, чтобы решить (4.34), мы должны выразить нелинейность спинорного поля и, следовательно, инварианты спинорного поля K в терминах масштаба объема V . Чтобы сделать это, вспомним, что K имеет одно из следующих значений: $\{I, J, I + J, I - J\}$.

Вспомнив, что $\mathcal{D} = 2SF_K K_J$ и $\mathcal{G} = 2PF_K K_J$ в случае $K = I$, т. е. $\mathcal{G} = 0$, из (4.7а) непосредственно имеем

$$\dot{S}_0 = 0 \quad (4.35)$$

с решением

$$K = I = S^2 = \frac{V_0^2}{V^2} \rightarrow S = \frac{V_0}{V}, \quad V_0 = \text{const.} \quad (4.36)$$

В этом случае спинорное поле может быть как массивным, так и безмассовым.

Как уже было сказано раньше, в тех случаях, когда K принимает одно из значений $\{J, I + J, I - J\}$, мы рассмотрим только безмассовое спинорное поле.

В случае $K = J$, т. е. $\Phi = m_{\text{сп}} + \mathcal{D} = 0$ из (4.7б), имеем

$$\dot{P}_0 = 0 \quad (4.37)$$

с решением

$$K = J = P^2 = \frac{V_0^2}{V^2} \rightarrow P = \frac{V_0}{V}, \quad V_0 = \text{const.} \quad (4.38)$$

В случае $K = I + J$ уравнения (4.7а) и (4.7б) могут быть переписаны в виде

$$\dot{S}_0 + 2PF_K A_0^0 = 0, \quad (4.39а)$$

$$\dot{P}_0 - 2SF_K A_0^0 = 0, \quad (4.39б)$$

что можно записать как

$$S_0 \dot{S}_0 + P_0 \dot{P}_0 = \frac{d}{dt} (S_0^2 + P_0^2) = \frac{d}{dt} (V^2 K) = 0 \quad (4.40)$$

с решением

$$K = \frac{V_0^2}{V^2}, \quad V_0 = \text{const.} \quad (4.41)$$

Заметим, что S и P можно представить следующим образом:

$$S = \frac{V_0}{V} \sin \theta, \quad P = \frac{V_0}{V} \cos \theta. \quad (4.42)$$

Величина θ может быть установлена из (4.39а) или из (4.39б) с учетом (4.11), (4.13) и (4.33).

Наконец, для $K = I - J$ уравнения (4.7а) и (4.7б) могут быть представлены в виде уравнений

$$\dot{S}_0 - 2PF_K A_0^0 = 0, \quad (4.43а)$$

$$\dot{P}_0 - 2SF_K A_0^0 = 0, \quad (4.43б)$$

которые можно переписать следующим образом:

$$S_0 \dot{S}_0 - P_0 \dot{P}_0 = \frac{d}{dt} (S_0^2 - P_0^2) = \frac{d}{dt} (V^2 K) = 0 \quad (4.44)$$

с решением

$$K = \frac{V_0^2}{V^2}, \quad V_0 = \text{const.} \quad (4.45)$$

Как и в предыдущем случае, S и P можно представить в виде

$$S = \frac{V_0}{V} \cosh \theta, \quad P = \frac{V_0}{V} \sinh \theta. \quad (4.46)$$

Как и в предыдущем случае, величина θ может быть установлена из (4.43а) или (4.43б) с учетом (4.11), (4.13) и (4.33).

4.1. Решения уравнений полей. Теперь получим решения полевых уравнений. Начнем с уравнений спинорного поля. Ввиду (1.10) и (4.5) уравнения спинорного поля (1.6а) принимают вид

$$i\bar{\gamma}^0 \left(\dot{\psi} + \frac{1}{2} \frac{\dot{V}}{V} \psi \right) - m_{\text{sp}} \psi - \frac{m-n}{2a_3} \bar{\gamma}^3 \psi - \mathcal{D} \psi - i\mathcal{G} \bar{\gamma}^5 \psi = 0, \quad (4.47а)$$

$$i \left(\dot{\bar{\psi}} + \frac{1}{2} \frac{\dot{V}}{V} \bar{\psi} \right) \bar{\gamma}^0 + m_{\text{sp}} \bar{\psi} - \frac{m-n}{2a_3} \bar{\psi} \bar{\gamma}^3 + \mathcal{D} \bar{\psi} + i\mathcal{G} \bar{\psi} \bar{\gamma}^5 = 0. \quad (4.47б)$$

Как было сказано, ψ зависит только от времени t . Мы рассмотрим 4-компонентное спинорное поле

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}. \quad (4.48)$$

Обозначив $\phi_i = \sqrt{V}\psi_i$ и $\bar{X}_0 = (m - n)X_0^{N_3-2/3}$, из (4.47) для спинорного поля имеем

$$\dot{\phi}_1 + i\Phi\phi_1 + \left[i\frac{\bar{X}_0}{2V^{1/3+N_3}} + \mathcal{G} \right] \phi_3 = 0, \quad (4.49a)$$

$$\dot{\phi}_2 + i\Phi\phi_2 - \left[i\frac{\bar{X}_0}{2V^{1/3+N_3}} - \mathcal{G} \right] \phi_4 = 0, \quad (4.49б)$$

$$\dot{\phi}_3 - i\Phi\phi_3 + \left[i\frac{\bar{X}_0}{2V^{1/3+N_3}} - \mathcal{G} \right] \phi_1 = 0, \quad (4.49в)$$

$$\dot{\phi}_4 - i\Phi\phi_4 - \left[i\frac{\bar{X}_0}{2V^{1/3+N_3}} + \mathcal{G} \right] \phi_2 = 0. \quad (4.49г)$$

Далее, обозначив $\mathcal{Y} = \frac{\bar{X}_0}{2V^{1/3+N_3}}$, запишем предыдущую систему уравнений в виде

$$\dot{\phi} = A\phi, \quad (4.50)$$

где $\phi = \text{col}(\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4)$ и

$$A = \begin{pmatrix} -i\Phi & 0 & -i\mathcal{Y} - \mathcal{G} & 0 \\ 0 & -i\Phi & 0 & i\mathcal{Y} - \mathcal{G} \\ -i\mathcal{Y} + \mathcal{G} & 0 & i\Phi & 0 \\ 0 & i\mathcal{Y} + \mathcal{G} & 0 & i\Phi \end{pmatrix}. \quad (4.51)$$

Можно легко найти, что

$$\det A = (\Phi^2 + \mathcal{Y}^2 + \mathcal{G}^2)^2. \quad (4.52)$$

Решение уравнения (4.50) может быть записано в форме

$$\phi(t) = T \exp \left(- \int_t^{t_1} A_1(\tau) d\tau \right) \phi(t_1), \quad (4.53)$$

где

$$A_1 = \begin{pmatrix} -i\mathcal{D} & 0 & -i\mathcal{Y} - \mathcal{G} & 0 \\ 0 & -i\mathcal{D} & 0 & i\mathcal{Y} - \mathcal{G} \\ -i\mathcal{Y} + \mathcal{G} & 0 & i\mathcal{D} & 0 \\ 0 & i\mathcal{Y} + \mathcal{G} & 0 & i\mathcal{D} \end{pmatrix} \quad (4.54)$$

и $\phi(t_1)$ — решение при $t = t_1$. Как мы уже показали, $K = V_0^2/V^2$ для $K = \{J, I + J, I - J\}$ при нулевой массе спинорного поля и $K = V_0^2/V^2$ для $K = I$ при любой массе спинорного поля. Поскольку наша Вселенная расширяется, величины \mathcal{D} , \mathcal{Y} и \mathcal{G} становятся тривиальными при больших t . Таким

образом, в случае $K = I$ с нетривиальной массой спинорного поля можно предполагать, что $\phi(t_1) = \text{col}(e^{-im_{\text{sp}}t_1}, e^{-im_{\text{sp}}t_1}, e^{im_{\text{sp}}t_1}, e^{im_{\text{sp}}t_1})$, тогда как в случаях с нулевой массой спинорного поля имеем $\phi(t_1) = \text{col}(\phi_1^0, \phi_2^0, \phi_3^0, \phi_4^0)$, где ϕ_i^0 — некоторая постоянная. Другой метод для решения системы уравнений (4.49) дан в работе [179].

Что касается уравнения для V , т. е. (4.34), решим его, полагая $K = I$, так как в этом случае можно рассмотреть ненулевой массовый член.

Полагая

$$F = \sum_k \lambda_k I^{n_k} = \sum_k \lambda_k S^{2n_k}, \quad (4.55)$$

с учетом $S = V_0/V$ находим

$$\ddot{V} = \Phi(V), \quad (4.56)$$

$$\Phi(V) = \bar{X}V^{1/3-2N_3} + \frac{3\kappa}{2} \left[m_{\text{sp}} V_0 + 2 \sum_k \lambda_k (1 - n_k) V_0^{2n_k} V^{1-2n_k} \right],$$

где $\bar{X} = 2(m^2 - mn + n^2) X_0^{(2N_3-4/3)}$.

Можно показать, что уравнение (4.56) имеет единственное решение (см. прил. 4). Первый интеграл уравнения (4.56):

$$\dot{V} = \Phi_1(V), \quad (4.57)$$

$$\Phi_1(V) = \sqrt{\bar{X}_1 V^{(4/3-2N_3)} + 3\kappa \left[m_{\text{sp}} V_0 V + \sum_k \lambda_k V_0^{2n_k} V^{2(1-n_k)} + \bar{C} \right]},$$

где $\bar{X}_1 = 6\bar{X}/(4 - 6N_3)$ и \bar{C} — постоянная интегрирования. Решение для V может быть записано в квадратурах:

$$\int \frac{dV}{\sqrt{\bar{X}_1 V^{(4/3-2N_3)} + 3\kappa \left[m_{\text{sp}} V_0 V + \sum_k \lambda_k V_0^{2n_k} V^{2(1-n_k)} \right] + \bar{C}}} = t + t_0, \quad (4.58)$$

где \bar{C} и t_0 — некоторые произвольные постоянные. Точные решения уравнения (4.56) или (4.57) могут быть найдены только для некоторых специальных случаев при наложении жестких ограничений на параметры. В разд. 9 проиллюстрированы некоторые точные решения для модели LRSBI. Аналогичные решения могут быть найдены также для уравнения (4.56).

4.2. Асимптотическое поведение решений. Чтобы определить характер эволюции, сначала следует изучить асимптотическое поведение уравнения (4.56). Напомним, что $K = V_0^2/V^2$. Поскольку все физические величины, построенные из спинорных полей, а также инварианты гравитационного поля являются обратной функцией V в некоторой степени, можно сделать вывод, что любая точка пространства-времени, где V становится равным нулю, — это особая точка [177]. Поэтому предполагаем, что вначале V был малым, но не нулевым. Затем из (4.56) мы видим, что при $t \rightarrow 0$ нелинейное слагаемое преобладает, если $n_k = n_1 : n_1 > \max[1/2, N_3 + 1/3]$. Поскольку мы рассматриваем расширяющуюся Вселенную, при $t \rightarrow \infty$ масштаб объема V должен быть достаточно большим. В этом случае нелинейное слагаемое преобладает над первым членом, если $n_k = n_2 : n_2 < \min[1/2, N_3 + 1/3]$. Для $n_k = n_0 : 1 - 2n_0 = 0$, т. е. $n_0 = 1/2$, нелинейность спинорного поля исчезает и соответствующий терм будет эквивалентен (эффективно) массовому члену.

4.3. Параметр замедления. Чтобы определить, позволяет модель замедленный или ускоренный режим расширения, вычислим параметр замедления q , который определяется как

$$q = -\frac{V\ddot{V}}{\dot{V}^2} \quad (4.59)$$

и ввиду (4.56) и (4.57) может быть представлен в форме

$$\begin{aligned} q &= -\frac{V\Phi(V)}{\Phi_1^2(V)} = \\ &= -\frac{\bar{X}V^{(4/3-2N_3)} + \frac{3\kappa}{2} \left[m_{\text{sp}}V_0V + 2 \sum_k \lambda_k(1-n_k)V_0^{2n_k}V^{1-2n_k} \right]}{\bar{X}_1V^{(4/3-2N_3)} + 3\kappa \left[m_{\text{sp}}V_0V + \sum_k \lambda_kV_0^{2n_k}V^{2(1-n_k)} \right] + \bar{C}}. \end{aligned} \quad (4.60)$$

Теперь посмотрим, что происходит с параметром замедления при $t \rightarrow \infty$. Как уже было установлено, при $n_2 < 1/2$ и $n_2 < 1/3 + N_3$ нелинейное слагаемое преобладает и в этом случае

$$q \approx -(1 - n_2) < 0, \quad (4.61)$$

тогда как для $N_3 < 1/6$ и $n_2 > 1/3 + N_3$ имеем

$$q \approx -\frac{\bar{X}}{\bar{X}_1} = -(2/3 - N_3) < 0. \quad (4.62)$$

Таким образом, мы видим, что в обоих случаях Вселенная расширяется с ускорением.

Следует также подчеркнуть, что для $n_1 > 1/2$ и $N_3 > 1/6$ массовый член преобладает асимптотически при $t \rightarrow \infty$ и Вселенная расширяется как квадратичная функция времени, т. е. $V|_{t \rightarrow \infty} \propto t^2$.

Приведенный выше анализ показывает, что отсутствие массового члена приводит к постоянному параметру замедления, тогда как для того, чтобы параметр замедления менялся в течение времени, наличие ненулевой массы является необходимым условием.

4.4. Параметр уравнения состояния. Посмотрим, что происходит в этой модели с параметром уравнения состояния. Подставляя (4.55) в (4.6а) и (4.6б), (4.6в) и (4.6г), находим выражения для плотности энергии $\varepsilon = T_0^0$ и давления $p = -T_1^1$ (в этом случае $T_1^1 = T_2^2 = T_3^3$):

$$\varepsilon = m_{\text{сп}} \frac{V_0}{V} + \sum_k \lambda_k \frac{V_0^{2n_k}}{V^{2n_k}}, \quad p = \sum_k \lambda_k (2n_k - 1) \frac{V_0^{2n_k}}{V^{2n_k}}. \quad (4.63)$$

Ввиду (4.63) в этом случае для параметра уравнения состояния находим

$$W = \frac{p}{\varepsilon} = \frac{\sum_k \lambda_k (2n_k - 1) \frac{V_0^{2n_k}}{V^{2n_k}}}{m_{\text{сп}} \frac{V_0}{V} + \sum_k \lambda_k \frac{V_0^{2n_k}}{V^{2n_k}}}. \quad (4.64)$$

Можно показать, что на ранней стадии эволюции параметр уравнения состояния выражает преобладание обычной материи, а на более поздних стадиях темная энергия становится доминирующей. Более того, в отсутствие массового члена параметр уравнения состояния становится постоянным, так как в этом случае $W = 2n_k - 1$, в то время как для нетривиального массового члена параметр уравнения состояния — это переменная функции времени. Здесь мы использовали тот факт, что в любой конкретной стадии эволюции одно из слагаемых суммы будет преобладающим и, следовательно, другие могут быть пропущены.

4.5. Выбор нелинейности. Могут возникать некоторые вопросы относительно выбора нелинейности в форме (4.55). Причина кроется в том, что спинорное описание различных видов жидкости и темной энергии, таких как экипротические вещества, пыль, излучение, квинтэссенция, газ Чаплыгина, фантомная материя и т. д., в той или иной форме задается как степенная функция инвариантов спинорного поля. В то время, как спинорное описание жидкости или темной энергии приводит к исчезновению массового члена, выбор (4.55) все же позволяет изучить роль массы спинорного поля

в эволюции Вселенной. Чтобы показать это, напомним, что только в случае $K = I = S^2$ можно было бы выразить K в терминах V с нетривиальными компонентами (4.6а), (4.6б), (4.6в) и (4.6г) из

$$W = \frac{p}{\varepsilon}, \tag{4.65}$$

и находим [200, 201, 204, 206]

$$F = \lambda S^{1+W} - mS = \lambda \frac{V_0^{1+W}}{V^{1+W}} - m \frac{V_0}{V}, \tag{4.66}$$

который соответствует пыли ($W = 0$), излучению ($W = 1/3$), жесткой Вселенной ($W \in (1/3, 1)$), Вселенной Зельдовича ($W = 1$), квинтэссенции ($W \in (-1/3, -1)$), космологической постоянной ($W = -1$), фантомной материи ($W < -1$) и экпиротической материи ($W > 1$) соответственно. Подставляя (4.66) в (1.3), находим, что массовый член в этом случае исчезает, в то время как спинорное поле с нелинейностью, заданной (4.55), не исчезает. В этом случае для плотности энергии и давления находим $\varepsilon = \lambda V_0^{1+W}/V^{1+W}$ и $p = \lambda W V_0^{1+W}/V^{1+W}$ соответственно. Параметр уравнения состояния в этом случае по определению — постоянная, тогда как в отсутствие массового члена параметр уравнения состояния также становится постоянной. Однако можно использовать (4.55) с тривиальной массой в лагранжиане и сумма $\left(\sum_k\right)$ в (4.55) может быть рассмотрена как мультикомпонентный источник, где k отвечает за различные типы материи и темной энергии, такие как экпиротическая материя, пыль, излучение, квинтэссенция, газ Чаплыгина, фантомная материя и т. д.

Сравнивая (4.55) с (4.66), находим $2n_k = W + 1$. Далее, подставляя значения W для различных жидкостей и темной энергии, находим соответствующие значения для n_k : пыли ($n_k = 1/2$), излучения ($n_k = 2/3$), жесткой Вселенной ($n_k \in (2/3, 1)$), Вселенной Зельдовича ($n_k = 1$), квинтэссенции ($n_k \in (0, 1/3)$), космологической постоянной ($n_k = 0$), фантомной материи ($n_k < 0$) и экпиротической материи ($n_k > 1$) соответственно. Показано, что, когда $n_k = 1/2$, соответствующий член может быть добавлен к массовому члену. Таким образом, заключаем, что член с $n_k = 1/2$, который также описывает пыль, ведет себя как массовый член.

4.6. Преимущество спинорного описания. Одно из главных преимуществ использования спинорных описаний источников поля основано на том, что в этом случае не нужно думать, что компоненты, содержащиеся в рассматриваемой системе, могут быть разделены. Чтобы показать это, запишем тождество Бианки $G_{\mu;\nu}^\nu = 0$, которое приводит к

$$T_{\mu;\nu}^\nu = T_{\mu,\nu}^\nu + \Gamma_{\rho\nu}^\nu T_\mu^\rho - \Gamma_{\mu\nu}^\rho T_\rho^\nu = 0, \tag{4.67}$$

что для метрики (4.1) с учетом компонент тензора энергии-импульса имеет вид

$$\dot{\varepsilon} + \frac{\dot{V}}{V}(\varepsilon + p) = 0. \quad (4.68)$$

Подставляя ε и p из (4.6а), (4.6б), (4.6в) и (4.6г) в (4.68), находим

$$m_{\text{sp}}\dot{S} + \dot{F} + \frac{\dot{V}}{V}(m_{\text{sp}}S + 2KF_K) = 0, \quad (4.69)$$

что после некоторой манипуляции дает

$$\frac{m_{\text{sp}}}{V} \frac{d}{dt}(SV) + \frac{F_K}{V^2} \frac{d}{dt}(KV^2) = 0. \quad (4.70)$$

В случае $K = I = S^2$ (4.70) выполняется идентично благодаря (4.36), т.е. $SV = \text{const}$ и $KV^2 = \text{const}$, тогда как в случае, когда K принимает одно из следующих значений $\{J, I + J, I - J\}$, для безмассового спинорного поля (4.70) выполняется идентично благодаря (4.38), (4.41) и (4.45), т.е. $KV^2 = \text{const}$. Следовательно, если мы используем спинорное описание различных жидкостей и темной энергии, которые получаются из соответствующих уравнений состояния, тождество Бианки тоже будет выполняться, не вызывая каких-либо дополнительных условий.

4.7. Численные решения. Решим уравнение (4.56) численно. Для простоты рассмотрим систему только с двумя компонентами. В этом случае имеем

$$\ddot{V} = \Phi(V), \quad (4.71)$$

$$\Phi(V) = \bar{X}V^{1/3-2N_3} + \frac{3\kappa}{2} \left[m_{\text{sp}}V_0 + 2\lambda_1(1-n_1)V_0^{2n_1}V^{1-2n_1} + 2\lambda_2(1-n_2)V_0^{2n_2}V^{1-2n_2} \right]$$

с первым интегралом

$$\dot{V} = \Phi_1(V), \quad (4.72)$$

$$\Phi_1^2(V) = \bar{X}_1V^{(4/3-2N_3)} + 3\kappa \left[m_{\text{sp}}V_0V + \lambda_1V_0^{2n_1}V^{2(1-n_1)} + \lambda_2V_0^{2n_2}V^{2(1-n_2)} + \bar{C} \right].$$

Поскольку нас интересует качественная картина, выберем очень простые значения параметров задачи. При этом значения для N_3 , n_1 и n_2 должны быть таковы, чтобы ни один из четырех членов в правой части (4.71) не сливался с другим. Кроме того, рассмотрим константы λ_1 и λ_2 с разными знаками. Начальное значение $V(0)$ предположим небольшим, но ненулевым

таким образом, что правая часть (4.72) останется неотрицательной. Для данного начального значения $V(0)$ из (4.72) определяется значение $\dot{V}(0)$.

Из (4.72) можно легко установить, что только в случае, когда обе константы λ_1 и λ_2 положительны, модель допускает вечно расширяющееся решение, тогда как если одна из λ_i отрицательна, условие неотрицательности выражения под корнем налагает некоторые ограничения на значения V . Отрицательное значение λ_1 порождает минимум, тогда как отрицательное значение λ_2 порождает максимум. В случае, если минимум возникает при отрицательном значении V , мы имеем Вселенную, которая расширяется до некоторого максимального значения, и потом начинается сжатие, которое заканчивается Большим хрустом. Если все минимумы и максимумы являются нетривиальными, то имеем периодические решения без начала и конца. В обоих случаях $\lambda_2 < 0$. Если $\lambda_2 > 0$, независимо от того, имеет ли λ_1 положительное или отрицательное значение, имеем вечно расширяющееся решение.

Для простоты примем $m = 1$, $n = 2$, $X_0 = 1$, $V_0 = 1$, $m_{sp} = 1$, $C_0 = 1$, $\kappa = 1$. Фиксируя $N_3 = -1/3$ из $n_1 > \max [1/2, N_3 + 1/3]$, примем $n_1 = 3/2$ (экспиротическая материя) и $n_1 = 2/3$ (излучение), тогда как из $n_2 < \min [1/2, N_3 + 1/3]$ примем $n_2 = 1/4$ (квинтэссенция) и $n_2 = -1$ (фантомная материя). Что касается констант взаимодействия, то рассмотрим два случая — с $\lambda_1 = \{1, -0,001\}$ и $\lambda_2 = \{1, -1\}$. В качестве начального значения $V(0)$ примем $V(0) = 0,01$.

На рис. 2 показана эволюция масштаба объема V для Вселенной, заполненной спинорным полем с нетривиальной массой, при $n_1 = 2/3$, $n_2 = 1/4$, $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = 1$. На рис. 3–5 представлена картина эволюции V для

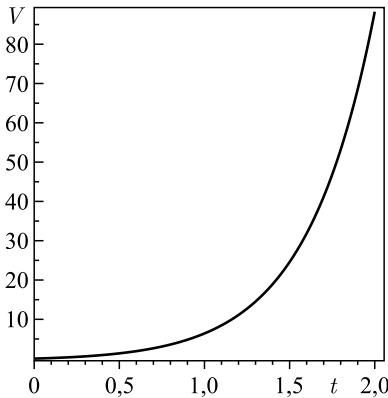


Рис. 2. Эволюция Вселенной, заполненной массивным спинорным полем, при $n_1 = 2/3$, $n_2 = 1/4$, $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = 1$

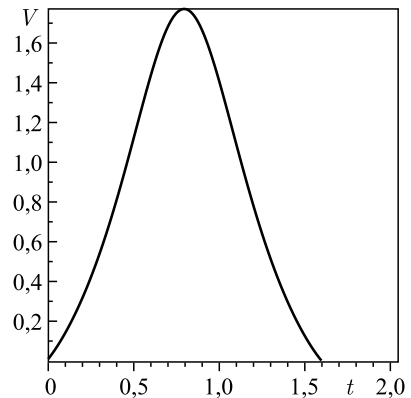


Рис. 3. Эволюция Вселенной, заполненной массивным спинорным полем, при $n_1 = 2/3$, $n_2 = -1$, $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = -1$

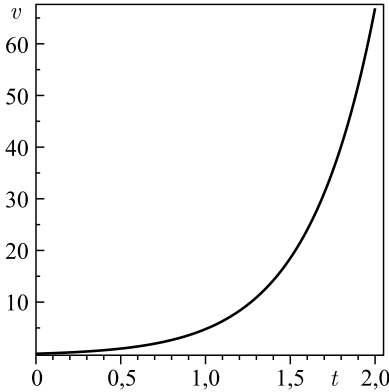


Рис. 4. Эволюция Вселенной, заполненной массивным спинорным полем, при $n_1 = 3/2$, $n_2 = 1/4$ и $\lambda_1 = -0,001$, $\lambda_2 = 1$

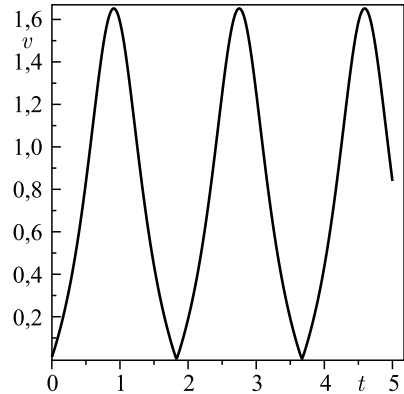


Рис. 5. Эволюция Вселенной, заполненной массивным спинорным полем, при $n_1 = 2/3$, $n_2 = -1$ и $\lambda_1 = -0,001$, $\lambda_2 = -1$

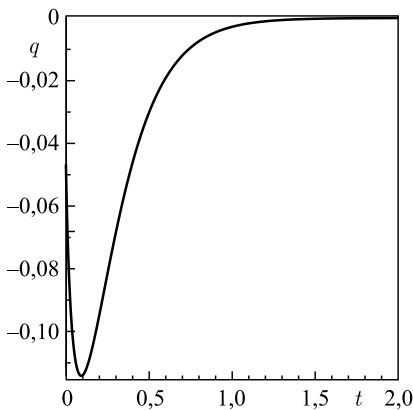


Рис. 6. Поведение параметра замедления q при $n_1 = 2/3$, $n_2 = 1/4$ и $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$

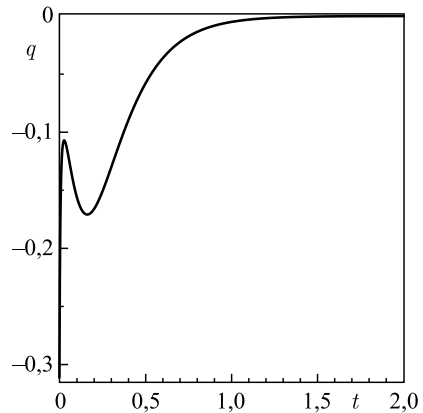


Рис. 7. Поведение параметра замедления q при $n_1 = 3/2$, $n_2 = 1/4$ и $\lambda_1 = -0,001$, $\lambda_2 = 1$

$\{n_1 = 2/3, n_2 = -1, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1\}$; $\{n_1 = 3/2, n_2 = 1/4, \lambda_1 = -0,001, \lambda_2 = 1\}$ и $\{n_1 = 2/3, n_2 = -1, \lambda_1 = -0,001, \lambda_2 = -1\}$ соответственно. На рис. 6 и 7 показана эволюция параметра замедления q только для положительного значения λ_2 .

Таким образом, в пространстве-времени типа BVI нетривиальные недиагональные компоненты тензора энергии-импульса спинорного поля не приводят к устранению нелинейности и массового члена спинорного поля. В за-

висимости от знака констант взаимодействий данная модель в этом случае допускает либо позднее ускорение, либо колебательный режим эволюции.

5. ПРОСТРАНСТВО-ВРЕМЯ БИАНКИ ТИПА VI₀

Модель Бианки типа VI₀ описывает анизотропное пространство-время и вызывает особый интерес среди физиков. Пространство-время Бианки типа VI₀ в связи с массивной струной изучено в работах [12, 100, 228, 243]. Недавно Белинсон [19] изучил несколько космологических моделей с симметриями BVI₀ и BIII методом самоподобия. Учитывая возрастающий интерес космологов, мы изучаем эволюцию Вселенной в рамках космологической модели BVI₀. В работе [213] исследована новая анизотропная модель темной энергии Бианки типа BVI₀ с переменным параметром уравнения состояния Ω с помощью закона изменения параметра Хаббла, предложенного в работах [26,27], который дает постоянное значение параметра замедления. В этом случае было установлено, что два основных давления равны, т. е. $T_1^1 = T_2^2$. Спинорное описание темной энергии в рамках модели BVI₀ дано в [206]. Недавно было установлено, что недиагональные компоненты тензора энергии-импульса спинорного поля навязывают некоторые жесткие ограничения как на спинорное, так и на гравитационное поле [215]. Модель Бианки типа VI₀ с переменным параметром уравнения состояния изучена в [6].

Анизотропное пространство-время Бианки типа VI₀ задается в виде [215]

$$ds^2 = dt^2 - a_1^2 e^{-2mx_3} dx_1^2 - a_2^2 e^{2mx_3} dx_2^2 - a_3^2 dx_3^2. \quad (5.1)$$

Для метрики (5.1) выберем тетрады следующим образом:

$$e_0^{(0)} = 1, \quad e_1^{(1)} = a_1 e^{-mx_3}, \quad e_2^{(2)} = a_2 e^{mx_3}, \quad e_3^{(3)} = a_3. \quad (5.2)$$

Из (1.92) находим следующие выражения для спинорных аффинных связей:

$$\Gamma_0 = 0, \quad (5.3a)$$

$$\Gamma_1 = \frac{1}{2} \left(\dot{a}_1 \bar{\gamma}^1 \bar{\gamma}^0 - m \frac{a_1}{a_3} \bar{\gamma}^1 \bar{\gamma}^3 \right) e^{-mx_3}, \quad (5.3б)$$

$$\Gamma_2 = \frac{1}{2} \left(\dot{a}_2 \bar{\gamma}^2 \bar{\gamma}^0 + m \frac{a_2}{a_3} \bar{\gamma}^2 \bar{\gamma}^3 \right) e^{mx_3}, \quad (5.3в)$$

$$\Gamma_3 = \frac{\dot{a}_3}{2} \bar{\gamma}^3 \bar{\gamma}^0. \quad (5.3г)$$

Можно показать, что в данном случае билинейные спинорные формы (1.4) удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\dot{S}_0 + \mathcal{G}A_0^0 = 0, \quad (5.4a)$$

$$\dot{P}_0 - \Phi A_0^0 = 0, \quad (5.4б)$$

$$\dot{A}_0^0 + \Phi P_0 - \mathcal{G}S_0 = 0, \quad (5.4в)$$

$$\dot{A}_0^3 = 0, \quad (5.4г)$$

$$\dot{v}_0^0 = 0, \quad (5.4д)$$

$$\dot{v}_0^3 + \Phi Q_0^{30} + \mathcal{G}Q_0^{21} = 0, \quad (5.4е)$$

$$\dot{Q}_0^{30} - \Phi v_0^3 = 0, \quad (5.4ж)$$

$$\dot{Q}_0^{21} - \mathcal{G}v_0^3 = 0. \quad (5.4з)$$

Комбинируя эти уравнения, получаем следующие первые интегралы:

$$(S_0)^2 + (P_0)^2 + (A_0^0)^2 = l_1^2 = \text{const}, \quad (5.5a)$$

$$A_0^3 = l_2^2 = \text{const}, \quad (5.5б)$$

$$(Q_0^{30})^2 + (Q_0^{21})^2 + (v_0^3)^2 = l_3^2 = \text{const}, \quad (5.5в)$$

$$v_0^0 = l_4^2 = \text{const}. \quad (5.5г)$$

Система уравнений Эйнштейна в этом случае имеет вид

$$\frac{\ddot{a}_2}{a_2} + \frac{\ddot{a}_3}{a_3} + \frac{\dot{a}_2 \dot{a}_3}{a_2 a_3} - \frac{m^2}{a_3^2} = \kappa (F(K) - 2KF_K), \quad (5.6a)$$

$$\frac{\ddot{a}_3}{a_3} + \frac{\ddot{a}_1}{a_1} + \frac{\dot{a}_3 \dot{a}_1}{a_3 a_1} - \frac{m^2}{a_3^2} = \kappa (F(K) - 2KF_K), \quad (5.6б)$$

$$\frac{\ddot{a}_1}{a_1} + \frac{\ddot{a}_2}{a_2} + \frac{\dot{a}_1 \dot{a}_2}{a_1 a_2} + \frac{m^2}{a_3^2} = \kappa (F(K) - 2KF_K), \quad (5.6в)$$

$$\frac{\dot{a}_1 \dot{a}_2}{a_1 a_2} + \frac{\dot{a}_2 \dot{a}_3}{a_2 a_3} + \frac{\dot{a}_3 \dot{a}_1}{a_3 a_1} - \frac{m^2}{a_3^2} = \kappa (m_{\text{sp}}S + F(K)), \quad (5.6г)$$

$$\frac{\dot{a}_1}{a_1} - \frac{\dot{a}_2}{a_2} = 0, \quad (5.6д)$$

$$0 = \frac{a_1 m e^{-mx_3}}{4 a_3} A^2, \quad (5.6e)$$

$$0 = \frac{a_2 m e^{mx_3}}{4 a_3} A^1, \quad (5.6ж)$$

$$0 = \frac{a_2 e^{2mx_3}}{4 a_1} \left[\left(\frac{\dot{a}_1}{a_1} - \frac{\dot{a}_2}{a_2} \right) A^3 - \frac{2m}{a_3} A^0 \right], \quad (5.6з)$$

$$0 = \frac{a_3 e^{mx_3}}{4 a_1} \left(\frac{\dot{a}_3}{a_3} - \frac{\dot{a}_1}{a_1} \right) A^2, \quad (5.6и)$$

$$0 = \frac{a_3 e^{-mx_3}}{4 a_2} \left(\frac{\dot{a}_2}{a_2} - \frac{\dot{a}_3}{a_3} \right) A^1. \quad (5.6к)$$

Из (5.6д) непосредственно находим

$$a_2 = X_0 a_1, \quad X_0 = \text{const}. \quad (5.7)$$

Как и в предыдущем разделе, используем условие пропорциональности (4.20). Тогда с учетом (4.3) находим

$$a_1 = \left[\frac{1}{X_0 X_1} V \right]^{\frac{1}{3} - \frac{1}{2N_3}}, \quad a_2 = X_0 \left[\frac{1}{X_0 X_1} V \right]^{\frac{1}{3} - \frac{1}{2N_3}}, \quad (5.8)$$

$$a_3 = X_1 \left[\frac{1}{X_0 X_1} V \right]^{\frac{1}{3} + \frac{1}{N_3}}.$$

Из (5.8) следует, что изотропизация пространства-времени происходит только при больших значениях N_3 .

Уравнение для V может быть найдено из уравнения Эйнштейна (П2.18), которое после некоторых манипуляций выглядит как

$$\ddot{V} = \bar{X} V^{1/3-2/N_3} + \frac{3\kappa}{2} [m_{\text{sp}} S + 2(F(K) - KF_K)] V, \quad (5.9)$$

где $\bar{X} = 2m^2 X_0^{2/N_3+2/3} X_1^{2/N_3-1/3}$.

Для спинорного поля имеем

$$\dot{\phi}_1 + \imath \Phi \phi_1 + \mathcal{G} \phi_3 = 0, \quad (5.10a)$$

$$\dot{\phi}_2 + \imath \Phi \phi_2 + \mathcal{G} \phi_4 = 0, \quad (5.10б)$$

$$\dot{\phi}_3 - \imath \Phi \phi_3 - \mathcal{G} \phi_1 = 0, \quad (5.10в)$$

$$\dot{\phi}_4 - \imath \Phi \phi_4 - \mathcal{G} \phi_2 = 0. \quad (5.10г)$$

Эта система может быть переписана в форме (4.50) с

$$A = \begin{pmatrix} -\imath \Phi & 0 & -\mathcal{G} & 0 \\ 0 & -\imath \Phi & 0 & -\mathcal{G} \\ \mathcal{G} & 0 & \imath \Phi & 0 \\ 0 & \mathcal{G} & 0 & \imath \Phi \end{pmatrix}. \quad (5.11)$$

Можно легко найти, что

$$\det A = (\Phi^2 + \mathcal{G}^2)^2. \quad (5.12)$$

Решение уравнений спинорного поля может быть представлено в виде (4.53).

Теперь изучим влияние недиагональных компонент системы уравнений Эйнштейна.

Из (5.6е) и (5.6ж) сразу находим

$$A^2 = 0 \quad \text{и} \quad A^1 = 0. \quad (5.13)$$

Ввиду (5.13) отношения (5.6и) и (5.6к) выполняются без наложения ограничений на метрические функции. С учетом (5.6д) из (5.6з) находим

$$A^0 = 0. \quad (5.14)$$

Равенства (5.13) и (5.14) могут быть записаны в терминах компонент спинорного поля следующим образом:

$$\psi_1^* \psi_2 - \psi_2^* \psi_1 + \psi_3^* \psi_4 - \psi_4^* \psi_3 = 0, \quad (5.15a)$$

$$\psi_1^* \psi_2 + \psi_2^* \psi_1 + \psi_3^* \psi_4 + \psi_4^* \psi_3 = 0, \quad (5.15б)$$

$$\psi_1^* \psi_3 + \psi_2^* \psi_4 + \psi_3^* \psi_1 + \psi_4^* \psi_2 = 0. \quad (5.15в)$$

С другой стороны, ввиду (5.13) и (5.14) из равенства

$$v_\mu A^\mu = 0 \Rightarrow v_3 A^3 = 0 \quad (5.16)$$

имеем либо

$$A^3 = 0 \Rightarrow \psi_1^* \psi_1 - \psi_2^* \psi_2 + \psi_3^* \psi_3 - \psi_4^* \psi_4 = 0, \quad (5.17)$$

либо

$$v^3 = 0 \Rightarrow \psi_1^* \psi_3 - \psi_2^* \psi_4 + \psi_3^* \psi_1 - \psi_4^* \psi_2 = 0. \quad (5.18)$$

В случае $A^3 = 0$ находим $A^\mu = 0$. Тогда с учетом этого, принимая во внимание, что $I_A = A_\mu A^\mu = -(S^2 + P^2)$, наконец, находим [214]

$$S^2 + P^2 = 0 \Rightarrow S = 0 \quad \text{и} \quad P = 0. \quad (5.19)$$

Таким образом, мы видим, что в рассматриваемом случае изначально массивное нелинейное спинорное поле становится линейным и безмассовым в результате специфики геометрии Бианки типа VI₀ пространства-времени, что эквивалентно решению соответствующих уравнений Эйнштейна в вакууме.

В этом случае для V получим

$$\ddot{V} = \bar{X}V^{1/3-2/N_3} \tag{5.20}$$

с решением в квадратурах

$$\int \frac{dV}{\Phi_0} = t + t_0, \quad \Phi_0 = \sqrt{\frac{6N_3\bar{X}}{4N_3-6}V^{(4N_3-6)/3N_3} + C_0}, \tag{5.21}$$

где t_0 и C_0 — некоторые произвольные постоянные.

На рис. 8 представлен график эволюции масштаба объема. Для простоты выберем $m = 1$, $X_0 = 1$, $X_1 = 1$, $C_0 = 10$ и $N_3 = 3$. Начальное значение масштаба объема выбрано $V(0) = 0,1$, а $\dot{V}(0)$ вычислено из (5.21).

