*ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА*
*2018. Т. 49. ВЫП. 3. С. 710–775*

# ФУНКТОР ОТРАЖЕНИЯ В ТЕОРИИ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ПРЕПРОЕКТИВНЫХ АЛГЕБР ДЛЯ КОЛЧАНОВ И ИНТЕГРИРУЕМЫЕ СИСТЕМЫ

*А. В. Силантьев* *

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Государственный университет «Дубна», Дубна, Россия



*E-mail: aleksejsilantjev@gmail.com

ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА
2018. Т. 49. ВЫП. 3. С. 710–775

# ФУНКТОР ОТРАЖЕНИЯ В ТЕОРИИ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ПРЕПРОЕКТИВНЫХ АЛГЕБР ДЛЯ КОЛЧАНОВ И ИНТЕГРИРУЕМЫЕ СИСТЕМЫ

*А. В. Силантьев* *

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Государственный университет «Дубна», Дубна, Россия

Дан краткий обзор теории представлений колчанов и связанных с ними (деформированных) препроективных алгебр, а также теорий пространств модулей этих алгебр, колчанных многообразий и функтора отражения. Доказано, что биекция между пространствами модулей (в частности, между колчанными многообразиями), индуцированная функтором отражения, есть изоморфизм симплектических аффинных многообразий. Определены гамильтоновы системы на колчанных многообразиях, и описано применение к ним функтора отражения. Дан обзор работы [1], касающийся случая циклического колчана, и выяснена роль функтора отражения в этом случае. В частности, описаны «спиновые» интегрируемые обобщения систем Калоджеро–Мозера и их применение к обобщениям иерархии КП.

The theory of representations of quivers and their (deformed) preprojective algebras is reviewed. In particular, moduli spaces of representations of these algebras, quiver varieties and reflection functor are described. It is proved that the bijection between moduli spaces (and, in particular, between the quiver varieties) induced by the reflection functor is an isomorphism of symplectic affine varieties. Hamiltonian systems on quiver varieties are defined. Application of the reflection functor to these systems is described. The results of [1] on the case of cyclic quiver are reviewed and a role of the reflection functor in this case is discussed. In particular, "spin" integrable generalisations of the Calogero–Moser systems and their application to the generalised KP hierarchies are described.

PACS: 02.10.Ox

## ВВЕДЕНИЕ

В начале 1970-х гг. стало понятно, что многие задачи линейной алгебры можно сформулировать в терминах представлений колчанов — ориентированных графов. В то время функторы отражений появились для изучения

*E-mail: aleksejsilantjev@gmail.com

представлений колчанов. Они были введены Бернштейном, Гельфандом и Пономаревым в работе [2] на основании идей, изложенных в работе [3]. Эти функторы отражений бывают двух типов: $F_i^+$ и $F_i^-$, где $i$ — вершины рассматриваемого графа. Они переводят представление ориентированного графа в представление того же графа, но с «отраженной» ориентацией.

Связь теории интегрируемых систем с теорией представлений колчанов, исследуемая в данной работе, состоит в том, что (комплексифицированные) фазовые пространства некоторых систем можно пополнять до так называемых колчанных многообразий. Последние определяются как множества классов эквивалентности представлений удвоенных колчанов, удовлетворяющих некоторым условиям. Они были введены Накадзимой для геометрического построения универсальных обертывающих алгебр Каца–Муди и их квантовых версий [4].

Так, можно построить (рациональную) систему Калоджеро–Мозера типа $A_{n-1}$, где $n$ — число частиц. Пополнение (симметризованного) фазового пространства этой системы дает так называемое пространство Калоджеро–Мозера [5], которое можно представить как колчанное многообразие для колчана, состоящего из одной вершины и одной петли (ребра, выходящего и входящего в эту вершину). Гамильтонианы системы Калоджеро–Мозера продолжаются на все пространство Калоджеро–Мозера и определяют на нем гамильтоновы потоки.

Аналогично пополнение систем Калоджеро–Мозера, ассоциированных с обобщенными симметрическими группами $S_n \ltimes (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^n$, изоморфно колчанному многообразию для циклического колчана, состоящего из $m$ вершин и $m$ ребер, ориентированных в одинаковом направлении (например, по часовой стрелке) [6]. Случаи $m = 1$ и $m = 2$ соответствуют системам Калоджеро–Мозера типов $A_{n-1}$ и $B_n$ соответственно.

Колчанные многообразия можно представить как множества классов эквивалентности некоторых представлений (деформированных) препроективных алгебр $\Pi^\lambda(Q)$, которые были введены Кроли-Боуви и Холландом в [7]. Эти алгебры зависят от колчана $Q$ и «параметра деформации» $\lambda$ (в первых работах Накадзимы колчанные многообразия соответствовали $\lambda = 0$).

Теория представлений колчанов неразрывно связана с понятием системы корней $\Delta(Q)$ для колчана $Q$ (точнее, для графа) [8]. Фактически системы корней дают грубую классификацию неразложимых представлений колчанов. В работе [9] Кроли-Боуви классифицировал корни, отвечающие неприводимым представлениям (простым модулям) препроективной алгебры.

Представление алгебры $\Pi^\lambda(Q)$ (т. е. $\Pi^\lambda(Q)$-модуль) дает, в частности, представление колчана $Q$. Каждому конечномерному представлению $Q$, а значит и каждому конечномерному $\Pi^\lambda(Q)$-модулю, отвечает сумма корней, соответствующая разложению представления на неразложимые компоненты. Она называется размерностью представления (модуля). Поскольку системы корней, а следовательно, и множества их сумм дискретны, множество всех конечномерных $\Pi^\lambda(Q)$-модулей разбивается на компоненты связности по размерностям.

Множество классов эквивалентности представлений алгебры $\Pi^\lambda(Q)$ фиксированной размерности (пространство модулей) не всегда является гладким многообразием. Чтобы сделать его хотя бы аффинным многообразием (возможно, приводимым), в пространство модулей стоит включать только полупростые модули. В работе [9] найдены условия, при которых пространства модулей гладки. В этом случае они обладают симплектической структурой, которая получается из конструкции гамильтоновой редукции для пространств модулей. Поэтому пространства модулей являются кандидатами для построения на них гамильтоновых систем, интегрируемых по Лиувиллю. В данной работе рассматриваются гамильтоновы системы на колчанных многообразиях, которые являются частными случаями пространств модулей.

Более точно, колчанное многообразие для колчана $Q$ есть пространство модулей алгебры $\Pi^\lambda(Q_\zeta)$, где $Q_\zeta$ — новый колчан с одной дополнительной вершиной и некоторым числом дополнительных ребер из этой новой вершины в вершины колчана $Q$. Векторный параметр $\zeta$ отвечает за количество и направление этих дополнительных ребер. В частности, колчанные многообразия для систем Калоджеро–Мозера, упомянутые выше, строятся с помощью одного дополнительного ребра.