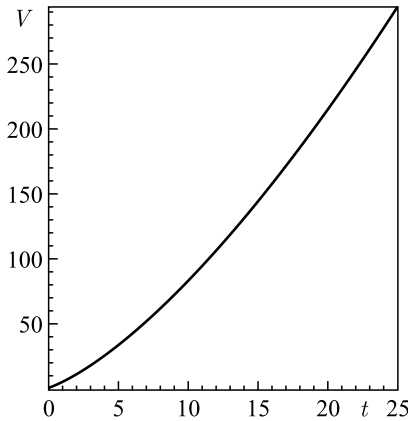


Рис. 8. Эволюция Вселенной в отсутствие спинорного поля (вакуумное решение)

Что касается спинорного поля, то матрица A в (4.50) в этом случае становится тривиальной и компоненты спинорного поля имеют вид

$$\psi_i = \frac{c_i}{\sqrt{V}}, \quad i = 1, 2, 3, 4, \tag{5.22}$$

где константы интегрирования c_i удовлетворяют

$$c_1^*c_1 + c_2^*c_2 - c_3^*c_3 - c_4^*c_4 = 0, \tag{5.23a}$$

$$c_1^*c_3 + c_2^*c_4 - c_3^*c_1 - c_4^*c_2 = 0. \tag{5.23b}$$

Как альтернативный случай можно также рассматривать (5.18) с $A^3 \neq 0$. В этом случае нелинейность, так же как и массовый член, не исчезает. Выбирая спинорное поле с нелинейностью в форме (4.55) и подставляя в (5.9), а также учитывая, что в этом случае $S = V_0/V$, находим

$$\ddot{V} = \Phi_1(V), \quad (5.24)$$

$$\Phi_1 = \bar{X} V^{1/3-2/N_3} + \frac{3\kappa}{2} \left[m_{\text{sp}} V_0 + 2 \sum_k \lambda_k (1 - n_k) V_0^{2n_k} V^{1-2n_k} \right]$$

с решением в квадратурах

$$\int \frac{dV}{\Phi_2} = t + t_0, \quad (5.25)$$

$$\Phi_2 = \sqrt{\frac{6N_3\bar{X}}{4N_3-6} V^{(4N_3-6)/3N_3} + 3\kappa \left[m_{\text{sp}} V_0 V + \sum_k \lambda_k V_0^{2n_k} V^{2(1-n_k)} \right] + C_1},$$

где t_0 и C_1 — некоторые произвольные постоянные.

Можно показать, что метрические функции и компоненты спинорного поля, а также инварианты, построенные из билинейных спинорных форм, являются обратной функцией от V в некоторой степени и, следовательно, в любой пространственно-временной точке, где $V = 0$, есть сингулярность. Поэтому предполагаем, что вначале V был малым, но не нулевым. Из (5.24) видим, что на начальном этапе нелинейное слагаемое преобладает, если $n_k = n_1$ такое, что $n_1 > 1/2$ и $n_1 > 1/3 + 1/N_3$, тогда как для того, чтобы нелинейность стала доминирующей для больших значений V , необходимо $n_k = n_2$ такое, что $n_2 < 1/2$ и $n_2 < 1/3 + 1/N_3$.

На рис. 9 и 10 показан график эволюции масштаба объема V для положительных и отрицательных констант связи λ_1 и λ_2 соответственно. Для простоты примем $m = 1$, $X_0 = 1$, $X_1 = 1$, $N_3 = 3$, $m_{\text{sp}} = 1$, $V_0 = 1$, $\kappa = 1$, $C_1 = 10$, $n_1 = 3$, $n_2 = 1/4$ и $N_3 = 3$. При положительных константах $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = 1$ данная модель описывает расширяющуюся Вселенную, в то время как для отрицательных констант связи $\lambda_1 = -0,5$ и $\lambda_2 = -0,5$ имеем циклическую Вселенную, которая расширяется до некоторого максимума, а затем сжимается до минимума, только чтобы снова расширяться. Начальное значение масштаба объема выберем $V(0) = 0,1$, и $\dot{V}(0)$ находим из (5.25).

Посмотрим, что происходит с параметром замедления при положительных константах связи. Из определения

$$q = -\frac{V\ddot{V}}{\dot{V}^2} = -\frac{V\Phi_1}{\Phi_2^2} \quad (5.26)$$

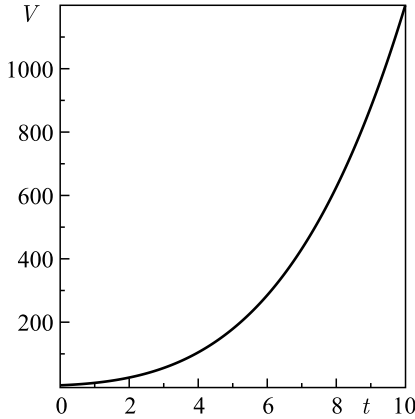


Рис. 9. Эволюция Вселенной, заполненной массивным спинорным полем, при положительных константах связи $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = 1$

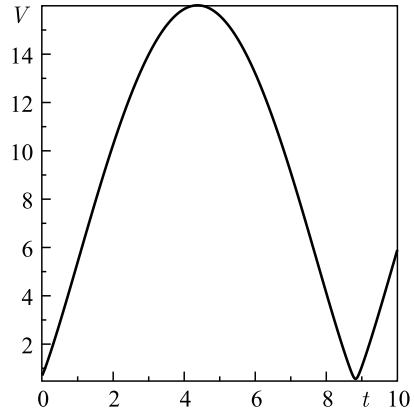


Рис. 10. Эволюция Вселенной, заполненной массивным спинорным полем, при отрицательных константах связи $\lambda_1 = -0,5$ и $\lambda_2 = -0,5$

можно показать, что Вселенная в данной модели расширяется с ускорением. Учитывая дискуссию о значении n_k , перепишем

$$q = - \frac{\bar{X} V^{4/3-2/N_3} + \frac{3\kappa}{2} [m_{sp} V_0 V + 2\lambda_1 (1-n_1) V_0^{2n_1} V^{2(1-n_1)} + 2\lambda_2 (1-n_2) V_0^{2n_2} V^{2(1-n_2)}]}{\frac{6N_3\bar{X}}{4N_3-6} V^{4/3-2/N_3} + 3\kappa [m_{sp} V_0 V + \lambda_1 V_0^{2n_1} V^{2(1-n_1)} + \lambda_2 V_0^{2n_2} V^{2(1-n_2)}]} + C_1. \quad (5.27)$$

Как было отмечено, при больших t , следовательно, и при больших V преобладает член с $n_k = n_2 < 1/2$. С учетом этого находим

$$\lim_{V \rightarrow \infty} q \rightarrow -(1 - n_2) < 0. \quad (5.28)$$

На рис. 11 показана эволюция параметра замедления. Как видно из этого рисунка, нелинейность спинорного поля приводит к позднему ускоренному расширению Вселенной.

Таким образом, в модели Бианки типа VI₀ пространства-времени из-за специфического поведения спинорного поля имеем два различных сценария. В первом случае инварианты билинейных спинорных форм становятся тривиальными, таким образом порождая лагранжиан для безмассового и линейного спинорного поля. В этом случае решения являются эквивалентными решениям уравнения Бианки типа VI₀ в вакууме. Второй случай допускает исчезающие массовые и нелинейные члены и в зависимости от знака констант связей приводит либо к ускоренному режиму расширения, либо к решению, в котором после достижения некоторого максимального значения Вселенная

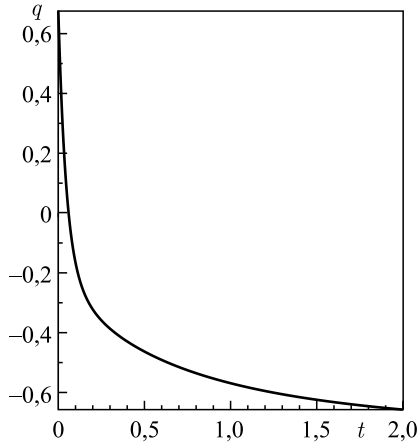


Рис. 11. Эволюция параметра замедления для Вселенной, заполненной массивным спинорным полем, при положительных константах связи $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = 1$

сжимается и заканчивается Большим хрустом, порождая пространственно-временную сингулярность. Этот результат снова показывает чувствительность спинорного поля к гравитационному полю.

6. ПРОСТРАНСТВО-ВРЕМЯ БИАНКИ ТИПА V

Теперь рассмотрим модель Бианки типа V (BV) пространства-времени. Некоторые модели темной энергии были изучены в рамках космологической модели BV в [252]. Пространство-время Бианки типа V с переменным параметром уравнения состояния исследовано в [209]. Спинорное описание темной энергии в рамках модели BV дано в [206]. Космологические модели Бианки типа V в теории Бранса–Дикке изучены в работах [51,54,119]. Анизотропная модель Бианки типа V также изучается в [213]. Установлено, что при наличии условия пропорциональности компоненты тензора энергии-импульса подчиняются соотношению $T_1^1 + T_2^2 = 2T_3^3$, если предполагается, что тензор энергии-импульса имеет только диагональные компоненты. Модель Бианки типа V с вязкой жидкостью и с рождением частиц изучена в [257]. Модель Бианки типа V пространства-времени, заполненного нелинейным спинорным полем, исследована в [179,217].

Пространство-время Бианки типа V задается [179,199,209] как

$$ds^2 = dt^2 - a_1^2 e^{2mx_3} dx_1^2 - a_2^2 e^{2mx_3} dx_2^2 - a_3^2 dx_3^2, \quad (6.1)$$

где a_1 , a_2 и a_3 зависят только от времени и m — некоторая произвольная постоянная.

Для метрики (6.1) выберем тетраду в виде

$$e_0^{(0)} = 1, \quad e_1^{(1)} = a_1 e^{mx_3}, \quad e_2^{(2)} = a_2 e^{mx_3}, \quad e_3^{(3)} = a_3. \quad (6.2)$$

Тогда для метрики Бианки типа V из (1.92) находим следующие выражения для спинорных аффинных связностей:

$$\Gamma_0 = 0, \quad (6.3a)$$

$$\Gamma_1 = \frac{1}{2} \left(\dot{a}_1 \bar{\gamma}^1 \bar{\gamma}^0 + m \frac{a_1}{a_3} \bar{\gamma}^1 \bar{\gamma}^3 \right) e^{mx_3}, \quad (6.3б)$$

$$\Gamma_2 = \frac{1}{2} \left(\dot{a}_2 \bar{\gamma}^2 \bar{\gamma}^0 + m \frac{a_2}{a_3} \bar{\gamma}^2 \bar{\gamma}^3 \right) e^{mx_3}, \quad (6.3в)$$

$$\Gamma_3 = \frac{\dot{a}_3}{2} \bar{\gamma}^3 \bar{\gamma}^0. \quad (6.3г)$$

Можно показать, что билинейные спинорные формы в этом случае подчиняются следующей системе уравнений:

$$\dot{S}_0 + \mathcal{G} A_0^0 = 0, \quad (6.4a)$$

$$\dot{P}_0 - \Phi A_0^0 = 0, \quad (6.4б)$$

$$\dot{A}_0^0 + \frac{2m}{a_3} A_0^3 + \Phi P_0 - \mathcal{G} S_0 = 0, \quad (6.4в)$$

$$\dot{A}_0^3 + \frac{2m}{a_3} A_0^0 = 0, \quad (6.4г)$$

$$\dot{v}_0^0 + \frac{2m}{a_3} v_0^3 = 0, \quad (6.4д)$$

$$\dot{v}_0^3 + \frac{2m}{a_3} v_0^0 + \Phi Q_0^{30} + \mathcal{G} Q_0^{21} = 0, \quad (6.4е)$$

$$\dot{Q}_0^{30} - \Phi v_0^3 = 0, \quad (6.4ж)$$

$$\dot{Q}_0^{21} - \mathcal{G} v_0^3 = 0. \quad (6.4з)$$

Объединяя эти уравнения, получим следующие первые интегралы:

$$(S_0)^2 + (P_0)^2 + (A_0^0)^2 - (A_0^3)^2 = C_1 = \text{const}, \quad (6.5a)$$

$$(Q_0^{30})^2 + (Q_0^{21})^2 + (v_0^3)^2 - (v_0^0)^2 = C_2 = \text{const}. \quad (6.5б)$$

Уравнения спинорного поля в этом случае записываются в виде (4.50) с

$$A = \begin{pmatrix} -\iota \Phi & 0 & -\iota \mathcal{Y} - \mathcal{G} & 0 \\ 0 & -\iota \Phi & 0 & \iota \mathcal{Y} - \mathcal{G} \\ -\iota \mathcal{Y} + \mathcal{G} & 0 & \iota \Phi & 0 \\ 0 & \iota \mathcal{Y} + \mathcal{G} & 0 & \iota \Phi \end{pmatrix}, \quad (6.6)$$

где обозначено, что $\mathcal{Y} = \bar{X}_0/V^{1/3}$. Можно легко найти, что

$$\det A = (\Phi^2 + \mathcal{Y}^2 + \mathcal{G}^2)^2. \quad (6.7)$$

Решения уравнений спинорного поля можно представить в форме (4.53).

Система уравнений Эйнштейна в случае пространства-времени BV имеет вид

$$\frac{\ddot{a}_2}{a_2} + \frac{\ddot{a}_3}{a_3} + \frac{\dot{a}_2 \dot{a}_3}{a_2 a_3} - \frac{m^2}{a_3^2} = \kappa (F(K) - 2KF_K), \quad (6.8a)$$

$$\frac{\ddot{a}_3}{a_3} + \frac{\ddot{a}_1}{a_1} + \frac{\dot{a}_3 \dot{a}_1}{a_3 a_1} - \frac{m^2}{a_3^2} = \kappa (F(K) - 2KF_K), \quad (6.8б)$$

$$\frac{\ddot{a}_1}{a_1} + \frac{\ddot{a}_2}{a_2} + \frac{\dot{a}_1 \dot{a}_2}{a_1 a_2} - \frac{m^2}{a_3^2} = \kappa (F(K) - 2KF_K), \quad (6.8в)$$

$$\frac{\dot{a}_1 \dot{a}_2}{a_1 a_2} + \frac{\dot{a}_2 \dot{a}_3}{a_2 a_3} + \frac{\dot{a}_3 \dot{a}_1}{a_3 a_1} - \frac{3m^2}{a_3^2} = \kappa (m_{\text{sp}}S + F(K)), \quad (6.8г)$$

$$\frac{\dot{a}_1}{a_1} + \frac{\dot{a}_2}{a_2} - 2\frac{\dot{a}_3}{a_3} = 0, \quad (6.8д)$$

$$0 = \frac{3a_1 m e^{mx_3}}{4a_3} A^2, \quad (6.8е)$$

$$0 = -\frac{3a_2 m e^{-mx_3}}{4a_3} A^1, \quad (6.8ж)$$

$$0 = \frac{a_2}{4a_1} \left(\frac{\dot{a}_1}{a_1} - \frac{\dot{a}_2}{a_2} \right) A^3, \quad (6.8з)$$

$$0 = \frac{a_3}{4a_1} e^{mx_3} \left(\frac{\dot{a}_3}{a_3} - \frac{\dot{a}_1}{a_1} \right) A^2, \quad (6.8и)$$

$$0 = \frac{a_3}{4a_2} e^{mx_3} \left(\frac{\dot{a}_2}{a_2} - \frac{\dot{a}_3}{a_3} \right) A^1. \quad (6.8к)$$

Из (6.8д) имеем следующее соотношение между метрическими функциями:

$$a_1 a_2 = X_2 a_3^2, \quad X_2 = \text{const}. \quad (6.9)$$

С другой стороны, из (6.8е) и (6.8ж) сразу следует

$$A^2 = 0 \quad \text{и} \quad A^1 = 0. \quad (6.10)$$

Ввиду (6.10) отношения (6.8и) и (6.8к) выполняются без какого-либо ограничения на метрические функции. Из (6.8з) имеются две разные возможности:

1) ограничение на метрическую функцию

$$\frac{\dot{a}_1}{a_1} - \frac{\dot{a}_2}{a_2} = 0, \quad (6.11)$$

2) ограничение на спинорное поле:

$$A^3 = 0. \quad (6.12)$$

Случай I. Наложив ограничение на метрическую функцию (6.11), находим следующее соотношение между a_1 и a_2 :

$$a_2 = X_1 a_1, \quad X_1 = \text{const}. \quad (6.13)$$

Тогда с учетом (4.3) из (6.9) и (6.13) для метрических функций окончательно имеем

$$a_1 = \frac{X_2^{1/6}}{\sqrt{X_1}} V^{1/3}, \quad a_2 = X_2^{1/6} \sqrt{X_1} V^{1/3}, \quad a_3 = X_2^{-1/3} V^{1/3}. \quad (6.14)$$

Таким образом, мы видим, что нелинейность спинорного поля приводит к $a_1 \sim a_2 \sim a_3$ с самого начала, если ограничение наложено на метрические функции. Аналогичный результат найден для Бианки типа I пространства-времени в [214]. Следует отметить, что благодаря недиагональным компонентам тензора энергии-импульса спинорного поля в этом случае мы смогли найти выражения для метрических функций без дополнительных условий, таких как пропорциональность сдвига и расширение.

Таким образом, выражения для метрических функций получены в терминах V . Уравнение для V может быть получено из уравнения Эйнштейна (П2.18), которое после некоторых манипуляций выглядит как

$$\ddot{V} = 6m^2 X_2^{2/3} V^{1/3} + \frac{3\kappa}{2} [m_{\text{sp}} S + 2(F(K) - K F_K)] V. \quad (6.15)$$

Далее, задав конкретную форму $F(K)$, можно нарисовать картину эволюции Вселенной. Как было показано ранее, $K = V_0^2/V^2$ для всех случаев с нулевой массой спинорного поля, а также с ненулевой массой спинорного поля $K = I = S^2$. Поэтому мы должны рассмотреть случай с $K = I$, полагая $F = F(I)$. Подставляя (4.55) в (6.15), находим следующее уравнение:

$$\ddot{V} = \Phi_1(V), \quad (6.16)$$

$$\Phi_1(V) \equiv 6m^2 X_2^{2/3} V^{1/3} + \frac{3\kappa}{2} \left[m_{\text{sp}} V_0 + 2 \sum_k \lambda_k (1 - n_k) V_0^{2n_k} V^{1-2n_k} \right]$$

с первым интегралом

$$\dot{V} = \Phi_2(V), \quad (6.17)$$

$$\Phi_2(V) \equiv \sqrt{9m^2 X_2^{2/3} V^{4/3} + 3\kappa \left[m_{\text{sp}} V_0 V + \sum_k \lambda_k V_0^{2n_k} V^{2(1-n_k)} \right] + V_c},$$

$$V_c = \text{const.}$$

Решение предыдущего уравнения формально можно представить в квадратурах как

$$\int \frac{dV}{\sqrt{9m^2 X_2^{2/3} V^{4/3} + 3\kappa \left[m_{\text{sp}} V_0 V + \sum_k \lambda_k V_0^{2n_k} V^{2(1-n_k)} \right] + V_c}} =$$

$$= t + t_0, \quad t_0 = \text{const.} \quad (6.18)$$

Уравнение (6.16) можно решить численно. Для этого надо задать конкретные значения параметров m , X_2 , κ , m_{sp} , λ_k , V_0 , n_k , V_c и начальное значение $V = V(0)$, тогда как значение $\dot{V}(0)$ нужно найти с использованием выражения (6.17), которое, будучи квадратным корнем, накладывает естественные ограничения на выбор параметров и начальное значение.

Чтобы определить характер эволюции, сначала изучим асимптотическое поведение уравнения (6.16). Вспомнив, что любая точка пространства-времени, где масштаб объема становится равным нулю, является особой точкой [177], как и в предыдущем случае, предположим, что начальное значение V мало, но не нулевое. Тогда из (6.16) видим, что при $t \rightarrow 0$ член $m_{\text{sp}} V_0$ преобладает, если $n_k = n_1 : 1 - 2n_1 > 0$, т.е. $n_1 < 1/2$. В случае $n_k = n_0 : n_0 = 1/2$ это может быть объединено с массовым членом. И, наконец, для $n_1 > 1/2$ нелинейный член преобладает в начальной стадии эволюции. Напомним, что мы рассматриваем расширяющуюся Вселенную, следовательно, при $t \rightarrow \infty$ V должно быть довольно большим. В этом случае член $6m^2 X_2^{2/3} V^{1/3}$ преобладает, если $n_k = n_2 : 1 - 2n_2 < 1/3$, т.е. $n_2 > 1/3$, когда для $n_2 < 1/3$ нелинейность преобладает при $t \rightarrow \infty$. Таким образом, полиномиальная нелинейность с $n_1 > 1/2 > 1/3$ и $n_2 < 1/3 < 1/2$ играет важную роль как на начальной, так и на поздней стадии эволюции.

Для определения характера расширения при больших временах введем параметр замедления и определим его как

$$q = -\frac{V\ddot{V}}{\dot{V}^2}, \quad (6.19)$$

что ввиду (6.16) и (6.17) может быть записано в виде

$$q = -\frac{V\Phi_1(V)}{\Phi_2^2(V)} = -\frac{6m^2 X_2^{2/3} V^{4/3} + \frac{3\kappa}{2} [m_{\text{сп}} V_0 V + 2\lambda_1(1-n_1)V_0^{2n_1} V^2(1-n_1) + 2\lambda_2(1-n_2)V_0^{2n_2} V^2(1-n_2)]}{9m^2 X_2^{2/3} V^{4/3} + 3\kappa [m_{\text{сп}} V_0 V + \lambda_1 V_0^{2n_1} V^2(1-n_1) + \lambda_2 V_0^{2n_2} V^2(1-n_2)] + V_c}. \quad (6.20)$$

Посмотрим, что происходит с q при больших t .

Если рассмотреть случай с $n_2 < 1/3$, когда нелинейное слагаемое решительно преобладает при больших t , можно переписать (6.20) в виде

$$q|_{t \rightarrow \infty} \approx -\frac{3\kappa\lambda(1-n_2)V_0^{2n_2} V^2(1-n_2)}{3\kappa\lambda V_0^{2n_2} V^2(1-n_2)} = -(1-n_2) < 0 \quad \text{для } n_2 < \frac{1}{3}, \quad (6.21)$$

тогда как, если рассмотреть случай с $n_1 > 1/2 > 1/3$, когда преобладает член с $6m^2 X_2^{2/3} V^{1/3}$ при больших t , для q имеем

$$q|_{t \rightarrow \infty} \approx -\frac{6m^2 X_2^{2/3} V^{4/3}}{9m^2 X_2^{2/3} V^{4/3}} = -\frac{2}{3} < 0 \quad \text{при } n_2 > \frac{1}{3}. \quad (6.22)$$

Таким образом, делаем вывод, что модель порождает ускоренный режим расширения.

На рис. 12 и 13 показана эволюция $V(t)$ и параметра замедления q соответственно. Для этого мы предполагали следующие значения параметров: $m = 1$, $X_2 = 1$, $\kappa = 1$, $m_{\text{сп}} = 1$, $\lambda = 1$, $V_0 = 1$, $V_c = 10$ и $V(0) = 0,9$. Заметим, что параметр m входит в уравнение (6.16) как m^2 , следовательно, знак параметра m не играет никакой роли. Что касается n_k , мы рассмотрели два разных значения n_k , а именно: $n_k = n_2 = 1/4$, что приводит к тому, что нелинейный член преобладает при больших временах t , и $n_k = n_1 = 2$, когда преобладает член с параметром m . Как мы показали в асимптотическом анализе, в обоих случаях $q < 0$, т.е. модель расширяется с ускорением. На рис. 12 и 13 штриховая кривая соответствует случаю, когда нелинейный член преобладает при больших временах, а сплошная кривая — случаю, когда преобладает первый член с параметром m , т.е. член, соответствующий геометрии пространства-времени.

Следует отметить, что в случае I можно получить циклические или периодические решения для V . На самом деле отрицательное значение константы связи λ_2 с $n_2 < 1/3$ может привести к такому решению. На рис. 14 показана эволюция масштаба объема V для отрицательного значения λ_2 . Как видно на рисунке, в этом случае Вселенная начинает расширяться с начальной позиции, достигает некоторого максимума, прежде чем снова сжаться.

Случай II. Эксплуатируя ограничения (6.12), т.е. $A^3 = 0$ из (6.4г), находим $A^0 = 0$. Таким образом, в случае II находим $A^\mu = 0$, что благодаря

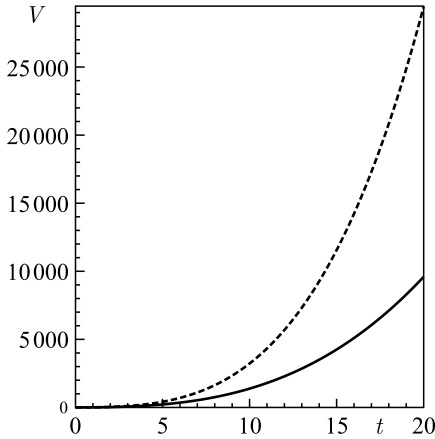


Рис. 12. Эволюция масштаба объема V , когда Вселенная заполнена спинорным полем с нетривиальной массой, со следующими значениями параметров: $m = 1$, $X_2 = 1$, $\kappa = 1$, $m_{sp} = 1$, $\lambda = 1$, $V_0 = 1$, $V_c = 10$ и $V(0) = 0,9$. Штриховая кривая соответствует случаю $n_2 = 1/4$, сплошная — $n_1 = 2$

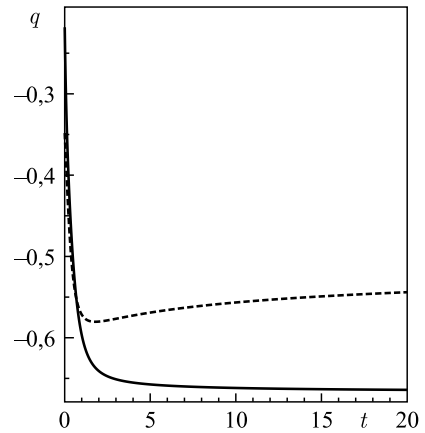


Рис. 13. Эволюция параметра замедления q со следующими значениями параметров: $m = 1$, $X_2 = 1$, $\kappa = 1$, $m_{sp} = 1$, $\lambda = 1$, $V_0 = 1$, $V_c = 10$ и $V(0) = 0,9$. Штриховая кривая соответствует случаю $n_2 = 1/4$, сплошная — $n_1 = 2$

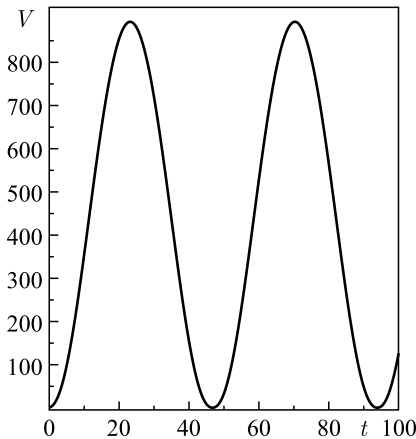


Рис. 14. Эволюция масштаба объема V , когда Вселенная заполнена спинорным полем с нетривиальной массой, со следующими значениями параметров: $m = 1$, $X_2 = 1$, $\kappa = 1$, $m_{sp} = 1$, $\lambda = -1$, $V_0 = 1$, $V_c = 10$, $n_1 = 1/4$ и $V(0) = 0,9$. Отрицательное значение λ порождает колебательный режим расширения

тождеству $I_A = -(I + J) = -(S^2 + P^2) = 0$ в конечном счете приводит к $S = 0$ и $P = 0$, т.е. в этом случае нелинейность спинорного поля исчезает [214].

Для V находим
$$\ddot{V} = 0 \tag{6.23}$$

с решением

$$V = b_0 t + b_1, \quad b_0, b_1 — \text{const.} \tag{6.24}$$

Что касается спинорного поля, матрица A в (4.50) в этом случае становится тривиальной и компоненты спинорного поля могут быть записаны в виде

$$\psi_i = \frac{c_i}{\sqrt{V}}, \quad i = 1, 2, 3, 4, \tag{6.25}$$

где постоянные интегрирования c_i удовлетворяют соотношениям

$$c_1^* c_1 + c_2^* c_2 - c_3^* c_3 - c_4^* c_4 = 0, \tag{6.26a}$$

$$c_1^* c_3 + c_2^* c_4 - c_3^* c_1 - c_4^* c_2 = 0. \tag{6.26b}$$

Отметим, что этот результат совпадает с тем, что был получен для пространства-времени Бианки типа VI₀ [215]. Аналогичный результат был получен для пространства-времени Бианки типа I, когда ограничение было наложено только на спинорное поле [214].

Установлено, что наличие нетривиальных недиагональных компонент тензора энергии-импульса спинорного поля накладывает некоторые жесткие ограничения на систему. В одном случае мы обнаружили, что метрические функции похожи друг на друга, т.е. $a_1 \sim a_2 \sim a_3$. Аналогичный результат был получен для пространства-времени Бианки типа I, которое затем переходит в пространство-время FRW [212, 214]. В этом случае Вселенная расширяется с ускорением, если константа связи λ_2 положительная, а отрицательная λ_2 порождает циклическое или периодическое решение. Знак λ_1 не важен для циклического или периодического решения, но отрицательная λ_1 генерирует минимум. В случае если значение минимума положительно, то модель с отрицательными значениями λ_1 и λ_2 порождает Вселенную, которая полностью регулярна. В случае II масса и нелинейность спинорного поля исчезают и Вселенная расширяется линейно во времени. Этот результат аналогичен тем, что были получены в [212, 214] для модели Бианки типа I и в [215] для Бианки типа VI₀.

7. ПРОСТРАНСТВО-ВРЕМЯ БИАНКИ ТИПА III

Пространственно-однородные и анизотропные космологические модели играют значительную роль в описании поведения Вселенной в крупных масштабах, и такие модели широко изучены в рамках общей теории относительности в поисках реальной картины мироздания на ее ранних стадиях. В связи

с этим недавно было изучено однородное и анизотропное пространство-время Бианки типа III в контексте массивных струн в работах [153, 154, 251, 253]. Недавно были получены в [254] анизотропные модели темной энергии Бианки типа III с постоянным параметром замедления. Модель темной энергии Бианки типа III с переменным параметром уравнения состояния ω исследована в [213]. В полученной модели Вселенной с темной энергией космологическая постоянная является убывающей функцией времени и приближается к небольшому положительному значению в позднее время (т.е. в настоящее время). Значения космологической «постоянной» для данной модели найдены небольшими и положительными, что подтверждается наблюдениями. Спинорное описание темной энергии в рамках модели Бианки типа III дано в [206]. В последнее время влияние нетривиальных недиагональных компонент тензора энергии-импульса спинорного поля исследовано в [218].

Анизотропное пространство-время Бианки типа III задается метрикой

$$ds^2 = dt^2 - a_1^2 e^{-2mx_3} dx_1^2 - a_2^2 dx_2^2 - a_3^2 dx_3^2, \quad (7.1)$$

где a_1 , a_2 и a_3 зависят от времени и m — некоторая произвольная постоянная.

Тетрады, соответствующие метрике (7.1), выберем в виде

$$e_0^{(0)} = 1, \quad e_1^{(1)} = a_1 e^{-mx_3}, \quad e_2^{(2)} = a_2, \quad e_3^{(3)} = a_3. \quad (7.2)$$

Для пространства-времени Бианки типа III из (1.92) находим следующие спинорные аффинные связности:

$$\Gamma_0 = 0, \quad (7.3a)$$

$$\Gamma_1 = \frac{1}{2} \left(\dot{a}_1 \bar{\gamma}^1 \bar{\gamma}^0 - m \frac{a_1}{a_3} \bar{\gamma}^1 \bar{\gamma}^3 \right) e^{-mx_3}, \quad (7.3b)$$

$$\Gamma_2 = \frac{1}{2} \dot{a}_2 \bar{\gamma}^2 \bar{\gamma}^0, \quad (7.3b)$$

$$\Gamma_3 = \frac{1}{2} \dot{a}_3 \bar{\gamma}^3 \bar{\gamma}^0. \quad (7.3g)$$

Билинейные спинорные формы удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\dot{S}_0 + \mathcal{G} A_0^0 = 0, \quad (7.4a)$$

$$\dot{P}_0 - \Phi A_0^0 = 0, \quad (7.4b)$$

$$\dot{A}_0^0 - \frac{m}{a_3} A_0^3 + \Phi P_0 - \mathcal{G} S_0 = 0, \quad (7.4b)$$

$$\dot{A}_0^3 - \frac{m}{a_3} A_0^0 = 0, \quad (7.4г)$$

$$\dot{v}_0^0 - \frac{m}{a_3} v_0^3 = 0, \quad (7.4д)$$

$$\dot{v}_0^3 - \frac{m}{a_3} v_0^0 + \Phi Q_0^{30} + \mathcal{G} Q_0^{21} = 0, \quad (7.4е)$$

$$\dot{Q}_0^{30} - \Phi v_0^3 = 0, \quad (7.4ж)$$

$$\dot{Q}_0^{21} - \mathcal{G} v_0^3 = 0. \quad (7.4з)$$

Первые интегралы предыдущей системы имеют вид

$$(S_0)^2 + (P_0)^2 + (A_0^0)^2 - (A_0^3)^2 = C_1 = \text{const}, \quad (7.5а)$$

$$(Q_0^{30})^2 + (Q_0^{21})^2 + (v_0^3)^2 - (v_0^0)^2 = C_2 = \text{const}. \quad (7.5б)$$

В этом случае уравнения Эйнштейна выглядят следующим образом:

$$\frac{\ddot{a}_2}{a_2} + \frac{\ddot{a}_3}{a_3} + \frac{\dot{a}_2 \dot{a}_3}{a_2 a_3} = \kappa (F(K) - 2KF_K), \quad (7.6а)$$

$$\frac{\ddot{a}_3}{a_3} + \frac{\ddot{a}_1}{a_1} + \frac{\dot{a}_3 \dot{a}_1}{a_3 a_1} - \frac{m^2}{a_3^2} = \kappa (F(K) - 2KF_K), \quad (7.6б)$$

$$\frac{\ddot{a}_1}{a_1} + \frac{\ddot{a}_2}{a_2} + \frac{\dot{a}_1 \dot{a}_2}{a_1 a_2} = \kappa (F(K) - 2KF_K), \quad (7.6в)$$

$$\frac{\dot{a}_1 \dot{a}_2}{a_1 a_2} + \frac{\dot{a}_2 \dot{a}_3}{a_2 a_3} + \frac{\dot{a}_3 \dot{a}_1}{a_3 a_1} - \frac{m^2}{a_3^2} = \kappa (m_{\text{сп}} S + F(K)), \quad (7.6г)$$

$$m \left(\frac{\dot{a}_3}{a_3} - \frac{\dot{a}_1}{a_1} \right) = 0, \quad (7.6д)$$

$$0 = \frac{a_1 m e^{-mx_3}}{2a_3} A^2, \quad (7.6е)$$

$$0 = -\frac{m a_2}{4 a_3} A^1, \quad (7.6ж)$$

$$0 = \frac{a_2 e^{mx_3}}{4 a_1} \left[\left(\frac{\dot{a}_1}{a_1} - \frac{\dot{a}_2}{a_2} \right) A^3 - \frac{m}{a_3} A^0 \right], \quad (7.6з)$$

$$0 = \frac{a_3 e^{mx_3}}{4 a_1} \left(\frac{\dot{a}_3}{a_3} - \frac{\dot{a}_1}{a_1} \right) A^2, \quad (7.6и)$$

$$0 = \frac{a_3}{4 a_2} \left(\frac{\dot{a}_2}{a_2} - \frac{\dot{a}_3}{a_3} \right) A^1. \quad (7.6к)$$

Из (7.6е) и (7.6ж) сразу находим

$$A^2 = 0, \quad A^1 = 0, \quad (7.7)$$

тогда как из (7.6д) получим следующее соотношение между a_1 и a_3 :

$$a_3 = X_0 a_1, \quad X_0 = \text{const.} \quad (7.8)$$

Ввиду (7.7) соотношения (7.6и) и (7.6к) выполняются без дополнительных ограничений на метрические функции. Из (7.6з) находим следующее соотношение между A^0 и A^3 :

$$\left(\frac{\dot{a}_1}{a_1} - \frac{\dot{a}_2}{a_2} \right) A^3 = \frac{m}{a_3} A^0. \quad (7.9)$$

Подставляя (7.9) в (7.4г), находим

$$\frac{\dot{A}_0^3}{A_0^3} = \left(\frac{\dot{a}_1}{a_1} - \frac{\dot{a}_2}{a_2} \right) \quad (7.10)$$

с решением

$$A_0^3 = X_{03} \left(\frac{a_1}{a_2} \right), \quad X_{03} = \text{const.} \quad (7.11)$$

Из-за явного присутствия a_3 в уравнениях Эйнштейна нужны какие-то дополнительные условия для их решения. Требуя, чтобы расширение было пропорционально для компонент тензора сдвига, т. е. ввиду (4.20), для метрической функции находим

$$a_1 = \left[\frac{1}{X_0 X_1} V \right]^{\frac{1}{3} + \frac{1}{N_3}}, \quad a_2 = X_1 \left[\frac{1}{X_0 X_1} V \right]^{\frac{1}{3} - \frac{2}{N_3}}, \quad a_3 = X_0 \left[\frac{1}{X_0 X_1} V \right]^{\frac{1}{3} + \frac{1}{N_3}}, \quad (7.12)$$

где X_1 — постоянная интегрирования. Как видно из (7.12), процесс изотропизации происходит только при $N_3 \gg 1$.

Уравнение для V может быть найдено из системы уравнений Эйнштейна (7.6а)–(7.6г):

$$\ddot{V} = \bar{X} V^{\frac{1}{3} - \frac{2}{N_3}} + \frac{3\kappa}{2} [m_{\text{sp}} S + 2(F(K) - K F_K)] V, \quad \bar{X} = 2m^2 X_0^{\frac{2}{N_3} - \frac{4}{3}} X_1^{\frac{2}{N_3} + \frac{2}{3}}. \quad (7.13)$$

Система уравнений спинорного поля представляется в виде (4.50) с

$$A = \begin{pmatrix} -i\Phi & 0 & -i\mathcal{Y} - \mathcal{G} & 0 \\ 0 & -i\Phi & 0 & i\mathcal{Y} - \mathcal{G} \\ -i\mathcal{Y} + \mathcal{G} & 0 & i\Phi & 0 \\ 0 & i\mathcal{Y} + \mathcal{G} & 0 & i\Phi \end{pmatrix}, \quad (7.14)$$

где $\mathcal{Y} = \bar{X}_0 / (2V^{1/3+1/N_3})$ с $\bar{X}_0 = mX_0^{1/N_3-2/3} X_1^{1/N_3+1/3}$.

Можно найти, что

$$\det A = (\Phi^2 + \mathcal{Y}^2 + \mathcal{Z}^2)^2. \quad (7.15)$$

Решение уравнений спинорного поля задается в форме (4.53).