В работе [7] авторы также ввели функтор отражения для препроективных алгебр. В этом случае он только одного типа, т. е. зависит лишь от $i$ и $\lambda$. Также он переводит представления препроективной алгебры $\Pi^\lambda(Q)$ в представления алгебры $\Pi^{r_i\lambda}(Q)$, где $r_i\lambda$ — «отраженный» параметр.

Функтор отражения определяет изоморфизм пространств модулей, соответствующих разным размерностям. В этой работе приводится доказательство того, что он сохраняет алгебраическую и симплектическую структуры пространств модулей. Применяя его к колчанным многообразиям, мы показываем, что он также связывает определенные на них гамильтоновы системы. Это, в частности, означает, что можно доказывать интегрируемость лишь для некоторых размерностей, а для других размерностей — получать ее с помощью этих изоморфизмов.

Этот метод продемонстрирован на примере циклического колчана. Интегрируемость гамильтоновых систем в некоторых случаях была доказана в работе [1]. Полученные интегрируемые системы можно интерпретировать как некоторые «спиновые» версии систем Калоджеро–Мозера для групп $S_n \rtimes (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^n$. Спиновые переменные возникают из-за того, что в общем случае число дополнительных ребер колчана $Q_\zeta$ больше единицы. Полученные спиновые системы обобщают систему Гиббонса–Хермсена [10].

Колчанное многообразие однопетлевого колчана, т. е. циклического колчана при $m = 1$, для общего $\zeta$ (числа дополнительных ребер в $Q_\zeta$) есть пополнение фазового пространства системы Гиббонса–Хермсена, подобно ситуации с пространством Калоджеро–Мозера. Гамильтонианы Гиббонса–Хермсена есть в точности ограничения гамильтонианов, определенных на колчанных многообразиях, на непополненное фазовое пространство. Аналогично полученные системы, обобщающие системы Гиббонса–Хермсена, можно рассматривать как ограничение гамильтоновых систем на колчанных многообразиях на некоторые всюду плотные подмножества.

Можно обобщить эту конструкцию с помощью теории представлений мультипликативной версии препроективной алгебры для циклического колчана [11]. В этом случае фазовое пространство определяемых систем строится с помощью квазигамильтоновой редукции. Получаемые интегрируемые системы могут быть отождествлены с системами Руджинарса–Шнайдера и их обобщениями.

Гамильтоновы системы на колчанных многообразиях применяются для построения решений некоторых интегрируемых дифференциальных уравнений и их иерархий. Впервые это замечено в работе [12], где были построены решения уравнения Кортевега–де Фриза (КдФ) в виде рациональных функций с полюсами, двигающимися как частицы системы Калоджеро–Мозера. В работах [13, 14] было сделано то же самое для уравнения Кадомцева–Петвиашвили (КП). Позже решения уравнения КП были расширены до решений всей иерархии КП [5]. В этой работе Уилсон доказал (с помощью аделических грассманианов), что рациональные решения иерархии КП взаимно-однозначно соответствуют точкам пространств Калоджеро–Мозера, т. е. колчанных многообразий для однопетлевого колчана. В работе [1] были предложены обобщения иерархии КП и ее матричной версии и построены рациональные решения этих обобщений с помощью циклических колчанов и гамильтоновых потоков на соответствующих колчанных многообразиях.

Структура данной работы состоит из следующих разделов.

В разд. 1 вводятся основные понятия и конструкции. Понятия колчанов и их представлений определены в п. 1.1. Здесь же вводится алгебра путей, а также группы, действующие на пространствах представлений и связывающие своим действием изоморфные представления. П. 1.2 посвящен корням, их отражениям и роли корней в теории представлений колчанов. В п. 1.3 вводится удвоенный колчан и определяется препроективная алгебра как фактор-алгебра алгебры путей удвоенного колчана. Также определяется пространство модулей препроективной алгебры. В п. 1.4 описана общая конструкция гамильтоновой редукции, а также ее применение к построению пространств модулей. Это дает симплектическую структуру на этих пространствах.

Разд. 2 посвящен функтору отражения и его приложению к пространствам модулей. В п. 2.1 определяется функтор отражения: каждому модулю препроективной алгебры ставится в соответствие модуль другой препроективной алгебры (с отраженным параметром). Сопоставляя морфизм модулей первой алгебры и морфизм модулей второй алгебры, мы доказываем функториальность данного сопоставления. Также доказывается, что функтор отражения является эквивалентностью категорий. П. 2.2 посвящен индуцированному изоморфизму пространств модулей: поскольку размерности модулей под действием функтора отражения преобразуются в соответствии с отражениями корней, получается биекция между соответствующими пространствами модулей. Сохранение этой биекцией алгебраической структуры доказывается с помощью следствия теоремы Ле Брюна–Прочези [15]. Для этого выясняется, как меняются образующие регулярных функций на пространствах модулей. В конце пункта доказывается, что построенный изоморфизм пространств модулей также сохраняет их симплектическую структуру.

В разд. 3 рассматриваются колчанные многообразия в общем случае и гамильтоновы системы на этих многообразиях. В п. 3.1 колчанные многообразия определяются как частный случай пространств модулей. Вводятся условия на параметры, гарантирующие гладкость этих многообразий. П. 3.2 посвящен построению некоторых специальных гамильтоновых систем на колчанных многообразиях. Также определяются гамильтонианы системы и вводится семейство интегралов движения, образующее алгебру Ли относительно скобок Пуассона. В этом семействе выделяется подсемейство коммутирующих интегралов движения. В п. 3.3 изоморфизм, индуцированный функтором отражения, применяется к колчанным многообразиям. Показано, что гамильтонианы и алгебры Ли, порожденные гамильтонианами и интегралами движения, переходят друг в друга.

Разд. 4 посвящен гамильтоновым системам на колчанных многообразиях для циклического колчана. В п. 4.1 вводится циклический колчан с $m$ вершинами, находится вид гамильтонианов и их интегралов движения в общем случае. Далее подробно рассматриваются частные случаи с построением координат Дарбу. В п. 4.2 описан случай $m = 1$ с простейшим (в данном случае одномерным) вектором $\zeta$, равным единице. Колчанные многообразия в этом случае есть пространства Калоджеро–Мозера, определенные Уилсоном. Здесь строятся координаты Дарбу, в которых гамильтонианы совпадают с гамильтонианами Калоджеро–Мозера типа $A_{n-1}$. В п. 4.3 эти координаты обобщаются на случай общего вектора $\zeta$ (при $m = 1$). В этом случае получаются гамильтонианы и интегралы движения для системы Гиббонса–Хермсена. В п. 4.4 рассмотрен случай общего $m$ и ($m$-мерного) вектора $\zeta$ с одной ненулевой компонентой. Координаты Дарбу на соответствующих колчанных многообразиях дают системы Калоджеро–Мозера для $S_n \ltimes (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^n$ и их спиновые обобщения типа Гиббонса–Хермсена. Эти координаты (точнее, координаты, дуальные им) также позволяют доказать интегрируемость полученных систем. П. 4.5 посвящен обобщению этих результатов на случай, когда все компоненты вектора $\zeta$ одинаковы. Получаются интегрируемые системы с более сложными «спиновыми» переменными.

В разд. 5 результаты, полученные в предыдущем разделе, применяются к иерархии КП и ее обобщениям. В п. 5.1 описаны иерархия КП в терминах псевдодифференциальных операторов, а также применение пространств Калоджеро–Мозера к получению рациональных решений иерархии КП. Этот случай берется за основу для обобщения на случай циклического колчана с $m$ вершинами. П. 5.2 посвящен обобщению иерархии КП с помощью алгебры Чередника для циклической группы порядка $m$. Расширяя алгебру Чередника, получаем аналог алгебры псевдодифференциальных операторов. Это позволяет определить два обобщения иерархии КП: обобщенную иерархию КП и ее сферическую подыерархию. Их рациональные решения строятся с помощью колчанных многообразий для циклического колчана и соответствующих векторов $\zeta$. В п. 5.3 строятся обобщения матричной иерархии КП в полной аналогии с предыдущим случаем. Рациональные решения строятся так же, но для более общих векторов $\zeta$.

В конце дан список некоторых открытых вопросов по данной теме.

Также составлены два приложения. В приложении А описан метод вычисления скобок Пуассона в матричной форме. Он применяется к выводу некоторых формул. В приложении Б проясняется вопрос о действии функтора отражения на пространствах представлений до факторизации по изоморфности, а также дается альтернативное доказательство того, что функтор отражения сохраняет алгебраическую структуру, без использования теоремы Ле Брюна–Прочези.

## 1. КОЛЧАНЫ, ПРЕПРОЕКТИВНЫЕ АЛГЕБРЫ И ИХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

Введем основные понятия и сформулируем важнейшие утверждения из теории представлений колчанов и их препроективных алгебр. В частности, определим системы корней и опишем их связь с представлениями. Наконец, опишем пространства модулей препроективной алгебры в терминах гамильтоновой редукции.

**1.1. Колчаны, их линейные представления и алгебра путей.** *Колчан* $Q$ — это ориентированный граф. Формально — это четверка $(I, E, t, h)$, состоящая из множеств $I$ и $E$, которые будем всегда предполагать конечными, а также из двух отображений $t\colon E \to I$ и $h\colon E \to I$. Множество $I$ интерпретируется как множество вершин графа, $E$ — как множество его ребер, а значения $t(a)$ и $h(a)$ на ребре $a \in E$ интерпретируются как начало и конец ребра $a$ соответственно. Будем писать $a\colon i \to j$ или $i \xrightarrow{a} j$ в случае, когда $t(a) = i$ и $h(a) = j$, т. е. если $a \in E$ — ребро из вершины $i \in I$ в вершину $j \in I$. Поскольку эта форма записи делает ненужным явное обозначение для отображений $t$ и $h$, то будем писать $Q = (I, E)$, предполагая, что заданы необозначенные отображения для начала и конца каждого ребра. Будем вместо $a \in E$ писать $a \in Q$.

В качестве базового поля зафиксируем поле комплексных чисел $\mathbb{C}$.

*Представлением колчана* $Q = (I, E)$ называется набор векторных пространств $V_i$, $i \in I$, с набором линейных отображений $V_a \colon V_i \to V_j$, заданных для каждого ребра $a \colon i \to j$.

Обозначим за $\mathbb{C}I$ следующую алгебру над $\mathbb{C}$. Это конечномерное векторное пространство $\bigoplus\limits_{i\in I} \mathbb{C}1_i$ с умножением

$$1_i \cdot 1_j = \delta_{ij} 1_i. \tag{1.1}$$

Таким образом, $\mathbb{C}I$ есть коммутативная полупростая алгебра с единицей: $1 = \sum\limits_{i\in I} 1_i$.

Любой $\mathbb{C}I$-модуль $V$ распадается в прямую сумму $V = \bigoplus\limits_{i\in I} V_i$, где $V_i = 1_i V$. На векторах $v = (v_i)_{i\in I} \in V$, $v_i \in V_i$, алгебра $\mathbb{C}I$ действует как $1_j v = (\delta_{ij} v_i)_{i\in I}$. И обратно: любой набор векторных пространств $(V_i)_{i\in I}$ задает представление алгебры $\mathbb{C}I$ на пространстве $V = \bigoplus\limits_{i\in I} V_i$ с описанным выше действием. В частности, представление колчана $Q = (I, E)$ дает представление $\mathbb{C}I$.

Если $V$ конечномерно, то все $V_i$ конечномерны. В этом случае вектор $\alpha = (\alpha_i)_{i\in I} \in \mathbb{Z}^I_{\geqslant 0}$ с компонентами $\alpha_i = \dim_{\mathbb{C}} V_i$ называется *размерностью* $\mathbb{C}I$-модуля $V$ и обозначается $\dim_{\mathbb{C}I} V$, при этом $\dim_{\mathbb{C}} V = |\alpha|$, где $|\alpha| := \sum\limits_{i\in I} \alpha_i$. Существует взаимно-однозначное соответствие между конечномерными $\mathbb{C}I$-модулями (с точностью до изоморфизма) и векторами $\alpha \in \mathbb{Z}^I_{\geqslant 0}$. Вектору $\alpha$ с компонентами $\alpha_i \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ соответствует $\mathbb{C}I$-модуль $V = \bigoplus\limits_{i\in I} V_i$, где $V_i = \mathbb{C}^{\alpha_i}$, он изоморфен любому $\mathbb{C}I$-модулю размерности $\alpha$.