После выбора нелинейности спинорного поля из (4.55) находим

$$\ddot{V} = \Phi_1(V), \quad (7.16)$$

$$\Phi_1(V) = \bar{X} V^{\frac{1}{3} - \frac{2}{N_3}} + \frac{3\kappa}{2} \left[m_{\text{sp}} V_0 + 2 \sum_k \lambda_k (1 - n_k) V_0^{2n_k} V^{1-2n_k} \right].$$

Чтобы определить тип нелинейности, которая может быть доминирующей как на ранней стадии, так и в позднее время эволюции, вернемся к (7.16). Как видно, нелинейность будет доминирующей на раннем этапе, когда $V \rightarrow 0$, при $n_k = n_1$: $n_1 > 1/2$ и $n_1 > 1/3 + 1/N_3$. Для $n_k = n_0$: $n_0 = 1/2$ этот член может быть добавлен к массовому члену. И, наконец, для того, чтобы нелинейный член преобладал в позднее время, когда $V \rightarrow \infty$, надо выбирать $n_k = n_2$: $n_2 < 1/2$ и $n_2 < 1/3 + 1/N_3$. Тогда можно переписать уравнение для V с нелинейными членами, которые играют определяющую роль как на ранней стадии, так и на поздней стадии эволюции следующим образом:

$$\ddot{V} = \Phi_1(V), \quad (7.17)$$

$$\Phi_1(V) = \bar{X} V^{\frac{1}{3} - \frac{2}{N_3}} + \frac{3\kappa}{2} [(m_{\text{sp}} + \lambda_0) V_0 + 2\lambda_1 (1 - n_1) V_0^{2n_1} V^{1-2n_1} + 2\lambda_2 (1 - n_2) V_0^{2n_2} V^{1-2n_2}]$$

с первым интегралом

$$\dot{V} = \Phi_2(V), \quad (7.18)$$

$$\Phi_2(V) = \sqrt{\bar{X}_1 V^{\frac{4N_3-6}{3N_3}} + 3\kappa [(m_{\text{sp}} + \lambda_0) V_0 V + \lambda_1 V_0^{2n_1} V^{2(1-n_1)} + \lambda_2 V_0^{2n_2} V^{2(1-n_2)}]} + \bar{C},$$

где обозначим $\bar{X}_1 = 3N_3 \bar{X} / (2N_3 - 3)$. Здесь \bar{C} — постоянная интегрирования. Решение для V в квадратурах имеет вид

$$\int \frac{dV}{\Phi_2(V)} = t + t_0, \quad t_0 = \text{const}. \quad (7.19)$$

Далее решим уравнение (7.16) численно. Для этого определим $\dot{V}(0)$ из (7.18) при заданном значении $V(0)$. Чтобы определить, допускает ли

наша модель замедляющий или ускоряющий режим расширения, также изучим поведение параметра замедления q :

$$q = -\frac{V\ddot{V}}{\dot{V}^2} = -\frac{V\Phi(V)}{\Phi_1^2(V)}, \quad (7.20)$$

который ввиду (7.17) и (7.18) принимает вид

$$q = -\frac{\bar{X} V^{(4N_3-6)/3N_3+\frac{3\kappa}{2}} \left[(m_{\text{sp}}+\lambda_0)V_0 V + 2\lambda_1(1-n_1)V_0^{2n_1} V^{2(1-n_1)} + 2\lambda_2(1-n_2)V_0^{2n_2} V^{2(1-n_2)} \right]}{\bar{X}_1 V^{(4N_3-6)/3N_3+3\kappa} \left[(m_{\text{sp}}+\lambda_0)V_0 V + \lambda_1 V_0^{2n_1} V^{2(1-n_1)} + \lambda_2 V_0^{2n_2} V^{2(1-n_2)} \right] + \bar{C}}. \quad (7.21)$$

Из (7.21) можно установить, что

$$\lim_{V \rightarrow \infty} q \rightarrow -(1-n_2) < 0, \quad n_2 < 1/2. \quad (7.22)$$

Таким образом, нелинейность спинорного поля порождает позднее ускорение.

Наконец, посмотрим, что происходит с параметром уравнения состояния. Ввиду диагональных компонент тензора энергии-импульса спинорного поля и (4.55) для параметра уравнения состояния ω имеем

$$\omega = \frac{p}{\varepsilon} = -\frac{T_1^1}{T_0^0} = \frac{\sum_k \lambda_k (2n_k - 1) S^{2n_k}}{\sum_k \lambda_k S^{2n_k} + m_{\text{sp}} S}, \quad (7.23)$$

которое с учетом вышеизложенного рассуждения можно переписать в виде

$$\omega = \frac{\lambda_1(2n_1 - 1)V_0^{2n_1} V^{2n_2} + \lambda_2(2n_2 - 1)V_0^{2n_2} V^{2n_1}}{(\lambda_0 + m_{\text{sp}})V_0 V^{2(n_1+n_2)-1} + \lambda_1 V_0^{2n_1} V^{2n_2} + \lambda_2 V_0^{2n_2} V^{2n_1}}. \quad (7.24)$$

Поскольку нас интересует качественная картина Вселенной, установим простые значения параметров. Здесь предположительно устанавливаем $m = 1$, $X_1 = 1$, $X_0 = 1$, $V_0 = 1$, $\lambda_0 = 1$, $m_{\text{sp}} = 1$, $C_0 = 1$, $\kappa = 1$, $N_3 = 3$. Рассмотрим два случая для различных сочетаний с $\lambda_1 = \pm 1$ и $\lambda_2 = \pm 1$. Установлено, что в зависимости от знака λ_2 модель обеспечивает два разных типа решения, а именно: при положительном знаке λ_2 дает расширяющийся режим эволюции, тогда как при отрицательном λ_2 генерирует колебательный режим эволюции. На рис. 15 и 16 показана эволюция Вселенной для положительного и отрицательного значений λ_2 соответственно. Знак λ_1 не дает качественно иной картины. На рис. 17 представлен график динамики параметра замедления q , что показывает ускорение позднего времени. На рис. 18 отражено поведение параметра уравнения состояния w для положительного значения λ_2 , что вызывает ускоренный режим расширения. Как видно, он положителен вначале

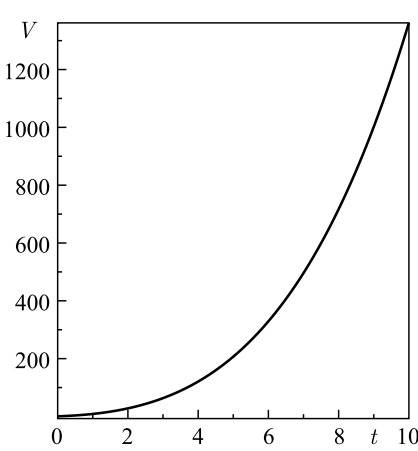


Рис. 15. Эволюция Вселенной, заполненной спинорным полем с нетривиальной массой, при положительном значении λ_2 , $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = 1$

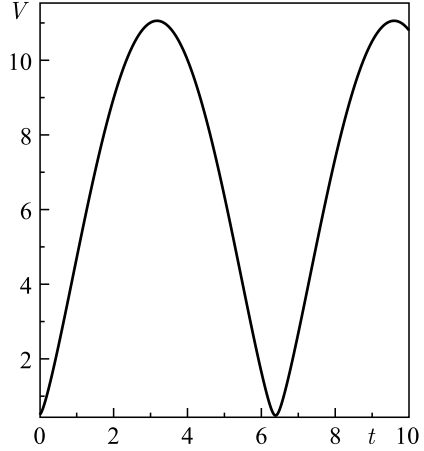


Рис. 16. Эволюция Вселенной, заполненной спинорным полем с нетривиальной массой, при отрицательном значении λ_2 , $\lambda_1 = -1$ и $\lambda_2 = -1$

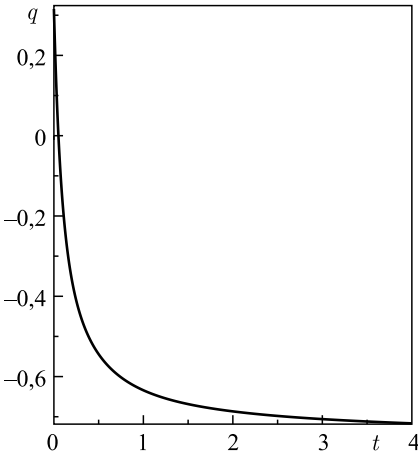


Рис. 17. Поведение параметра замедления q для положительного значения λ_2 (соответствует поведению V , заданному на рис. 15)

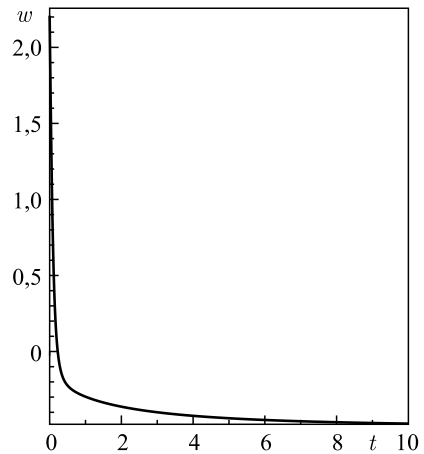


Рис. 18. Поведение параметра уравнения состояния w для положительного значения λ_2 (соответствует поведению V , заданному на рис. 15)

и становится отрицательным в процессе эволюции, которая согласуется с сегодняшним наблюдением. Следует отметить, что и параметр замедления, и параметр уравнения состояния меняются во времени. Этот факт также согласуется с современной картиной эволюции Вселенной.

В отличие от модели Бианки типа I, V или VI₀, где и массовый член, и нелинейность спинорного поля исчезают [212, 214, 215] или метрические функции становятся похожими друг на друга, т.е. $a_1 \sim a_2 \sim a_3$, в данном случае такие ситуации не возникают. Как видно из (7.12), пространство-время остается локально вращательно-симметричным и анизотропным все время, хотя изотропия пространства-времени может быть достигнута за счет большой постоянной пропорциональности. Что касается эволюции, в зависимости от знака констант связи модели позволяют как ускоренный, так и колебательный режим расширения. Отрицательные константы приводят к колебательному режиму расширения, в то время как положительные константы порождают расширяющуюся Вселенную с поздним ускорением. Параметр замедления и параметр уравнения состояния в этом случае меняются с течением времени и находятся в согласии с современной концепцией пространственно-временной эволюции.

8. ПРОСТРАНСТВО-ВРЕМЯ БИАНКИ ТИПА I

Модель Бианки типа I (BI) пространства-времени является прямым обобщением плоской Вселенной Фридмана–Робертсона–Уокера (FRW). Это одна из самых простых моделей анизотропной Вселенной, которая описывает однородную и пространственно-плоскую Вселенную. В отличие от FRW Вселенной, которая имеет одинаковые масштабные факторы для каждого из трех пространственных направлений, BI Вселенная имеет разные масштабные факторы в каждом направлении, в результате чего в системе возникает анизотропия. Кроме того, она обладает тем приятным свойством, что возле сингулярности она ведет себя как Вселенная Казнера даже в присутствии материи и, следовательно, подпадает под общий анализ сингулярности, сделанный в работе [18]. Также во Вселенной, заполненной материей с $p = \zeta \varepsilon$, $\zeta < 1$, было показано, что любые первоначальные неоднородности в BI Вселенной быстро исчезают, в конечном счете BI превращается в FRW Вселенную [105]. Поскольку Вселенная к настоящему времени является удивительным образом изотропной, она превращает BI Вселенную в главного кандидата для изучения возможных последствий анизотропии в ранней Вселенной на основе современных наблюдений. Учитывая важность упомянутых выше свойств, многие авторы изучали BI Вселенную с разных точек зрения. Анизотропные космологические модели BI с постоянным параметром замедления были изучены в [151]. Эволюция Вселенной, наполненной нелинейным спинорным полем, изучалась в ряде работ [55, 173, 177, 180, 190, 198, 204, 212, 214]. Модель Бианки типа I Вселенной, заполненной спинорным полем и вязкой жидкостью, изучена в работах [183, 184, 191, 193–197, 239]. Проблема современной космологии в свете спинорного поля обсуждается в [207, 211].

Анизотропное пространство-время Бианки типа I задается в виде

$$ds^2 = dt^2 - a_1^2 dx_1^2 - a_2^2 dx_2^2 - a_3^2 dx_3^2, \quad (8.1)$$

где a_1 , a_2 и a_3 зависят только от времени. Это простейшая анизотропная модель пространства-времени. Основанием для рассмотрения анизотропной модели является то, что, хотя изотропная модель FRW описывает сегодняшнюю Вселенную с большой точностью, существуют как теоретические аргументы, так и данные наблюдений, предполагающие наличие анизотропной фазы в далеком прошлом.

Для метрики (8.1) выберем тетрады в виде

$$e_0^{(0)} = 1, \quad e_1^{(1)} = a_1, \quad e_2^{(2)} = a_2, \quad e_3^{(3)} = a_3. \quad (8.2)$$

Из (1.92) находим спинорные аффинные связности:

$$\Gamma_0 = 0, \quad (8.3a)$$

$$\Gamma_1 = \frac{\dot{a}_1}{2} \bar{\gamma}^1 \bar{\gamma}^0, \quad (8.3б)$$

$$\Gamma_2 = \frac{\dot{a}_2}{2} \bar{\gamma}^2 \bar{\gamma}^0, \quad (8.3в)$$

$$\Gamma_3 = \frac{\dot{a}_3}{2} \bar{\gamma}^3 \bar{\gamma}^0. \quad (8.3г)$$

Для инвариантов билинейных спинорных форм имеем

$$\dot{S}_0 + \mathcal{G} A_0^0 = 0, \quad (8.4a)$$

$$\dot{P}_0 - \Phi A_0^0 = 0, \quad (8.4б)$$

$$\dot{A}_0^0 + \Phi P_0 - \mathcal{G} S_0 = 0, \quad (8.4в)$$

$$\dot{A}_0^3 = 0, \quad (8.4г)$$

$$\dot{v}_0^0 = 0, \quad (8.4д)$$

$$\dot{v}_0^3 + \Phi Q_0^{30} + \mathcal{G} Q_0^{21} = 0, \quad (8.4е)$$

$$\dot{Q}_0^{30} - \Phi v_0^3 = 0, \quad (8.4ж)$$

$$\dot{Q}_0^{21} - \mathcal{G} v_0^3 = 0. \quad (8.4з)$$

Из (8.4a)–(8.4з) находим соотношения

$$(S_0)^2 + (P_0)^2 + (A_0^0)^2 = C_1 = \text{const}, \quad (8.5a)$$

$$A_0^3 = C_2 = \text{const}, \quad (8.5б)$$

$$v_0^0 = C_3 = \text{const}, \quad (8.5в)$$

$$(Q_0^{30})^2 + (Q_0^{21})^2 + (v_0^3)^2 = C_4 = \text{const}. \quad (8.5г)$$

Система уравнений Эйнштейна имеет вид

$$\frac{\ddot{a}_2}{a_2} + \frac{\ddot{a}_3}{a_3} + \frac{\dot{a}_2 \dot{a}_3}{a_2 a_3} = \kappa (F(S) - SF_S), \quad (8.6a)$$

$$\frac{\ddot{a}_3}{a_3} + \frac{\ddot{a}_1}{a_1} + \frac{\dot{a}_3 \dot{a}_1}{a_3 a_1} = \kappa (F(S) - SF_S), \quad (8.6б)$$

$$\frac{\ddot{a}_1}{a_1} + \frac{\ddot{a}_2}{a_2} + \frac{\dot{a}_1 \dot{a}_2}{a_1 a_2} = \kappa (F(S) - SF_S), \quad (8.6в)$$

$$\frac{\dot{a}_1 \dot{a}_2}{a_1 a_2} + \frac{\dot{a}_2 \dot{a}_3}{a_2 a_3} + \frac{\dot{a}_3 \dot{a}_1}{a_3 a_1} = \kappa (m_{\text{сп}} S + F(S)), \quad (8.6г)$$

$$0 = \left(\frac{\dot{a}_1}{a_1} - \frac{\dot{a}_2}{a_2} \right) A^3, \quad (8.6д)$$

$$0 = \left(\frac{\dot{a}_2}{a_2} - \frac{\dot{a}_3}{a_3} \right) A^2, \quad (8.6е)$$

$$0 = \left(\frac{\dot{a}_3}{a_3} - \frac{\dot{a}_1}{a_1} \right) A^1. \quad (8.6ж)$$

Выразим a_1, a_2, a_3 через V . Отметим, что разность уравнений (8.6б) и (8.6а) приводит к

$$\frac{\ddot{a}_1}{a_1} - \frac{\ddot{a}_2}{a_2} + \frac{\dot{a}_1 \dot{a}_3}{a_1 a_3} - \frac{\dot{a}_2 \dot{a}_3}{a_2 a_3} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{a}_1}{a_1} - \frac{\dot{a}_2}{a_2} \right) + \left(\frac{\dot{a}_1}{a_1} - \frac{\dot{a}_2}{a_2} \right) \left(\frac{\dot{a}_1}{a_1} + \frac{\dot{a}_2}{a_2} + \frac{\dot{a}_3}{a_3} \right) = 0. \quad (8.7)$$

Из (8.7) находим

$$\left(\frac{\dot{a}_1}{a_1} - \frac{\dot{a}_2}{a_2} \right) V = X_1, \quad X_1 = \text{const}. \quad (8.8)$$

Это означает, что при $V \rightarrow \infty$ скорость расширения на $x_1 x_2$ -плоскости становится изотропной, т. е.

$$\frac{\dot{a}_1}{a_1} = \frac{\dot{a}_2}{a_2}, \quad a_1 = c_0 a_2, \quad c_0 = \text{const}. \quad (8.9)$$

В общем (8.8) задает

$$\frac{a_1}{a_2} = D_1 \exp \left(X_1 \int \frac{dt}{V} \right), \quad D_1 = \text{const}, \quad X_1 = \text{const}. \quad (8.10)$$

Аналогично имеем

$$\frac{a_2}{a_3} = D_2 \exp \left(X_2 \int \frac{dt}{V} \right), \quad \frac{a_3}{a_1} = D_3 \exp \left(X_3 \int \frac{dt}{V} \right), \quad (8.11)$$

где D_2, D_3, X_2, X_3 — постоянные интегрирования. Ввиду уравнения (4.3) находим следующие функциональные зависимости между константами $D_1, D_2, D_3, X_1, X_2, X_3$:

$$D_1 D_2 D_3 = 1, \quad X_1 + X_2 + X_3 = 0.$$

Наконец, из (8.10) и (8.11) для метрических функций запишем

$$a_1(t) = A_1 V^{1/3} \exp \left[\left(\frac{B_1}{3} \right) \int \frac{dt}{V} \right], \quad (8.12a)$$

$$a_2(t) = A_2 V^{1/3} \exp \left[\left(\frac{B_2}{3} \right) \int \frac{dt}{V} \right], \quad (8.12б)$$

$$a_3(t) = A_3 V^{1/3} \exp \left[\left(\frac{B_3}{3} \right) \int \frac{dt}{V} \right] \quad (8.12в)$$

с

$$A_1 = \sqrt[3]{\left(\frac{D_1}{D_3} \right)}, \quad A_2 = \sqrt[3]{\frac{1}{(D_1^2 D_3)}}, \quad A_3 = \sqrt[3]{(D_1 D_3^2)},$$

$$B_1 = X_1 - X_3, \quad B_2 = -(2X_1 + X_3), \quad B_3 = X_1 + 2X_3.$$

Таким образом, система уравнений Эйнштейна полностью проинтегрирована. Как видно, метрические функции выражены в терминах V , поэтому запишем уравнение для V . Сумма уравнений (8.6а), (8.6б), (8.6в) и трижды (8.6г) приводит к уравнению для V [177]

$$\ddot{V} = \frac{3\kappa}{2} (T_0^0 + T_1^1) V = \frac{3\kappa}{2} [m_{sp} S + 2(F(K) - KF_K)] V. \quad (8.13)$$

Перед тем, как решать (8.13), посмотрим, как влияют недиагональные компоненты системы (8.6). Уравнения (8.6д), (8.6е) и (8.6ж) налагают некоторые ограничения либо на спинорное поле, либо на метрические функции, либо на все вместе.

Случай I. Рассмотрим случай, когда наложены ограничения только на спинорные поля. Это приводит к

$$A^3 = A^2 = A^1 = 0. \quad (8.14)$$

Тогда из равенства

$$A_\mu v^\mu = 0 \quad (8.15)$$

находим

$$A_0 v^0 = \bar{\psi} \gamma^5 \gamma_0 \psi \bar{\psi} \gamma^0 \psi = \bar{\psi} \gamma^5 \gamma^0 \psi \bar{\psi}^* \psi = 0. \quad (8.16)$$

Так как $\bar{\psi}^* \psi \neq 0$, из (8.16) следует, что $A^0 = 0$, следовательно, $I_A = 0$. Но ввиду тождества Фирца $I_v = -I_A = I + J$ и $I_T = I - J$. Таким образом, имеем

$$I_A = -(S^2 + P^2) = 0, \quad (8.17)$$

что приводит к

$$S = \bar{\psi} \psi = 0, \quad P = i\bar{\psi} \gamma^5 \psi = 0. \quad (8.18)$$

Это обстоятельство даже без ссылки на Гейзенберга свидетельствует о том, что спинорное поле в этом случае должно быть безмассовым. Таким образом, если ограничение наложено только на спинорное поле, оно становится линейным и безмассовым. Уравнение для V имеет вид

$$\ddot{V} = 0 \quad (8.19)$$

с решением

$$V = V_1 t + V_2, \quad V_1, V_2 — \text{const.} \quad (8.20)$$

Следует отметить, что данный случай эквивалентен решению уравнения Эйнштейна в вакууме. В отличие от Бианки типа VI₀ пространства-времени в данном случае V является линейной функцией от времени t .

Для метрических функций имеем

$$a_i = D_i (V_1 t + V_2)^{\frac{1}{3} + \frac{X_i}{V_1}}, \quad \prod_{i=1}^3 D_i = 1, \quad \sum_{i=1}^3 X_i = 1. \quad (8.21)$$

В этом случае $\frac{a_i}{a} \Big|_{t \rightarrow \infty} = (V_1 t + V_2)^{X_i/V_1} \Big|_{t \rightarrow \infty} \rightarrow \text{const.}$ Это означает, что в отсутствие нелинейности никакой изотропизации не происходит.

Случай II. Наложив ограничения на метрические функции и спинорное поле, имеем

$$\frac{\dot{a}_2}{a_2} - \frac{\dot{a}_3}{a_3} = 0 \quad (8.22)$$

вместе с

$$A^2 = A^3 = 0. \quad (8.23)$$

Из (8.22) находим

$$a_2 = c_1 a_3, \quad c_1 = \text{const.} \quad (8.24)$$

При подстановке (8.24) в (8.1) общее Бианки типа I пространство-время преобразуется в локально вращательно-симметричное (LRS) Бианки типа I пространство-время. Изучим эту метрику в следующем разделе.

Случай III. Наконец, наложив ограничения полностью только на метрические функции из (8.6д), (8.6е) и (8.6ж), находим

$$\frac{\dot{a}_1}{a_1} - \frac{\dot{a}_2}{a_2} = \frac{\dot{a}_2}{a_2} - \frac{\dot{a}_3}{a_3} = \frac{\dot{a}_3}{a_3} - \frac{\dot{a}_1}{a_1} = 0, \quad (8.25)$$

что может быть переписано в виде

$$\frac{\dot{a}_1}{a_1} = \frac{\dot{a}_2}{a_2} = \frac{\dot{a}_3}{a_3} \equiv \frac{\dot{a}}{a}. \quad (8.26)$$

Таким образом, в данном случае Бианки типа I пространство-время преобразуется в изотропную и однородную Вселенную Фридмана–Робертсона–Уокера FRW. Изучим этот случай в следующих разделах.

9. ПРОСТРАНСТВО-ВРЕМЯ LRS БИАНКИ ТИПА I

Хотя изотропия реликтового излучения (CMB) обнаружена спутником «Космический фоновый покоритель» (Cosmic Background Explorer (COBE)) [227], а затем подтверждена микроволновым зондом анизотропии Уилкинсона (Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP)) [95] и есть предположение, что положение Земли во Вселенной никоим образом не представляет ничего особенного, а также подчеркивается космологический принцип, который гласит, что распределение вещества во Вселенной однородно и изотропно, т. е. наша Вселенная может быть описана моделью FRW, тем не менее остались еще теоретические и наблюдаемые свидетельства, которые подтверждают наличие крошечных неоднородностей в космологическом фоновом излучении и распределении материи [38, 130, 249]. Малость амплитуды квадруполь CMB, известная как проблема квадруполь, подробно изучена в [35, 61, 72, 83, 87, 108, 132, 146, 156] в основном потому, что это может дать некоторый сигнал либо о нетривиальной топологии, либо об отклонении от изотропности крупномасштабной геометрии Вселенной. На самом деле ничтожное отклонение от идеальной изотропии было обнаружено COBE [22], и эта анизотропия (10^{-5}) подтверждена данными из WMAP. Как было показано в [245], этот наблюдаемый спектр CMB находится в хорошем согласии с предсказанием модели Λ -CDM. Недавно было показано, что космологическая модель Бианки типа I с пространственно-плоской метрикой, которая известна также как локально вращательно-симметричная модель Бианки типа I, допускает лучшее согласование с крупномасштабными CMB анизотропными данными [29, 45–47, 111]. Теория эллипсоидальных вселенных в дальнейшем была развита в работах [48, 49]. Ввиду этого мы подробно изучим модель LRSBI Вселенной, заполненной спинорным полем.

Пространственно-однородное и анизотропное локально вращательно-симметричное Бианки типа I пространство-время (LRSBI) — это обычная модель Бианки типа I, у которой две из трех метрических функций равны друг другу. Недавно изучена модель LRSBI Вселенной, заполненной идеальной жидкостью и анизотропной темной энергией, имеющей динамическую плотность энергии, в [213, 250]. Модель LRSBI с постоянным параметром замедления исследована в [1]. Эволюция LRSBI Вселенной, наполненной спинорным полем, изучена в [216].

LRSBI пространство-время задается в виде

$$ds^2 = dt^2 - a_1^2 [dx^2 + dy^2] - a_3^2 dz^2, \quad (9.1)$$

где a_1 и a_3 зависят только от времени.

Тетрады, соответствующие метрике (9.1), имеют вид

$$e_0^{(0)} = 1, \quad e_1^{(1)} = a_1, \quad e_2^{(2)} = a_1, \quad e_3^{(3)} = a_3. \quad (9.2)$$

Из (1.92) находим следующие выражения для спинорной аффинной связности:

$$\Gamma_0 = 0, \quad \Gamma_1 = \frac{\dot{a}_1}{2} \bar{\gamma}^1 \bar{\gamma}^0, \quad \Gamma_2 = \frac{\dot{a}_1}{2} \bar{\gamma}^2 \bar{\gamma}^0, \quad \Gamma_3 = \frac{\dot{a}_3}{2} \bar{\gamma}^3 \bar{\gamma}^0. \quad (9.3)$$

Тогда систему уравнений Эйнштейна для метрики LRSBI можно записать в виде

$$\frac{\ddot{a}_3}{a_3} + \frac{\ddot{a}_1}{a_1} + \frac{\dot{a}_3 \dot{a}_1}{a_3 a_1} = \kappa(F(K) - 2KF_K), \quad (9.4a)$$

$$2\frac{\ddot{a}_1}{a_1} + \frac{\dot{a}_1^2}{a_1^2} = \kappa(F(K) - 2KF_K), \quad (9.4б)$$

$$\frac{\dot{a}_1^2}{a_1^2} + 2\frac{\dot{a}_3 \dot{a}_1}{a_3 a_1} = \kappa(m_{sp}S + F(K)), \quad (9.4в)$$

$$0 = \left(\frac{\dot{a}_3}{a_3} - \frac{\dot{a}_1}{a_1} \right) A^2, \quad (9.4г)$$

$$0 = \left(\frac{\dot{a}_1}{a_1} - \frac{\dot{a}_3}{a_3} \right) A^1. \quad (9.4д)$$

Отметим, что инварианты билинейных спинорных форм в этом случае подчиняются (8.4) и (8.5).

Вернемся к уравнениям Эйнштейна. Недиагональные компоненты уравнений Эйнштейна (9.4г) и (9.4д) налагают следующие ограничения либо на спинорное поле, либо на метрические функции:

$$A^2 = 0, \quad A^1 = 0, \quad (9.5a)$$

$$\frac{\dot{a}_3}{a_3} - \frac{\dot{a}_1}{a_1} = 0. \quad (9.5б)$$

Ограничение (9.56) приводит к $a_3 = q_0 a_1$, где q_0 — некоторая постоянная. В этом случае система может быть описана FRW с самого начала. Изучим этот случай в следующем разделе.

Детально рассмотрим случай, когда ограничение наложено на компоненты спинорного поля. Вычитая (9.46) из (9.4а), находим

$$\frac{\ddot{a}_3}{a_3} - \frac{\ddot{a}_1}{a_1} + \frac{\dot{a}_1}{a_1} \left(\frac{\dot{a}_3}{a_3} - \frac{\dot{a}_1}{a_1} \right) = 0, \quad (9.6)$$

что приводит к [177]

$$a_1 = D_1 V^{1/3} \exp \left(X_1 \int \frac{dt}{V} \right), \quad a_3 = \left(\frac{1}{D_1^2} \right) V^{1/3} \exp \left(-2X_1 \int \frac{dt}{V} \right), \quad (9.7)$$

где D_1 и X_1 — константы интегрирования. Таким образом, метрические функции могут быть выражены с помощью $V = a_1^2 a_3$.

Посмотрим, становится ли модель асимптотически изотропной. Можно показать, что для расширяющейся Вселенной, когда $V \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$, происходит процесс изотропизации. Чтобы доказать это, мы воспользуемся условием изотропизации, предложенным в [40]:

$$\left. \frac{a_i}{a} \right|_{t \rightarrow \infty} \rightarrow \text{const}. \quad (9.8)$$

Затем путем повторного масштабирования некоторых координат можно сделать $a_i/a \rightarrow 1$, и метрика станет явно изотропной при больших t .

Учитывая, что $a = \sqrt[3]{V}$, из (9.7) находим

$$\frac{a_1}{a} = D_1 \exp \left(X_1 \int \frac{dt}{V} \right) \rightarrow D_1, \quad \frac{a_3}{a} = \left(\frac{1}{D_1^2} \right) \exp \left(-2X_1 \int \frac{dt}{V} \right) \rightarrow \frac{1}{D_1^2} \quad (9.9)$$

при $V \rightarrow \infty$. Напомним, что в изотропной модели FRW имеется один и тот же масштабный фактор по всем трем направлениям, т. е. $a_1(t) = a_2(t) = a_3(t) = a(t)$. Для того чтобы LRSBI Вселенная перешла в FRW, мы должны подставить $D_1 = 1$. Кроме того, изотропность настоящей Вселенной приводит к $|X_1| \ll 1$, так что $\int [V(t)]^{-1} dt \rightarrow 0$ для $t < \infty$ (для $V(t) = t^n$ с $n > 1$ интеграл стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$).

Вернемся к уравнениям спинорного поля (4.47). Обозначив $\phi_i = \sqrt{V} \psi_i$, из (4.47) для спинорного поля находим

$$\dot{\phi}_1 + \imath [m_{\text{sp}} + \mathcal{D}] \phi_1 + \mathcal{G} \phi_3 = 0, \quad (9.10a)$$

$$\dot{\phi}_2 + \imath [m_{\text{sp}} + \mathcal{D}] \phi_2 + \mathcal{G} \phi_4 = 0, \quad (9.10б)$$

$$\dot{\phi}_3 - \imath [m_{\text{sp}} + \mathcal{D}] \phi_3 - \mathcal{G} \phi_1 = 0, \quad (9.10в)$$

$$\dot{\phi}_4 - \imath [m_{\text{sp}} + \mathcal{D}] \phi_4 - \mathcal{G} \phi_2 = 0. \quad (9.10г)$$

Если нелинейность спинорного поля рассмотреть как функцию от инварианта I , т. е. в случае $K = I$, для спинорного поля из (9.10) имеем

$$\dot{\phi}_1 + \imath [m_{\text{sp}} + \mathcal{D}] \phi_1 = 0, \quad (9.11a)$$

$$\dot{\phi}_2 + \imath [m_{\text{sp}} + \mathcal{D}] \phi_2 = 0, \quad (9.11б)$$

$$\dot{\phi}_3 - \imath [m_{\text{sp}} + \mathcal{D}] \phi_3 = 0, \quad (9.11в)$$

$$\dot{\phi}_4 - \imath [m_{\text{sp}} + \mathcal{D}] \phi_4 = 0 \quad (9.11г)$$

с решением

$$\psi_1(t) = \frac{C_1}{\sqrt{V}} \exp(-\imath [m_{\text{sp}} + \mathcal{D}] dt), \quad (9.12a)$$

$$\psi_2(t) = \frac{C_2}{\sqrt{V}} \exp(-\imath [m_{\text{sp}} + \mathcal{D}] dt), \quad (9.12б)$$

$$\psi_3(t) = \frac{C_3}{\sqrt{V}} \exp(\imath [m_{\text{sp}} + \mathcal{D}] dt), \quad (9.12в)$$

$$\psi_4(t) = \frac{C_4}{\sqrt{V}} \exp(\imath [m_{\text{sp}} + \mathcal{D}] dt), \quad (9.12г)$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 — постоянные интегрирования, связанные с V_0 как

$$C_1^* C_1 + C_2^* C_2 - C_3^* C_3 - C_4^* C_4 = V_0,$$

где V_0 такой, что $I = V_0^2/V^2$.

Изучим случай, когда $K = J$. Как было упомянуто, в этом случае рассматривается безмассовое спинорное поле. Тогда система уравнений спинорного поля (9.10) выглядит следующим образом:

$$\dot{\phi}_1 - \mathcal{G} \phi_3 = 0, \quad (9.13a)$$

$$\dot{\phi}_2 - \mathcal{G} \phi_4 = 0, \quad (9.13б)$$

$$\dot{\phi}_3 + \mathcal{G} \phi_1 = 0, \quad (9.13в)$$

$$\dot{\phi}_4 + \mathcal{G} \phi_2 = 0. \quad (9.13г)$$

Обозначив $U(\sigma) = \phi(t)$, где $\sigma = \int \mathcal{G} dt$, перепишем (9.13) в виде

$$U'_1 - U_3 = 0, \quad (9.14a)$$

$$U'_2 - U_4 = 0, \quad (9.14б)$$

$$U'_3 + U_1 = 0, \quad (9.14в)$$

$$U'_4 + U_2 = 0, \quad (9.14г)$$

где штрих обозначает дифференцирование по отношению к σ . Дифференцируя первое уравнение системы (9.14) и учитывая третье уравнение, получим

$$U_1'' + U_1 = 0, \tag{9.15}$$

что приводит к следующему решению:

$$\begin{aligned} U_1 &= D_1 e^{i\sigma} + iD_3 e^{-i\sigma}, \\ U_3 &= iD_1 e^{i\sigma} + D_3 e^{-i\sigma}. \end{aligned}$$

Аналогично для U_2 и U_4 находим

$$\begin{aligned} U_2 &= D_2 e^{i\sigma} + iD_4 e^{-i\sigma}, \\ U_4 &= iD_2 e^{i\sigma} + D_4 e^{-i\sigma}, \end{aligned}$$

где D_i — постоянные интегрирования. Наконец, имеем

$$\psi_1 = \frac{1}{\sqrt{V}} (D_1 e^{i\sigma} + iD_3 e^{-i\sigma}), \tag{9.16a}$$

$$\psi_2 = \frac{1}{\sqrt{V}} (D_2 e^{i\sigma} + iD_4 e^{-i\sigma}), \tag{9.16б}$$

$$\psi_3 = \frac{1}{\sqrt{V}} (iD_1 e^{i\sigma} + D_3 e^{-i\sigma}), \tag{9.16в}$$

$$\psi_4 = \frac{1}{\sqrt{V}} (iD_2 e^{i\sigma} + D_4 e^{-i\sigma}). \tag{9.16г}$$

Принимая во внимание $K = V_0^2/V^2$, можно показать, что постоянные интегрирования D_i связаны с V_0 следующим образом:

$$D_1^* D_1 + D_2^* D_2 - D_3^* D_3 - D_4^* D_4 = V_0.$$

В случаях с $K = I + J$ и $K = I - J$ можно записать решения соответствующих уравнений в форме (4.50) с

$$A = \begin{pmatrix} -i\mathcal{D} & 0 & -\mathcal{G} & 0 \\ 0 & -i\mathcal{D} & 0 & -\mathcal{G} \\ \mathcal{G} & 0 & i\mathcal{D} & 0 \\ 0 & \mathcal{G} & 0 & i\mathcal{D} \end{pmatrix}. \tag{9.17}$$

Таким образом, видно, что и метрические функции, и компоненты спинорного поля находятся в некоторой функциональной зависимости от V . Далее находим уравнение для V и изучим эволюцию масштаба объема в деталях.

Суммируя диагональные уравнения Эйнштейна (9.4а), (9.4б) и (9.4в) соответствующим образом, для V находим [177]

$$\ddot{V} = \frac{3\kappa}{2} (m_{\text{sp}} S + 2(F(K) - KF_K)) V. \quad (9.18)$$

Рассмотрим случай с $K = I$. Подставив значение массы спинорного поля, равное нулю, т. е. $m_{\text{sp}} = 0$, можно получить результаты для других случаев. Полагая, что $F = \sum_k \lambda_k I^{n_k} = \sum_k \lambda_k S^{2n_k}$, с учетом $S = V_0/V$ находим

$$\ddot{V} = \frac{3\kappa}{2} \left[m_{\text{sp}} V_0 + 2 \sum_k \lambda_k (1 - n_k) V_0^{2n_k} V^{1-2n_k} \right] \quad (9.19)$$

с решением в квадратурах

$$\int \frac{dV}{\sqrt{3\kappa \left[m_{\text{sp}} V_0 V + \sum_k \lambda_k V_0^{2n_k} V^{2(1-n_k)} \right] + \bar{C}}} = t + t_0, \quad (9.20)$$

где \bar{C} и t_0 — некоторые произвольные постоянные.

Таким образом, видно, что метрические функции, компоненты спинорного поля, а также инварианты, построенные из метрических функций и спинорных полей, являются функциями V в отрицательной степени. Следовательно, любая точка пространства-времени, где $V = 0$, — это особая точка. Поэтому мы считаем, что начальное значение $V(0)$ должно быть малым, но не нулевым. Для того, чтобы преобладал нелинейный член, в (9.19) надо подставить $n_k = n_1 : 1 - 2n_1 < 0$, т. е. $n_1 > 1/2$, тогда как для расширяющейся Вселенной, когда $V \rightarrow \infty$, как только $t \rightarrow \infty$, надо принять $n_k = n_2 : 1 - 2n_2 > 0$, т. е. $n_2 < 1/2$. Как видно из (9.19), $n_k = n_0 : n_0 = 1/2$ приводит к тому, что соответствующий член надо сложить с массовым членом.

В этом случае имеем

$$\ddot{V} = \Phi_1(V), \quad (9.21)$$

$$\begin{aligned} \Phi_1(V) = \\ = \frac{3\kappa}{2} \left[(m_{\text{sp}} + \lambda_0) V_0 + 2\lambda_1 (1 - n_1) V_0^{2n_1} V^{1-2n_1} + 2\lambda_2 (1 - n_2) V_0^{2n_2} V^{1-2n_2} \right]. \end{aligned}$$

Уравнение (9.21) допускает первый интеграл

$$\dot{V} = \Phi_2(V), \quad (9.22)$$

$$\Phi_2(V) = \sqrt{3\kappa \left[(m_{\text{sp}} + \lambda_0) V_0 V + \lambda_1 V_0^{2n_1} V^{2(1-n_1)} + \lambda_2 V_0^{2n_2} V^{2(1-n_2)} + \bar{C} \right]}. \quad (9.23)$$

Решение уравнения (9.21) может быть представлено в квадратурах

$$\int \frac{dV}{\Phi_2(V)} = t + t_0. \quad (9.24)$$

Чтобы решить уравнение (9.21), надо выбрать параметры V_0 , $m_{\text{сп}}$, κ , \bar{C} , λ_k , а также начальное значение $V(0)$ таким образом, чтобы это не привело к

$$(m_{\text{сп}} + \lambda_0) V_0 V + \lambda_1 V_0^{2n_1} V^{2(1-n_1)} + \lambda_2 V_0^{2n_2} V^{2(1-n_2)} + \bar{C} < 0.$$

Для простоты примем $V_0 = 1$, $m_{\text{сп}} = 1$, $C_0 = 10$, $\kappa = 1$. В соответствии с нашими рассуждениями примем $n_0 = 1/2$, $n_1 = 2$ и $n_2 = 0$, а $V(0) = 0,5$. Рассмотрим $\lambda_0 = 1$, $\lambda_1 = \pm 1$ и $\lambda_2 = \pm 1$ в различных комбинациях. Оказывается, что в зависимости от знака λ_2 модель допускает принципиально разные решения, а именно: в случае положительного значения λ_2 имеем ускоренный режим расширения Вселенной, а при отрицательном значении λ_2 имеем колебательный режим эволюции.