Представление колчана $Q = (I, E)$, которое как $\mathbb{C}I$-модуль имеет размерность $\alpha$, называется представлением колчана $Q$ размерности $\alpha$. Множество всех представлений на $\mathbb{C}I$-модуле $V = \bigoplus\limits_{i\in I} V_i$, где $V_i = \mathbb{C}^{\alpha_i}$, согласованных со структурой $\mathbb{C}I$-модуля, обозначается $\operatorname{Rep}(Q, \alpha)$. Чтобы задать такое представление, нужно взять произвольный набор линейных операторов из $\mathbb{C}^{\alpha_i}$ в $\mathbb{C}^{\alpha_j}$ для каждого ребра $a \colon i \to j$, таким образом, получаем $\operatorname{Rep}(Q, \alpha) = \prod\limits_{a \colon i\to j} \operatorname{Hom}(\mathbb{C}^{\alpha_i}, \mathbb{C}^{\alpha_j})$ (произведение по всем $a \in Q$), где $\operatorname{Hom}(\mathbb{C}^{\alpha_i}, \mathbb{C}^{\alpha_j})$ — пространство линейных операторов из $\mathbb{C}^{\alpha_i}$ в $\mathbb{C}^{\alpha_j}$ (комплексных матриц $\alpha_j \times \alpha_i$). Заметим, что множество $\operatorname{Rep}(Q, \alpha)$ является векторным пространством и, в частности, аффинным многообразием.

Пусть $\mathbb{C}E$ есть конечномерное векторное пространство, свободно порожденное множеством $E$, т. е. $\mathbb{C}E = \bigoplus_{a \in Q} \mathbb{C}a$. На нем имеется естественная структура $\mathbb{C}I$-бимодуля:

$$1_k \cdot a = \delta_{jk} a, \quad a \cdot 1_k = \delta_{ik} a \ \text{ для } \ a \colon i \to j. \tag{1.2}$$

Определим *алгебру путей* для колчана $Q = (I, E)$ как $\mathbb{C}Q = T_{\mathbb{C}I}\mathbb{C}E$, где $T_A M$ есть тензорная алгебра бимодуля $M$ над алгеброй $A$, т. е.

$$\mathbb{C}Q = \bigoplus_{\ell=0}^{\infty} (\mathbb{C}Q)_\ell, \quad (\mathbb{C}Q)_0 = \mathbb{C}I, \quad (\mathbb{C}Q)_1 = \mathbb{C}E,$$
$$(\mathbb{C}Q)_2 = \mathbb{C}E \otimes_{\mathbb{C}I} \mathbb{C}E, \quad (\mathbb{C}Q)_3 = \mathbb{C}E \otimes_{\mathbb{C}I} \mathbb{C}E \otimes_{\mathbb{C}I} \mathbb{C}E, \ \ldots$$

Линейное пространство $(\mathbb{C}Q)_\ell$, где $\ell \geqslant 0$, свободно порождено элементами вида $a_\ell \cdots a_2 a_1 1_{i_0}$, где $a_k \colon i_{k-1} \to i_k$ — ребра, последовательно идущие между вершинами $i_0, i_1, \ldots, i_\ell \in I$. Такие элементы называются *путями* длины $\ell$ из вершины $i_0$ в вершину $i_\ell$. Элементы $1_i$ порождают подалгебру $\mathbb{C}I \subset \mathbb{C}Q$ и называются *тривиальными путями*. Тривиальный путь $1_i$ есть путь длины ноль из $i$ в $i$. Пути длины один — это ребра $a \in Q$. Алгебру $\mathbb{C}Q$ можно определить как алгебру, порожденную генераторами $1_i$ и $a \in Q$ с соотношениями (1.1), (1.2). Также заметим, что из этих соотношений следует

$$ba = 0 \quad \text{при} \ \ a \colon i \to j, \quad b \colon i' \to j', \quad j \neq i'.$$

Если $(V_i, V_a)$ — представление колчана $Q$, то на $V = \bigoplus_{i \in I} V_i$ действуют тривиальные пути $1_i$, как определено выше, и можно также задать действие ребер $a \in Q$ следующим образом: для $a \colon i \to j$ и $v = (v_l)_{l \in I}$ определим $av = V_a v_i$, где $V_a v_i$ понимается как элемент $V$ через вложение $V_j \subset V$. Такое действие согласовано с соотношениями (1.2) и, следовательно, задает структуру $\mathbb{C}Q$-модуля на $V$. И обратно: любой $\mathbb{C}Q$-модуль $V$ является $\mathbb{C}I$-модулем, и ребра $a \colon i \to j$ действуют на $v = (v_l)_{l \in I}$ как $av = V_a v_i$ для некоторых линейных отображений $V_a \colon V_i \to V_j$. Это означает, что представления алгебры путей ($\mathbb{C}Q$-модули) находятся во взаимно-однозначном соответствии с представлениями колчана $Q$. Более того, имеется отождествление $\operatorname{Rep}(\mathbb{C}Q, \alpha) = \operatorname{Rep}(Q, \alpha)$, где $\operatorname{Rep}(\mathbb{C}Q, \alpha)$ — множество представлений (гомоморфизмов $\mathbb{C}$-алгебр) $\rho \colon \mathbb{C}Q \to \operatorname{End} V$ на $V = \bigoplus_{i \in I} V_i$, $V_i = \mathbb{C}^{\alpha_i}$, согласованных со структурой $\mathbb{C}I$-модуля: $\rho(1_i) = 1_i \ \ \forall\, i \in I$. Многообразие всех $n$-мерных представлений $\rho \colon \mathbb{C}Q \to \operatorname{End}(\mathbb{C}^n)$ распадается в несвязное объединение $\operatorname{Rep}(\mathbb{C}Q, n) = \bigsqcup_{|\alpha| = n} \operatorname{Rep}(\mathbb{C}Q, \alpha)$.

Пусть $\mathrm{GL}(\alpha) := \prod\limits_{i\in I} \mathrm{GL}(\alpha_i, \mathbb{C})$. Элементы $g = (g_i)_{i\in I} \in \mathrm{GL}(\alpha)$ действуют на векторах $v = (v_i)_{i\in I} \in V = \bigoplus\limits_{i\in I} V_i$ с помощью действий каждой компоненты $\mathrm{GL}(\alpha_i, \mathbb{C})$ на $V_i = \mathbb{C}^{\alpha_i}$, т. е. $gv = (g_i v_i)_{i\in I}$. Это индуцирует действие $\mathrm{GL}(\alpha)$ на $\mathrm{Rep}(Q, \alpha)$:

$$V_a \mapsto g_j V_a g_i^{-1}, \quad a\colon i \to j. \tag{1.3}$$

Пусть $V = (V_i, V_a)$ и $\widetilde{V} = (\widetilde{V}_i, \widetilde{V}_a)$ — представления колчана $Q$. Их морфизм — это морфизм $\mathbb{C}Q$-модулей $\phi\colon V \to \widetilde{V}$, он имеет вид $\phi = (\phi_i)_{i\in I} := \bigoplus\limits_{i\in I} \phi_i$, где $\phi_i\colon V_i \to \widetilde{V}_i$ — линейные отображения, такие, что $\phi_j V_a = \widetilde{V}_a \phi_i$ для каждого $a\colon i \to j$. Любой элемент $g \in \mathrm{GL}(\alpha)$ переводит представление $V = (V_i, V_a)$ в изоморфное представление: их изоморфизм дается отображениями $\phi_i = g_i\colon \mathbb{C}^{\alpha_i} \to \mathbb{C}^{\alpha_i}$. Более того, представления $V, \widetilde{V} \in \mathrm{Rep}\,(Q, \alpha)$ изоморфны, если и только если $\widetilde{V} = g.V$ для некоторого $g \in \mathrm{GL}(\alpha)$.

Для аффинного многообразия $M$ обозначим через $\mathbb{C}[M]$-алгебру регулярных функций $f\colon M \to \mathbb{C}$. Если на $M$ действует группа $G$, то в этой алгебре имеется подалгебра инвариантных функций

$$\mathbb{C}[M]^G := \{f \in \mathbb{C}[M] \mid f(gx) = f(x)\ \forall\, g \in G,\ x \in M\}.$$

Элемент $p \in \mathbb{C}Q$ называется *циклом*, если это путь из некоторой вершины $i \in I$ в нее же. Для каждого цикла $p = a_\ell \cdots a_2 a_1 1_i$ определим регулярную функцию $\mathrm{tr}_\alpha(p) \in \mathbb{C}\big[\mathrm{Rep}(Q, \alpha)\big]$, которая отображает представление $V = (V_i, V_a) \in \mathrm{Rep}(Q, \alpha)$ в число $\mathrm{tr}(V_{a_k} \cdots V_{a_2} V_{a_1} \mathrm{id}_{\mathbb{C}^{\alpha_i}}) \in \mathbb{C}$, где след берется по пространству $V_i = \mathbb{C}^{\alpha_i}$ (для тривиальных путей получаем постоянные функции, характеризующие размерность $\mathrm{tr}_\alpha(1_i) = \alpha_i$)*. Из формулы (1.3) видно, что $\mathrm{tr}_\alpha(p) \in \mathbb{C}\big[\mathrm{Rep}\,(Q, \alpha)\big]^{\mathrm{GL}(\alpha)}$.

Структура алгебры инвариантных функций на пространстве представлений дается следующей теоремой Ле Брюна–Прочези.

**Теорема 1.1.** [15]. *Алгебра* $\mathbb{C}\big[\,\mathrm{Rep}\,(Q, \alpha)\big]^{\mathrm{GL}(\alpha)}$ *порождена функциями* $\mathrm{tr}_\alpha(p)$.

**1.2. Корни.** Теория представлений колчанов тесно связана с понятием корня. Для того чтобы определить систему корней для колчана, сначала определим отражения с помощью некоторой билинейной формы, зависящей

*Более обще: пусть $A$ — алгебра, содержащая $\mathbb{C}I$ как подалгебру, $M = \bigoplus\limits_{i\in I} M_i$ — конечномерный $\mathbb{C}I$-модуль и $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}I-\mathbf{Alg}}\big(A, \mathrm{End}(M)\big)$ — множество гомоморфизмов $\mathbb{C}$-алгебр $\rho\colon A \to \mathrm{End}(M)$ таких, что $\rho(1_i) = 1_i$. Тогда для любого $a \in A$ определяется функция $\mathrm{tr}_M(a)\colon \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}I-\mathbf{Alg}}\big(A, \mathrm{End}(M)\big) \to \mathbb{C}$ формулой $\rho \mapsto \mathrm{tr}_M\,\big(\rho(a)\big)$. В случае $A = \mathbb{C}Q$ имеем $\mathrm{tr}_\alpha(p) = 0$ для любого пути $p$, не являющегося циклом.

от колчана. Эти отражения играют значительную роль в теории функтора отражения (см. разд. 2).

Для колчана $Q = (I, E)$ определим числа

$$n_{ij} = n_{ji} = |\{a\colon i \to j\}| + |\{a\colon j \to i\}|, \quad i, j \in I.$$

Если $i \neq j$, то $n_{ij}$ — это количество ребер между вершинами $i$ и $j$ (в обоих направлениях). В то же время $n_{ii}$ есть удвоенное число петель в вершине $i$. Обозначим через $I_{\text{бп}}$ подмножество вершин $i \in I$ таких, что $n_{ii} = 0$, т. е. вершин без петель. Векторы $\alpha = (\alpha_i)_{i\in I}$ с компонентами $\alpha_i \in \mathbb{Z}$ образуют решетку $\mathbb{Z}^I$. Снабдим ее $\mathbb{Z}$-значной симметричной билинейной формой:

$$(\alpha, \beta) = 2\sum_{i\in I} \alpha_i\beta_i - \sum_{\substack{a\in Q\\ a\colon i\to j}} (\alpha_i\beta_j + \alpha_j\beta_i) \tag{1.4}$$

(обозначения вида $\sum\limits_{\substack{a\in Q\\ a\colon i\to j}}$ и $\sum\limits_{a\colon i\to j}$ нужно понимать как $\sum\limits_{i,j\in I}\sum\limits_{\substack{a\in Q\\ a\colon i\to j}}$). Пусть $\varepsilon_i \in \mathbb{Z}^I$ — базисные векторы: $(\varepsilon_i)_j = \delta_{ij}$. Тогда

$$(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 2\delta_{ij} - n_{ij}. \tag{1.5}$$

В частности, для $i \in I_{\text{бп}}$ имеем $(\varepsilon_i, \varepsilon_i) = 2$.

*Отражением* в вершине $i \in I_{\text{бп}}$ называется $\mathbb{Z}$-линейное отображение

$$s_i\colon \mathbb{Z}^I \to \mathbb{Z}^I, \quad s_i\alpha = \alpha - (\alpha, \varepsilon_i)\varepsilon_i. \tag{1.6}$$

Заметим, что $s_i^2 = 1$ и $s_i\varepsilon_i = -\varepsilon_i$ для любого $i \in I_{\text{бп}}$. Обозначим группу, порожденную отражениями $s_i$, $i \in I_{\text{бп}}$, через $W$.

Если забыть про ориентацию ребер колчана $Q$, то получится обычный (неориентированный) граф. Будем называть его графом колчана $Q$. Колчан называется связным, если его граф связен. Любое подмножество вершин $I' \subset I$ индуцирует колчан $Q' = (I', E')$ с множеством ребер $E' = \{a \in Q \mid a\colon i \to j,\ i, j \in I'\}$. *Носителем* вектора $\alpha \in \mathbb{Z}^I$ называется подмножество $\operatorname{Supp}(\alpha) = \{i \in I \mid \alpha_i \neq 0\} \subset I$. Будем говорить, что $\alpha$ имеет связный носитель, если колчан, индуцированный подмножеством $\operatorname{Supp}(\alpha)$, связен.