Определим параметр замедления

$$q = -\frac{V\ddot{V}}{\dot{V}^2} = -\frac{V\Phi_1(V)}{\Phi_2^2(V)}, \quad (9.25)$$

из (9.21) и (9.22) находим

$$q = -\frac{\frac{3\kappa}{2}[(m_{\text{сп}} + \lambda_0)V_0 V + 2\lambda_1(1-n_1)V_0^{2n_1} V^{2(1-n_1)} + 2\lambda_2(1-n_2)V_0^{2n_2} V^{2(1-n_2)}]}{3\kappa[(m_{\text{сп}} + \lambda_0)V_0 V + \lambda_1 V_0^{2n_1} V^{2(1-n_1)} + \lambda_2 V_0^{2n_2} V^{2(1-n_2)} + \bar{C}]}. \quad (9.26)$$

Принимая во внимание, что для расширяющейся Вселенной при больших t член V^{1-2n_2} преобладает, для параметра замедления имеем

$$\lim_{V \rightarrow \infty} q \rightarrow -(1 - n_2) < 0, \quad n_2 < 1/2. \quad (9.27)$$

Таким образом, видим, что нелинейность спинорного поля порождает позднее ускоренное расширение Вселенной.

На рис. 19 и 20 показана эволюция масштаба объема V при положительной и отрицательной константе самодействия λ_2 соответственно. Как видно из рис. 19, положительное значение λ_2 порождает ускоренное расширение Вселенной, тогда как на рис. 20 при отрицательном значении λ_2 показан колебательный режим расширения. На рис. 21 показано поведение параметра замедления q при положительном значении λ_2 .

Таким образом, видно, что тогда, как и в случае общей или полной модели Бианки типа I [212, 214] и модели Бианки типа VI₀, массовый член и нелинейность спинорного поля в лагранжиане исчезают. В данном случае ни массовый член, ни нелинейность спинорного поля не исчезают. Более того,

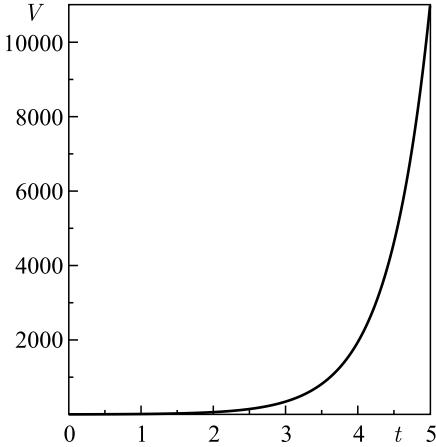


Рис. 19. Эволюция Вселенной при положительном значении λ_2

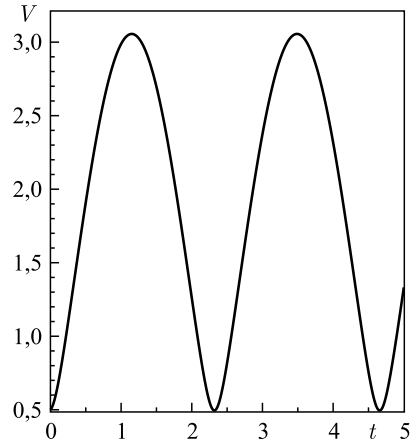


Рис. 20. Эволюция Вселенной при отрицательном значении λ_2

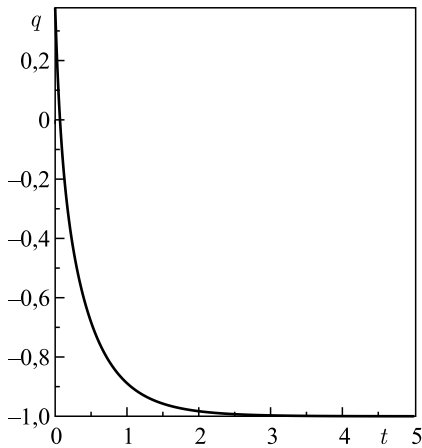


Рис. 21. Параметр замедления q при положительном значении λ_2

в отличие от модели Бианки типа VI, данная модель приводит к асимптотической изотропизации. Также было показано, что в зависимости от знака константы самодействия эта модель допускает либо ускоренный режим расширения, либо колебательный режим эволюции.

Отметим, что уравнение (9.21) можно точно решить в некоторых специальных случаях. Например, если рассмотреть случай с $m_{\text{sp}} + \lambda_0 = 0$ (или эквивалентно, с безмассовым спинорным полем $m_{\text{sp}} = 0$ и константой связи

$\lambda_0 = 0$), для V имеем

$$\ddot{V} = 3\kappa \left[\lambda_1 V - \lambda_2 \frac{V_0^4}{V^3} \right] \quad (9.28)$$

с первым интегралом

$$\dot{V} = \sqrt{3\kappa \left[\lambda_1 V^2 + \lambda_2 \frac{V_0^4}{V^2} + \bar{C} \right]}. \quad (9.29)$$

Далее, подставляя $Y = V^2$, (9.29) можно переписать в виде

$$\int \frac{dY}{\sqrt{Y^2 + 2\bar{C}_1 Y + \bar{C}_2}} = 2\sqrt{3\kappa\lambda_1} (t + t_0), \quad (9.30)$$

где обозначили $2\bar{C}_1 = \bar{C}/\lambda_1$ и $\bar{C}_2 = \lambda_2 V_0^4/\lambda_1$. Предыдущее уравнение допускает точное решение. Чтобы найти его в явном виде, запишем это в форме

$$\int \frac{dY}{\sqrt{(Y + \bar{C}_1)^2 + \bar{C}_2 - \bar{C}_1^2}} = 2\sqrt{3\kappa\lambda_1} (t + t_0) \quad (9.31)$$

с решением

$$V = \sqrt{\sqrt{\bar{C}_2 - \bar{C}_1^2} \sinh \left[2\sqrt{3\kappa\lambda_1} (t + t_0) \right] - \bar{C}_1}. \quad (9.32)$$

10. ПРОСТРАНСТВО-ВРЕМЯ FRW

Наконец, рассмотрим изотропное FRW пространство-время. Модель FRW описывает изотропную и однородную Вселенную. К настоящему времени экспериментальные данные свидетельствуют о том, что наша Вселенная действительно изотропна и однородна в больших масштабах. Вот почему при изучении современной Вселенной доминирует модель FRW. Точное решение уравнения Эйнштейна было найдено российским математиком А. А. Фридманом, которое показало, что наша Вселенная расширяется. Он также отметил, что существуют три вида решения: закрытое, плоское и открытое [79, 80]. Но в те годы физики считали, что Вселенная статична и неизменна. Поэтому Эйнштейн отвергает решения Фридмана и вводит космологическую постоянную в систему, чтобы обеспечить постоянное решение своего уравнения. В 1929 г. Э. Хаббл экспериментально показал, что Вселенная расширяется и есть много галактик за пределами Млечного Пути [98]. Это похоронило идею статической Вселенной. Далее эта модель была самостоятельно разработана авторами работ [121, 164–166, 241]. Именно поэтому

данная модель известна как модель Фридмана–Леметра–Робертсона–Уокера (FLRW).

Изотропия космического фонового излучения, впервые обнаруженная спутником COBE [227] и подтвержденная данными WMAP [95], а также предположение о том, что наше положение во Вселенной не является особым, подчеркивается космологическим принципом. По этому принципу мы живем в однородной и изотропной Вселенной, описываемой моделью FRW. Таким образом, FRW имеет не только математическую простоту, но и экспериментальную поддержку.

Космологические модели со спинорным полем в рамках FRW пространства-времени изучены в работах [161, 212, 214]. Космологическая модель FRW с двумя взаимодействующими и не взаимодействующими жидкостями изучена в [152]. Цель этой работы — изучение роли нелинейности спинорного поля в эволюции изотропного пространства-времени. Кроме того, дадим спинорное описание жидкостей и темной энергии и покажем, почему этот метод удобен для изучения эволюции Вселенной.

Изотропное FRW пространство-время задается в виде

$$ds^2 = dt^2 - a^2 [dx^2 + dy^2 + dz^2], \quad (10.1)$$

где a зависит только от времени.

В этом случае имеем следующие нетривиальные компоненты тензора Римана:

$$R_{01}^{01} = R_{02}^{02} = R_{03}^{03} = -\frac{\ddot{a}}{a}, \quad (10.2a)$$

$$R_{12}^{12} = R_{23}^{23} = R_{31}^{31} = -\frac{\dot{a}^2}{a^2}. \quad (10.26)$$

Для нетривиальных компонент тензора Риччи имеем

$$R_0^0 = 3\frac{\ddot{a}}{a}, \quad (10.3a)$$

$$R_1^1 = R_2^2 = R_3^3 = -\left(\frac{\ddot{a}}{a} + 2\frac{\dot{a}^2}{a^2}\right). \quad (10.36)$$

Скаляр Риччи (скалярная кривизна) имеет вид

$$R = 6\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2}\right). \quad (10.4)$$

Таким образом, легко видеть, что инвариант гравитационного поля является обратной функцией a .

Нетривиальные компоненты тензора Эйнштейна, соответствующие метрике (10.1), есть

$$G_1^1 = G_2^2 = G_3^3 = - \left(2 \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right), \quad (10.5a)$$

$$G_0^0 = -3 \frac{\dot{a}^2}{a^2}. \quad (10.5b)$$

Для метрики (10.1) тетрады выберем в виде

$$e_0^{(0)} = 1, \quad e_1^{(1)} = a, \quad e_2^{(2)} = a, \quad e_3^{(3)} = a. \quad (10.6)$$

Из (1.92) находим спинорные аффинные связности:

$$\Gamma_0 = 0, \quad \Gamma_1 = \frac{\dot{a}}{2} \bar{\gamma}^1 \bar{\gamma}^0, \quad \Gamma_2 = \frac{\dot{a}}{2} \bar{\gamma}^2 \bar{\gamma}^0, \quad \Gamma_3 = \frac{\dot{a}}{2} \bar{\gamma}^3 \bar{\gamma}^0. \quad (10.7)$$

Из (1.90) для нетривиальных компонент тензора энергии-импульса имеем [188]

$$T_0^0 = m_{\text{sp}} S + F(K), \quad (10.8a)$$

$$T_1^1 = F(K) - 2KF_K, \quad (10.8b)$$

$$T_2^2 = F(K) - 2KF_K, \quad (10.8b)$$

$$T_3^3 = F(K) - 2KF_K. \quad (10.8g)$$

Подобно моделям VI и LRSBI, инварианты билинейных спинорных форм в этом случае также удовлетворяют (8.4) с $S_0 = Sa^3$, $P_0 = Pa^3$, $A_0^\mu = A_\mu a^3$, $v_0^\mu = v^\mu a^3$, $Q_0^{\mu\nu} = Q^{\mu\nu} a^3$ и подчиняются (8.5). Поэтому полная система уравнений Эйнштейна для метрики FRW должна быть

$$2 \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} = \kappa (F(K) - 2KF_K), \quad (10.9a)$$

$$3 \frac{\dot{a}^2}{a^2} = \kappa (m_{\text{sp}} S + F(K)). \quad (10.9b)$$

Заметим, что можно решать (10.9b) для нахождения a , но для того, чтобы принимать во внимание оба уравнения (10.9), следует скомбинировать их вместе:

$$\ddot{a} = \frac{\kappa}{6} (3T_1^1 - T_0^0) a = \frac{\kappa}{6} (2F(K) - 6KF_K - m_{\text{sp}} S) a. \quad (10.10)$$

Перед тем, как решать эти уравнения, посмотрим уравнения спинорного поля. В этом случае с учетом (1.10) и (10.7) уравнения спинорного поля (1.6а) принимают вид

$$i\bar{\gamma}^0 \left(\dot{\psi} + \frac{3}{2} \frac{\dot{a}}{a} \psi \right) - m_{\text{sp}} \psi - \mathcal{D} \psi - i\mathcal{G} \bar{\gamma}^5 \psi = 0, \quad (10.11a)$$

$$i \left(\dot{\bar{\psi}} + \frac{3}{2} \frac{\dot{a}}{a} \bar{\psi} \right) \bar{\gamma}^0 + m_{\text{sp}} \bar{\psi} + \mathcal{D} \bar{\psi} + i\mathcal{G} \bar{\psi} \bar{\gamma}^5 = 0. \quad (10.11б)$$

Как и в предыдущем случае, из (10.11) можно показать, что

$$K = \frac{V_0^2}{a^6}. \quad (10.12)$$

Соотношение (10.12) справедливо для $K = I$ как для тривиальной, так и для нетривиальной массы спинорного поля, тогда как если K принимает одно из следующих значений $\{J, I + J, I - J\}$, то (10.12) справедливо только для безмассового спинорного поля.

Уравнение спинорного поля в этом случае может быть записано в виде

$$\dot{\phi}_1 + i (m_{\text{sp}} + \mathcal{D}) \phi_1 + \mathcal{G} \phi_3 = 0, \quad (10.13a)$$

$$\dot{\phi}_2 + i (m_{\text{sp}} + \mathcal{D}) \phi_2 + \mathcal{G} \phi_4 = 0, \quad (10.13б)$$

$$\dot{\phi}_3 - i (m_{\text{sp}} + \mathcal{D}) \phi_3 - \mathcal{G} \phi_1 = 0, \quad (10.13в)$$

$$\dot{\phi}_4 - i (m_{\text{sp}} + \mathcal{D}) \phi_4 - \mathcal{G} \phi_2 = 0, \quad (10.13г)$$

где мы ввели обозначение $\phi_i = a^{3/2} \psi_i$.

В случае $K = I$ для компонент спинорного поля из (10.11) имеем

$$\psi_1(t) = \frac{C_1}{a^{3/2}} \exp(-i [m_{\text{sp}} + \mathcal{D}] dt), \quad (10.14a)$$

$$\psi_2(t) = \frac{C_2}{a^{3/2}} \exp(-i [m_{\text{sp}} + \mathcal{D}] dt), \quad (10.14б)$$

$$\psi_3(t) = \frac{C_3}{a^{3/2}} \exp(i [m_{\text{sp}} + \mathcal{D}] dt), \quad (10.14в)$$

$$\psi_4(t) = \frac{C_4}{a^{3/2}} \exp(i [m_{\text{sp}} + \mathcal{D}] dt), \quad (10.14г)$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 — постоянные интегрирования, связанные с V_0 как

$$C_1^* C_1 + C_2^* C_2 - C_3^* C_3 - C_4^* C_4 = V_0,$$

где V_0 такой, что $I = V_0^2/a^6$. В случае безмассового спинорного поля с $K = J$ имеем

$$\psi_1 = \frac{1}{a^{3/2}} (D_1 e^{i\sigma} + iD_3 e^{-i\sigma}), \quad (10.15a)$$

$$\psi_2 = \frac{1}{a^{3/2}} (D_2 e^{i\sigma} + iD_4 e^{-i\sigma}), \quad (10.15б)$$

$$\psi_3 = \frac{1}{a^{3/2}} (iD_1 e^{i\sigma} + D_3 e^{-i\sigma}), \quad (10.15в)$$

$$\psi_4 = \frac{1}{a^{3/2}} (iD_2 e^{i\sigma} + D_4 e^{-i\sigma}), \quad (10.15г)$$

где константы интегрирования D_i удовлетворяют $D_1^* D_1 + D_2^* D_2 - D_3^* D_3 - D_4^* D_4 = V_0$, где $K = V_0^2/a^6$.

Что касается $K = I + J$ и $K = I - J$, то в этих случаях находим решение аналогично модели LRSBI.

Вернемся к уравнению (10.10). Как и в предыдущих случаях, выберем нелинейность в виде (4.55) с $K = I$. Учитывая, что $S = V_0/a^3$ ($I = V_0^2/a^6$), имеем

$$\ddot{a} = \frac{\kappa}{6} \left(2 \sum_k \lambda_k (1 - 3n_k) \frac{V_0^{2n_k}}{a^{6n_k}} - m_{\text{сп}} \frac{V_0}{a^3} \right) a. \quad (10.16)$$

Решим это уравнение численно. Поскольку любая точка пространства-времени, где $a = 0$, — это особая точка, то считаем, что начальное значение переменной $a(0)$ было малым, но не нулевым. В результате для того, чтобы нелинейный член преобладал в (10.16) на ранней стадии, мы должны иметь $n_k = n_1 : 1 - 6n_1 < -2$, т.е. $n_1 > 1/2$, тогда как в случае расширяющейся Вселенной, когда $a \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$, необходимо иметь $n_k = n_2 : 1 - 6n_2 > -2$, т.е. $n_2 < 1/2$. Таким образом, в этой модели имеем дело с двухжидкостной системой. Следует отметить, что модель темной энергии с двумя взаимодействующими жидкостями в рамках FRW Вселенной была исследована в [7].

С учетом этого предыдущее уравнение можно записать в виде

$$\ddot{a} = \Phi(a), \quad (10.17)$$

$$\Phi(a) = \frac{\kappa}{6} \left(2\lambda_1 (1 - 3n_1) \frac{V_0^{2n_1}}{a^{6n_1}} + 2\lambda_2 (1 - 3n_2) \frac{V_0^{2n_2}}{a^{6n_2}} - m_{\text{сп}} \frac{V_0}{a^3} \right) a$$

с первым интегралом

$$\dot{a} = \Phi_1(a), \quad (10.18)$$

$$\Phi_1(a) = \sqrt{\frac{\kappa}{3} \left(V_0^{2n_1} \lambda_1 a^{2(1-3n_1)} + V_0^{2n_2} \lambda_2 a^{2(1-3n_2)} + m_{\text{сп}} \frac{V_0}{a} \right) + \bar{C}},$$

где \bar{C} — константа интегрирования.

Исследуем уравнение (10.17) численно. Как и в предыдущих случаях, примем малое, но нетривиальное начальное значение для $a(t)$, а именно $a(0) = 0,5$, а $\dot{a}(t)$ вычисляется из (10.18). Примем также $V_0 = 1$, $m_{sp} = 0,01$, $\bar{C} = 1$, $\kappa = 1$, $n_1 = 2/3$ и $n_2 = -1/6$. Рассмотрим как положительное, так и отрицательное значение для λ_1 ($\lambda_1 = \pm 0,0001$) и λ_2 ($\lambda_2 = \pm 0,03$). Оказывается, что знак λ_1 фактически не имеет никакого влияния, тогда как знак λ_2 является ключевым. Положительное значение λ_2 порождает расширяющуюся Вселенную (рис. 22), а отрицательное значение λ_2 порождает Вселенную (рис. 23), которая после достижения некоторого максимального значения начинает сжиматься и в конце концов заканчивается Большим хрустом. На рис. 24 и 25 даны соответствующие картины эволюции параметра замедления.

До сих пор мы рассматривали массивное спинорное поле и изучали эволюцию Вселенной для полиномиальной нелинейности. Вспомним, что в разд. 3 были смоделированы разные типы жидкости и темной энергии с помощью нелинейных спинорных полей.

Теперь рассмотрим случай, когда спинорное поле порождает жидкость, подчиняющуюся баротропическому уравнению состояния. Принимая во внимание, что $K = V_0^2/a^6$ (мы рассматриваем безмассовое спинорное поле), в этом случае имеем

$$F(K) = \lambda \frac{V_0^{1+W}}{a^{3(1+W)}}. \quad (10.19)$$

Как было сказано, в зависимости от значения W эта нелинейность порождает пыль ($W = 0$), излучение ($W = 1/3$), жесткую Вселенную ($W \in (1/3, 1)$), Вселенную Зельдовича ($W = 1$), квинтэссенцию ($W \in (-1/3, -1)$), космологическую постоянную ($W = -1$), фантомную материю ($W < -1$) и

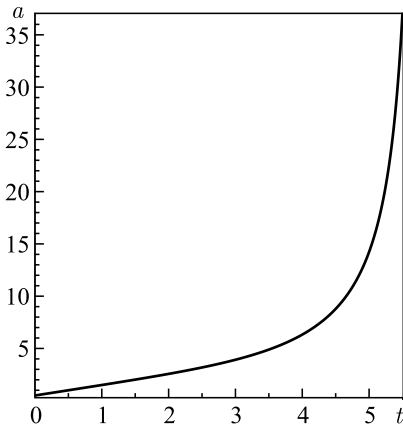


Рис. 22. Эволюция Вселенной при положительном значении λ_2

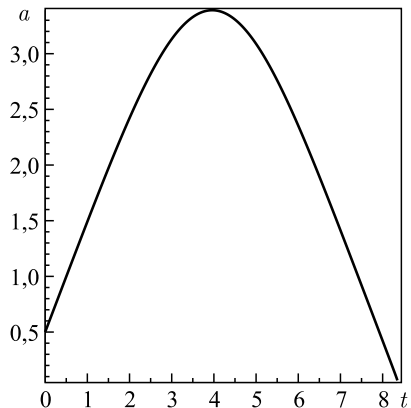


Рис. 23. Эволюция Вселенной при отрицательном значении λ_2

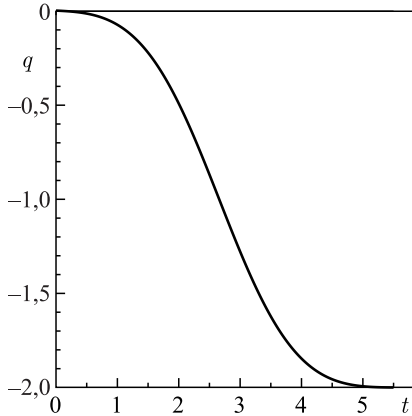


Рис. 24. Параметр замедления q при положительном значении λ_2

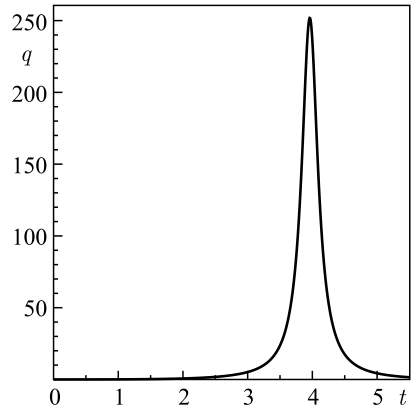


Рис. 25. Параметр замедления q при отрицательном значении λ_2

екпиротическую материю ($W > 1$). На рис. 26 показана эволюция a , когда Вселенная заполнена квинтэссенцией, при $W = -1/2$.

Что касается газа Чаплыгина, он задается

$$F = \left(A + \lambda \frac{V_0^{(1+\alpha)}}{a^{3(1+\alpha)}} \right)^{1/(1+\alpha)}, \quad (10.20)$$

где A — положительная постоянная и $0 < \alpha \leq 1$. В этом случае эволюция a показана на рис. 27.

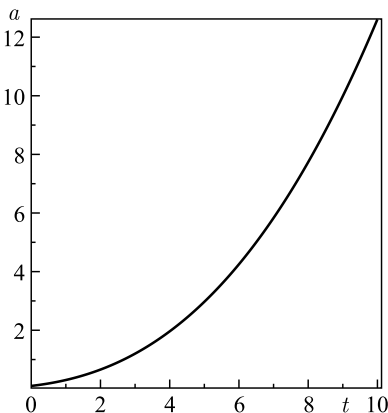


Рис. 26. Вид метрической функции a в случае квинтэссенции

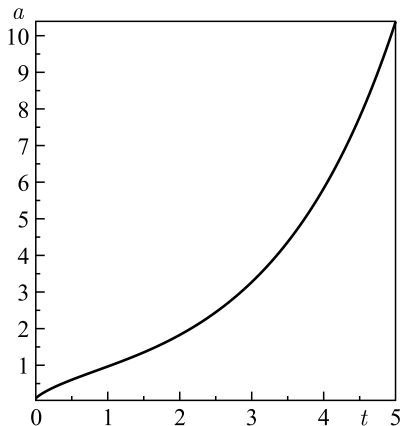


Рис. 27. Вид метрической функции a в случае газа Чаплыгина

Осциллирующая темная энергия (модифицированная квинтэссенция) задается

$$F = \lambda \frac{V_0^{(1+W)}}{a^{3(1+W)}} + \frac{W}{1+W} \varepsilon_{cr}, \quad (10.21)$$

где ε_{cr} — некоторая постоянная. В этом случае имеем осциллирующий режим эволюции, показанный на рис. 28.

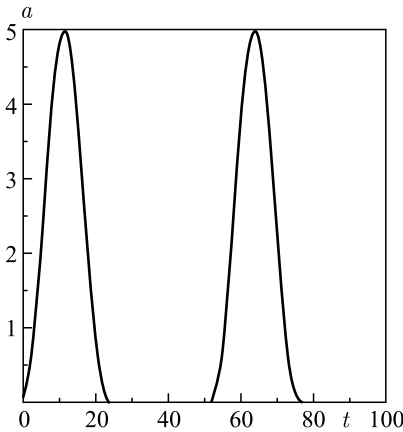


Рис. 28. Вид метрической функции a в случае модифицированной квинтэссенции

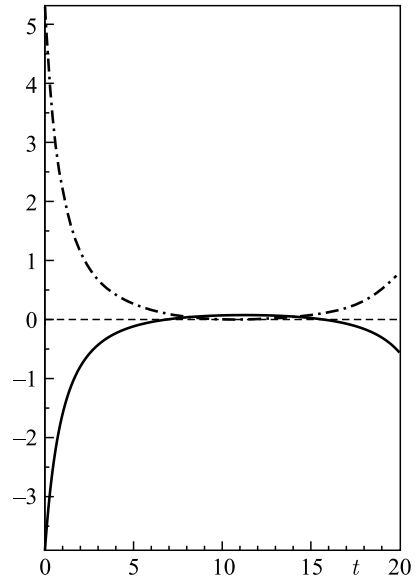


Рис. 29. Плотность энергии (штрихпунктирная кривая) и давление (сплошная) в случае модифицированной квинтэссенции

Соответствующие плотность энергии и давление представлены на рис. 29. Как видно из рисунка, как только плотность энергии становится меньше чем ε_{cr} , давление становится положительным. Это приводит к сжатию пространства-времени, в результате чего увеличивается плотность энергии. Вследствие этого давление становится отрицательным и Вселенная начинает быстро расширяться. Таким образом, видно, что в этом случае Вселенная возникает из начальной сингулярности (Большого взрыва), расширяется до некоторого максимального значения и заканчивается Большим хрустом, чтобы начинаться снова из Большого взрыва.

В случае модифицированного газа Чаплыгина имеем

$$F = \left(\frac{A}{1+W} + \lambda \frac{V_0^{(1+\alpha)(1+W)}}{a^{3(1+\alpha)(1+W)}} \right)^{1/(1+\alpha)}. \quad (10.22)$$

Соответствующая эволюция дана на рис. 30.

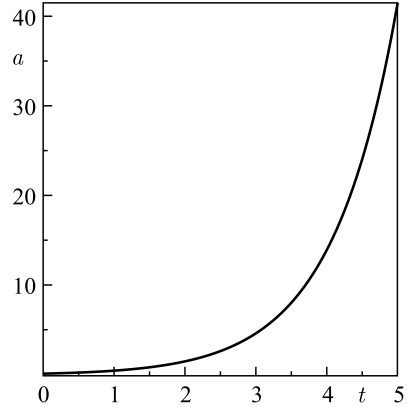


Рис. 30. Вид метрической функции a в случае модифицированного газа Чаплыгина

Что касается квинтом-сценария, для модели FRW имеем следующую картину эволюции.

В случае сценария квинтом-А имеем следующие нелинейность спинорного поля и параметр уравнения состояния:

$$F = \frac{\lambda}{a^{12}} \left[(V_0^2 - ba^6)^2 + ca^{12} \right], \quad (10.23)$$

$$W_{\text{quint}} = -1 + \frac{4V_0^2(V_0^2 - ba^6)}{[(V_0^2 - ba^6)^2 + ca^{12}]}. \quad (10.24)$$

Соответствующее поведение метрической функции a и параметра уравнения состояния показаны на рис. 31 и 32.

В случае сценария квинтом-В имеем следующие нелинейность спинорного поля и параметр уравнения состояния:

$$F = \frac{\lambda a^{12}}{[(V_0^2 - ba^6)^2 + ca^{12}]} \quad (10.25)$$

и

$$W_{\text{quint}} = -1 - \frac{4V_0^2(V_0^2 - ba^6)}{[(V_0^2 - ba^6)^2 + ca^{12}]}. \quad (10.26)$$

Соответствующее поведение метрической функции a и параметра уравнения состояния показано на рис. 33 и 34.

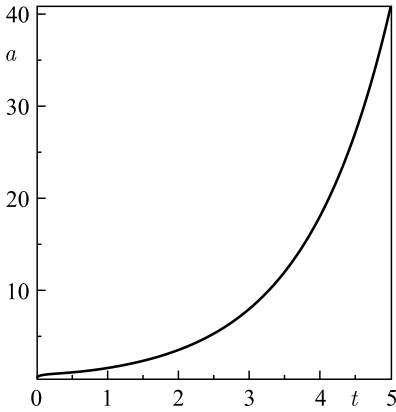


Рис. 31. Вид метрической функции a в случае сценария квинтом-А

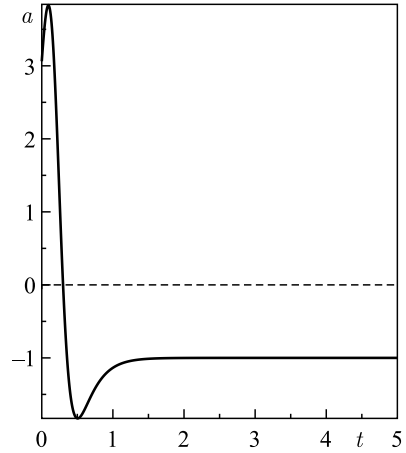


Рис. 32. Вид параметра уравнения состояния в случае сценария квинтом-А

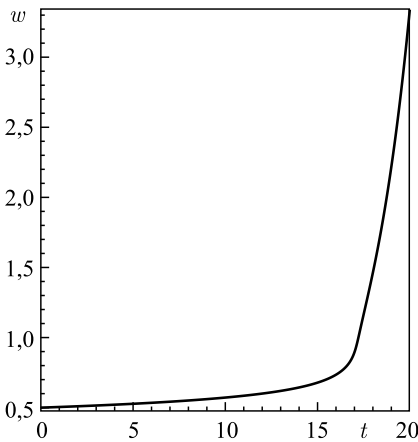


Рис. 33. Вид метрической функции a в случае сценария квинтом-В

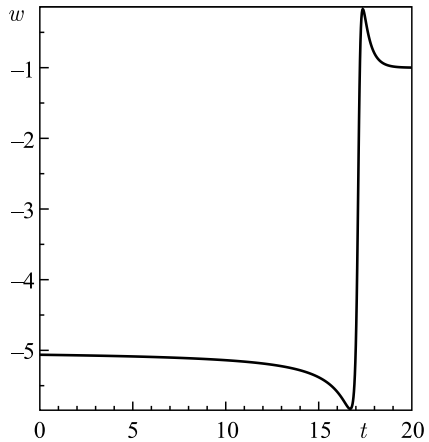


Рис. 34. Вид параметра уравнения состояния в случае сценария квинтом-В

В случае сценария квинтом-С имеем следующие нелинейность спинорного поля и параметр уравнения состояния:

$$F = \frac{\lambda}{a^{18}} [V_0^2(V_0^2 - ba^6)^2 + c^{18}] \quad (10.27)$$

и

$$W_{\text{quint}} = -1 - \frac{2V_0^2(V_0^2 - ba^6)(3V_0^2 - ba^6)}{[V_0^2(V_0^2 - ba^6)^2 + ca^{18}]}. \quad (10.28)$$

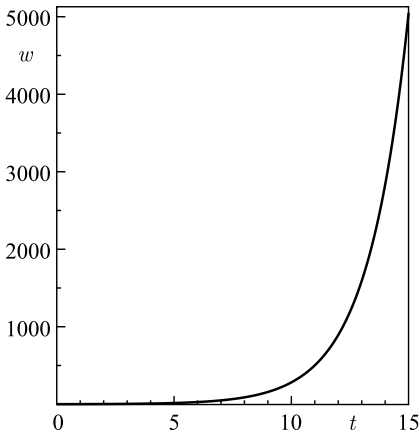


Рис. 35. Вид метрической функции w в случае сценария квинтом-С

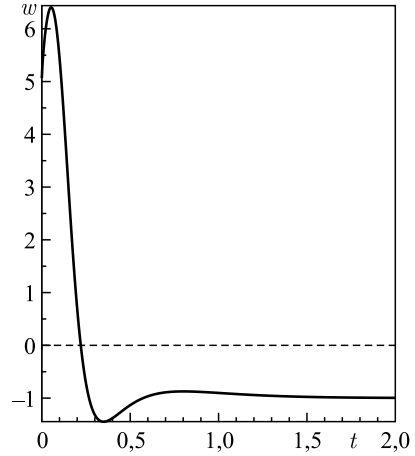


Рис. 36. Вид параметра уравнения состояния в случае сценария квинтом-С

Соответствующее поведение метрической функции w и параметра уравнения состояния показаны на рис. 35 и 36.

Может возникнуть вопрос: почему нам нужно спинорное описание вещества? Чтобы ответить на него, вспомним, что Вселенная была заполнена разными материями в ходе эволюции. В прошлом материя доминировала в ходе эволюции, теперь доминирующим компонентом стала темная энергия. В случае, когда есть только два компонента, например, излучение и темная энергия, уравнение непрерывности может быть легко разделено благодаря тому, что темная энергия не взаимодействует с обычной материей. Но в случае трех или более компонентов ситуация становится сложнее. Используя спинорное описание, можно избежать такой ситуации, так как уравнение непрерывности для спинорного поля выполняется тождественно (см. (4.70) и обсуждения после этого). Чтобы продемонстрировать это, рассмотрим случай с газом Ван дер Ваальса, излучением и модифицированным газом Чаплыгина [220]. Имеем

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \varepsilon_{\text{VdW}} + \varepsilon_{\text{rad}} + \varepsilon_{\text{m Chap}}, \\ p &= p_{\text{VdW}} + p_{\text{rad}} + p_{\text{m Chap}} = \\ &= \frac{8W_{\text{VdW}}\varepsilon_{\text{VdW}}}{3 - \varepsilon_{\text{VdW}}} - 3\varepsilon_{\text{VdW}}^2 + W_{\text{rad}}\varepsilon_{\text{rad}} + W_{\text{m Chap}}\varepsilon_{\text{m Chap}} - \frac{A}{\varepsilon_{\text{m Chap}}^\alpha}. \end{aligned} \quad (10.29)$$

Теперь из (4.68) в этом случае имеем

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{\text{VdW}} + \dot{\varepsilon}_{\text{rad}} + \dot{\varepsilon}_{\text{m Chap}} + \\ + 3\frac{\dot{a}}{a} [(\varepsilon_{\text{VdW}} + p_{\text{VdW}}) + (\varepsilon_{\text{rad}} + p_{\text{rad}}) + (\varepsilon_{\text{m Chap}} + p_{\text{m Chap}})] = 0. \end{aligned} \quad (10.30)$$

Если предположить, что темная энергия не взаимодействует с обычной материей, вышеупомянутое уравнение может быть разложено на следующие системы:

$$\dot{\varepsilon}_{\text{vdW}} + \dot{\varepsilon}_{\text{rad}} + 3\frac{\dot{a}}{a} [(\varepsilon_{\text{vdW}} + p_{\text{vdW}}) + (\varepsilon_{\text{rad}} + p_{\text{rad}})] = 0, \quad (10.31a)$$

$$\dot{\varepsilon}_{\text{m Chap}} + 3\frac{\dot{a}}{a} (\varepsilon_{\text{m Chap}} + p_{\text{m Chap}}) = 0. \quad (10.31b)$$

Таким образом, имеем только два уравнения для трех неизвестных. Принимая во внимание, что при выражении только двух из трех компонентов (например, радиации и модифицированного газа Чаплыгина) в терминах нелинейности спинорного поля, можно легко преодолеть эту ситуацию.