Вектор $\alpha \in \mathbb{Z}^I$ называется *вещественным корнем*, если он лежит в орбите $W\varepsilon_i$ для некоторого $i \in I_{\text{бп}}$. Множество вещественных корней обозначим через $\Delta_{\text{re}}(Q)$. Назовем *фундаментальной областью* множество

$$F = \{\alpha \in \mathbb{Z}^I_{\geqslant 0} \mid \alpha \neq 0, \quad (\alpha, \varepsilon_i) \leqslant 0 \quad \forall\, i \in I,\ \alpha \text{ имеет связный носитель}\}$$

(условие $(\alpha, \varepsilon_i) \leqslant 0$ для вершин $i \notin I_{\text{бп}}$ выполнено автоматически). Вектор $\alpha \in \mathbb{Z}^I$ называется *мнимым корнем*, если $\alpha \in WF$ или $-\alpha \in WF$. Множество мнимых корней обозначим через $\Delta_{\text{im}}(Q)$. Элемент $\alpha \in \mathbb{Z}^I$ называется *корнем*, если он принадлежит $\Delta(Q) := \Delta_{\mathrm{re}}(Q) \cup \Delta_{\mathrm{im}}(Q)$. Множество $\Delta(Q)$ называется *системой корней* колчана $Q$.

Пусть $q(\alpha) = \dfrac{1}{2}(\alpha, \alpha) = \sum\limits_{i \in I} \alpha_i^2 - \sum\limits_{a\colon i \to j} \alpha_i \alpha_j$. Это $\mathbb{Z}$-значная функция на $\mathbb{Z}^I$. Поскольку $(s_i\alpha, s_i\beta) = (\alpha, \beta)$ для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^I$ и $i \in I_{\text{бп}}$, функция $q(\alpha)$ является $W$-инвариантной: $q(w\alpha) = q(\alpha)$ для любых $\alpha \in \mathbb{Z}^I$, $w \in W$. Заметим, что $(\varepsilon_i, \varepsilon_i) = 2 \quad \forall\, i \in I_{\text{бп}}$ и $(\alpha, \alpha) = \sum\limits_{i \in I} \alpha_i(\alpha, \varepsilon_i) \leqslant 0 \quad \forall\, \alpha \in F$. Поэтому $q(\alpha) = 1$ для вещественных корней $\alpha$ и $q(\alpha) \leqslant 0$ для мнимых корней $\alpha$. Следовательно, множества $\Delta_{\mathrm{re}}(Q)$ и $\Delta_{\mathrm{im}}(Q)$ не пересекаются: $\Delta(Q) = \Delta_{\mathrm{re}}(Q) \sqcup \Delta_{\mathrm{im}}(Q)$.

Заметим, что билинейная форма (1.4), числа $n_{ij}$, группа $W$ и система корней зависят только от графа колчана $Q$, но не от ориентации его ребер. Если в этом графе существуют петли, кратные линии или циклы (неориентированные), то $\Delta_{\mathrm{im}}(Q)$ непусто. Действительно, если имеется цикл $i_1 - i_2 - \ldots - i_\ell - i_1$, то $\varepsilon_{i_1} + \varepsilon_{i_2} + \ldots + \varepsilon_{i_\ell} \in F$ (петли и параллельные линии — частные случаи неориентированных циклов). Но даже если нет петлей, кратных линий и циклов, то $\Delta_{\mathrm{im}}(Q)$ все равно может быть непустым*. Случаи, когда все корни вещественны, в точности соответствуют конечным графам, связные компоненты которых являются диаграммами Дынкина для простых алгебр Ли типов $A$, $D$ и $E$. В этом случае множество $\Delta(Q) = \Delta_{\mathrm{re}}(Q)$ конечно и является системой корней конечномерной полупростой алгебры Ли, а группа $W$ — ее группой Вейля. В остальных случаях $\Delta(Q)$ и $W$ — бесконечны** [8].

Корень $\alpha \in \Delta(Q)$ называется *положительным* (*отрицательным*), если $\alpha_i \geqslant 0 \quad \forall\, i \in I$ ($\alpha_i \leqslant 0 \quad \forall\, i \in I$). Положительные и отрицательные корни образуют множества $\Delta^+(Q)$ и $\Delta^-(Q)$. Как и для конечных систем корней, имеется равенство $\Delta(Q) = \Delta^+(Q) \sqcup \Delta^-(Q)$ в общем случае. Оно доказывается с помощью теории алгебр Ли [8]. Также будем использовать обозначения $\Delta^+_{\mathrm{re}}(Q) = \Delta_{\mathrm{re}}(Q) \cap \Delta^+(Q)$ и $\Delta^+_{\mathrm{im}}(Q) = \Delta_{\mathrm{im}}(Q) \cap \Delta^+(Q)$. Эти множества обладают следующими свойствами [8]: если $\alpha \in \Delta^+_{\mathrm{im}}(Q)$, то $w\alpha \in \Delta^+_{\mathrm{im}}(Q)$ $\forall\, w \in W$; если $\alpha \in \Delta^+_{\mathrm{re}}(Q)$ и $\alpha \neq \varepsilon_i$, то $s_i\alpha \in \Delta^+_{\mathrm{re}}(Q)$, где $i \in I_{\text{бп}}$.

Следующая теорема, связывающая понятия корней с теорией представлений колчанов, была доказана в [8] (см. также [16, 9]).

---

*Например, $\Delta_{\mathrm{im}}(Q) \neq \varnothing$, когда граф колчана $Q$ является расширенным графом Дынкина типа $D$ или $E$, т. е. диаграммой Дынкина для аффинных алгебр Ли этих типов (см., например, [8] или [16]).

**Бесконечность $\Delta(Q)$ следует из того, что если $\alpha \in \Delta_{\mathrm{im}}(Q)$, то $n\alpha \in \Delta_{\mathrm{im}}(Q) \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$. Если бы группа $W$ была конечна, то она являлась бы группой отражений, но конечные группы отражений классифицированы (см., например, [17]), при этом условиям $(\varepsilon_i, \varepsilon_i) = 2$, $(\varepsilon_i, \varepsilon_j) \in \mathbb{Z}$ могут удовлетворять только системы корней типа $A$, $D$ и $E$.

**Теорема 1.2 (Каца).**

*1) У колчана $Q$ существует неразложимое представление размерности $\alpha$ тогда и только тогда, когда $\alpha \in \Delta^+(Q)$;*

*2) для $\alpha \in \Delta^+_{\mathrm{re}}(Q)$ существует единственное неразложимое представление (с точностью до изоморфизма);*

*3) для $\alpha \in \Delta^+_{\mathrm{im}}(Q)$ существует бесконечное количество попарно неизоморфных неразложимых представлений.*

Из теоремы следует, что представления колчана размерности $\alpha$ существуют, если $\alpha$ разлагается на сумму положительных корней, причем количество представлений для каждого разложения зависит от факта вещественности или мнимости каждого слагаемого.

**1.3. Препроективная алгебра.** Удвоим количество ребер колчана $Q = (I, E)$, добавив для каждого ребра $a \in E$ дополнительное ребро $a^*$ между теми же вершинами, но в обратном направлении. В результате получим колчан $\overline{Q} = (I, E \sqcup E^*)$, где $E^* = \{a^* \colon j \to i \mid a \in Q, a\colon i \to j\}$, он называется *удвоением* колчана $Q$ или просто *удвоенным колчаном*. Ребра $a$ и $a^*$ называются дуальными. Если $b = a^* \in \overline{Q}$ для некоторого $a \in Q$, то будем также писать $b^*$ для $a$. Пространство представлений удвоенного колчана размерности $\alpha \in \mathbb{Z}^I_{\geqslant 0}$ есть

$$\operatorname{Rep}(\overline{Q}, \alpha) = \prod_{\substack{a \in Q \\ a\colon i \to j}} \bigl(\operatorname{Hom}(\mathbb{C}^{\alpha_i}, \mathbb{C}^{\alpha_j}) \times \operatorname{Hom}(\mathbb{C}^{\alpha_j}, \mathbb{C}^{\alpha_i})\bigr) = T^* \operatorname{Rep}(Q, \alpha).$$

Как кокасательное расслоение оно снабжено симплектической формой

$$\omega = \sum_{a \in Q} \operatorname{tr}\bigl(dV_{a^*} \wedge dV_a\bigr) = \sum_{\substack{a \in Q \\ a\colon i \to j}} \sum_{k=1}^{\alpha_i} \sum_{l=1}^{\alpha_j} d(V_{a^*})_{kl} \wedge d(V_a)_{lk}, \tag{1.7}$$

где $V_a \colon V_i \to V_j$ и $V_{a^*} \colon V_j \to V_i$ — представления $a\colon i \to j$ и $a^* \colon j \to i$ соответственно.

Пусть $\lambda = (\lambda_i) \in \mathbb{C}^I$ — вектор с компонентами $\lambda_i \in \mathbb{C}$, $i \in I$. Обозначим через $\Pi^\lambda(Q)$ фактор-алгебру алгебры путей $\mathbb{C}\overline{Q}$ по соотношениям

$$\sum_{\substack{a \in Q, j \in I \\ a\colon j \to i}} aa^* - \sum_{\substack{a \in Q, j \in I \\ a\colon i \to j}} a^* a = \lambda_i 1_i, \quad i \in I. \tag{1.8}$$

С помощью обозначения

$$(-1)^a = 1, \quad (-1)^{a^*} = -1 \;\text{ для } a \in Q \tag{1.9}$$

можно переписать эти соотношения в более компактном виде:

$$\sum_{\substack{a\in\overline{Q},j\in I\\ a\colon j\to i}}(-1)^a aa^*=\lambda_i 1_i,\quad i\in I. \tag{1.10}$$

Алгебра $\Pi^\lambda(Q)$ называется *деформированной препроективной алгеброй* или просто *препроективной алгеброй* ($\lambda$ — параметр деформации) [7].

Если имеется представление алгебры $\Pi^\lambda(Q)$ на некотором векторном пространстве, то, взяв его композицию с проекцией $\mathbb{C}\overline{Q}\twoheadrightarrow\Pi^\lambda(Q)$, получим представление удвоенного колчана $\overline{Q}$ на этом пространстве, причем различные представления $\Pi^\lambda(Q)$ дают различные представления $\overline{Q}$. Представление $V=(V_i,V_a,V_{a^*})$ колчана $\overline{Q}$ определяет представление алгебры $\Pi^\lambda(Q)$, если и только если выполнено

$$\sum_{\substack{a\in\overline{Q},j\in I\\ a\colon j\to i}}(-1)^a V_aV_{a^*}=\lambda_i\,\mathrm{id}_{V_i},\quad i\in I. \tag{1.11}$$

В конечномерном случае это система алгебраических уравнений (по $(\dim V_i)^2$ уравнений для каждого $i\in I$). Все $\Pi^\lambda(Q)$-модули размерности $\alpha$ образуют аффинное подмногообразие $\mathrm{Rep}\big(\Pi^\lambda(Q),\alpha\big)\subset\mathrm{Rep}\big(\overline{Q},\alpha\big)$, определяемое системой уравнений (1.11).

Пусть $\lambda\cdot\alpha=\sum\limits_{i\in I}\lambda_i\alpha_i$ — стандартное скалярное произведение. Взяв след уравнений (1.11) и просуммировав их по $i\in I$, получим $\lambda\cdot\alpha=0$. Это необходимое условие для существования представления $\Pi^\lambda(Q)$ размерности $\alpha$.

Будем говорить, что $\mathbb{C}Q$-подмодуль $V'\subset V$ является *прямым слагаемым* $\mathbb{C}Q$-модуля $V$, если $\mathbb{C}Q$-модуль $V$ есть прямая сумма $V'$ и $V''$ для некоторого $\mathbb{C}Q$-подмодуля $V''\subset V$.

**Теорема 1.3.** [16]. *Представление $V=(V_i,V_a)$ колчана $Q$ может быть дополнено до представления $V=(V_i,V_a,V_{a^*})$ алгебры $\Pi^\lambda(Q)$, если и только если $\lambda\cdot\dim_{\mathbb{C}I}V'=0$ для любого $\mathbb{C}Q$-подмодуля $V'\subset V$, являющегося прямым слагаемым $\mathbb{C}Q$-модуля $V$.*

**Следствие 1.4.** $\mathrm{Rep}\big(\Pi^\lambda(Q),\alpha\big)\neq\varnothing$, *если и только если $\alpha=\sum\limits_l\alpha^{(l)}$, где $\alpha^{(l)}\in\Delta^+(Q)$ такие, что $\lambda\cdot\alpha^{(l)}=0$ для всех $l$. В этом случае существует модуль $V\in\mathrm{Rep}\big(\Pi^\lambda(Q),\alpha\big)$, который разлагается как $\Pi^\lambda(Q)$-модуль в сумму неразложимых $\Pi^\lambda(Q)$-модулей $V^{(l)}\in\mathrm{Rep}\big(\Pi^\lambda(Q),\alpha^{(l)}\big)$.*

**Доказательство.** Пусть $V\in\mathrm{Rep}\big(\Pi^\lambda(Q),\alpha\big)$. Разложим $V$ в прямую сумму неразложимых $\mathbb{C}Q$-модулей: $V=\bigoplus_l V^{(l)}$, $V^{(l)}\in\mathrm{Rep}\big(Q,\alpha^{(l)}\big)$. Тогда $\alpha=\sum\limits_l\alpha^{(l)}$, и по теореме Каца 1.2 имеем $\alpha^{(l)}\in\Delta^+(Q)$. Поскольку модули $V^{(l)}$

являются прямыми слагаемыми $\mathbb{C}Q$-модуля $V$, из теоремы 1.3 следует, что $\lambda\cdot\alpha^{(l)}=0$ для всех $l$.