Далее, принимая во внимание излучение и модифицированный газ Чаплыгина, можно смоделировать с помощью спинорного поля как нелинейности

$$\varepsilon_{\text{rad}} = \lambda_{\text{rad}} S^{4/3}, \quad \varepsilon_{\text{m Chap}} = \left(\frac{A}{1+W} + \lambda_{\text{m Chap}} S^{(1+W)(1+\alpha)} \right)^{1/(1+\alpha)} \quad (10.32)$$

Уравнение (10.10) вместе с уравнением непрерывности может быть записано в виде

$$\dot{H} = -H^2 - \frac{\kappa}{6} f(a, \varepsilon_{\text{vdW}}), \quad (10.33a)$$

$$\dot{a} = aH, \quad (10.33b)$$

$$\dot{\varepsilon}_{\text{vdW}} = -3H \left(\varepsilon_{\text{vdW}} + \frac{8W_{\text{vdw}}\varepsilon_{\text{vdW}}}{3 - \varepsilon_{\text{vdW}}} - 3\varepsilon_{\text{vdW}}^2 \right), \quad (10.33b)$$

где

$$\begin{aligned} f(a, \varepsilon_{\text{vdW}}) = & \frac{24W_{\text{vdw}}\varepsilon_{\text{vdW}}}{3 - \varepsilon_{\text{vdW}}} - 9\varepsilon_{\text{vdW}}^2 + \varepsilon_{\text{vdW}} + \frac{2\lambda_{\text{rad}}V_0^{4/3}}{a^4} + \\ & + (3W + 1) \left(\frac{A}{1+W} + \frac{\lambda_{\text{m Chap}}V_0^{(1+W)(1+\alpha)}}{a^{3(1+W)(1+\alpha)}} \right)^{1/(1+\alpha)} - \\ & - 3A / \left(\frac{A}{1+W} + \frac{\lambda_{\text{m Chap}}V_0^{(1+W)(1+\alpha)}}{a^{3(1+W)(1+\alpha)}} \right)^{\alpha/(1+\alpha)}. \end{aligned} \quad (10.34)$$

Далее решим вышеизложенную систему численно. Наша цель здесь чисто педагогическая, поэтому используем максимально простые значения для параметров $\kappa = 1$, $V_0 = 1$, $\lambda_{\text{rad}} = 1$, $\lambda_{\text{m Chap}} = 1$, $W_{\text{vdw}} = 1/2$, $\alpha = 1/2$, $W = -1/2$ и $A = 1$. Для начальных значений используем $H(0) = 0,1$,

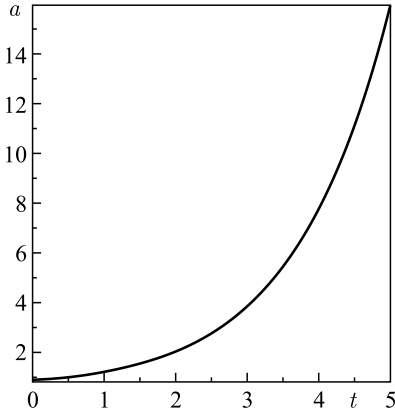


Рис. 37. Вид метрической функции a в случае FRW Вселенной, заполненной газом Ван дер Ваальса, излучением и модифицированным газом Чаплыгина

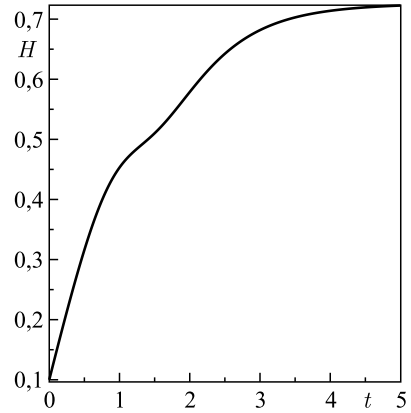


Рис. 38. Вид параметра Хаббла в случае FRW Вселенной, заполненной газом Ван дер Ваальса, излучением и модифицированным газом Чаплыгина

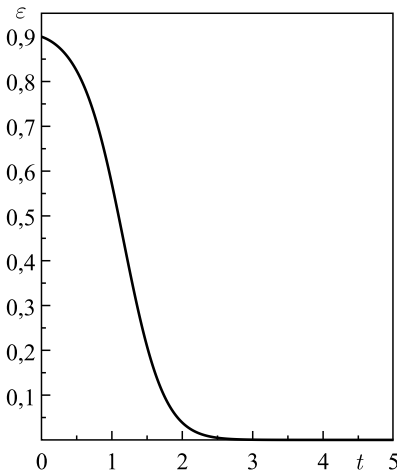


Рис. 39. Эволюция плотности энергии газа Ван дер Ваальса

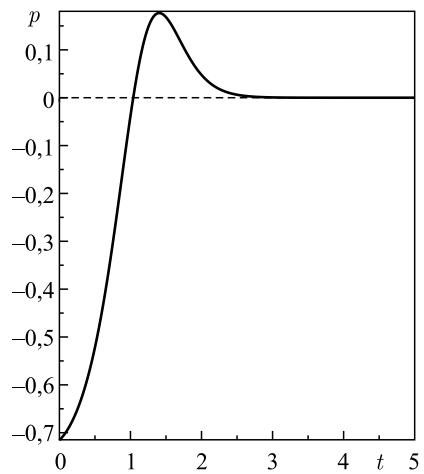


Рис. 40. Эволюция давления газа Ван дер Ваальса

$a(0) = 0,9$ и $\varepsilon_{\text{vdW}}(0) = 0,9$. На рис.37 показана эволюция метрической функции, когда Вселенная наполнена газом Ван дер Ваальса, излучением и модифицированным газом Чаплыгина. Эволюция соответствующего параметра Хаббла представлена на рис. 38. На рис. 39–41 показана эволюция плотности энергии, давления и параметра уравнения состояния газа Ван дер Ваальса

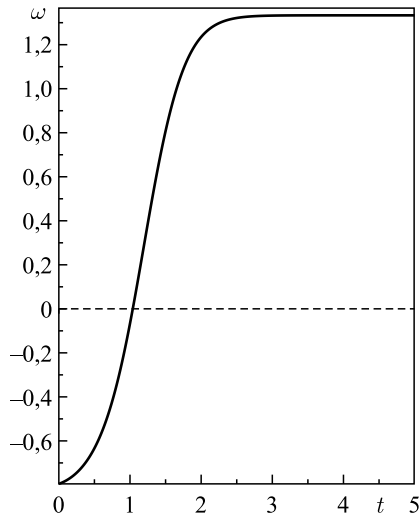


Рис. 41. Эволюция параметра уравнения состояния газа Ван дер Ваальса

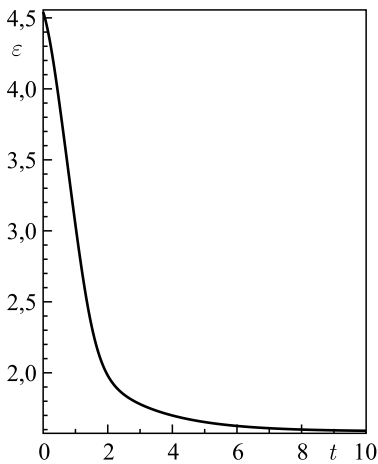


Рис. 42. Эволюция полной плотности энергии системы

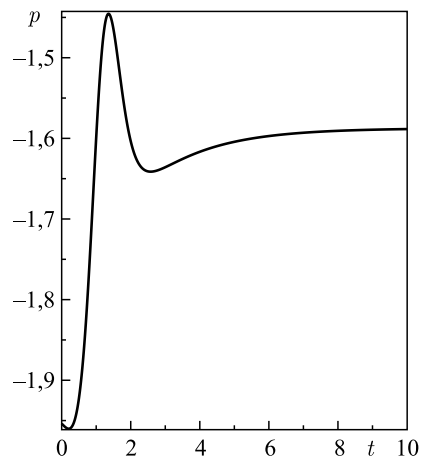


Рис. 43. Эволюция полного давления системы

соответственно. Как видно, газ Ван дер Ваальса обладает отрицательным давлением на ранней стадии, что может быть использовано для порождения первоначальной инфляции.

Проиллюстрируем эволюцию полной плотности энергии и полного давления системы.

На рис. 42 показана эволюция плотности энергии системы. Как и следовало ожидать, плотность энергии системы уменьшается по мере расширения Вселенной. На рис. 43 показана эволюция полного давления системы. Изначально оно имеет большие отрицательные значения за счет газа Ван дер Ваальса, что порождает первоначальную инфляцию. Затем благодаря излучению значение давления повышается, что приводит к замедлению. Наконец, включается модифицированный газ Чаплыгина, что служит основанием для появления позднего ускорения. Изучение взаимодействия между темной и обычной материями открывает возможность обнаружения темной энергии. Следует отметить, что данные, представленные скоплением Абел A586 (the Abell Cluster A586), поддерживают идею взаимодействия между темной энергией и темной материей [30, 60].

11. ФИЗИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ МОДЕЛЕЙ

В этом разделе обсудим физические аспекты моделей, рассмотренных выше. Поскольку модель FRW не только является самой простой и популярной, но и дает реалистичное описание сегодняшней Вселенной, изучим физические аспекты модели со спинорным полем только в рамках FRW пространства-времени. При этом рассмотрим спинорное поле с ненулевой массой и сравним полученные результаты с некоторыми данными недавних наблюдений. Для начала запишем параметр уравнения состояния W как отношение между давлением и плотностью энергии. Учитывая, что $T_0^0 = \varepsilon$ и $T_1^1 = -p$, из (10.9) получаем

$$W = \frac{p}{\varepsilon} = -\frac{2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2}}{3\frac{\dot{a}^2}{a^2}}, \quad (11.1)$$

что с учетом $q = -a\ddot{a}/\dot{a}^2$ дает широко известное соотношение между параметром замедления q и параметром уравнения состояния W :

$$q = \frac{3}{2} \left(W + \frac{1}{3} \right). \quad (11.2)$$

Из (11.2) видим, что для $W > -1/3$ Вселенная расширяется с замедлением, тогда как ускоренный режим расширения имеет место только при $W < -1/3$. Для $W = -1/3$ параметр замедления становится тривиальным. В этом случае метрическая функция либо постоянная ($a = \text{const}$), либо линейная функция от времени ($a = C_1 t + C_2$).

С другой стороны, из (10.8a), (10.8б), (10.8в) и (10.8г) имеем

$$W = \frac{p}{\varepsilon} = \frac{2KF_K - F}{mS + F}. \quad (11.3)$$

В работах [177,179] рассмотрены различные типы нелинейностей спинорного поля. Как было показано раньше, большинство установленных источников гравитационного поля инициируется спинорным полем со степенной нелинейностью. С учетом этого, подставляя (4.55) в (11.3), получим

$$W = \frac{\sum_k (2n_k - 1) \lambda_k S^{2n_k}}{m_{\text{сп}} S + \sum_k \lambda_k S^{2n_k}}. \quad (11.4)$$

Вспомним, что для $n_k = n_1 : n_1 > 1/4$ нелинейный член преобладает в ранней стадии эволюции и для $n_k = n_2 : n_2 < 1/4$ нелинейный член становится доминирующим в позднее время. И, принимая во внимание, что $S = V_0/a^3$, предыдущее выражение можно записать в виде

$$W = \frac{(2n_1 - 1) \lambda_1 V_0^{2n_1}/a^{6n_1} + (2n_2 - 1) \lambda_2 V_0^{2n_2}/a^{6n_2}}{m_{\text{сп}} V_0/a^3 + \lambda_1 V_0^{2n_1}/a^{6n_1} + \lambda_2 V_0^{2n_2}/a^{6n_2}}. \quad (11.5)$$

Здесь мы рассматриваем расширяющуюся Вселенную. Как было отмечено выше, член $V_0^{2n_1}/a^{6n_1}$ преобладает в ранней стадии эволюции, поэтому имеем

$$W|_{t \rightarrow 0} \rightarrow 2n_1 - 1, \quad (11.6)$$

тогда как в позднее время, когда член $V_0^{2n_2}/a^{6n_2}$ становится доминирующим,

$$W|_{t \rightarrow \infty} \rightarrow 2n_2 - 1. \quad (11.7)$$

Для того чтобы Вселенная расширялась с замедлением, нужно, чтобы $W > -1/3$, и из (11.6) и (11.7) получим $n_1 > 1/3$ и $n_2 > 1/3$. Так как имеем $n_1 > 1/4$ и $n_2 < 1/4$, то только термин с n_1 может привести к расширению с замедлением. С другой стороны, для расширения с ускорением мы должны иметь $W < -1/3$, что приводит к $n_1 < 1/3$ и $n_2 < 1/3$. Это означает, что если $n_1 \in (1/4, 1/3)$, то член порождает (начальное) ускорение, тогда как n_2 , будучи менее чем $1/4$, всегда порождает расширение с ускорением. Таким образом, мы видим, что если нелинейность спинорного поля выбирается в виде полинома, то параметр уравнения состояния меняется с эволюцией Вселенной, даже если массовый член отсутствует. Но если нелинейность спинорного поля задается в виде степенной функции, например, $F = \lambda I^n = \lambda S^{2n}$, то параметр уравнения состояния имеет вид

$$W = \frac{\lambda(2n - 1) S^{2n}}{mS + \lambda S^{2n}}. \quad (11.8)$$

Далее, вспомнив, что $S = V_0/a^3$, из (11.8) находим

$$W = \frac{\lambda(2n - 1) V_0^{2n}/a^{6n}}{mV_0/a^3 + \lambda V_0^{2n}/a^{6n}} = \frac{\lambda(2n - 1)}{\lambda + \tilde{m} a^{3(2n-1)}}, \quad \tilde{m} = m/V_0^{(2n-1)}. \quad (11.9)$$

Соотношение (11.9) показывает, что только для $n < 1/3$ спинорное поле в данной модели может привести к ускоренному режиму расширения. Из (11.9) также видим, что для спинорного поля с тривиальной массой параметр уравнения состояния — постоянная, а именно $W = 2n - 1$, тогда как, если спинорное поле имеет ненулевую массу, параметр уравнения состояния зависит от времени. Более того, в отсутствие нелинейного члена ($\lambda = 0$ и/или $n = 1/2$) параметр уравнения состояния становится тривиальным ($W = 0$).

Рассмотрим случай, когда параметр уравнения состояния зависит от времени. Параметр уравнения состояния может быть функцией красного смещения z или масштабного фактора a (что есть на самом деле). Зависимость W от красного смещения может быть линейной:

$$W(z) = W_0 + W'z, \tag{11.10}$$

где $W' = \left. \frac{dW}{dz} \right|_{z=0}$ (см. [99, 247]), или нелинейной [53, 123]:

$$W(z) = W_0 + \frac{W_1 z}{1 + z}. \tag{11.11}$$

Что касается зависимости W от масштабного фактора, то параметризация

$$W(a) = W_0 + W_a(1 - a), \tag{11.12}$$

где W_0 — настоящее значение, W_a — мера изменения по времени ($a = 1$) и W' широко используются в литературе [125].

Поэтому, если данные этой работы сравнить с экспериментальными данными, полученными в работах [96, 110, 112, 235], можно заключить, что ограничение W уравнением (11.9) может обеспечить приемлемый диапазон для параметра уравнения состояния. Как уже было сказано, параметр уравнения состояния исчезает при отсутствии нелинейности спинорного поля.

Чтобы значение W было согласовано с данными наблюдений из [110], должно выполняться следующее общее условие:

$$a_{[1]} < a < a_{[2]}, \tag{11.13}$$

где

$$a_{[1]} = \left[-\frac{(n + 0,67)\lambda}{1,67\tilde{m}} \right]^{1/3(n-1)}, \quad a_{[2]} = \left[-\frac{(n - 0,38)\lambda}{0,62\tilde{m}} \right]^{1/3(n-1)}. \tag{11.14}$$

В этом случае имеем $-1,67 < W < -0,62$, что находится в хорошем согласии с ограничениями, полученными из результатов наблюдений SNe Ia [110].

Чтобы значение W согласовывалось с данными наблюдений из [235], должно выполняться следующее общее условие:

$$a_{[3]} < a < a_{[4]}, \quad (11.15)$$

где

$$a_{[3]} = \left[-\frac{(n+0,33)\lambda}{1,33\tilde{m}} \right]^{1/3(n-1)}, \quad a_{[4]} = \left[-\frac{(n-0,21)\lambda}{0,79\tilde{m}} \right]^{1/3(n-1)}. \quad (11.16)$$

В этом случае имеем $-1,33 < W < -0,79$, что находится в хорошем согласии с ограничениями, полученными из результатов наблюдений SNe Ia [235].

Чтобы значение W согласовывалось с данными наблюдений из [96, 112], должно выполняться следующее общее условие:

$$a_{[5]} < a < a_{[6]}, \quad (11.17)$$

где

$$a_{[5]} = \left[-\frac{(n+0,44)\lambda}{1,44\tilde{m}} \right]^{1/3(n-1)}, \quad a_{[6]} = \left[-\frac{(n-0,08)\lambda}{0,92\tilde{m}} \right]^{1/3(n-1)}. \quad (11.18)$$

В этом случае имеем $-1,44 < W < -0,92$, что находится в хорошем согласии с ограничениями, полученными из результатов наблюдений SNe Ia [96, 112].

Также отметим, что

$$a_{[0]} = \left[-\frac{n\lambda}{\tilde{m}} \right]^{1/3(n-1)}, \quad (11.19)$$

тогда для $a = a_{[0]}$ имеем $W = -1$, т. е. Вселенную с космологической постоянной. Если $a < a_{[0]}$, имеем $W > -1$, что соответствует квинтэссенции, тогда как для $a > a_{[0]}$ имеем $W < -1$, т. е. Вселенную с фантомной материей [44].

Поскольку для моделей Бианки типа I, заданных (8.1), и массовый член, и нелинейный член в лагранжиане спинорного поля исчезают, нет никакой необходимости проводить анализ, как в предыдущем случае. Что касается модели LRS Бианки типа I, можно сравнить полученные результаты с данными наблюдений, так же как и в случае метрики FRW. В этом случае ввиду $S = V_0/V$ из (11.5) находим

$$W = \frac{\lambda(2n-1)}{\lambda + \tilde{m}V^{2(n-1)}}, \quad \tilde{m} = \frac{m}{V_0^{2(n-1)}}. \quad (11.20)$$

Чтобы значение W согласовывалось с данными наблюдений из [110], должно выполняться следующее общее условие:

$$V_{[1]} < V < V_{[2]}, \quad (11.21)$$

где

$$V_{[1]} = \left[-\frac{(n + 0,67)\lambda}{1,67\tilde{m}} \right]^{1/(n-1)}, \quad V_{[2]} = \left[-\frac{(n - 0,38)\lambda}{0,62\tilde{m}} \right]^{1/(n-1)}. \quad (11.22)$$

В этом случае имеем $-1,67 < W < -0,62$, что находится в хорошем согласии с ограничениями, полученными из результатов наблюдений SNe Ia [110].

Чтобы значение W согласовывалось с данными наблюдений из [235], должно выполняться следующее общее условие:

$$V_{[3]} < V < V_{[4]}, \quad (11.23)$$

где

$$V_{[3]} = \left[-\frac{(n + 0,33)\lambda}{1,33\tilde{m}} \right]^{1/(n-1)}, \quad V_{[4]} = \left[-\frac{(n - 0,21)\lambda}{0,79\tilde{m}} \right]^{1/(n-1)}. \quad (11.24)$$

В этом случае имеем $-1,33 < W < -0,79$, что находится в хорошем согласии с ограничениями, полученными из результатов наблюдений SNe Ia [235].

Чтобы значение W согласовывалось с данными наблюдений из [96, 112], должно выполняться следующее общее условие:

$$V_{[5]} < V < V_{[6]}, \quad (11.25)$$

где

$$V_{[5]} = \left[-\frac{(n + 0,44)\lambda}{1,44\tilde{m}} \right]^{1/(n-1)}, \quad V_{[6]} = \left[-\frac{(n - 0,08)\lambda}{0,92\tilde{m}} \right]^{1/(n-1)}. \quad (11.26)$$

В этом случае имеем $-1,44 < W < -0,92$, что находится в хорошем согласии с ограничениями, полученными из результатов наблюдений SNe Ia [96, 112].

Также находим, что

$$V_{[0]} = \left[-\frac{n\lambda}{\tilde{m}} \right]^{1/(n-1)}, \quad (11.27)$$

для $V = V_{[0]}$ имеем $W = -1$, т.е. Вселенную с космологической постоянной. Если $V < V_{[0]}$, то имеем $W > -1$, что соответствует квинтэссенции, а для $V > V_{[0]}$ имеем $W < -1$, т.е. Вселенную с фантомной материей [44].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках космологических моделей Бианки типа VI, VI₀, V, III, I, LRSBI и FRW изучена роль нелинейного спинорного поля в эволюции как пространства-времени, так и спинорного поля. Выяснилось, что из-за наличия нетривиальных недиагональных компонент тензора энергии-импульса спинорного поля возникают некоторые серьезные ограничения как на метрические функции, так и на компоненты спинорного поля. В качестве нелинейности рассмотрен полином, который является функцией инвариантов, построенных из билинейных спинорных форм.

Модель Бианки типа VI пространства-времени в зависимости от знака константы самодействия позволяет либо позднее ускорение, либо колебательный режим эволюции.

В модели Бианки типа VI₀ пространства-времени из-за специфического поведения спинорного поля имеем два разных сценария. В одном случае инварианты, построенные из билинейных спинорных форм, становятся тривиальными, что порождает лагранжиан безмассового и линейного спинорного поля. В этом случае решение является эквивалентным вакуумному решению Бианки типа VI₀ пространства-времени. Во втором случае ни массовый член, ни нелинейный член не исчезают и в зависимости от знака константы самодействия возникает либо режим ускоренного расширения, либо режим, при котором Вселенная после достижения некоторого максимального значения сжимается и далее заканчивается Большим хрустом, следовательно, создается пространственно-временная сингулярность. Этот результат снова показывает чувствительность спинорного поля к гравитационному.

В случае модели Бианки типа V обнаружено, что метрические функции похожи друг на друга. В этом случае Вселенная расширяется с ускорением, если константа самодействия положительная, в то время как отрицательная константа порождает циклическое или периодическое решение. Во втором случае масса и нелинейность спинорного поля исчезают и Вселенная расширяется линейно во времени.

В случае модели Бианки типа III пространство-время остается локально вращательно-симметричным. В этом случае не нужно никаких дополнительных условий, таких как условие пропорциональности. Что касается эволюции, то в зависимости от знака константы связи модель допускает ускоренный и колебательный режимы расширения. Отрицательные константы связи приводят к возникновению колебательного режима расширения, в то время как положительные константы порождают расширяющуюся Вселенную с поздним ускорением. И параметр замедления, и параметр уравнения состояния в этом случае меняются со временем и находятся в хорошем согласии с современной концепцией эволюции пространства-времени.

В модели Бианки типа I пространства-времени недиагональные компоненты приводят к трем различным возможностям. В случае полного VI пространства-времени видим, что нелинейность спинорного поля и его массовый член исчезают, следовательно, лагранжиан спинорного поля становится безмассовым и линейным. В этом случае Вселенная расширяется линейно во времени.

Если рассматривать локально вращательно-симметричную модель VI (LRSBI), то ни массовый член, ни нелинейность спинорного поля не исчезают. В этом случае в зависимости от знака константы связи имеем либо режим расширения с поздним ускорением, либо колебательный режим эволюции. В этом случае для расширяющейся Вселенной мы имеем асимптотическую изотропизацию.

Наконец, в случае модели FRW ни массовый член, ни нелинейность спинорного поля не исчезают. Как и в случае модели LRSBI, имеем либо позднее ускорение, либо циклическую эволюцию.

Следует отметить, что хотя некоторые авторы [8,36] предположили, что классический спинор следует рассматривать как математическое ожидание спинора в соответствующем состоянии, мы не вводили никаких ограничений, подобных этому, и в некоторых случаях рассмотрели спинорное поле как грасманову величину. Наверняка для полноты картины нужно изучить его квантовый аналог.

Приложение 1 ОТНОШЕНИЕ МЕЖДУ ИНВАРИАНТАМИ, ПОСТРОЕННЫМИ ИЗ БИЛИНЕЙНЫХ СПИНОРНЫХ ФОРМ

Как было сказано ранее, из пяти инвариантов, построенных из билинейных спинорных форм, только два являются независимыми. Докажем это.

Поскольку ψ и ψ^* (комплексно-сопряженная ψ) имеют четыре компоненты каждая, можно построить всего $4 \cdot 4 = 16$ независимых билинейных комбинаций. Это скаляр, псевдоскаляр, вектор, аксиальный вектор и тензор:

$$S = \bar{\psi}\psi, \tag{П1.1a}$$

$$P = i\bar{\psi}\gamma^5\psi, \tag{П1.1б}$$

$$v^\mu = (\bar{\psi}\gamma^\mu\psi), \tag{П1.1в}$$

$$A^\mu = (\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\psi), \tag{П1.1г}$$

$$Q^{\mu\nu} = (\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi), \tag{П1.1д}$$

где $\sigma^{\mu\nu} = (i/2)[\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu]$ — антисимметричный тензор. Соответствующие инварианты:

$$I = S^2 = (\bar{\psi}\psi)^2, \quad (\text{П1.2a})$$

$$J = P^2 = (i\bar{\psi}\gamma^5\psi)^2, \quad (\text{П1.2б})$$

$$I_v = v_\mu v^\mu = (\bar{\psi}\gamma^\mu\psi) g_{\mu\nu}(\bar{\psi}\gamma^\nu\psi), \quad (\text{П1.2в})$$

$$I_A = A_\mu A^\mu = (\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\psi) g_{\mu\nu}(\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\nu\psi), \quad (\text{П1.2г})$$

$$I_Q = Q_{\mu\nu} Q^{\mu\nu} = (\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi) g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}(\bar{\psi}\sigma^{\alpha\beta}\psi). \quad (\text{П1.2д})$$

γ -Матрицы подчиняются следующей алгебре:

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}. \quad (\text{П1.3})$$

Эти γ -матрицы связаны с $\bar{\gamma}^a = \{\bar{\gamma}^0, \bar{\gamma}^1, \bar{\gamma}^2, \bar{\gamma}^3\}$, известными как матрицы Дирака в плоском пространстве-времени, следующим образом:

$$g_{\mu\nu}(x) = e_\mu^a(x)e_\nu^b(x)\eta_{ab}, \quad \gamma_\mu(x) = e_\mu^a(x)\bar{\gamma}_a, \quad (\text{П1.4})$$

где $\eta_{ab} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ и e_μ^a — набор 4-векторов, которые называются тетрадами.

В представлении Дирака четыре контравариантные гамма-матрицы $\bar{\gamma}^a$ в плоском пространстве-времени имеют вид

$$\bar{\gamma}^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \bar{\gamma}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\bar{\gamma}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{\gamma}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где $\bar{\gamma}^0$ — времениподобная матрица, тогда как остальные три — пространственноподобные. Как видно, матрицы Дирака связаны с матрицами Паули следующим образом:

$$\bar{\gamma}^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad \bar{\gamma}^1 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^1 \\ -\sigma^1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\bar{\gamma}^2 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^2 \\ -\sigma^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{\gamma}^3 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^3 \\ -\sigma^3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Определив γ^5 как

$$\begin{aligned}\gamma^5 &= -\frac{i}{4}E_{\mu\nu\sigma\rho}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\sigma\gamma^\rho, \quad E_{\mu\nu\sigma\rho} = \sqrt{-g}\varepsilon_{\mu\nu\sigma\rho}, \quad \varepsilon_{0123} = 1, \\ \bar{\gamma}^5 &= -i\sqrt{-g}\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = -i\bar{\gamma}^0\bar{\gamma}^1\bar{\gamma}^2\bar{\gamma}^3 = \bar{\gamma}^5,\end{aligned}$$

находим

$$\bar{\gamma}^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ковариантные гамма-матрицы $\bar{\gamma}_a$ определяются как

$$\bar{\gamma}_a = \eta_{ab}\bar{\gamma}^b = \{\bar{\gamma}^0, -\bar{\gamma}^1, -\bar{\gamma}^2, -\bar{\gamma}^3\}. \quad (\text{П1.5})$$

Вспомним, что ψ — четырехкомпонентная функция:

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}, \quad \bar{\psi} = \psi^*\gamma^0 = (\psi_1^*, \psi_2^*, -\psi_3^*, -\psi_4^*). \quad (\text{П1.6})$$

Определив \bar{F} и F как билинейные формы в пространстве-времени Минковского и в криволинейном пространстве-времени соответственно, имеем следующие выражения для билинейных спинорных форм:

$$\bar{S} = (\psi_1^*\psi_1 + \psi_2^*\psi_2 - \psi_3^*\psi_3 - \psi_4^*\psi_4), \quad (\text{П1.7а})$$

$$\bar{P} = -i(\psi_1^*\psi_3 + \psi_2^*\psi_4 - \psi_3^*\psi_1 - \psi_4^*\psi_2), \quad (\text{П1.7б})$$

$$\bar{V}^0 = (\psi_1^*\psi_1 + \psi_2^*\psi_2 + \psi_3^*\psi_3 + \psi_4^*\psi_4), \quad (\text{П1.7в})$$

$$\bar{V}^1 = (\psi_1^*\psi_4 + \psi_2^*\psi_3 + \psi_3^*\psi_2 + \psi_4^*\psi_1), \quad (\text{П1.7г})$$

$$\bar{V}^2 = -i(\psi_1^*\psi_4 - \psi_2^*\psi_3 + \psi_3^*\psi_2 - \psi_4^*\psi_1), \quad (\text{П1.7д})$$

$$\bar{V}^3 = (\psi_1^*\psi_3 - \psi_2^*\psi_4 + \psi_3^*\psi_1 - \psi_4^*\psi_2), \quad (\text{П1.7е})$$

$$\bar{A}^0 = (\psi_1^*\psi_3 + \psi_2^*\psi_4 + \psi_3^*\psi_1 + \psi_4^*\psi_2), \quad (\text{П1.7ж})$$

$$\bar{A}^1 = (\psi_1^*\psi_2 + \psi_2^*\psi_1 + \psi_3^*\psi_4 + \psi_4^*\psi_3), \quad (\text{П1.7з})$$

$$\bar{A}^2 = -i(\psi_1^*\psi_2 - \psi_2^*\psi_1 + \psi_3^*\psi_4 - \psi_4^*\psi_3), \quad (\text{П1.7и})$$

$$\bar{A}^3 = (\psi_1^*\psi_1 - \psi_2^*\psi_2 + \psi_3^*\psi_3 - \psi_4^*\psi_4), \quad (\text{П1.7к})$$

$$\bar{Q}^{01} = i(\psi_1^* \psi_4 + \psi_2^* \psi_3 - \psi_3^* \psi_2 - \psi_4^* \psi_1), \quad (\text{П1.7л})$$

$$\bar{Q}^{02} = (\psi_1^* \psi_4 - \psi_2^* \psi_3 - \psi_3^* \psi_2 + \psi_4^* \psi_1), \quad (\text{П1.7м})$$

$$\bar{Q}^{03} = i(\psi_1^* \psi_3 - \psi_2^* \psi_4 - \psi_3^* \psi_1 + \psi_4^* \psi_2), \quad (\text{П1.7н})$$

$$\bar{Q}^{12} = (\psi_1^* \psi_1 - \psi_2^* \psi_2 - \psi_3^* \psi_3 + \psi_4^* \psi_4), \quad (\text{П1.7о})$$

$$\bar{Q}^{23} = (\psi_1^* \psi_2 + \psi_2^* \psi_1 - \psi_3^* \psi_4 - \psi_4^* \psi_3), \quad (\text{П1.7п})$$

$$\bar{Q}^{13} = i(\psi_1^* \psi_2 - \psi_2^* \psi_1 - \psi_3^* \psi_4 + \psi_4^* \psi_3). \quad (\text{П1.7р})$$

Для скаляра и псевдоскаляра из (П1.2а) и (П1.2б) получим $S = \bar{S}$ и $P = \bar{P}$, следовательно, $I = S^2 = \bar{S}^2$ и $J = P^2 = \bar{P}^2$. Вспомним, что $v^\mu = e_\mu^a \bar{v}^a$, где $v^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$ — компонента вектора v в координатной системе и $v^a = \bar{\psi} \bar{\gamma}^a \psi$ — компонента вектора v в базисе, не зависящем от координат. Аналогично запишем $A^\mu = e_\mu^a \bar{A}^a$ и $Q^{\mu\nu} = e_\mu^a e_\nu^b \bar{Q}^{ab}$. Тогда из (П1.2в), (П1.2г) и (П1.2д) имеем

$$\begin{aligned} I_v &= v_\mu v^\mu = e_\mu^a \bar{v}_a e_\nu^b \bar{v}^b = \bar{v}_a \bar{v}^a, \\ I_A &= A_\mu A^\mu = e_\mu^a \bar{A}_a e_\nu^b \bar{A}^b = \bar{A}_a \bar{A}^a, \\ I_T &= T_{\mu\nu} T^{\mu\nu} = e_\mu^a e_\nu^b \bar{T}_{ab} e_c^\mu e_d^\nu \bar{T}^{cd} = \bar{T}_{ab} \bar{T}^{ab}. \end{aligned}$$

Или альтернативно, учитывая, что $\gamma^\mu = e_\mu^a \bar{\gamma}^a$ и $\gamma_\mu = e_\mu^a \bar{\gamma}_a$, находим

$$\begin{aligned} I_v &= v_\mu v^\mu = (\bar{\psi} \gamma_\mu \psi)(\bar{\psi} \gamma^\mu \psi) = (\bar{\psi} e_\mu^a \bar{\gamma}_a \psi)(\bar{\psi} e_b^\mu \bar{\gamma}^b \psi) = \\ &= (\bar{\psi} \bar{\gamma}_a \psi)(\bar{\psi} \bar{\gamma}^a \psi) = \bar{v}_a \bar{v}^a, \\ I_A &= A_\mu A^\mu = (\bar{\psi} \gamma_\mu \gamma_5 \psi)(\bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 \psi) = (\bar{\psi} e_\mu^a \bar{\gamma}_a \bar{\gamma}_5 \psi)(\bar{\psi} e_b^\mu \bar{\gamma}^b \bar{\gamma}^5 \psi) = \\ &= (\bar{\psi} \bar{\gamma}_a \bar{\gamma}_5 \psi)(\bar{\psi} \bar{\gamma}^a \bar{\gamma}^5 \psi) = \bar{A}_a \bar{A}^a, \\ I_T &= T_{\mu\nu} T^{\mu\nu} = (\bar{\psi} \sigma_{\mu\nu} \psi)(\bar{\psi} \sigma^{\mu\nu} \psi) = (\bar{\psi} e_\mu^a e_\nu^b \bar{\sigma}_{ab} \psi)(\bar{\psi} e_c^\mu e_d^\nu \bar{\sigma}^{cd} \psi) = \\ &= (\bar{\psi} \bar{\sigma}_{ab} \psi)(\bar{\psi} \bar{\sigma}^{ab} \psi) = \bar{T}_{ab} \bar{T}^{ab}. \end{aligned}$$

Тогда из (П1.7) находим

$$\begin{aligned} I_S &= S^2 = (\psi_1^* \psi_1)^2 + (\psi_2^* \psi_2)^2 + (\psi_3^* \psi_3)^2 + (\psi_4^* \psi_4)^2 + \\ &+ 2[\psi_1^* \psi_1 \psi_2^* \psi_2 - \psi_1^* \psi_1 \psi_3^* \psi_3 - \psi_1^* \psi_1 \psi_4^* \psi_4 - \\ &- \psi_2^* \psi_2 \psi_3^* \psi_3 - \psi_2^* \psi_2 \psi_4^* \psi_4 + \psi_3^* \psi_3 \psi_4^* \psi_4], \end{aligned} \quad (\text{П1.8})$$

$$\begin{aligned} I_P &= P^2 = -(\psi_1^* \psi_3)^2 - (\psi_2^* \psi_4)^2 - (\psi_3^* \psi_1)^2 - (\psi_4^* \psi_2)^2 - \\ &- 2[\psi_1^* \psi_3 \psi_2^* \psi_4 - \psi_1^* \psi_1 \psi_3^* \psi_3 - \psi_1^* \psi_3 \psi_4^* \psi_2 - \\ &- \psi_2^* \psi_4 \psi_3^* \psi_1 - \psi_2^* \psi_2 \psi_4^* \psi_4 + \psi_3^* \psi_1 \psi_4^* \psi_2], \end{aligned} \quad (\text{П1.9})$$

$$\begin{aligned}
 I_V &= (\bar{V}^0)^2 - (\bar{V}^1)^2 - (\bar{V}^2)^2 - (\bar{V}^3)^2 = \\
 &= (\psi_1^* \psi_1)^2 + (\psi_2^* \psi_2)^2 + (\psi_3^* \psi_3)^2 + (\psi_4^* \psi_4)^2 - \\
 &- (\psi_1^* \psi_3)^2 - (\psi_2^* \psi_4)^2 - (\psi_3^* \psi_1)^2 - (\psi_4^* \psi_2)^2 + \\
 &+ 2[\psi_1^* \psi_1 \psi_2^* \psi_2 - \psi_1^* \psi_1 \psi_4^* \psi_4 - \psi_2^* \psi_2 \psi_3^* \psi_3 + \psi_3^* \psi_3 \psi_4^* \psi_4 - \\
 &- \psi_1^* \psi_4 \psi_2^* \psi_3 - \psi_3^* \psi_2 \psi_4^* \psi_1 + \psi_1^* \psi_3 \psi_4^* \psi_2 + \psi_2^* \psi_4 \psi_3^* \psi_1] = \\
 &= I_S + I_P, \tag{П1.10}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_A &= (\bar{A}^0)^2 - (\bar{A}^1)^2 - (\bar{A}^2)^2 - (\bar{A}^3)^2 = \\
 &= -(\psi_1^* \psi_1)^2 - (\psi_2^* \psi_2)^2 - (\psi_3^* \psi_3)^2 - (\psi_4^* \psi_4)^2 + \\
 &+ (\psi_1^* \psi_3)^2 + (\psi_2^* \psi_4)^2 + (\psi_3^* \psi_1)^2 + (\psi_4^* \psi_2)^2 - \\
 &- 2[\psi_1^* \psi_1 \psi_2^* \psi_2 - \psi_1^* \psi_1 \psi_4^* \psi_4 - \psi_2^* \psi_2 \psi_3^* \psi_3 + \psi_3^* \psi_3 \psi_4^* \psi_4 - \\
 &- \psi_1^* \psi_4 \psi_2^* \psi_3 - \psi_3^* \psi_2 \psi_4^* \psi_1 + \psi_1^* \psi_3 \psi_4^* \psi_2 + \psi_2^* \psi_4 \psi_3^* \psi_1] = \\
 &= -(I_S + I_P), \tag{П1.11}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_Q &= 2[(\bar{Q}^{12})^2 + (\bar{Q}^{13})^2 + (\bar{Q}^{23})^2 - (\bar{Q}^{01})^2 - (\bar{Q}^{02})^2 - (\bar{Q}^{03})^2] = \\
 &= (\psi_1^* \psi_1)^2 + (\psi_2^* \psi_2)^2 + (\psi_3^* \psi_3)^2 + (\psi_4^* \psi_4)^2 + \\
 &+ (\psi_1^* \psi_3)^2 + (\psi_2^* \psi_4)^2 + (\psi_3^* \psi_1)^2 + (\psi_4^* \psi_2)^2 + \\
 &+ 2[\psi_1^* \psi_1 \psi_2^* \psi_2 - \psi_1^* \psi_1 \psi_4^* \psi_4 - \psi_2^* \psi_2 \psi_3^* \psi_3 + \psi_3^* \psi_3 \psi_4^* \psi_4 + \\
 &+ \psi_1^* \psi_4 \psi_2^* \psi_3 + \psi_3^* \psi_2 \psi_4^* \psi_1 - \psi_1^* \psi_3 \psi_4^* \psi_2 - \psi_2^* \psi_4 \psi_3^* \psi_1] - \\
 &- 4(\psi_1^* \psi_1 \psi_3^* \psi_3 + \psi_2^* \psi_2 \psi_4^* \psi_4) = 2(I_S - I_P). \tag{П1.12}
 \end{aligned}$$

Таким образом, инварианты I_V , I_A и I_Q могут быть представлены в терминах I_S и I_P .

Приложение 2 ИНВАРИАНТЫ ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ И ТЕНЗОР ЭЙНШТЕЙНА

Найдем инварианты гравитационного поля для Бианки типа VI (BVI) пространства-времени

$$ds^2 = dt^2 - a_1^2 e^{-2mx_3} dx_1^2 - a_2^2 e^{2nx_3} dx_2^2 - a_3^2 dx_3^2, \tag{П2.1}$$

где a_1 , a_2 и a_3 зависят только от времени и m и n — некоторые произвольные постоянные. Мы делаем это для метрики типа Бианки VI, так как подходящий выбор m , n , так же как и метрических функций a_1 , a_2 , a_3 в BVI, заданных в (4.1), порождает следующие типы Вселенной Бианки:

• при $m = n$ метрика BVI преобразуется в Бианки типа VI₀ (BVI₀), т. е. $m = n$, BVI \Rightarrow BVI₀ \in открытой FRW:

$$ds^2 = dt^2 - a_1^2 e^{-2mx_3} dx_1^2 - a_2^2 e^{2mx_3} dx_2^2 - a_3^2 dx_3^2; \quad (\text{П2.2})$$

• при $m = -n$ метрика BVI преобразуется в Бианки типа V (BV), т. е. $m = -n$, BVI \Rightarrow BV \in открытой FRW:

$$ds^2 = dt^2 - a_1^2 e^{2mx_3} dx_1^2 - a_2^2 e^{2mx_3} dx_2^2 - a_3^2 dx_3^2; \quad (\text{П2.3})$$

• при $n = 0$ метрика BVI преобразуется в Бианки типа III (BIII), т. е. $n = 0$, BVI \Rightarrow BIII:

$$ds^2 = dt^2 - a_1^2 e^{-2mx_3} dx_1^2 - a_2^2 dx_2^2 - a_3^2 dx_3^2; \quad (\text{П2.4})$$

• при $m = n = 0$ метрика BVI преобразуется в Бианки типа I (BI), т. е. $m = n = 0$, BVI \Rightarrow BI:

$$ds^2 = dt^2 - a_1^2 dx_1^2 - a_2^2 dx_2^2 - a_3^2 dx_3^2; \quad (\text{П2.5})$$

• при $m = n = 0$ и $a_1 = a_2$ метрика BVI преобразуется в локально вращательно-симметричную Бианки типа I (LRSBI), т. е. $m = n = 0$, $a_1 = a_2$, BVI \Rightarrow BI:

$$ds^2 = dt^2 - a_1^2 [dx_1^2 + dx_2^2] - a_3^2 dx_3^2; \quad (\text{П2.6})$$

• при $m = n = 0$ и при равных масштабных факторах на всех трех направлениях метрика BVI преобразуется в метрику Фридмана–Робертсона–Уокера (FRW) Вселенной, т. е. $m = n = 0$ и $a_1 = a_2 = a_3 = a$, BVI \Rightarrow FRW:

$$ds^2 = dt^2 - a^2 (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2). \quad (\text{П2.7})$$

Изучим подробно пространство-время Бианки типа VI, чтобы найти инварианты пространства-времени.

Запишем нетривиальные ковариантные и контравариантные компоненты метрики (П2.1):

$$g_{00} = 1, \quad g_{11} = -a_1^2 e^{-2mx_3}, \quad g_{22} = -a_2^2 e^{2nx_3}, \quad g_{33} = -a_3^2, \quad (\text{П2.8})$$

$$g^{00} = 1, \quad g^{11} = -\frac{1}{a_1^2 e^{-2mx_3}}, \quad g^{22} = -\frac{1}{a_2^2 e^{2nx_3}}, \quad g^{33} = -\frac{1}{a_3^2}. \quad (\text{П2.9})$$

Подставляя (П2.8) и (П2.9) в

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = \frac{1}{2} g^{\alpha\rho} \left(\frac{\partial g_{\mu\rho}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\rho}} \right), \quad (\text{П2.10})$$

находим нетривиальные символы Кристоффеля для метрики (4.1):

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{01}^1 &= \frac{\dot{a}_1}{a_1}, \\
 \Gamma_{02}^2 &= \frac{\dot{a}_2}{a_2}, \\
 \Gamma_{03}^3 &= \frac{\dot{a}_3}{a_3}, \\
 \Gamma_{11}^0 &= a_1 \dot{a}_1 e^{-2mx_3}, \\
 \Gamma_{22}^0 &= a_2 \dot{a}_2 e^{2nx_3}, \\
 \Gamma_{33}^0 &= a_3 \dot{a}_3, \\
 \Gamma_{31}^1 &= -m, \\
 \Gamma_{32}^2 &= n, \\
 \Gamma_{11}^3 &= \frac{ma_1^2}{a_3^2} e^{-2mx_3}, \\
 \Gamma_{22}^3 &= -\frac{na_2^2}{a_3^2} e^{2nx_3}.
 \end{aligned}
 \tag{П2.11}$$

Нетривиальные компоненты тензора Римана, соответствующие (4.1), имеют вид

$$R_{01}^{01} = -\frac{\ddot{a}_1}{a_1}, \tag{П2.12a}$$

$$R_{02}^{02} = -\frac{\ddot{a}_2}{a_2}, \tag{П2.12б}$$

$$R_{03}^{03} = -\frac{\ddot{a}_3}{a_3}, \tag{П2.12в}$$

$$R_{12}^{12} = -\frac{mn}{a_3^2} - \frac{\dot{a}_1 \dot{a}_2}{a_1 a_2}, \tag{П2.12г}$$

$$R_{13}^{13} = \frac{m^2}{a_3^2} - \frac{\dot{a}_3 \dot{a}_1}{a_3 a_1}, \tag{П2.12д}$$

$$R_{23}^{23} = \frac{n^2}{a_3^2} - \frac{\dot{a}_2 \dot{a}_3}{a_2 a_3} \tag{П2.12е}$$

$$R_{31}^{10} = \frac{m}{a_3^2} \left(\frac{\dot{a}_1}{a_1} - \frac{\dot{a}_3}{a_3} \right), \tag{П2.12ж}$$

$$R_{01}^{13} = m \left(\frac{\dot{a}_3}{a_3} - \frac{\dot{a}_1}{a_1} \right), \tag{П2.12з}$$

$$R_{32}^{20} = \frac{n}{a_3^2} \left(\frac{\dot{a}_3}{a_3} - \frac{\dot{a}_1}{a_1} \right), \tag{П2.12и}$$

$$R_{02}^{23} = n \left(\frac{\dot{a}_2}{a_2} - \frac{\dot{a}_3}{a_3} \right). \tag{П2.12к}$$

Как видно, компоненты R_{01}^{01} , R_{02}^{02} и R_{03}^{03} не зависят от m , n , тогда как другие зависят.

Введем новую функцию — масштаб объема V :

$$V = a_1 a_2 a_3. \quad (\text{П2.13})$$

Как будет показано, масштаб объема V играет ключевую роль в эволюции, так как все другие величины, такие как метрические функции, инварианты пространства-времени и физические величины (заряд, ток спина и т. д.), находятся в функциональной зависимости от V .

Ввиду (П2.13) ненулевые компоненты тензора Риччи выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} R_0^0 &= \left(\frac{\ddot{a}_1}{a_1} + \frac{\ddot{a}_2}{a_2} + \frac{\ddot{a}_3}{a_3} \right) = \\ &= -\frac{1}{V} [\ddot{a}_1 a_2 a_3 + \ddot{a}_2 a_3 a_1 + \ddot{a}_3 a_1 a_2], \end{aligned} \quad (\text{П2.14а})$$

$$\begin{aligned} R_1^1 &= -\left(\frac{\ddot{a}_1}{a_1} + \frac{\dot{a}_1 \dot{a}_2}{a_1 a_2} + \frac{\dot{a}_3 \dot{a}_1}{a_3 a_1} - \frac{m^2 - mn}{a_3^2} \right) = \\ &= -\frac{1}{V} [\ddot{a}_1 a_2 a_3 + \dot{a}_1 \dot{a}_2 a_3 + \dot{a}_3 \dot{a}_1 a_2] + \frac{m^2 - mn}{a_3^2}, \end{aligned} \quad (\text{П2.14б})$$

$$\begin{aligned} R_2^2 &= -\left(\frac{\ddot{a}_2}{a_2} + \frac{\dot{a}_1 \dot{a}_2}{a_1 a_2} + \frac{\dot{a}_2 \dot{a}_3}{a_2 a_3} - \frac{n^2 - mn}{a_3^2} \right) = \\ &= -\frac{1}{V} [a_1 \ddot{a}_2 a_3 + \dot{a}_1 \dot{a}_2 a_3 + \dot{a}_2 \dot{a}_3 a_1] + \frac{n^2 - mn}{a_3^2}, \end{aligned} \quad (\text{П2.14в})$$

$$\begin{aligned} R_3^3 &= -\left(\frac{\ddot{a}_3}{a_3} + \frac{\dot{a}_3 \dot{a}_1}{a_3 a_1} + \frac{\dot{a}_2 \dot{a}_3}{a_2 a_3} - \frac{m^2 + n^2}{a_3^2} \right) = \\ &= -\frac{1}{V} [\ddot{a}_3 a_1 a_2 + \dot{a}_3 \dot{a}_1 a_2 + \dot{a}_2 \dot{a}_3 a_1] + \frac{m^2 + n^2}{a_3^2}, \end{aligned} \quad (\text{П2.14г})$$

$$\begin{aligned} R_3^0 &= \left(m \frac{\dot{a}_1}{a_1} - n \frac{\dot{a}_2}{a_2} - (m - n) \frac{\dot{a}_3}{a_3} \right) = \\ &= \frac{1}{V} [m \dot{a}_1 a_2 a_3 - n \dot{a}_2 a_3 a_1 - (m - n) \dot{a}_3 a_1 a_2]. \end{aligned} \quad (\text{П2.14д})$$

Наконец, для скаляра Риччи R имеем

$$R = 2 \left[\frac{\ddot{a}_1}{a_1} + \frac{\ddot{a}_2}{a_2} + \frac{\ddot{a}_3}{a_3} + \frac{\dot{a}_1 \dot{a}_2}{a_1 a_2} + \frac{\dot{a}_2 \dot{a}_3}{a_2 a_3} + \frac{\dot{a}_3 \dot{a}_1}{a_3 a_1} - \frac{1}{a_3^2} (m^2 - mn + n^2) \right]. \quad (\text{П2.15})$$

Далее будем исследовать существование сингулярности (особой точки) гравитационного поля с помощью анализа инвариантных характеристик пространства-времени. В общей теории относительности эти инварианты состоят

из тензора кривизны и метрического тензора. Вопреки электродинамике, где имеется только два инварианта ($J_1 = F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ и $J_2 = \star F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$), в четырехмерном римановом пространстве-времени существуют 14 независимых инвариантов. Это инварианты [131]

$$I_1 = R, \quad (\text{П2.16а})$$

$$I_2 = R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}, \quad (\text{П2.16б})$$

$$I_3 = R_{\alpha\beta\mu\nu}R^{\alpha\beta\mu\nu}, \quad (\text{П2.16в})$$

$$I_4 = \star R_{\alpha\beta\mu\nu}R^{\alpha\beta\mu\nu}, \quad (\text{П2.16г})$$

$$I_5 = R_\beta^\alpha R_\mu^\beta R_\alpha^\mu, \quad (\text{П2.16д})$$

$$I_6 = R^{\alpha\beta} R^{\mu\nu} R_{\alpha\mu\beta\nu}, \quad (\text{П2.16е})$$

$$I_7 = R^{\alpha\beta} R^{\mu\nu} \star R_{\alpha\mu\beta\nu}, \quad (\text{П2.16ж})$$

$$I_8 = R^{\alpha\beta\mu\nu} R_{\alpha\beta\sigma\rho} R^{\sigma\rho}_{\mu\nu}, \quad (\text{П2.16з})$$

$$I_9 = \star R^{\alpha\beta\mu\nu} R_{\alpha\beta\sigma\rho} R^{\sigma\rho}_{\mu\nu}, \quad (\text{П2.16и})$$

$$I_{10} = R_\alpha^\beta R^{\alpha\mu} R_{\mu\nu} R_\beta^\nu, \quad (\text{П2.16к})$$

$$I_{11} = R_\nu^\mu R_{\rho\mu}{}^{\sigma\alpha} R_{\sigma\alpha}{}^{\beta[\nu} R_\beta^{\rho]}, \quad (\text{П2.16л})$$

$$I_{12} = R_\nu^\mu \star R_{\rho\mu}{}^{\sigma\alpha} R_{\sigma\alpha}{}^{\beta[\nu} R_\beta^{\rho]}, \quad (\text{П2.16м})$$

$$I_{13} = R^{\mu\nu}_{\alpha\beta} (A^{\alpha\beta}_{\mu\nu} + R_\rho^\alpha R_\sigma^\rho R_\eta^\sigma R_\mu^\eta \delta_\nu^\beta), \quad (\text{П2.16н})$$

$$I_{14} = \star R_{\alpha\beta}{}^{\mu\nu} A^{\alpha\beta}_{\mu\nu}, \quad (\text{П2.16о})$$

где $A^{\alpha\beta}_{\mu\nu} = 4R_\rho^\alpha R_\sigma^\rho R_\mu^\sigma R_\nu^\beta + 3R_\rho^\alpha R_\mu^\rho R_\sigma^\beta R_\nu^\sigma + \star R_{\alpha\beta\mu\nu} = (1/2)E_{\alpha\beta\sigma\rho} R^{\sigma\rho}_{\mu\nu} = (1/2)E_{\sigma\rho\mu\nu} R_{\alpha\beta}{}^{\sigma\rho}$, $\star R_{\alpha\beta}{}^{\mu\nu} = (1/2)E_{\alpha\beta\sigma\rho} R^{\sigma\rho\mu\nu}$ с $E_{\alpha\beta\mu\nu} = \sqrt{-g}\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}$ и $E^{\alpha\beta\mu\nu} = (-1/\sqrt{-g})\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}$. Здесь $\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}$ — полностью антисимметричный тензор Леви-Чевиты с $\varepsilon_{0123} = 1$.

Таким образом, имеем инварианты для метрики Бианки типа VI пространства-времени. Как видим, вводя соответствующие значения m и n , можно находить инварианты для других моделей.

Наконец, запишем нетривиальные компоненты тензора Эйнштейна, соответствующие метрике (П2.1):

$$G_1^1 = -\frac{\ddot{a}_2}{a_2} - \frac{\ddot{a}_3}{a_3} - \frac{\dot{a}_2}{a_2} \frac{\dot{a}_3}{a_3} + \frac{n^2}{a_3^2}, \quad (\text{П2.17а})$$

$$G_2^2 = -\frac{\ddot{a}_3}{a_3} - \frac{\ddot{a}_1}{a_1} - \frac{\dot{a}_3}{a_3} \frac{\dot{a}_1}{a_1} + \frac{m^2}{a_3^2}, \quad (\text{П2.17б})$$

$$G_3^3 = -\frac{\ddot{a}_1}{a_1} - \frac{\ddot{a}_2}{a_2} - \frac{\dot{a}_1}{a_1} \frac{\dot{a}_2}{a_2} - \frac{mn}{a_3^2}, \quad (\text{П2.17в})$$

$$G_0^0 = -\frac{\dot{a}_1 \dot{a}_2}{a_1 a_2} - \frac{\dot{a}_2 \dot{a}_3}{a_2 a_3} - \frac{\dot{a}_3 \dot{a}_1}{a_3 a_1} + \frac{m^2 - mn + n^2}{a_3^2}, \quad (\text{П2.17Г})$$

$$G_3^0 = (m - n) \frac{\dot{a}_3}{a_3} - m \frac{\dot{a}_1}{a_1} + n \frac{\dot{a}_2}{a_2}. \quad (\text{П2.17Д})$$

Приложение 3 ТЕНЗОР ЭНЕРГИИ-ИМПУЛЬСА СПИНОРНОГО ПОЛЯ

Найдем компоненты тензора энергии-импульса спинорного поля для метрики типа Бианки VI (BVI). Чтобы найти компоненты тензора энергии-импульса, нужно явно записать спинорные аффинные связности Γ_μ .

Далее нужно вычислить тетрады, соответствующие метрике (П2.1). Учитывая, что тетрады соединены с метрической функцией следующим образом:

$$g_{\mu\nu} = e_\mu^{(a)} e_\nu^{(b)} \eta_{ab}, \quad (\text{П3.1})$$

где $\eta_{ab} = \text{diag} \{1, -1, -1, -1\}$, для метрики (П2.1) выберем тетрады

$$e_0^{(0)} = 1, \quad e_1^{(1)} = a_1 e^{-mx_3}, \quad e_2^{(2)} = a_2 e^{nx_3}, \quad e_3^{(3)} = a_3. \quad (\text{П3.2})$$

Тогда из

$$\gamma_\mu = e_\mu^{(a)} \bar{\gamma}_a, \quad \gamma^\mu = e_{(a)}^\mu \bar{\gamma}^a, \quad (\text{П3.3})$$

где $e_{(a)}^\mu$ — обратное к $e_\mu^{(a)}$:

$$e_\mu^{(a)} e_{(b)}^\mu = \delta_b^a, \quad e_\mu^{(a)} e_{(a)}^\nu = \delta_\nu^\mu, \quad (\text{П3.4})$$

для (П2.1) находим

$$\gamma_0 = \bar{\gamma}_0, \quad \gamma_1 = a_1 e^{-mx_3} \bar{\gamma}_1, \quad \gamma_2 = a_2 e^{nx_3} \bar{\gamma}_2, \quad \gamma_3 = a_3 \bar{\gamma}_3. \quad (\text{П3.5})$$

Здесь $\bar{\gamma}$ — гамма-матрицы Дирака в плоском пространстве-времени, удовлетворяющие

$$\bar{\gamma}_a \bar{\gamma}_b + \bar{\gamma}_b \bar{\gamma}_a = 2\eta_{ab}, \quad (\text{П3.6})$$

$$\bar{\gamma}^a \bar{\gamma}^b + \bar{\gamma}^b \bar{\gamma}^a = 2\eta^{ab}, \quad (\text{П3.7})$$

и $\bar{\gamma}$ — гамма-матрицы Дирака в криволинейном пространстве-времени. Вспомним, что γ^μ удовлетворяют следующим общим соотношениям:

$$\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2g_{\mu\nu}, \quad (\text{П3.8а})$$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}. \quad (\text{П3.8б})$$

Далее, принимая во внимание, что в нашем случае

$$\bar{\gamma}^0 = \bar{\gamma}_0, \quad \bar{\gamma}^1 = -\bar{\gamma}_1, \quad \bar{\gamma}^2 = -\bar{\gamma}_2, \quad \bar{\gamma}^3 = -\bar{\gamma}_3,$$

находим

$$\gamma^0 = \bar{\gamma}^0, \quad \gamma^1 = \frac{e^{mx_3}}{a_1} \bar{\gamma}^1, \quad \gamma^2 = \frac{e^{-nx_3}}{a_2} \bar{\gamma}^2, \quad \gamma^3 = \frac{1}{a_3} \bar{\gamma}^3. \quad (\text{П3.9})$$

Теперь вычислим спинорные аффинные связности. Вспомнив, что

$$\Gamma_\mu = \frac{1}{4} \bar{\gamma}_a \gamma^\nu \partial_\mu e_\nu^{(a)} - \frac{1}{4} \gamma_\rho \gamma^\nu \Gamma_{\mu\nu}^\rho, \quad (\text{П3.10})$$

для VVI пространства-времени находим

$$\begin{aligned} \Gamma_0 &= \frac{1}{4} \bar{\gamma}_a \gamma^\nu \partial_t e_\nu^{(a)} - \frac{1}{4} \gamma_\rho \gamma^\nu \Gamma_{0\nu}^\rho = \\ &= \frac{1}{4} \left(\bar{\gamma}_1 \gamma^1 \partial_t e_1^{(1)} + \bar{\gamma}_2 \gamma^2 \partial_t e_2^{(2)} + \bar{\gamma}_3 \gamma^3 \partial_t e_3^{(3)} \right) - \\ &- \frac{1}{4} \left(\gamma_1 \gamma^1 \Gamma_{01}^1 + \gamma_2 \gamma^2 \Gamma_{02}^2 + \gamma_3 \gamma^3 \Gamma_{03}^3 \right) = \\ &= \frac{1}{4} \left(\bar{\gamma}_1 \frac{e^{mx_3}}{a_1} \bar{\gamma}^1 \dot{a}_1 e^{-mx_3} + \bar{\gamma}_2 \frac{e^{-nx_3}}{a_2} \bar{\gamma}^2 \dot{a}_2 e^{nx_3} + \bar{\gamma}_3 \frac{1}{a_3} \bar{\gamma}^3 \dot{a}_3 \right) - \\ &- \frac{1}{4} \left(a_1 e^{-mx_3} \bar{\gamma}_1 \frac{e^{mx_3}}{a_1} \bar{\gamma}^1 \frac{\dot{a}_1}{a_1} + a_2 e^{nx_3} \bar{\gamma}_2 \frac{e^{-nx_3}}{a_2} \bar{\gamma}^2 \frac{\dot{a}_2}{a_2} + a_3 \bar{\gamma}_3 \frac{1}{a_3} \bar{\gamma}^3 \frac{\dot{a}_3}{a_3} \right) = \\ &= \frac{1}{4} \left(-\frac{\dot{a}_1}{a_1} \bar{\gamma}^1 \bar{\gamma}^1 - \frac{\dot{a}_2}{a_2} \bar{\gamma}^2 \bar{\gamma}^2 - \frac{\dot{a}_3}{a_3} \bar{\gamma}^3 \bar{\gamma}^3 \right) - \\ &- \frac{1}{4} \left(-\frac{\dot{a}_1}{a_1} \bar{\gamma}^1 \bar{\gamma}^1 - \frac{\dot{a}_2}{a_2} \bar{\gamma}^2 \bar{\gamma}^2 - \frac{\dot{a}_3}{a_3} \bar{\gamma}^3 \bar{\gamma}^3 \right) = \\ &= 0, \end{aligned} \quad (\text{П3.11a})$$

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= -\frac{1}{4} \gamma_\rho \gamma^\nu \Gamma_{1\nu}^\rho = -\frac{1}{4} \left(\gamma_1 \gamma^0 \Gamma_{10}^1 + \gamma_0 \gamma^1 \Gamma_{11}^0 + \gamma_1 \gamma^3 \Gamma_{13}^1 + \gamma_3 \gamma^1 \Gamma_{11}^3 \right) = \\ &= -\frac{1}{4} \left(-a_1 e^{-mx_3} \bar{\gamma}^1 \bar{\gamma}^0 \frac{\dot{a}_1}{a_1} + \bar{\gamma}^0 \frac{e^{mx_3}}{a_1} \bar{\gamma}^1 a_1 \dot{a}_1 e^{-2mx_3} + \right. \\ &+ a_1 e^{-mx_3} \bar{\gamma}^1 \frac{1}{a_3} \bar{\gamma}^3 m - a_3 \bar{\gamma}^3 \frac{e^{mx_3}}{a_1} \bar{\gamma}^1 \frac{m a_1^2}{a_3^2} e^{-2mx_3} \left. \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\dot{a}_1 \bar{\gamma}^1 \bar{\gamma}^0 - m \frac{a_1}{a_3} \bar{\gamma}^1 \bar{\gamma}^3 \right) e^{-mx_3}, \end{aligned} \quad (\text{П3.11б})$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_2 &= -\frac{1}{4}\gamma_\rho\gamma^\nu\Gamma_{2\nu}^\rho = -\frac{1}{4}(\gamma_2\gamma^0\Gamma_{20}^2 + \gamma_0\gamma^2\Gamma_{22}^0 + \gamma_2\gamma^3\Gamma_{23}^2 + \gamma_3\gamma^2\Gamma_{22}^3) = \\
&= -\frac{1}{4}\left(-a_2e^{nx_3}\bar{\gamma}^2\bar{\gamma}^0\frac{\dot{a}_2}{a_2} + \bar{\gamma}^0\frac{e^{-nx_3}}{a_2}\bar{\gamma}^2a_2\dot{a}_2e^{2nx_3} - \right. \\
&\quad \left. - a_2e^{nx_3}\bar{\gamma}^2\frac{1}{a_3}\bar{\gamma}^3n + a_3\bar{\gamma}^3\frac{e^{-nx_3}}{a_2}\bar{\gamma}^2\frac{na_2^2}{a_3^2}e^{2nx_3}\right) = \\
&= \frac{1}{2}\left(\dot{a}_2\bar{\gamma}^2\bar{\gamma}^0 + n\frac{a_2}{a_3}\bar{\gamma}^2\bar{\gamma}^3\right)e^{nx_3}, \tag{ПЗ.11В}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_3 &= \frac{1}{4}\bar{\gamma}_a\gamma^\nu\partial_{x_3}e_\nu^{(a)} - \frac{1}{4}\gamma_\rho\gamma^\nu\Gamma_{3\nu}^\rho = \\
&= \frac{1}{4}\left(\bar{\gamma}_1\gamma^1\partial_{x_3}e_1^{(1)} + \bar{\gamma}_2\gamma^2\partial_{x_3}e_2^{(2)}\right) - \\
&\quad - \frac{1}{4}(\gamma_3\gamma^0\Gamma_{30}^3 + \gamma_0\gamma^3\Gamma_{33}^0 + \gamma_1\gamma^1\Gamma_{31}^1 + \gamma_2\gamma^2\Gamma_{32}^2) = \\
&= \frac{1}{4}\left(\bar{\gamma}^1\frac{e^{mx_3}}{a_1}\bar{\gamma}^1ma_1e^{-mx_3} - \bar{\gamma}^2\frac{e^{-nx_3}}{a_2}\bar{\gamma}^2ne^{nx_3}\right) - \\
&\quad - \frac{1}{4}\left(-a_3\bar{\gamma}^3\bar{\gamma}^0\frac{\dot{a}_3}{a_3} + \bar{\gamma}^0\frac{1}{a_3}\bar{\gamma}^3a_3\dot{a}_3 + \right. \\
&\quad \left. + a_1e^{-mx_3}\bar{\gamma}^1\frac{e^{mx_3}}{a_1}\bar{\gamma}^1m - a_2e^{nx_3}\bar{\gamma}^2\frac{e^{-nx_3}}{a_2}\bar{\gamma}^2n\right) = \\
&= \frac{1}{2}\dot{a}_3\bar{\gamma}^3\bar{\gamma}^0. \tag{ПЗ.11Г}
\end{aligned}$$

Выбирая m, n , можно найти спинорные аффинные связности для других метрик типа Бианки.

Находим тензор энергии-импульса спинорного поля заданным выражением

$$\begin{aligned}
T_\mu^\rho &= \frac{\imath}{4}g^{\rho\nu}(\bar{\psi}\gamma_\mu\nabla_\nu\psi + \bar{\psi}\gamma_\nu\nabla_\mu\psi - \nabla_\mu\bar{\psi}\gamma_\nu\psi - \nabla_\nu\bar{\psi}\gamma_\mu\psi) - \delta_\mu^\rho L_{\text{сп}} = \\
&= \frac{\imath}{4}g^{\rho\nu}[\bar{\psi}\gamma_\mu(\partial_\nu\psi - \Gamma_\nu\psi) + \bar{\psi}\gamma_\nu(\partial_\mu\psi - \Gamma_\mu\psi) - \\
&\quad - (\partial_\mu\bar{\psi} + \bar{\psi}\Gamma_\mu)\gamma_\nu\psi - (\partial_\nu\bar{\psi} + \bar{\psi}\Gamma_\nu)\gamma_\mu\psi] - \delta_\mu^\rho L_{\text{сп}} = \\
&= \frac{\imath}{4}g^{\rho\nu}(\bar{\psi}\gamma_\mu\partial_\nu\psi + \bar{\psi}\gamma_\nu\partial_\mu\psi - \partial_\mu\bar{\psi}\gamma_\nu\psi - \partial_\nu\bar{\psi}\gamma_\mu\psi) - \\
&\quad - \frac{\imath}{4}g^{\rho\nu}\bar{\psi}(\gamma_\mu\Gamma_\nu + \Gamma_\nu\gamma_\mu + \gamma_\nu\Gamma_\mu + \Gamma_\mu\gamma_\nu)\psi - \delta_\mu^\rho L_{\text{сп}} = \\
&= g^{\rho\nu}\tilde{T}_{\nu\mu} - g^{\rho\nu}\tilde{T}_{\nu\mu} - \delta_\mu^\rho(2KF_K - F(K)), \tag{ПЗ.12}
\end{aligned}$$

где обозначили

$$\bar{T}_{\nu\mu} = \frac{i}{4} (\bar{\psi}\gamma_\mu\partial_\nu\psi + \bar{\psi}\gamma_\nu\partial_\mu\psi - \partial_\mu\bar{\psi}\gamma_\nu\psi - \partial_\nu\bar{\psi}\gamma_\mu\psi), \quad (\text{ПЗ.13})$$

$$\tilde{T}_{\nu\mu} = \frac{i}{4}\bar{\psi}(\gamma_\mu\Gamma_\nu + \Gamma_\nu\gamma_\mu + \gamma_\nu\Gamma_\mu + \Gamma_\mu\gamma_\nu)\psi. \quad (\text{ПЗ.14})$$

В (ПЗ.12) также учтено, что благодаря уравнениям спинорного поля

$$i\gamma^\mu\nabla_\mu\psi - m_{\text{сп}}\psi - 2SF_I\psi - 2iPF_J\gamma^5\psi = 0, \quad (\text{ПЗ.15a})$$

$$i\nabla_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu + m_{\text{сп}}\bar{\psi} + 2SF_I\bar{\psi} + 2iPF_J\bar{\psi}\gamma^5 = 0 \quad (\text{ПЗ.15б})$$

лагранжиан спинорного поля может быть представлен в виде

$$\begin{aligned} L_{\text{сп}} &= \frac{i}{2} [\bar{\psi}\gamma^\mu\nabla_\mu\psi - \nabla_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi] - m_{\text{сп}}\bar{\psi}\psi - F = \\ &= \frac{1}{2}\bar{\psi} [i\gamma^\mu\nabla_\mu\psi - m_{\text{сп}}\psi] - \frac{1}{2} [i\nabla_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu + m_{\text{сп}}\bar{\psi}] \psi - F = \\ &= \frac{1}{2} [\mathcal{D}\bar{\psi}\psi + i\mathcal{G}\bar{\psi}\gamma^5\psi] - \frac{1}{2} [\mathcal{D}\bar{\psi}\psi + i\mathcal{G}\bar{\psi}\gamma^5\psi] - F = \\ &= 2(IK_I + JK_J)F_K - F(K) = 2KF_K - F(K), \end{aligned} \quad (\text{ПЗ.16})$$

где K принимает одно из следующих значений: $\{I, J, I + J, I - J\}$.

Шаг за шагом находим $\bar{T}_{\nu\mu}$ и $\tilde{T}_{\nu\mu}$. Чтобы найти $\bar{T}_{\nu\mu}$, нужно переписать уравнения спинорного поля в явном виде. Принимая во внимание, что в нашем случае спинорное поле зависит только от t , т. е. $\psi = \psi(t)$ и $\bar{\psi} = \bar{\psi}(t)$, систему уравнений спинорного поля представим в виде

$$i\gamma^0\dot{\psi} - i\gamma^\mu\Gamma_\mu\psi - m_{\text{сп}}\psi - 2SF_I\psi - 2iPF_J\gamma^5\psi = 0, \quad (\text{ПЗ.17a})$$

$$i\dot{\bar{\psi}}\gamma^0 + i\bar{\psi}\Gamma_\mu\gamma^\mu + m_{\text{сп}}\bar{\psi} + 2SF_I\bar{\psi} + 2iPF_J\bar{\psi}\gamma^5 = 0, \quad (\text{ПЗ.17б})$$

где учтено, что

$$\nabla_\mu\psi = \partial_\mu\psi - \Gamma_\mu\psi, \quad \nabla_\mu\bar{\psi} = \partial_\mu\bar{\psi} + \bar{\psi}\Gamma_\mu. \quad (\text{ПЗ.18})$$

Тогда из (ПЗ.11a)–(ПЗ.11г) находим

$$\begin{aligned} \gamma^\mu\Gamma_\mu &= \gamma^1\Gamma_1 + \gamma^2\Gamma_2 + \gamma^3\Gamma_3 = \\ &= \frac{e^{mx_3}}{2a_1}\bar{\gamma}^1\left(\dot{a}_1\bar{\gamma}^1\bar{\gamma}^0 - m\frac{a_1}{a_3}\bar{\gamma}^1\bar{\gamma}^3\right)e^{-mx_3} + \\ &+ \frac{e^{-nx_3}}{2a_2}\bar{\gamma}^2\left(\dot{a}_2\bar{\gamma}^2\bar{\gamma}^0 + n\frac{a_2}{a_3}\bar{\gamma}^2\bar{\gamma}^3\right)e^{nx_3} + \frac{1}{2a_3}\bar{\gamma}^3\dot{a}_3\bar{\gamma}^3\bar{\gamma}^0 = \\ &= -\frac{1}{2}\left(\frac{\dot{a}_1}{a_1} + \frac{\dot{a}_2}{a_2} + \frac{\dot{a}_3}{a_3}\right)\bar{\gamma}^0 + \frac{m-n}{2a_3}\bar{\gamma}^3, \end{aligned} \quad (\text{ПЗ.19})$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_\mu \gamma^\mu &= \Gamma_1 \gamma^1 + \Gamma_2 \gamma^2 + \Gamma_3 \gamma^3 = \\
&= \left(\dot{a}_1 \bar{\gamma}^1 \bar{\gamma}^0 - m \frac{a_1}{a_3} \bar{\gamma}^1 \bar{\gamma}^3 \right) e^{-m x_3} \frac{e^{m x_3}}{2 a_1} \bar{\gamma}^1 + \\
&+ \left(\dot{a}_2 \bar{\gamma}^2 \bar{\gamma}^0 + n \frac{a_2}{a_3} \bar{\gamma}^2 \bar{\gamma}^3 \right) e^{m x_3} \frac{e^{-n x_3}}{2 a_2} \bar{\gamma}^2 + \dot{a}_3 \bar{\gamma}^3 \bar{\gamma}^0 \frac{1}{2 a_3} \bar{\gamma}^3 = \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{a}_1}{a_1} + \frac{\dot{a}_2}{a_2} + \frac{\dot{a}_3}{a_3} \right) \bar{\gamma}^0 - \frac{m-n}{2 a_3} \bar{\gamma}^3. \tag{П3.20}
\end{aligned}$$

С учетом (П3.19) и (П3.20) можно переписать (П3.17а), (П3.17б) в форме

$$\begin{aligned}
i \bar{\gamma}^0 \dot{\psi} + \frac{i}{2} \left(\frac{\dot{a}_1}{a_1} + \frac{\dot{a}_2}{a_2} + \frac{\dot{a}_3}{a_3} \right) \bar{\gamma}^0 \psi - i \frac{m-n}{2 a_3} \bar{\gamma}^3 \psi - \\
- m_{\text{sp}} \psi - 2 S F_I \psi - 2 i P F_J \bar{\gamma}^5 \psi = 0, \tag{П3.21а}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
i \dot{\bar{\psi}} \bar{\gamma}^0 + \frac{i}{2} \left(\frac{\dot{a}_1}{a_1} + \frac{\dot{a}_2}{a_2} + \frac{\dot{a}_3}{a_3} \right) \dot{\bar{\psi}} \bar{\gamma}^0 - i \frac{m-n}{2 a_3} \dot{\bar{\psi}} \bar{\gamma}^3 + \\
+ m_{\text{sp}} \bar{\psi} + 2 S F_I \bar{\psi} + 2 i P F_J \bar{\psi} \bar{\gamma}^5 = 0. \tag{П3.21б}
\end{aligned}$$

Из (П3.21а), (П3.21б) сразу находим

$$\frac{i}{2} \left(\dot{\bar{\psi}} \bar{\gamma}^0 \psi - \dot{\bar{\psi}} \bar{\gamma}^0 \psi \right) = m_{\text{sp}} S + 2 (I F_I + J F_J) = m_{\text{sp}} S + 2 K F_K. \tag{П3.22}$$

Умножая (П3.21а) на $\bar{\gamma}^0$ слева и (П3.21б) на $\bar{\gamma}^0$ справа, получим

$$\begin{aligned}
i \dot{\psi} + \frac{i}{2} \left(\frac{\dot{a}_1}{a_1} + \frac{\dot{a}_2}{a_2} + \frac{\dot{a}_3}{a_3} \right) \psi - i \frac{m-n}{2 a_3} \bar{\gamma}^0 \bar{\gamma}^3 \psi - \\
- (m_{\text{sp}} + 2 S F_I) \bar{\gamma}^0 \psi - 2 i P F_J \bar{\gamma}^0 \bar{\gamma}^5 \psi = 0, \tag{П3.23а}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
i \dot{\bar{\psi}} + \frac{i}{2} \left(\frac{\dot{a}_1}{a_1} + \frac{\dot{a}_2}{a_2} + \frac{\dot{a}_3}{a_3} \right) \bar{\psi} - i \frac{m-n}{2 a_3} \bar{\psi} \bar{\gamma}^3 \bar{\gamma}^0 + \\
+ (m_{\text{sp}} + 2 S F_I) \bar{\psi} \bar{\gamma}^0 + 2 i P F_J \bar{\psi} \bar{\gamma}^5 \bar{\gamma}^0 = 0. \tag{П3.23б}
\end{aligned}$$

Умножая (П3.23а) на $\bar{\psi} \bar{\gamma}^i$ слева и (П3.23б) на $\bar{\gamma}^i \psi$ справа и вычитая, находим

$$\begin{aligned}
i (\bar{\psi} \bar{\gamma}^1 \dot{\psi} - \dot{\bar{\psi}} \bar{\gamma}^1 \psi) = \\
= -\frac{i}{2} \left(\frac{\dot{a}_1}{a_1} + \frac{\dot{a}_2}{a_2} + \frac{\dot{a}_3}{a_3} \right) (\bar{\psi} \bar{\gamma}^1 \psi - \dot{\bar{\psi}} \bar{\gamma}^1 \psi) + i \frac{m-n}{2 a_3} (\bar{\psi} \bar{\gamma}^1 \bar{\gamma}^0 \bar{\gamma}^3 \psi - \dot{\bar{\psi}} \bar{\gamma}^3 \bar{\gamma}^0 \bar{\gamma}^1 \psi) + \\
+ (m_{\text{sp}} + 2 S F_I) (\bar{\psi} \bar{\gamma}^1 \bar{\gamma}^0 \psi + \dot{\bar{\psi}} \bar{\gamma}^0 \bar{\gamma}^1 \psi) + 2 i P F_J (\bar{\psi} \bar{\gamma}^1 \bar{\gamma}^0 \bar{\gamma}^5 \psi + \dot{\bar{\psi}} \bar{\gamma}^5 \bar{\gamma}^0 \bar{\gamma}^1 \psi) = \\
= i \frac{m-n}{a_3} \bar{\psi} \bar{\gamma}^3 \bar{\gamma}^1 \bar{\gamma}^0 \psi, \tag{П3.24}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \iota(\bar{\psi}\bar{\gamma}^2\dot{\psi} - \dot{\bar{\psi}}\bar{\gamma}^2\psi) = \\
 & = -\frac{\iota}{2} \left(\frac{\dot{a}_1}{a_1} + \frac{\dot{a}_2}{a_2} + \frac{\dot{a}_3}{a_3} \right) (\bar{\psi}\bar{\gamma}^2\psi - \dot{\bar{\psi}}\bar{\gamma}^2\psi) + \iota \frac{m-n}{2a_3} (\bar{\psi}\bar{\gamma}^2\bar{\gamma}^0\bar{\gamma}^3\psi - \dot{\bar{\psi}}\bar{\gamma}^3\bar{\gamma}^0\bar{\gamma}^2\psi) + \\
 & + (m_{\text{sp}} + 2SF_I) (\bar{\psi}\bar{\gamma}^2\bar{\gamma}^0\psi + \dot{\bar{\psi}}\bar{\gamma}^0\bar{\gamma}^2\psi) + 2\iota PF_J (\bar{\psi}\bar{\gamma}^2\bar{\gamma}^0\bar{\gamma}^5\psi + \dot{\bar{\psi}}\bar{\gamma}^5\bar{\gamma}^0\bar{\gamma}^2\psi) = \\
 & = -\iota \frac{m-n}{a_3} \dot{\bar{\psi}}\bar{\gamma}^2\bar{\gamma}^3\bar{\gamma}^0\psi. \quad (\text{П3.25})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \iota(\bar{\psi}\bar{\gamma}^3\dot{\psi} - \dot{\bar{\psi}}\bar{\gamma}^3\psi) = \\
 & = -\frac{\iota}{2} \left(\frac{\dot{a}_1}{a_1} + \frac{\dot{a}_2}{a_2} + \frac{\dot{a}_3}{a_3} \right) (\bar{\psi}\bar{\gamma}^3\psi - \dot{\bar{\psi}}\bar{\gamma}^3\psi) + \iota \frac{m-n}{2a_3} (\bar{\psi}\bar{\gamma}^3\bar{\gamma}^0\bar{\gamma}^3\psi - \dot{\bar{\psi}}\bar{\gamma}^3\bar{\gamma}^0\bar{\gamma}^3\psi) + \\
 & + (m_{\text{sp}} + 2SF_I) (\bar{\psi}\bar{\gamma}^3\bar{\gamma}^0\psi + \dot{\bar{\psi}}\bar{\gamma}^0\bar{\gamma}^3\psi) + 2\iota PF_J (\bar{\psi}\bar{\gamma}^3\bar{\gamma}^0\bar{\gamma}^5\psi + \dot{\bar{\psi}}\bar{\gamma}^5\bar{\gamma}^0\bar{\gamma}^3\psi) = \\
 & = 0. \quad (\text{П3.26})
 \end{aligned}$$

Тогда из (П3.13) получим

$$\bar{T}_{00} = \frac{\iota}{2} (\bar{\psi}\bar{\gamma}_0\dot{\psi} - \dot{\bar{\psi}}\bar{\gamma}_0\psi) = \frac{\iota}{2} (\bar{\psi}\bar{\gamma}^0\dot{\psi} - \dot{\bar{\psi}}\bar{\gamma}^0\psi) = m_{\text{sp}}S + 2KF_K, \quad (\text{П3.27a})$$

$$\begin{aligned}
 \bar{T}_{10} &= \frac{\iota}{4} (\bar{\psi}\bar{\gamma}_1\dot{\psi} - \dot{\bar{\psi}}\bar{\gamma}_1\psi) = -\frac{\iota a_1 e^{-mx_3}}{4} (\bar{\psi}\bar{\gamma}^1\dot{\psi} - \dot{\bar{\psi}}\bar{\gamma}^1\psi) = \\
 &= -\iota \frac{(m-n)a_1 e^{-mx_3}}{4a_3} \bar{\psi}\bar{\gamma}^3\bar{\gamma}^1\bar{\gamma}^0\psi, \quad (\text{П3.27б})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{T}_{20} &= \frac{\iota}{4} (\bar{\psi}\bar{\gamma}_2\dot{\psi} - \dot{\bar{\psi}}\bar{\gamma}_2\psi) = -\frac{\iota a_2 e^{nx_3}}{4} (\bar{\psi}\bar{\gamma}^2\dot{\psi} - \dot{\bar{\psi}}\bar{\gamma}^2\psi) = \\
 &= \iota \frac{(m-n)a_2 e^{nx_3}}{4a_3} \bar{\psi}\bar{\gamma}^2\bar{\gamma}^3\bar{\gamma}^0\psi, \quad (\text{П3.27в})
 \end{aligned}$$

$$\bar{T}_{30} = \frac{\iota}{4} (\bar{\psi}\bar{\gamma}_3\dot{\psi} - \dot{\bar{\psi}}\bar{\gamma}_3\psi) = -\frac{\iota a_3}{4} (\bar{\psi}\bar{\gamma}^3\dot{\psi} - \dot{\bar{\psi}}\bar{\gamma}^3\psi) = 0. \quad (\text{П3.27г})$$

Найдем $\tilde{T}_{\mu\nu}$. Для этого сначала явно запишем выражения $(\gamma_\mu\Gamma_\nu + \Gamma_\nu\gamma_\mu)$. Учитывая, что $\bar{\gamma}^i\bar{\gamma}^i\bar{\gamma}^j + \bar{\gamma}^i\bar{\gamma}^j\bar{\gamma}^i = 0$ и $\bar{\gamma}^i\bar{\gamma}^j\bar{\gamma}^k + \bar{\gamma}^j\bar{\gamma}^k\bar{\gamma}^i = 2\bar{\gamma}^i\bar{\gamma}^j\bar{\gamma}^k$, для $i \neq j \neq k = 0, 1, 2, 3$ находим

$$\begin{aligned}
 \gamma_1\Gamma_1 + \Gamma_1\gamma_1 &= -a_1 e^{-mx_3} \bar{\gamma}^1 \frac{1}{2} \left(\dot{a}_1 \bar{\gamma}^1 \bar{\gamma}^0 - m \frac{a_1}{a_3} \bar{\gamma}^1 \bar{\gamma}^3 \right) e^{-mx_3} - \\
 &\quad - \frac{1}{2} \left(\dot{a}_1 \bar{\gamma}^1 \bar{\gamma}^0 - m \frac{a_1}{a_3} \bar{\gamma}^1 \bar{\gamma}^3 \right) e^{-mx_3} a_1 e^{-mx_3} \bar{\gamma}^1 = \\
 &= -\frac{1}{2} a_1 \dot{a}_1 e^{-2mx_3} (\bar{\gamma}^1 \bar{\gamma}^1 \bar{\gamma}^0 + \bar{\gamma}^1 \bar{\gamma}^0 \bar{\gamma}^1) + \\
 &\quad + m \frac{a_1^2}{a_3} e^{-2mx_3} (\bar{\gamma}^1 \bar{\gamma}^1 \bar{\gamma}^3 + \bar{\gamma}^1 \bar{\gamma}^3 \bar{\gamma}^1) = 0,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_2\Gamma_2 + \Gamma_2\gamma_2 &= -a_2 e^{nx_3} \bar{\gamma}^2 \frac{1}{2} \left(\dot{a}_2 \bar{\gamma}^2 \bar{\gamma}^0 + n \frac{a_2}{a_3} \bar{\gamma}^2 \bar{\gamma}^3 \right) e^{nx_3} - \\
&\quad - \frac{1}{2} \left(\dot{a}_2 \bar{\gamma}^2 \bar{\gamma}^0 + n \frac{a_2}{a_3} \bar{\gamma}^2 \bar{\gamma}^3 \right) e^{nx_3} a_2 e^{nx_3} \bar{\gamma}^2 = \\
&= -\frac{1}{2} a_2 \dot{a}_2 e^{2nx_3} (\bar{\gamma}^2 \bar{\gamma}^2 \bar{\gamma}^0 + \bar{\gamma}^2 \bar{\gamma}^0 \bar{\gamma}^2) - \\
&\quad - n \frac{a_2^2}{a_3} e^{2nx_3} (\bar{\gamma}^2 \bar{\gamma}^2 \bar{\gamma}^3 + \bar{\gamma}^2 \bar{\gamma}^3 \bar{\gamma}^2) = 0, \\
\gamma_3\Gamma_3 + \Gamma_3\gamma_3 &= -a_3 \bar{\gamma}^3 \frac{1}{2} \dot{a}_3 \bar{\gamma}^3 \bar{\gamma}^0 - \frac{1}{2} \dot{a}_3 \bar{\gamma}^3 \bar{\gamma}^0 a_3 \bar{\gamma}^3 = \\
&= -\frac{1}{2} a_3 \dot{a}_3 (\bar{\gamma}^3 \bar{\gamma}^3 \bar{\gamma}^0 + \bar{\gamma}^3 \bar{\gamma}^0 \bar{\gamma}^3) = 0, \\
\gamma_1\Gamma_2 + \Gamma_2\gamma_1 &= -a_1 e^{-mx_3} \bar{\gamma}^1 \frac{1}{2} \left(\dot{a}_2 \bar{\gamma}^2 \bar{\gamma}^0 + n \frac{a_2}{a_3} \bar{\gamma}^2 \bar{\gamma}^3 \right) e^{nx_3} - \\
&\quad - \frac{1}{2} \left(\dot{a}_2 \bar{\gamma}^2 \bar{\gamma}^0 + n \frac{a_2}{a_3} \bar{\gamma}^2 \bar{\gamma}^3 \right) e^{nx_3} a_1 e^{-mx_3} \bar{\gamma}^1 = \\
&= -\frac{1}{2} a_1 \dot{a}_2 e^{(n-m)x_3} (\bar{\gamma}^1 \bar{\gamma}^2 \bar{\gamma}^0 + \bar{\gamma}^2 \bar{\gamma}^0 \bar{\gamma}^1) - \\
&\quad - \frac{n}{2} \frac{a_1 a_2}{a_3} e^{(n-m)x_3} (\bar{\gamma}^1 \bar{\gamma}^2 \bar{\gamma}^3 + \bar{\gamma}^2 \bar{\gamma}^3 \bar{\gamma}^1) = \\
&= \left[-a_1 \dot{a}_2 \bar{\gamma}^1 \bar{\gamma}^2 \bar{\gamma}^0 - n \frac{a_1 a_2}{a_3} \bar{\gamma}^1 \bar{\gamma}^2 \bar{\gamma}^3 \right] e^{(n-m)x_3}, \\
\gamma_2\Gamma_1 + \Gamma_1\gamma_2 &= -a_2 e^{nx_3} \bar{\gamma}^2 \frac{1}{2} \left(\dot{a}_1 \bar{\gamma}^1 \bar{\gamma}^0 - m \frac{a_1}{a_3} \bar{\gamma}^1 \bar{\gamma}^3 \right) e^{-mx_3} - \\
&\quad - \frac{1}{2} \left(\dot{a}_1 \bar{\gamma}^1 \bar{\gamma}^0 - m \frac{a_1}{a_3} \bar{\gamma}^1 \bar{\gamma}^3 \right) e^{-mx_3} a_2 e^{nx_3} \bar{\gamma}^2 = \\
&= -\frac{1}{2} a_2 \dot{a}_1 e^{(n-m)x_3} (\bar{\gamma}^2 \bar{\gamma}^1 \bar{\gamma}^0 + \bar{\gamma}^1 \bar{\gamma}^0 \bar{\gamma}^2) + \\
&\quad + \frac{m}{2} \frac{a_1 a_2}{a_3} e^{(n-m)x_3} (\bar{\gamma}^2 \bar{\gamma}^1 \bar{\gamma}^3 + \bar{\gamma}^1 \bar{\gamma}^3 \bar{\gamma}^2) = \\
&= \left[a_2 \dot{a}_1 \bar{\gamma}^1 \bar{\gamma}^2 \bar{\gamma}^0 - m \frac{a_1 a_2}{a_3} \bar{\gamma}^1 \bar{\gamma}^2 \bar{\gamma}^3 \right] e^{(n-m)x_3}, \\
\gamma_1\Gamma_3 + \Gamma_3\gamma_1 &= -a_1 e^{-mx_3} \bar{\gamma}^1 \frac{1}{2} \dot{a}_3 \bar{\gamma}^3 \bar{\gamma}^0 - \frac{1}{2} \dot{a}_3 \bar{\gamma}^3 \bar{\gamma}^0 a_1 e^{-mx_3} \bar{\gamma}^1 = \\
&= -a_1 \dot{a}_3 e^{-mx_3} (\bar{\gamma}^1 \bar{\gamma}^3 \bar{\gamma}^0 + \bar{\gamma}^3 \bar{\gamma}^0 \bar{\gamma}^1) = \\
&= a_1 \dot{a}_3 e^{-mx_3} \bar{\gamma}^3 \bar{\gamma}^1 \bar{\gamma}^0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \gamma_3 \Gamma_1 + \Gamma_1 \gamma_3 &= -a_3 \bar{\gamma}^3 \frac{1}{2} \left(\dot{a}_1 \bar{\gamma}^1 \bar{\gamma}^0 - m \frac{a_1}{a_3} \bar{\gamma}^1 \bar{\gamma}^3 \right) e^{-mx_3} - \\
 &\quad - \frac{1}{2} \left(\dot{a}_1 \bar{\gamma}^1 \bar{\gamma}^0 - m \frac{a_1}{a_3} \bar{\gamma}^1 \bar{\gamma}^3 \right) e^{-mx_3} a_3 \bar{\gamma}^3 = \\
 &= -\frac{1}{2} a_3 \dot{a}_1 e^{-mx_3} (\bar{\gamma}^3 \bar{\gamma}^1 \bar{\gamma}^0 + \bar{\gamma}^1 \bar{\gamma}^0 \bar{\gamma}^3) + \\
 &\quad + m a_1 e^{-mx_3} (\bar{\gamma}^3 \bar{\gamma}^1 \bar{\gamma}^3 + \bar{\gamma}^1 \bar{\gamma}^3 \bar{\gamma}^3) = \\
 &= -a_3 \dot{a}_1 \bar{\gamma}^3 \bar{\gamma}^1 \bar{\gamma}^0 e^{-mx_3}, \\
 \gamma_2 \Gamma_3 + \Gamma_3 \gamma_2 &= -a_2 e^{nx_3} \bar{\gamma}^2 \frac{1}{2} \dot{a}_3 \bar{\gamma}^3 \bar{\gamma}^0 - \frac{1}{2} \dot{a}_3 \bar{\gamma}^3 \bar{\gamma}^0 a_2 e^{nx_3} \bar{\gamma}^2 = \\
 &= -a_2 \dot{a}_3 e^{nx_3} (\bar{\gamma}^2 \bar{\gamma}^3 \bar{\gamma}^0 + \bar{\gamma}^3 \bar{\gamma}^0 \bar{\gamma}^2) = -a_2 \dot{a}_3 \bar{\gamma}^2 \bar{\gamma}^3 \bar{\gamma}^0 e^{nx_3}, \\
 \gamma_3 \Gamma_2 + \Gamma_2 \gamma_3 &= -a_3 \bar{\gamma}^3 \frac{1}{2} \left(\dot{a}_2 \bar{\gamma}^2 \bar{\gamma}^0 + n \frac{a_2}{a_3} \bar{\gamma}^2 \bar{\gamma}^3 \right) e^{nx_3} - \\
 &\quad - \frac{1}{2} \left(\dot{a}_2 \bar{\gamma}^2 \bar{\gamma}^0 + n \frac{a_2}{a_3} \bar{\gamma}^2 \bar{\gamma}^3 \right) e^{nx_3} a_3 \bar{\gamma}^3 = \\
 &= -\frac{1}{2} a_3 \dot{a}_2 e^{nx_3} (\bar{\gamma}^3 \bar{\gamma}^2 \bar{\gamma}^0 + \bar{\gamma}^2 \bar{\gamma}^0 \bar{\gamma}^3) - \\
 &\quad - n a_2 e^{nx_3} (\bar{\gamma}^3 \bar{\gamma}^2 \bar{\gamma}^3 + \bar{\gamma}^2 \bar{\gamma}^3 \bar{\gamma}^3) = a_3 \dot{a}_2 \bar{\gamma}^2 \bar{\gamma}^3 \bar{\gamma}^0 e^{nx_3}, \\
 \gamma_0 \Gamma_1 + \Gamma_1 \gamma_0 &= \bar{\gamma}^0 \frac{1}{2} \left(\dot{a}_1 \bar{\gamma}^1 \bar{\gamma}^0 - m \frac{a_1}{a_3} \bar{\gamma}^1 \bar{\gamma}^3 \right) e^{-mx_3} + \\
 &\quad + \frac{1}{2} \left(\dot{a}_1 \bar{\gamma}^1 \bar{\gamma}^0 - m \frac{a_1}{a_3} \bar{\gamma}^1 \bar{\gamma}^3 \right) e^{-mx_3} \bar{\gamma}^0 = \\
 &= \frac{1}{2} \dot{a}_1 e^{-mx_3} (\bar{\gamma}^0 \bar{\gamma}^1 \bar{\gamma}^0 + \bar{\gamma}^1 \bar{\gamma}^0 \bar{\gamma}^0) - \\
 &\quad - m \frac{a_1}{a_3} e^{-mx_3} (\bar{\gamma}^0 \bar{\gamma}^1 \bar{\gamma}^3 + \bar{\gamma}^1 \bar{\gamma}^3 \bar{\gamma}^0) = \\
 &= m \frac{a_1}{a_3} e^{-mx_3} \bar{\gamma}^3 \bar{\gamma}^1 \bar{\gamma}^0, \\
 \gamma_0 \Gamma_2 + \Gamma_2 \gamma_0 &= \bar{\gamma}^0 \frac{1}{2} \left(\dot{a}_2 \bar{\gamma}^2 \bar{\gamma}^0 + n \frac{a_2}{a_3} \bar{\gamma}^2 \bar{\gamma}^3 \right) e^{nx_3} + \\
 &\quad + \frac{1}{2} \left(\dot{a}_2 \bar{\gamma}^2 \bar{\gamma}^0 + n \frac{a_2}{a_3} \bar{\gamma}^2 \bar{\gamma}^3 \right) e^{nx_3} \bar{\gamma}^0 = \\
 &= \frac{1}{2} \dot{a}_2 e^{nx_3} (\bar{\gamma}^0 \bar{\gamma}^2 \bar{\gamma}^0 + \bar{\gamma}^2 \bar{\gamma}^0 \bar{\gamma}^0) + \\
 &\quad + n \frac{a_2}{a_3} e^{nx_3} (\bar{\gamma}^0 \bar{\gamma}^2 \bar{\gamma}^3 + \bar{\gamma}^2 \bar{\gamma}^3 \bar{\gamma}^0) = n \frac{a_2}{a_3} e^{nx_3} \bar{\gamma}^2 \bar{\gamma}^3 \bar{\gamma}^0, \\
 \gamma_0 \Gamma_3 + \Gamma_3 \gamma_0 &= \bar{\gamma}^0 \frac{1}{2} \dot{a}_3 \bar{\gamma}^3 \bar{\gamma}^0 + \frac{1}{2} \dot{a}_3 \bar{\gamma}^3 \bar{\gamma}^0 \bar{\gamma}^0 = \frac{1}{2} \dot{a}_3 (\bar{\gamma}^0 \bar{\gamma}^3 \bar{\gamma}^0 + \bar{\gamma}^3 \bar{\gamma}^0 \bar{\gamma}^0) = 0.
 \end{aligned}$$

Тогда из (П3.14) находим

$$\tilde{T}_{00} = \frac{\imath}{2} \bar{\psi} (\gamma_0 \Gamma_0 + \Gamma_0 \gamma_0) \psi = 0, \quad (\text{П3.28а})$$

$$\tilde{T}_{11} = \frac{\imath}{2} \bar{\psi} (\gamma_1 \Gamma_1 + \Gamma_1 \gamma_1) \psi = 0, \quad (\text{П3.28б})$$

$$\tilde{T}_{22} = \frac{\imath}{2} \bar{\psi} (\gamma_2 \Gamma_2 + \Gamma_2 \gamma_2) \psi = 0, \quad (\text{П3.28в})$$

$$\tilde{T}_{33} = \frac{\imath}{2} \bar{\psi} (\gamma_3 \Gamma_3 + \Gamma_3 \gamma_3) \psi = 0, \quad (\text{П3.28г})$$

$$\tilde{T}_{03} = \frac{\imath}{4} \bar{\psi} (\gamma_0 \Gamma_3 + \Gamma_3 \gamma_0) \psi = 0, \quad (\text{П3.28д})$$

$$\tilde{T}_{01} = \frac{\imath}{4} \bar{\psi} (\gamma_0 \Gamma_1 + \Gamma_1 \gamma_0) \psi = \frac{\imath}{4} m \frac{a_1}{a_3} e^{-mx_3} \bar{\psi} \bar{\gamma}^3 \bar{\gamma}^1 \bar{\gamma}^0 \psi, \quad (\text{П3.28е})$$

$$\tilde{T}_{02} = \frac{\imath}{4} \bar{\psi} (\gamma_0 \Gamma_2 + \Gamma_2 \gamma_0) \psi = \frac{\imath}{4} n \frac{a_2}{a_3} e^{nx_3} \bar{\psi} \bar{\gamma}^2 \bar{\gamma}^3 \bar{\gamma}^0 \psi, \quad (\text{П3.28ж})$$

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{12} &= \frac{\imath}{4} \bar{\psi} (\gamma_1 \Gamma_2 + \Gamma_2 \gamma_1 + \gamma_2 \Gamma_1 + \Gamma_1 \gamma_2) \psi = \\ &= \frac{\imath}{4} a_1 a_2 \left[\left(\frac{\dot{a}_1}{a_1} - \frac{\dot{a}_2}{a_2} \right) \bar{\psi} \bar{\gamma}^1 \bar{\gamma}^2 \bar{\gamma}^0 \psi - \right. \\ &\quad \left. - \frac{m+n}{a_3} \bar{\psi} \bar{\gamma}^1 \bar{\gamma}^2 \bar{\gamma}^3 \psi \right] e^{(n-m)x_3}, \end{aligned} \quad (\text{П3.28з})$$

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{23} &= \frac{\imath}{4} \bar{\psi} (\gamma_2 \Gamma_3 + \Gamma_3 \gamma_2 + \gamma_3 \Gamma_2 + \Gamma_2 \gamma_3) \psi = \\ &= \frac{\imath}{4} a_2 a_3 \left(\frac{\dot{a}_2}{a_2} - \frac{\dot{a}_3}{a_3} \right) e^{nx_3} \bar{\psi} \bar{\gamma}^2 \bar{\gamma}^3 \bar{\gamma}^0 \psi, \end{aligned} \quad (\text{П3.28и})$$

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{31} &= \frac{\imath}{4} \bar{\psi} (\gamma_3 \Gamma_1 + \Gamma_1 \gamma_3 + \gamma_1 \Gamma_3 + \Gamma_3 \gamma_1) \psi = \\ &= \frac{\imath}{4} a_3 a_1 \left(\frac{\dot{a}_3}{a_2} - \frac{\dot{a}_1}{a_1} \right) e^{-mx_3} \bar{\psi} \bar{\gamma}^3 \bar{\gamma}^1 \bar{\gamma}^0 \psi. \end{aligned} \quad (\text{П3.28к})$$

Подставляя $\bar{T}_{\mu\nu}$ из (П3.27а)–(П3.27г) и $\tilde{T}_{\mu\nu}$ из (П3.28а)–(П3.28к) в (П3.12), находим

$$\begin{aligned} T_0^0 &= g^{00} \bar{T}_{00} - L = m_{\text{sp}} S + 2KF_K - (2KF_K - F) = \\ &= m_{\text{sp}} S + F(K), \end{aligned} \quad (\text{П3.29а})$$

$$T_1^1 = -L = F(K) - 2KF_K, \quad (\text{П3.29б})$$

$$T_2^2 = -L = F(K) - 2KF_K, \quad (\text{П3.29в})$$

$$T_3^3 = -L = F(K) - 2KF_K, \quad (\text{П3.29г})$$

$$\begin{aligned}
 T_1^0 &= g^{00}\tilde{T}_{01} - g^{00}\tilde{T}_{01} = \\
 &= -i\frac{(m-n)a_1 e^{-mx_3}}{4a_3} \bar{\psi}\bar{\gamma}^3\bar{\gamma}^1\bar{\gamma}^0\psi - \frac{i}{4}m\frac{a_1}{a_3} e^{-mx_3}\bar{\psi}\bar{\gamma}^3\bar{\gamma}^1\bar{\gamma}^0\psi = \\
 &= \frac{i(n-2m)}{4}\frac{a_1}{a_3} e^{-mx_3} \bar{\psi}\bar{\gamma}^3\bar{\gamma}^1\bar{\gamma}^0\psi = \\
 &= -\frac{(n-2m)}{4}\frac{a_1}{a_3} e^{-mx_3} A^2, \tag{ПЗ.29д}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T_2^0 &= g^{00}\tilde{T}_{02} - g^{00}\tilde{T}_{02} = \\
 &= i\frac{(m-n)a_2 e^{nx_3}}{4a_3} \bar{\psi}\bar{\gamma}^2\bar{\gamma}^3\bar{\gamma}^0\psi - \frac{i}{4}n\frac{a_2}{a_3} e^{nx_3}\bar{\psi}\bar{\gamma}^2\bar{\gamma}^3\bar{\gamma}^0\psi = \\
 &= \frac{i(m-2n)}{4}\frac{a_2}{a_3} e^{nx_3} \bar{\psi}\bar{\gamma}^2\bar{\gamma}^3\bar{\gamma}^0\psi = -\frac{(m-2n)}{4}\frac{a_2}{a_3} e^{nx_3} A^1, \tag{ПЗ.29е}
 \end{aligned}$$

$$T_3^0 = 0, \tag{ПЗ.29ж}$$

$$\begin{aligned}
 T_2^1 &= g^{11}\tilde{T}_{12} = -\frac{1}{a_1^2 e^{-2mx_3}}\frac{i}{4}a_1 a_2 \times \\
 &\quad \times \left[\left(\frac{\dot{a}_1}{a_1} - \frac{\dot{a}_2}{a_2} \right) \bar{\psi}\bar{\gamma}^1\bar{\gamma}^2\bar{\gamma}^0\psi - \frac{m+n}{a_3} \bar{\psi}\bar{\gamma}^1\bar{\gamma}^2\bar{\gamma}^3\psi \right] e^{(n-m)x_3} = \\
 &= -\frac{i}{4}\frac{a_2}{a_1} e^{(m+n)x_3} \left[\left(\frac{\dot{a}_1}{a_1} - \frac{\dot{a}_2}{a_2} \right) \bar{\psi}\bar{\gamma}^1\bar{\gamma}^2\bar{\gamma}^0\psi - \frac{m+n}{a_3} \bar{\psi}\bar{\gamma}^1\bar{\gamma}^2\bar{\gamma}^3\psi \right] = \\
 &= \frac{a_2}{4a_1} e^{(m+n)x_3} \left[\left(\frac{\dot{a}_1}{a_1} - \frac{\dot{a}_2}{a_2} \right) A^3 - \frac{m+n}{a_3} A^0 \right], \tag{ПЗ.29з}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T_3^1 &= g^{11}\tilde{T}_{13} = -\frac{1}{a_1^2 e^{-2mx_3}}\frac{i}{4}a_3 a_1 \left(\frac{\dot{a}_3}{a_2} - \frac{\dot{a}_1}{a_1} \right) e^{-mx_3} \bar{\psi}\bar{\gamma}^3\bar{\gamma}^1 = \\
 &= -\frac{i}{4}\frac{a_3}{a_1} e^{mx_3} \left(\frac{\dot{a}_3}{a_2} - \frac{\dot{a}_1}{a_1} \right) \bar{\psi}\bar{\gamma}^3\bar{\gamma}^1\bar{\gamma}^0\psi = \\
 &= \frac{a_3}{4a_1} e^{mx_3} \left(\frac{\dot{a}_3}{a_2} - \frac{\dot{a}_1}{a_1} \right) A^2, \tag{ПЗ.29и}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T_3^2 &= g^{11}\tilde{T}_{12} = -\frac{1}{a_2^2 e^{2nx_3}}\frac{i}{4}a_2 a_3 \left(\frac{\dot{a}_2}{a_2} - \frac{\dot{a}_3}{a_3} \right) e^{nx_3} \bar{\psi}\bar{\gamma}^2\bar{\gamma}^3\bar{\gamma}^0\psi = \\
 &= -\frac{i}{4}\frac{a_3}{a_2} e^{-nx_3} \left(\frac{\dot{a}_2}{a_2} - \frac{\dot{a}_3}{a_3} \right) \bar{\psi}\bar{\gamma}^2\bar{\gamma}^3\bar{\gamma}^0\psi = \\
 &= \frac{a_3}{4a_2} e^{-nx_3} \left(\frac{\dot{a}_2}{a_2} - \frac{\dot{a}_3}{a_3} \right) A^1. \tag{ПЗ.29к}
 \end{aligned}$$

Таким образом, мы нашли выражения для компонент тензора энергии-импульса спинорного поля для Бианки типа BVI пространства-времени. Как видно, диагональные компоненты не зависят от m или n , в то время как

недиагональные компоненты зависят. Следовательно, подставляя $m = n$, $m = -n$, $n = 0$, $m = n = 0$, $m = n = 0$ и $a_1 = a_2$, наконец, $m = n = 0$ и $a_1 = a_2 = a_3$, можно найти компоненты энергии-импульса спинорного поля для космологических моделей BVI_0 , BV , $BIII$, BI , $LRSBI$ и FRW соответственно.

Как видно из (П3.29а)–(П3.29к), диагональные компоненты тензора энергии-импульса одинаковы для всех рассмотренных космологических моделей и зависят от массы и нелинейности спинорного поля. В случае линейного спинорного поля все три компоненты на основной диагонали будут равны нулю. Что касается недиагональных компонент, они не зависят от массы или нелинейности спинорного поля. Только в случае модели FRW все недиагональные компоненты становятся нулевыми, в то время как в случае других моделей, изучаемых здесь, имеются по крайней мере две нетривиальные недиагональные компоненты.

Приложение 4 СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ

Докажем, что существует решение уравнения (4.56) и оно единственное:

$$\begin{aligned} \ddot{V} = \Phi(V), \quad \Phi(V) = \bar{X}V^{1/3-2N_3} + \\ + \frac{3\kappa}{2} \left[m_{\text{сп}} V_0 + 2 \sum_k \lambda_k (1 - n_k) V_0^{2n_k} V^{1-2n_k} \right], \end{aligned} \quad (\text{П4.1})$$

где $\bar{X} = 2(m^2 - mn + n^2) X_0^{(2N_3-4/3)}$.

Для этого рассмотрим правую часть уравнения (П4.1) и проверим, удовлетворяет ли $\Phi(t, V)$ условию Липшица. Запишем (П4.1) в виде

$$\dot{W} = \Phi(V), \quad (\text{П4.2a})$$

$$\dot{V} = W. \quad (\text{П4.2б})$$

Пусть (t_*, V_*) и (t_*, W_*) — некоторые конкретные пары значений, заданные для реальных переменных (t, V) и (t_*, W_*) , такие, что в прямоугольном домене \mathbf{D} , окружающем точку (t_*, V_*) и определенном неравенством

$$|t - t_*| \leq A_*, \quad |V - V_*| \leq B_*, \quad (\text{П4.3})$$

$\Phi(t, V)$ — однозначная непрерывная функция от t и V . Для другого фиксированного параметра $\Phi(t, V)$ — однозначная непрерывная функция. Вспомнив, что $V = 0$ соответствует пространственно-временной сингулярности и V по существу неотрицательная, для любого нетривиального значения V

закключаем, что $|\Phi(t, V)|$ имеет некоторую верхнюю границу M в \mathbf{D} . Также определим $h = \min(A_*, B_*/M)$. Если $h < A_*$, на t наложим дополнительное условие $|t - t_*| < h$. Пусть (t_1, V_1) и (t_2, V_2) — две точки в пределах \mathbf{D} .

Условие Липшица в этом случае гласит

$$\begin{aligned} \sqrt{[\Phi(t_1, V_1) - \Phi(t_2, V_2)]^2 + (W_1 - W_2)^2} &\leq \\ &\leq L\sqrt{(V_1 - V_2)^2 + (W_1 - W_2)^2} \end{aligned} \quad (\text{П4.4})$$

для любого $L > 1$, которое следует из

$$\sqrt{[\Phi(t_1, V_1) - \Phi(t_2, V_2)]^2} \leq L\sqrt{(V_1 - V_2)^2}. \quad (\text{П4.5})$$

Здесь L — некоторая постоянная. Подставляя $\Phi(t, V)$ из (4.56) в левую часть (П4.5), находим

$$\begin{aligned} |\Phi(t_1, V_1) - \Phi(t_2, V_2)| &= \\ = \left| \bar{X} \left(V_1^{1/3-2N_3} - V_2^{1/3-2N_3} \right) + 3\kappa \sum_k \lambda_k (1-n_k) V_0^{2n_k} [V_1^{1-2n_k} - V_2^{1-2n_k}] \right| &= \\ = \left| (V_2 - V_1) \left[\bar{X}_1 (V^*)^{-(2/3+2N_3)} + \sum_k \lambda_k^* (V^*)^{-2n_k} \right] \right|, \end{aligned} \quad (\text{П4.6})$$

где $V^* \in [V_1, V_2]$, $V_1 > 0$, $V_2 > 0$. Здесь мы обозначили, что $\bar{X}_1 = (1/3 - 2N_3)\bar{X}$ и $\lambda_k^* = 2\kappa(1-n_k)(1-2n_k)V_0^{2n_k} \lambda_k$, и использовали теорему о среднем значении.

Поскольку $\left[\bar{X}_1 (V)^{-(2/3+2N_3)} + \sum_k \lambda_k^* (V)^{-2n_k} \right]$ непрерывна, она обладает некоторым максимумом L в интервале $[V_1, V_2]$, таким что

$$|\Phi(t_1, V_1) - \Phi(t_2, V_2)| \leq L|V_2 - V_1| \quad (\text{П4.7})$$

в домене \mathbf{D} . Далее, расширяя это исследование на другие домены, можно показать, что условие (П4.7) справедливо в $\mathbf{D} = \bigcup_{V_1 > 0, V_2 < \infty} [V_1, V_2]$.

Таким образом, $\Phi(t, V)$ — непрерывная функция, удовлетворяющая условию Липшица в домене \mathbf{D} . Следовательно, уравнение (4.56) допускает единственное непрерывное решение.

Благодарности. Работа выполнена благодаря проекту Joint Romanian-LIT (ОИЯИ, Дубна) № 05-6-1119-2014/2016.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Akarsu O., Kilinc C.B.* LRS Bianchi Type I Models with Anisotropic Dark Energy and Constant Deceleration Parameter // *General Relativity and Gravitation*. 2010. V.42. P. 119.
2. *Alvarado R., Rybakov Yu.P., Saha B., Shikin G.N.* Interacting Spinor and Scalar Fields: Exact Self-Consistent Solutions in Bianchi Type-I Space-Time // *Russ. Phys. J.* 1995. V. 38, No. 7. P. 700–705; DOI:10.1007/BF00560272.
3. *Alvarado R., Rybakov Yu.P., Saha B., Shikin G.N.* Exact Self-Consistent Solutions to the Interacting Spinor and Scalar Field Equations in Bianchi Type-I Space-Time // *Commun. Theor. Phys.* 1995. V. 4, No. 2. P. 247–262.
4. *Amendola L., Finelli F., Burigana C., Carturan D.* WMAP and the Generalized Chaplygin Gas // *J. Cosmol. Astropart. Phys.* 2003. V.0307. P.005.
5. *Amendola L., Camargo Campos G., Rosenfeld R.* Consequences of Dark Matter–Dark Energy Interaction on Cosmological Parameters Derived from Type Ia Supernova Data // *Phys. Rev. D.* 2007. V. 75. P. 083506.
6. *Amirhashchi H., Pradhan A., Saha B.* Variable Equation of State for Bianchi Type- VI_0 Dark Energy Models // *Astrophys. Space Sci.* 2011. V. 333. P. 295–303.
7. *Amirhashchi H., Pradhan A., Saha B.* An Interacting Two-Fluid Scenario for Dark Energy in an FRW Universe // *Chin. Phys. Lett.* 2011. V. 3. P. 039801.
8. *Armendáriz-Picón C., Greene P.B.* Spinors, Inflation, and Non-Singular Cyclic Cosmologies // *Gen. Rel. Grav.* 2003. V. 35, No. 9. P. 1637–1658.
9. *Astier P. et al.* The Supernova Legacy Survey: Measurement of Ω_M , Ω_Λ , and w from the First Year Data Set // *Astron. Astrophys.* 2006. V. 447. P. 31.
10. *Bade W.L., Jehle H.* An Introduction to Spinors // *Rev. Mod. Phys.* 1953. V. 25. P. 714–728.
11. *Baake M., Reinicke P.* Fierz Identities for Real Clifford Algebras and the Number of Supercharges // *J. Math. Phys.* 1985. V. 26. P. 1070–1071.
12. *Bali R., Pradhan A., Amirhashchi H.* Bianchi Type VI_0 Magnetized Barotropic Bulk Viscous Fluid Massive String Universe in General Relativity // *Intern. J. Theor. Phys.* 2008. V. 47. P. 2594–2604.
13. *Barashenkov I.V., Pelinovski D.E., Zemlyanaya E.V.* Vibrations and Oscillatory Instabilities of Gap Solitons // *Phys. Rev. Lett.* 1998. V. 80. P. 5117–5120.
14. *Barrow J.D.* Cosmological Limits on Slightly Skew Stress // *Phys. Rev. D.* 1997. V. 55. P. 7451.
15. *Barrow J.D., Maartens R.* Anisotropic Stresses in Inhomogeneous Universe // *Phys. Rev. D.* 1999. V. 59. P. 043502.
16. *Bean R., Dore O.* Are Chaplygin Gases Serious Contenders to the Dark Energy Throne? // *Phys. Rev. D.* 2003. V. 68. P. 023515.
17. *Beca L.M., Avelino P.P., de Carvalho J.P., Martins C.J.* The Role of Baryons in Unified Dark Matter Models // *Phys. Rev. D.* 2003. V. 67. P. 101301.

18. *Belinskii V. A., Khalatnikov I. M., Lifshitz E. M.* Oscillatory Approach to a Singular Point in the Relativistic Cosmology // *Adv. Phys.* 1970. V. 19. P. 525–573.
19. *Belinchnon J. A.* Bianchi VI₀ & III Models: Self-Similar Approach // *Class. Quant. Grav.* 2009. V. 26. P. 175003.
20. *Benaoum H. B.* Accelerated Universe from Modified Chaplygin Gas and Tachyonic Fluid. hep-th/0205140.
21. *Benaoum H. B.* Modified Chaplygin Gas Cosmology. gr-qc/1211.3518v1.
22. *Bennett C. L. et al.* First Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Preliminary Maps and Basic Results // *Astrophys. J. Suppl. Ser.* 2003. V. 148. P. 1.
23. *Bento M. C., Bertolami O., Sen A. A.* Generalized Chaplygin Gas, Accelerated Expansion and Dark Energy-Matter Unification // *Phys. Rev. D.* 2002. V. 66. P. 043507.
24. *Bento M. C., Bertolami O., Sen A. A.* Generalized Chaplygin Gas and CMBR Constraints // *Phys. Rev. D.* 2003. V. 67. P. 063003.
25. *Bento M. C., Bertolami O., Sen A. A.* WMAP Constraints on the Generalized Chaplygin Gas Model // *Phys. Lett. B.* 2003. V. 575. P. 172–180.
26. *Berman M. S.* A Special Law of Variation for Hubble Parameter // *Nuovo Cim. B.* 1983. V. 74. P. 182–186.
27. *Berman M. S., Gomide F. M.* Cosmological Models with Constant Deceleration Parameter // *Gen. Rel. Grav.* 1988. V. 20. P. 191–198.
28. *Bertolami O.* Challenges to the Generalized Chaplygin Gas Cosmology. astro-ph/0403310.
29. *Berrera A., Buniy R. V., Kephart T. W.* The Eccentric Universe // *J. Cosmol. Astropart. Phys.* 2004. V. 04. P. 016.
30. *Bertolami O., Gil Pedro F., Le Delliou M.* Dark Energy–Dark Matter Interaction and Putative Violation of the Equivalence Principle from the Abell Cluster A586 // *Phys. Lett. B.* 2007. V. 654. P. 165–169.
31. *Biesiada M., Godlowski W., Szydlowski M.* Generalized Chaplygin Gas Models Tested with SNIa // *Astrophys. J.* 2005. V. 622. P. 28–38; astro-ph/0403305.
32. *Bilic N., Tupper G. B., Viollier R. D.* Unification of Dark Matter and Dark Energy: The Inhomogeneous Chaplygin Gas // *Phys. Lett. B.* 2002. V. 353. P. 17–21.
33. *Bilyalov R. F.* Symmetric Energy-Momentum Tensor of Spinor Fields // *Theor. Math. Phys.* 1996. V. 108. P. 1093–1099.
34. *Böhmer C. G.* Dark Spinor Inflation: Theory Primer and Dynamics // *Phys. Rev. D.* 2008. V. 77. P. 123535.
35. *Böhmer C. G., Mota D. F.* CMB Anisotropies and Inflation from Non-Standard Spinors // *Phys. Lett. B.* 2008. V. 663. P. 168–171.
36. *Böhmer C. G., Burnett J., Mota D. F., Shaw D. J.* Dark Spinor Models in Gravitation and Cosmology // *J. High Energy Phys.* 2010. V. 07. P. 053.

37. *Bordemann M., Hoppe J.* The Dynamics of Relativistic Membranes I: Reduction to 2-Dimensional Fluid Dynamics // *Phys. Lett. B.* 1993. V. 317. P. 315–320.
38. *Boughn S. P., Cheng E. S., Wilkinson D. T.* Dipole and Quadrupole Anisotropy of the 2.7 K Radiation // *Astrophys. J.* 1981. V. 243. P. L113–L117.
39. *Brill D., Wheeler J.* Interaction of Neutrinos and Gravitational Fields // *Rev. Mod. Phys.* 1957. V. 29. P. 465–479.
40. *Bronnikov K. A., Chudayeva E. N., Shikin G. N.* Magneto-Dilatonic Bianchi-I Cosmology: Isotropization and Singularity Problems // *Class. Quant. Grav.* 2004. V. 21. P. 3389–3403.
41. *Cai Y., Qui T., Piao Y., Li M., Zhang X.* Bouncing Universe with Quintom Matter // *J. High Energy Phys.* 2007. V. 0710. P. 071.
42. *Cai Y., Wang J.* Dark Energy Model with Spinor Matter and Its Scenario // *Class. Quant. Grav.* 2008. V. 25. P. 165014.
43. *Caldwell R. R., Dave R., Steinhardt P. J.* Cosmological Imprint of an Energy Component with General Equation of State // *Phys. Rev. Lett.* 1998. V. 80, No. 8. P. 1582–1585.
44. *Caldwell R. R.* A Phantom Menace? Cosmological Consequences of a Dark Energy Component with Super-Negative Equation of State // *Phys. Lett. B.* 2002. V. 545. P. 23–29.
45. *Campanelli L., Cea P., Tedesco L.* Ellipsoidal Universe Can Solve the Cosmic Microwave Background Quadrupole Problem // *Phys. Rev. Lett.* 2006. V. 97. P. 131302.
46. *Campanelli L., Cea P., Tedesco L.* Cosmic Microwave Background Quadrupole and Universe // *Phys. Rev. D.* 2007. V. 76. P. 063007.
47. *Campanelli L.* Model of Universe Anisotropization // *Phys. Rev. D.* 2009. V. 80. P. 063006.
48. *Campanelli L., Cea P., Fogli G. L., Tedesco T.* Anisotropic Dark Energy and Ellipsoidal Universe. arXiv:1103.2658 [astro-ph.CO]. 2011.
49. *Campanelli L., Cea P., Fogli G. L., Tedesco T.* Cosmic Parallax in Ellipsoidal Universe. arXiv:1103.6175 [astro-ph.CO]. 2011.
50. *Cardenas R., Gonzalez T., Leiva Y., Martin O., Quiros I.* Model of the Universe Including Dark Energy Accounted for by Both a Quintessence Field and a (Negative) Cosmological Constant // *Phys. Rev. D.* 2003. V. 67. P. 083501.
51. *Cervantes-Cota J. L.* Bianchi V Inflation in the Brans–Dicke Theory? arXiv:gr-qc/9912047v1. 1999.
52. *Chaplygin S. A.* On Gas Jet // *Sci. Notes of the Department of Phys.-Math. Science of Moscow Univ.* 1904. Iss. 21. P. 1–112.
53. *Chevallier M., Polarski D.* Accelerating Universes with Dark Matter // *Intern. J. Mod. Phys. D.* 2001. V. 10. P. 213.
54. *Chauvet P., Cervantes-Cota J. L.* Isotropization of Bianchi Type Cosmological Solutions in Brans–Dicke Theory. arXiv:gr-qc/9502015v1. 1995.

55. *Chimento L. P., Mollerach M. S.* Dirac Equation in Bianchi I Metrics // *Phys. Lett. A.* 1987. V. 121, No. 1. P. 7–10.
56. *Chimento L. P., Jakubi A. S., Pavon D., Zimdahl W.* Interacting Quintessence Solution to the Coincidence Problem // *Phys. Rev. D.* 2003. V. 67. P. 083513.
57. *Collins C. B., Glass E. N., Wilkinson D. A.* Exact Spatially Homogeneous Cosmologies // *Gen. Rel. Grav.* 1980. V. 12. P. 805–823.
58. *Colistete R., Fabris J. C., Goncalvez S. V., de Souza P. E.* Dark Energy, Dark Matter and the Chaplygin Gas. gr-qc/0210079.
59. *Dev A., Jain D., Alcaniz J. S.* Constraints on Chaplygin Quartessence from the CLASS Gravitational Lens Statistics and Supernova Data // *Astron. Astrophys.* 2004. V. 417. P. 847–852.
60. *Le Delliou M., Bertolami O., Gil Pedro F.* Dark Energy – Dark Matter Interaction from the Abell Cluster A586 and Violation of the Equivalence Principle // *AIP Conf. Proc.* 2007. V. 957. P. 421–424.
61. *Destri C., de Vega H. J., Sanchez N. G.* CMB Quadrupole Depression Produced by Early Fast-Roll Inflation: Monte Carlo Markov Chains Analysis of WMAP and SDSS Data // *Phys. Rev. D.* 2008. V. 78. P. 023013.
62. *Dirac P. A. M.* The Quantum Theory of Electron // *Proc. Roy. Soc. A.* 1928. V. 117 P. 610–624.
63. *Einstein A.* Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie // *Sitzungsber. Preuss. Acad. Wiss.* 1917. V. 1. P. 142–152.
64. *Einstein A.* Spielen die Gravitationsfelder im Aufbau der materiellen Elementarteilchen eine wesentliche Rolle? // *Sitzungsber. Preuss. Acad. Wiss.* 1919. V. 1. P. 349–356.
65. *Fabbri L.* A Discussion on Dirac Field Theory, No-Go Theorems and Renormalizability // *Intern. J. Theor. Phys.* 2013. V. 52. P. 634–643.
66. *Fabbri L.* Zero Energy of Plane-Waves for ELKOs // *Gen. Rel. Grav.* 2011. V. 43. P. 1607–1613.
67. *Fabbri L.* Conformal Gravity with the Most General ELKO Matter // *Phys. Rev. D.* 2012. V. 85. P. 047502.
68. *Fabris J. C., Goncalvez S. V., de Souza P. E.* Density Perturbations in an Universe Dominated by the Chaplygin Gas // *Gen. Rel. Grav.* 2002. V. 34. P. 53–63.
69. *Fabris J. C., Goncalvez S. V., de Souza P. E.* Mass Power Spectrum in a Universe Dominated by the Chaplygin Gas // *Ibid.* P. 2111–2126.
70. *Felder G., Frolov A., Kofman L., Linde A.* Cosmology with Negative Potentials // *Phys. Rev. D.* 2002. V. 66. P. 023507.
71. *Feng B., Wang X., Zhang X.* Dark Energy Constraints from the Cosmic Age and Supernova // *Phys. Lett. B.* 2005. V. 607. P. 35–41.
72. *Feng B., Zhang X.* Double Inflation and the Low CMB Quadrupole // *Phys. Lett. B.* 2003. V. 570. P. 145–150.

73. *Fierz M.* Zur Fermischen Theorie des β -Zerfalls // *Z. Phys. A: Hadrons and Nuclei.* 1937. V. 104. P. 553–565.
74. *Finkelstein R., LeLevier R., Ruderman M.* Nonlinear Spinor Fields // *Phys. Rev.* 1951. V. 83. P. 326–332.
75. *Finkelstein R., Fronsdal C., Kaus P.* Nonlinear Spinor Fields // *Phys. Rev.* 1956. V. 103. P. 1571–1579.
76. *Fock V.* Geometrization of Dirac Theory of Electrons // *Z. Phys.* 1929. V. 57. P. 261–277.
77. *Fock V., Iwanenko D.* Quantum Linear Geometry and Parallel Transfer // *Comp. Rend. Acad.* 1929. V. 188. P. 1470–1472.
78. *Fock V., Ivanenko D.* On a Possible Geometric Interpretation of Relativistic Quantum Theory // *Z. Phys.* 1929. V. 54. P. 798–802.
79. *Friedmann A. A.* Über die Krümmung des Raumes // *Z. Phys.* 1922. V. 10. P. 377–386.
80. *Friedmann A. A.* Über die Möglichkeit einer Welt mit konstanter negativer Krümmung des Raumes // *Z. Phys.* 1924. V. 21. P. 326–332.
81. *Gibbons G. W.* Pulse Propagation in Born–Infeld Theory, the World Volume Equivalence Principle and the Hagedorn-Like Equation of State of the Chaplygin Gas // *Grav. Cosmol.* 2002. V. 8. P. 2–6.
82. *Gonzalez T., Quiros I.* Exact Models with Non-Minimal Interaction between Dark Matter and (Either Phantom or Quintessence) Dark Energy. arXiv:gr-qc/0707.2089v1.
83. *Gordon C., Hu W.* Low CMB Quadrupole from Dark Energy Isocurvature Perturbations // *Phys. Rev. D.* 2004. V. 70. P. 083003.
84. *Gorini V., Kamenshchik A., Moschella U.* Can the Chaplygin Gas Be a Plausible Model for Dark Energy? // *Phys. Rev. D.* 2003. V. 67. P. 063509.
85. *Gorini V., Kamenshchik A., Moschella U., Pasquier V.* The Chaplygin Gas as a Model for Dark Energy. gr-qc/0403062.
86. *Gross D. J., Neveu A.* Dynamical Symmetry Breaking in Asymptotically Free Field Theories // *Phys. Rev. D.* 1974. V. 10, No. 10. P. 3235–3253.
87. *Gruppuso A.* Complete Statistical Analysis for the Quadrupole Amplitude in an Ellipsoidal Universe // *Phys. Rev. D.* 2007. V. 76. P. 083010.
88. *Guth A.* Inflationary Universe: A Possible Solution to the Horizon and Flatness Problems // *Phys. Rev. D.* 1981. V. 23. P. 347–356.
89. *Hassaine M., Horvathy P. A.* Chaplygin Gas with Field-Dependent Poincare Symmetry // *Lett. Math. Phys.* 2001. V. 57. P. 33–40.
90. *Hassaine M.* Supersymmetric Chaplygin Gas // *Phys. Lett. A.* 2001. V. 290. P. 157–164.
91. *Hehl F. W., von der Heyde P., Kerlick G. D.* General Relativity with Spin and Torsion: Foundations and Prospects // *Rev. Mod. Phys.* 1976. V. 43, No. 3. P. 393–416.

92. *Heisenberg W.* Doubts and Hopes in Quantum Electrodynamics // *Physica*. 1953. V. 19. P. 897–908.
93. *Heisenberg W.* Quantum Theory of Fields and Elementary Particles // *Rev. Mod. Phys.* 1957. V. 29, No. 3. P. 269–278.
94. *Henneaux M.* Bianchi Type-I Cosmologies and Spinor Fields // *Phys. Rev. D*. 1980. V. 21, No. 4. P. 857–863.
95. *Hinsaw G. et al.* First Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Angular Power Spectrum // *Astrophys. J. Suppl.* 2003. V. 148. P. 135.
96. *Hinshaw G. et al.* Five-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Data Processing, Sky Maps, and Basic Results // *Astrophys. J. Suppl. Ser.* 2009. V. 180. P. 225–245.
97. *Hu B.L., Parker L.* Anisotropy Damping through Quantum Effects in the Early Universe // *Phys. Rev. D*. 1978. V. 17. P. 933–945.
98. *Hubble E.* A Relation between Distance and Radial Velocity among Extra-Galactic Nebulae // *Proc. Nat. Acad. Sci.* 1929. V. 15. P. 168–173.
99. *Huterer D., Turner M.S.* Probing Dark Energy: Methods and Strategies // *Phys. Rev. D*. 2001. V. 64. 123527.
100. *Ibáñez J., van der Hoogen R.J., Coley A.A.* Isotropization of Scalar Field Bianchi Models with an Exponential Potential // *Phys. Rev. D*. 1995. V. 51. P. 928–930.
101. *Iwanenko D.D.* Comment on the Theory of Interaction through the Particles // *Sov. J. Exp. Theor. Phys.* 1938. V. 8. P. 260–266.
102. *Iwanenko D.D.* An Introduction to the Theory of Elementary Particles // *Sov. Phys. Usp.* 1947. V. 32, No. 2. P. 149–184.
103. *Iwanenko D.D.* An Introduction to the Theory of Elementary Particles // *Ibid.* P. 261–315.
104. *Jackiw R.* A Particle Field Theorist's Lectures on Supersymmetric, Non-Abelian Fluid Mechanics and d-Branes. physics/0010042.
105. *Jacobs K.C.* Spatially Homogeneous and Euclidean Cosmological Models with Shear // *Astrophys. J.* 1968. V. 153, No. 2. P. 661–678.
106. *Kamenshchik A. Yu., Moschella U., Pasquier V.* An Alternative to Quintessence // *Phys. Lett. B*. 2001. V. 511, No. 2–4. P. 265–268.
107. *Kantowski R., Sachs R.K.* Some Spatially Homogeneous Anisotropic Relativistic Cosmological Models // *J. Math. Phys.* 1966. V. 7. P. 443–446.
108. *Kawasaki M., Takahashi F.* Inflation Model with Lower Multipoles of the CMB Suppressed // *Phys. Lett. B*. 2003. V. 570. P. 151–153.
109. *Kibble T.W.B.* Lorentz Invariance and the Gravitational Field // *J. Math. Phys.* 1961. V. 2. P. 212–221.
110. *Knop R.K. et al.* New Constraints on Ω_M , Ω_Λ , and w from an Independent Set of Eleven High-Redshift Supernovae Observed with HST // *Astrophys. J.* 2003. V. 598. P. 102.

111. *Koivisto T., Mota D. F.* Anisotropic Dark Energy: Dynamics of the Background and Perturbations // *J. Cosmol. Astropart. Phys.* 2008. V. 06. P. 018.
112. *Komatsu E. et al.* Five-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Cosmological Interpretation // *Astrophys. J. Suppl. Ser.* 2009. V. 180. P. 330–376.
113. *Krechet V. G., Fil'chenkov M. L., Shikin G. N.* Equivalence between the Descriptions of Cosmological Models Using a Spinor Field and a Perfect Fluid // *Grav. Cosm.* 2008. V. 14, No. 3(55). P. 292–294.
114. *Krechet V. G., Ponomarev V. N.* On the Analogy between Neutrino and Nonlinear Spinor Fields // *Phys. Lett. A.* 1976. V. 56. P. 14.
115. *Kremer G. M.* Cosmological Models Described by a Mixture of van der Waals Fluid and Dark Energy // *Phys. Rev. D.* 2003. V. 68. P. 123507.
116. *Kremer G. M.* Irreversible Processes in a Universe Modelled as a Mixture of a Chaplygin Gas and Radiation // *Gen. Rel. Grav.* 2003. V. 35. P. 1459–1466.
117. *Kremer G. M., de Souza R. C.* Cosmological Models with Spinor and Scalar Fields by Noether Symmetry Approach. arXiv:1301.5163v1 [gr-qc]. 2013.
118. *Kristian J., Sachs R. K.* Observations in Cosmology // *Apstrophys. J.* 1966. V. 143. P. 379–399.
119. *Kumar S., Yadav A. K.* Some Bianchi Type-V Models of Accelerating Universe with Dark Energy // *Mod. Phys. Lett. A.* 2011. V. 26. P. 647.
120. *Lee J., Lee T. H., Oh P.* Conformally Coupled Dark Spinor and FRW Universe // *Phys. Rev. D.* 2012. V. 86. P. 107301.
121. *Lemaitre G. H.* l'Univers en Expansion // *Ann. Soc. Sci. Brux. A.* 1933. V. 53. P. 51–85.
122. *Levitskii B. A., Yappa Yu. A.* Structure of the Energy-Momentum Tensor and the Spin Tensor in a Covariant Theory of a Spinor Field // *Theor. Math. Phys.* 1982. V. 53. P. 250–259.
123. *Linder E. V.* Exploring the Expansion History of the Universe // *Phys. Rev. Lett.* 2003. V. 90. P. 91301.
124. *Linder E. V.* On Oscillating Dark Energy // *Astropart. Phys.* 2006. V. 25, No. 2. P. 167–171.
125. *Linder E. V.* The Dynamics of Quintessence, the Quintessence of Dynamics // *Gen. Rel. Grav.* 2008. V. 40. P. 329–356.
126. *Lord E. A.* *Tensors, Relativity and Cosmology.* New Delhi: McGraw-Hill, 1976.
127. *Mathieu P., Morris T. F.* Instability of Stationary States for Nonlinear Spinor Models with Quartic Self-Interaction // *Phys. Lett. B.* 1983. V. 126. P. 74–76.
128. *Mathieu P., Saly R.* Baglike Solutions of a Dirac Equations with Fractional Nonlinearity // *Phys. Rev. D.* 1984. V. 29. P. 2879–2883.

129. *Mertens F. G., Cooper F., Quintero N. R., Shao S., Khare A., Saxena A.* Solitary Waves in the Nonlinear Dirac Equation in the Presence of External Driving Force // *J. Phys. A: Math. Theor.* 2016. V. 49. P. 065402-24.
130. *Misner C. W.* The Isotropy of the Universe // *Astrophys. J.* 1968. V. 151. P. 431–457.
131. *Mitskevich N. V., Efremov A. P., Nesterov A. I.* Field Dynamics in General Theory of Relativity. M.: Energoizdat, 1985. 185 p.
132. *Morio T., Takahashi T.* Correlated Isocurvature Fluctuation in Quintessence and Suppressed Cosmic Microwave Background Anisotropies at Low Multipoles // *Phys. Rev. Lett.* 2004. V. 92. P. 091301.
133. *Multamaki T., Manera M., Gaztanaga E.* Large Scale Structure and the Generalized Chaplygin Gas as Dark Energy // *Phys. Rev. D.* 2004. V. 69. P. 023004.
134. *Nieves J. F., Pal P. B.* Generalized Fierz Identities // *Am. J. Phys.* 2004. V. 72. P. 1100–1108.
135. *Nogami Y., Toyama F. M.* Transparent Potential for the One-Dimensional Dirac Equation // *Phys. Rev. A.* 1992. V. 45. P. 5258–5261.
136. *Nojiri S., Odintsov S. D.* The Oscillating Dark Energy: Future Singularity and Coincidence Problem // *Phys. Lett. B.* 2006. V. 637, No. 3. P. 139–148.
137. *Ochs U., Sorg M.* Fermions and Expanding Universe // *Intern. J. Theor. Phys.* 1993. V. 32. P. 1531–1547.
138. *Ogawa N.* A Note on Classical Solution of Chaplygin Gas as D-Brane // *Phys. Rev. D.* 2000. V. 62. P. 085023.
139. *Olivares G., Atrio-Barandela F., Pavon D.* Observational Constraints on Interacting Quintessence Models // *Phys. Rev. D.* 2005. V. 71. P. 063523.
140. *Padmanabhan T.* Cosmological Constant — the Weight of the Vacuum // *Phys. Rep.* 2003. V. 380, No. 5–6. P. 235–320.
141. *Parker L.* Quantized Fields and Particle Creation in Expanding Universes. I // *Phys. Rev.* 1969. V. 183, No. 5. P. 1057–1068.
142. *Parker L.* Quantized Fields and Particle Creation in Expanding Universes. II // *Phys. Rev. D.* 1971. V. 3, No. 2. P. 346–356.
143. *Pauli W.* Über die Formulierung der Naturgesetze mit fünf homogenen Koordinaten // *Ann. Phys.* 1933. V. 5. P. 337–373.
144. *Perlmutter S. et al.* Discovery of a Supernova Exploision at Half the Age of the Universe // *Nature.* 1998. V. 391. P. 51–54.
145. *Perlmutter S., Aldering G., Goldhaber G., Knop R. A., Nugent P., Castro P. G., Deustua S., Fabbro S., Goobar A., Groom D. E., Hook I. M., Kim A. G., Kim M. Y., Lee J. C., Nunes N. J., Pain R., Pennypacker C. R., Quimby R., Lidman C., Ellis R. S., Irwin M., McMahon R. G., Ruiz-Lapuente P., Walton N., Schaefer B., Boyle B. J., Filippenko A. V., Matheson T., Fruchter A. S., Panagia N., Newberg H. J. M., Couch W. J.* The Supernova Cosmology Project Measurements of Ω and Λ from 42 High-Redshift Supernovae // *Astrophys. J.* 1999. V. 517. P. 565–586.

146. *Piao Y. S.* Possible Explanation to a Low CMB Quadrupole // *Phys. Rev. D.* 2005. V. 71. P. 087301.
147. *Poplawski N. J.* Nonsingular Dirac Particles in Spacetime with Torsion // *Phys. Lett. B.* 2010. V. 690. P. 73–77.
148. *Poplawski N. J.* Nonsingular, Big-Bounce Cosmology from Spinor-Torsion Coupling // *Phys. Rev. D.* 2012. V. 85. P. 107502.
149. *Poplawski N. J.* Big Bounce from Spin and Torsion // *Gen. Rel. Grav.* 2012. V. 44. P. 1007.
150. *Poplawski N. J.* Covariant Differentiation of Spinors for a General Affine Connection. arXiv:0710.3982 [gr-qc]. 2007. P. 8.
151. *Pradhan A., Amirhashchi H., Saha B.* Bianchi Type-I Anisotropic Dark Energy Model with Constant Deceleration Parameter // *Intern. J. Theor. Phys.* 2011. V. 50. P. 2923–2938.
152. *Pradhan A., Amirhashchi H., Saha B.* An Interacting and Non-Interacting Two-Fluid Scenario for Dark Energy in FRW Universe with Constant Deceleration Parameter // *Astrophys. Space Sci.* 2011. V. 333. P. 343–350.
153. *Pradhan A., Amirhashchi H., Zainuddin H.* Exact Solution of Perfect Fluid Massive String Cosmology in Bianchi Type III Space-Time with Decaying Vacuum Energy Density? // *Astrophys. Space Sci.* 2011. V. 331. P. 679–687.
154. *Pradhan A., Lata S., Amirhashchi H.* Massive String Cosmology in Bianchi Type III Space-Time with Electromagnetic Field // *Commun. Theor. Phys.* 2010. V. 54. P. 950.
155. *Pradhan A., Saha B.* Accelerating Dark Energy Models of the Universe in Anisotropic Bianchi Type Space-Times and Recent Observations // *Phys. Part. Nucl.* 2015. V. 46, No. 3. P. 310–346; DOI:10.1134/S1063779615030028.
156. *Rakic A., Schwarz J. D.* Correlating Anomalies of the Microwave Sky // *Phys. Rev. D.* 2007. V. 75. P. 103002.
157. *Ranada A. F.* Classical Nonlinear Dirac Field Models of Extended Particles // *Quantum Theory, Groups, Fields and Particles* / Ed. A. O. Barut. Reidel, 1983. P. 271–291.
158. *Ranada A. F., Ranada M. F.* Nonlinear Model of c -Number Confined Dirac Quarks // *Phys. Rev. D.* 1984. V. 29. P. 985–993.
159. *Ranada A. F., Soler M.* Elementary Spinorial Excitations in a Model Universe // *J. Math. Phys.* 1972. V. 13, No. 5. P. 671–675.
160. *Ribas M. O., Devecchi F. P., Kremer G. M.* Fermions as Sources of Accelerated Regimes in Cosmology // *Phys. Rev. D.* 2005. V. 72. P. 123502.
161. *Ribas M. O., Devecchi F. P., Kremer G. M.* Cosmological Model with Fermion and Tachyon Fields Interacting via Yukawa-Type Potential // *Mod. Phys. Lett. A.* 2016. V. 31. P. 1650039.
162. *Riess A. G., Filippenko A. V., Challis P., Clocchiattia A., Diercks A., Garnavich P. M., Gilliland R. L., Hogan C. J., Jha S., Kirshner R. P., Leibundgut B., Phillips M. M.,*

- Reiss D., Schmidt B. P., Schommer R. A., Smith R. Ch., Spyromilio J., Stubbs C., Suntzeff N. B., Tonry J.* Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant // *Astron. J.* 1998. V. 116. P. 1009–1038.
163. *Riess A. G. et al.* Type Ia Supernova Discoveries at $z > 1$ from the Hubble Space Telescope: Evidence for Past Deceleration and Constraints on Dark Energy Evolution // *Astrophys. J.* 2004. V. 607. P. 665–687.
164. *Robertson H. P.* Kinematics and World-Structure // *Astrophys. J.* 1935. V. 82. P. 284.
165. *Robertson H. P.* Kinematics and World-Structure. II // *Astrophys. J.* 1936. V. 83. P. 187.
166. *Robertson H. P.* Kinematics and World-Structure. III // *Ibid.* P. 257.
167. *Rodichev V. I.* Twisted Space and Nonlinear Field Equations // *Sov. J. Exp. Theor. Phys.* 1961. V. 13. P. 1029–1031.
168. *Rubano C., Scudellaro P., Piedipalumbo E.* Oscillating Dark Energy: A Possible Solution to the Problem of Eternal Acceleration // *Phys. Rev. D.* 2003. V. 68. P. 123501.
169. *Rybakov Yu. P., Saha B., Shikin G. N.* Exact Self-Consistent Solutions to Nonlinear Spinor Field Equations in Bianchi Type-I Space-Time // *Commun. Theor. Phys.* 1994. V. 3. P. 199–210.
170. *Rybakov Yu. P., Saha B., Shikin G. N.* Nonlinear Spinor Fields in Bianchi-I-Type Space: Exact Self-Consistent Solutions // *Russ. Phys. J.* 1994. V. 37. No. 7. P. 630–635; DOI:10.1007/BF00559194.
171. *Rybakov Yu. P.* Structure of Topological Solitons in Nonlinear Spinor Model // *Phys. Part. Nucl. Lett.* 2015. V. 12. P. 420–422.
172. *Saha B.* Multidimensional Solitons in Nonlinear Models with Gravitation. Ph.D. Thesis. M.: Russ. Peoples' Friendship Univ., 1993. P. 85.
173. *Saha B., Shikin G. N.* Interacting Spinor and Scalar Fields in Bianchi Type-I Universe Filled with Perfect Fluid: Exact Self-Consistent Solutions // *Gen. Rel. Grav.* 1997. V. 29, No. 9. P. 1099–1112.
174. *Saha B., Shikin G. N.* Nonlinear Spinor Field in Bianchi Type-I Universe Filled with Perfect Fluid: Exact Self-Consistent Solutions // *J. Math. Phys.* 1997. V. 38, No. 10. P. 5305–5318.
175. *Saha B., Shikin G. N.* On the Role of Λ -Term in the Evolution of Bianchi-I Cosmological Model with Nonlinear Spinor Field // *PFU Rep.: Phys.* 2000. No. 8. P. 17–20.
176. *Saha B.* Dirac Spinor in Bianchi-I Universe with Time-Dependent Gravitational and Cosmological Constants // *Mod. Phys. Lett. A.* 2001. V. 16, No. 20. P. 1287–1296.
177. *Saha B.* Spinor Field in Bianchi Type-I Universe: Regular Solutions // *Phys. Rev. D.* 2001. V. 64. P. 123501.
178. *Saha B., Shikin G. N.* Nonlinear Spinor Field: Plane-Symmetric Solutions // *J. Theor., Math. Comp. Phys.* 2002. V. 5, No. 1. P. 54–71.
179. *Saha B.* Nonlinear Spinor Field in Cosmology // *Phys. Rev. D.* 2004. V. 69. P. 124006.

180. *Saha B., Boyadjiev T.* Bianchi Type-I Cosmology with Scalar and Spinor Fields // *Phys. Rev. D.* 2004. V. 69. P. 124010.
181. *Saha B., Shikin G. N.* Plane-Symmetric Solitons of Spinor and Scalar Fields // *Czechoslov. J. Phys.* 2004. V. 54, No. 6. P. 597–620.
182. *Saha B., Shikin G. N.* Static Plane-Symmetric Nonlinear Spinor and Scalar Fields in GR // *Intern. J. Theor. Phys.* 2005. V. 44, No. 9. P. 1459–1494.
183. *Saha B.* Bianchi Type Universe with Viscous Fluid // *Mod. Phys. Lett. A.* 2005. V. 20, No. 28. P. 2127–2143.
184. *Saha B.* Nonlinear Spinor Field in Bianchi Type-I Universe Filled with Viscous Fluid: Some Special Solutions // *Rom. Rep. Phys.* 2005. V. 57, No. 1. P. 7–24.
185. *Saha B.* Anisotropic Cosmological Models with Perfect Fluid and Dark Energy // *Chin. J. Phys.* 2005. V. 43, No. 6. P. 1035–1043.
186. *Saha B.* Spinor Fields in Bianchi Type-I Universe // *Phys. Part. Nucl.* 2006. V. 37, Suppl. 1. P. S13–S44.
187. *Saha B.* Anisotropic Cosmological Models with a Perfect Fluid and a Λ Term // *Astrophys. Space Sci.* 2006. V. 302. P. 83–91.
188. *Saha B.* Anisotropic Cosmological Models with Perfect Fluid and Dark Energy Re-examined // *Intern. J. Theor. Phys.* 2006. V. 45, No. 5. P. 983–995.
189. *Saha B.* Spinor Field and Accelerated Regimes in Cosmology // *Grav. Cosmol.* 2006. V. 12, No. 2–3(46–47). P. 215–218.
190. *Saha B.* Nonlinear Spinor Field in Bianchi Type-I Cosmology: Inflation, Isotropization, and Late Time Acceleration // *Phys. Rev. D.* 2006. V. 74. P. 124030.
191. *Saha B., Rikhvitsky V.* Bianchi Type-I Universe with Viscous Fluid and a Λ Term: A Qualitative Analysis // *Physica D.* 2006. V. 219. P. 168–176.
192. *Saha B.* Nonlinear Spinor Field in Bianchi Type-I Cosmology: Accelerated Regimes // *Rom. Rep. Phys.* 2007. V. 59, No. 2. P. 649–660.
193. *Saha B.* Nonlinear Spinor Field in Bianchi Type-I Universe Filled with Viscous Fluid: Numerical Solutions // *Astrophys. Space Sci.* 2007. V. 312. P. 3–11.
194. *Saha B., Rikhvitsky V.* Anisotropic Cosmological Models with Spinor Field and Viscous Fluid in Presence of a Λ Term: Qualitative Solutions // *J. Phys. A: Math. Theor.* 2007. V. 40. P. 14011–14027.
195. *Saha B., Rikhvitsky V.* Anisotropic Cosmological Models with Spinor and Scalar Fields and Viscous Fluid in Presence of a Λ Term: Qualitative Solutions // *J. Math. Phys.* 2008. V. 49. P. 112502.
196. *Saha B., Rikhvitsky V. S.* Nonlinear Spinor Fields in Anisotropic Universe Filled with Viscous Fluid: Exact Solutions and Qualitative Analysis // *Phys. Part. Nucl.* 2009. V. 40. P. 612–655.
197. *Saha B.* Interacting Spinor and Scalar Fields in Bianchi Type-I Universe Filled with Viscous Fluid: Exact and Numerical Solutions // *Grav. Cosmol.* 2009. V. 25, No. 4. P. 353–361.

198. *Saha B.* Early Inflation, Isotropization and Late-Time Acceleration of a Bianchi Type-I Universe // *Phys. Part. Nucl.* 2009. V. 40. P. 656–673.
199. *Saha B.* Spinor Field with Induced Nonlinearity in Bianchi VI Cosmology: Exact and Numerical Solutions // *Grav. Cosmol.* 2010. V. 16 No. 2. P. 160–167.
200. *Saha B.* Spinor Model of a Perfect Fluid // *Central Eur. J. Phys.* 2010. V. 8. P. 920–923.
201. *Saha B.* Spinor Model of a Perfect Fluid: Examples // *Rom. Rep. Phys.* 2010. V. 62. P. 209–216.
202. *Saha B., Visinescu M.* Bianchi Type-VI Model with Cosmic Strings in the Presence of a Magnetic Field // *Rom. J. Phys.* 2010. V. 55. P. 1064–1074.
203. *Saha B.* Spinor Field in the Evolution of the Universe: Spinor Field as the Source of Isotropization and Accelerated Expansion of the Universe. LAP LAMBERT Acad. Publ., 2011. Project No. 581. P. 260.
204. *Saha B.* Spinor Model of a Perfect Fluid and Their Applications in Bianchi Type-I and FRW Models // *Astrophys. Space Sci.* 2011. V. 331. P. 243–255.
205. *Saha B.* Bianchi Type-II Cosmological Model: Some Remarks // *Central Eur. J. Phys.* 2011. V. 9. P. 939–941; DOI:10.2474/s11534-011-0017-4.
206. *Saha B.* Nonlinear Spinor Fields and Its Role in Cosmology // *Intern. J. Theor. Phys.* 2012. V. 51. P. 1812–1837.
207. *Saha B.* Some Problems of Modern Cosmology and Spinor Field // *Bull. PFUR. Ser.: Math., Inform. Sci., Phys.* 2012. No. 4. P. 170–180.
208. *Saha B., Amirhashchi H., Pradhan A.* Two-Fluid Scenario for Dark Energy Models in an FRW Universe-Revisited // *Astrophys. Space Sci.* 2012. V. 342. P. 257–267.
209. *Saha B.* Bianchi Type-V Dark Energy Model with Varying EoS Parameter // *Intern. J. Theor. Phys.* 2013. V. 52. P. 1314–1325.
210. *Saha B.* Bianchi Type-VI Anisotropic Dark Energy Model with Varying EoS Parameter // *Intern. J. Theor. Phys.* 2013. V. 52. P. 3646–3657; DOI:10.1007/s10773-013-1670-8.
211. *Saha B.* Nonlinear Spinor Fields in Bianchi Type-I Spacetime Reexamined. arXiv:1302.1354 [gr-qc]. 2013.
212. *Saha B.* Nonlinear Spinor Fields in Bianchi Type-I Spacetime Reexamined // *Intern. J. Theor. Phys.* 2014. V. 53. P. 1109–1129; DOI:710.1007/s10773-013-1906-7.
213. *Saha B.* Isotropic and Anisotropic Dark Energy Models // *Phys. Part. Nucl.* 2014. V. 45, Iss. 2. P. 349–396; DOI:10.1134/S1063779614020026.
214. *Saha B.* Nonlinear Spinor Fields in Bianchi Type-I Spacetime: Problems and Possibilities // *Astrophys. Space Sci.* 2015. V. 357. P. 28; DOI:10.1007/s10509-015-2291-x.
215. *Saha B.* Nonlinear Spinor Fields in Bianchi Type-VI₀ Space-Time // *Eur. Phys. J. Plus.* 2015. V. 130. P. 208-13; DOI:10.1140/epjp/i2015-15208-0.
216. *Saha B.* Spinor Field with Polynomial Nonlinearity in LRS Bianchi Type-I Space-Time // *Can. J. Phys.* 2015. V. 93. P. 1–6; DOI:10.1139/cjp-2015-0574.

217. *Saha B.* Nonlinear Spinor Fields in Bianchi Type-V Space-Time // *Chin. J. Phys.* 2015. V. 53. P. 110114-14; DOI:10.6122/CJP.20150713.
218. *Saha B.* Nonlinear Spinor Fields in Bianchi Type-III Space-Time // *Intern. J. Theor. Phys.* 2016. V. 55. P. 2259–2274; DOI:10.1007/s10773-015-2864-z.
219. *Saha B.* Nonlinear Spinor Fields in Bianchi Type-VI Space-Time // *Eur. Phys. J. Plus.* 2016. V. 131. P. 170–18; DOI:10.1140/epjp/i2016-16170-y.
220. *Saha B.* Nonlinear Spinor Field in Isotropic Space-Time and Dark Energy Models // *Eur. Phys. J. Plus.* 2016. V. 131. P. 242-17; DOI:10.1140/epjp/i2016-16242-0.
221. *Sahni V.* Dark Matter and Dark Energy // *Lect. Notes Phys.* 2004. V. 653. P. 141–180.
222. *Sahni V., Starobinsky A.A.* The Case for a Positive Cosmological Λ Term // *Intern. J. Mod. Phys. D.* 2000. V. 9, No. 4. P. 373–443.
223. *Sandvik H., Tegmark M., Zaldarriaga M., Waga I.* The End of Unified Dark Matter? astro-ph/0212114.
224. *Schrödinger E.* Diracsches Elektron im Schwerefeld I // *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss., Phys.-Math. Kl.* 1932. P. 105–128.
225. *Sciama D.W.* *Festschrift for Infeld.* Oxford: Pergamon Press, 1960. P. 415.
226. *Shikin G.N.* Nonlinear Spinor Field in External Cosmological Gravitational Field and the Problem of Elimination of Initial Singularity. Preprint of IPBRAE Acad. Sci. USSR. M., 1991. 21 p.
227. *Smoot G.F. et al.* Structure in the COBE Differential Microwave Radiometer First-Year Maps // *Astrophys. J.* 1992. V. 396. P.L1–L5.
228. *Socorro J., Medina E.R.* Supersymmetric Quantum Mechanics for Bianchi Class A Models // *Phys. Rev. D.* 2000. V. 61. P. 087702.
229. *Soler M.* Classical, Stable, Nonlinear Spinor Field with Positive Rest Energy // *Phys. Rev. D.* 1970. V. 1, No. 10. P. 2766–2769.
230. *de Souza R.C., Kremer G.M.* Noether Symmetry for Non-Minimally Coupled Fermion Fields // *Class. Quant. Grav.* 2008. V. 25. P. 225006.
231. *Steinhardt P.J., Turok N.* Cosmic Evolution in a Cyclic Universe // *Phys. Rev. D.* 2002. V. 65. 126003.
232. *Stubbe J.* Exact Localized Solutions of a Family of Two-Dimensional Nonlinear Spinor Fields // *J. Math. Phys.* 1986. V. 27. P. 2561–2567.
233. *Szydłowski M., Cza W.* Stability of FRW Cosmology with Generalized Chaplygin Gas // *Phys. Rev. D.* 2004. V. 69. P. 023506.
234. *Takahashi Y.* The Fierz Identities — a Passage between Spinors and Tensors // *J. Math. Phys.* 1983. V. 24. P. 1783–1790.
235. *Tegmark M. et al.* Cosmological Parameters from SDSS and WMAP // *Phys. Rev. D.* 2004. V. 69. P. 103501.
236. *Thirring W.E.* A Soluble Relativistic Field Theory // *Ann. Phys. (N.Y.).* 1958. V. 3. P. 91–112.

237. *Thorne K. S.* Primordial Element Formation, Primordial Magnetic Fields, and the Isotropy of the Universe // *Astrophys. J.* 1967. V. 148, No. 1. P. 51–68.
238. *Utiyama R.* Invariant Theoretical Interpretation of Interaction // *Phys. Rev.* 1956. V. 101, No. 5. P. 1597–1607.
239. *Vakili B., Sepangi H. R.* Time Reparameterization in Bianchi Type-I Spinor Cosmology // *Ann. Phys.* 2008. V. 323. P. 548–565.
240. *Vignolo S., Fabbri L., Cianci R.* Dirac Spinors in Bianchi-I $f(R)$ -Cosmology with Torsion // *J. Math. Phys.* 2011. V. 52. P. 112502.
241. *Walker A. G.* On Milne's Theory of World-Structure // *Proc. London Math. Soc.* 1937. V. 42. P. 90–127.
242. *Weaver M.* Big-Bang Model without Singularities // *Class. Quant. Grav.* 2000. V. 17. P. 421–434.
243. *Weaver M.* Dynamics of Magnetic Bianchi VI₀ Cosmologies // *Class. Quant. Grav.* 2009. V. 17. P. 421.
244. *Weinberg S.* The Cosmological Constant Problem // *Rev. Mod. Phys.* 1989. V. 61. P. 1–23.
245. *Weinberg S.* *Cosmology.* New York: Oxford Univ. Press, 2008. 593 p.
246. *Weldon A. H.* Fermions without Viewbeins in Curved Space-Time // *Phys. Rev. D.* 2001. V. 63. P. 104010.
247. *Weller J., Albrecht A.* Future Supernovae Observations as a Probe of Dark Energy // *Phys. Rev. D.* 2002. V. 65. P. 103512.
248. *Weyl H.* A Remark on the Coupling of Gravitation and Electron // *Phys. Rev.* 1950. V. 77, No. 5. P. 699–701.
249. *Wilson M. L., Silk J.* On the Anisotropy of the Cosmological Background Radiation and Matter Distribution. I. The Radiation Anisotropy in a Spatially Flat Universe // *Astrophys. J.* 1981. V. 243. P. 14–25.
250. *Yadav A. K., Saha B.* LRS Bianchi-I Anisotropic Cosmological Model with Dominance Dark Energy // *Astrophys. Space Sci.* 2012. V. 337. P. 759–765.
251. *Yadav A. K., Yadav L.* Bianchi Type-III Anisotropic Dark Energy Models with Constant Deceleration Parameter // *Intern. J. Theor. Phys.* 2011. V. 50. P. 218–227.
252. *Yadav A. K.* Some Anisotropic Dark Energy Models in Bianchi Type-V Space-Time // *Astrophys. Space Sci.* 2011. V. 335. P. 565–575.
253. *Yadav M. K., Rai A., Pradhan A.* Some Bianchi Type-III String Cosmological Models with Bulk Viscosity // *Intern. J. Theor. Phys.* 2007. V. 46. P. 2677–2687.
254. *Yadav A. K., Yadav L.* Bianchi Type-III Anisotropic Dark Energy Models with Constant Deceleration Parameter // *Intern. J. Theor. Phys.* 2011. V. 50. P. 218–227.
255. *Ying-Qiu G., Saha B.* The Covariant Derivatives and Energy Momentum Tensor of Spinors. arXiv:0609043 [gr-qc]. 2006.

256. *Zeyauddin M., Saha B.* Bianchi Type-VI Cosmological Model: A Scale-Covariant Study // *Astrophys. Space Sci.* 2013. V. 343. P. 445–450; DOI:10.1007/s10509-012-1228-x.
257. *Zeyauddin M., Saha B.* Bianchi Type-V Bulk Viscous Cosmological Models with Particle Creation in General Relativity // *Eur. Phys. J. Plus.* 2014. V. 129 P. 177-23; DOI:10.1140/epjp/i2014-14177-0.
258. *Zhelnorovich V.A.* Theory of Spinors and Its Application in Physics and Mechanics. M.: Nauka, 1982. 270 p.
259. *Zlatev I., Wang L., Steinhardt P.J.* Quintessence, Cosmic Coincidence, and the Cosmological Constant // *Phys. Rev. Lett.* 1999. V. 82, No. 5. P. 896–899.