И обратно: если $\alpha^{(l)}\in\Delta^+(Q)$ такие, что $\lambda\cdot\alpha^{(l)}=0$ для всех $l$, то существуют неразложимые $\mathbb{C}Q$-модули $V^{(l)}\in\operatorname{Rep}\bigl(Q,\alpha^{(l)}\bigr)$ и по теореме 1.3 они достраиваются до $\Pi^\lambda(Q)$-модулей $V^{(l)}\in\operatorname{Rep}\bigl(\Pi^\lambda(Q),\alpha^{(l)}\bigr)$. Каждый модуль $V^{(l)}$ неразложим как $\Pi^\lambda(Q)$-модуль, потому что иначе он был бы разложим как $\mathbb{C}Q$-модуль. $\Pi^\lambda(Q)$-модуль $V=\bigoplus_l V^{(l)}$ принадлежит $\operatorname{Rep}\bigl(\Pi^\lambda(Q),\alpha\bigr)$ для $\alpha=\sum\limits_l\alpha^{(l)}$. □

Группа $\mathrm{GL}(\alpha)$ действует на $\operatorname{Rep}\bigl(\overline{Q},\alpha\bigr)$, поскольку $\overline{Q}$ есть колчан с множеством вершин $I$. Явным образом действие (1.3) элемента $g=(g_i)$ на $V=(V_i,V_a,V_{a^*})\in\operatorname{Rep}\bigl(\overline{Q},\alpha\bigr)$ выглядит как

$$V_a\mapsto g_jV_ag_i^{-1},\quad V_{a^*}\mapsto g_iV_{a^*}g_j^{-1},\quad a\colon i\to j. \tag{1.12}$$

Из этих формул видно, что это действие сохраняет соотношение (1.11) для любого $\lambda\in\mathbb{C}^I$. Таким образом, имеем действие группы $\mathrm{GL}(\alpha)$ на многообразие $\operatorname{Rep}\bigl(\Pi^\lambda(Q),\alpha\bigr)$, которое связывает изоморфные (и только изоморфные) представления препроективной алгебры $\Pi^\lambda(Q)$. Классы изоморфности представлений препроективной алгебры ($\Pi^\lambda(Q)$-модулей) заданной размерности $\alpha\in\mathbb{Z}^I_{\geqslant0}$ образуют множество орбит $\operatorname{Rep}\bigl(\Pi^\lambda(Q),\alpha\bigr)/\mathrm{GL}(\alpha)$. Это фактор-множество не всегда имеет структуру алгебраического многообразия.

Пусть $p(\alpha)=1-q(\alpha)=1+\sum\limits_{a\colon i\to j}\alpha_i\alpha_j-\sum\limits_{i\in I}\alpha_i\alpha_i$. Следующая теорема следует из [9, Corollary 1.4, Lemma 6.5].

**Теорема 1.5.** *Если* $\operatorname{Rep}\bigl(\Pi^\lambda(Q),\alpha\bigr)\neq\varnothing$ *и все модули* $V\in\operatorname{Rep}\bigl(\Pi^\lambda(Q),\alpha\bigr)$ *просты, то* $\alpha\in\Delta^+(Q)$ *и пространство орбит* $\operatorname{Rep}\bigl(\Pi^\lambda(Q),\alpha\bigr)/\mathrm{GL}(\alpha)$ *есть связное гладкое аффинное многообразие размерности* $2p(\alpha)$.

**Замечание 1.6.** Согласно следствию 1.4 вместо $\operatorname{Rep}\bigl(\Pi^\lambda(Q),\alpha\bigr)\neq\varnothing$ в теореме 1.5 можно потребовать, чтобы $\alpha$ было положительным корнем, таким, что $\lambda\cdot\alpha=0$.

В случае выполнения условия теоремы 1.5 будем называть многообразие $\operatorname{Rep}\bigl(\Pi^\lambda(Q),\alpha\bigr)/\mathrm{GL}(\alpha)$ *пространством модулей*. Регулярные функции на $\operatorname{Rep}\bigl(\Pi^\lambda(Q),\alpha\bigr)/\mathrm{GL}(\alpha)$ есть в точности $\mathrm{GL}(\alpha)$-инвариантные регулярные функции на $\operatorname{Rep}\bigl(\Pi^\lambda(Q),\alpha\bigr)$:

$$\mathbb{C}\bigl[\operatorname{Rep}\bigl(\Pi^\lambda(Q),\alpha\bigr)/\mathrm{GL}(\alpha)\bigr]=\mathbb{C}\bigl[\operatorname{Rep}\bigl(\Pi^\lambda(Q),\alpha\bigr)\bigr]^{\mathrm{GL}(\alpha)}. \tag{1.13}$$

**Замечание 1.7.** В общем случае нужно рассматривать только замкнутые орбиты, поскольку регулярные (а следовательно, непрерывные) инвариантные функции не отличают незамкнутые орбиты от примыкающих к ним замкнутых. Орбита точки $V \in \operatorname{Rep}\big(\Pi^{\lambda}(Q), \alpha\big)$ замкнута тогда и только тогда, когда $\Pi^{\lambda}(Q)$-модуль $V$ полупрост [16, § 3.3]. В этом случае пространство модулей определяется как пространство орбит полупростых модулей и обозначается $\operatorname{Rep}\big(\Pi^{\lambda}(Q), \alpha\big)//\mathrm{GL}(\alpha)$, алгебра регулярных функций на пространстве модулей также дается формулой* (1.13). Теорема 1.5 обобщается следующим образом: если $\operatorname{Rep}\big(\Pi^{\lambda}(Q), \alpha\big) \neq \varnothing$ и точка $V \in \operatorname{Rep}\big(\Pi^{\lambda}(Q), \alpha\big)$ в общем положении дает простой модуль, то пространство модулей $\operatorname{Rep}\big(\Pi^{\lambda}(Q), \alpha\big)//\mathrm{GL}(\alpha)$ есть неприводимое аффинное многообразие, которое гладко в точках, соответствующих простым модулям (см. [9, Corollary 1.4, Lemma 6.5]). Пусть $R^+_{\lambda} = \{\alpha \in \Delta^+(Q) \mid \lambda{\cdot}\alpha = 0\}$. Согласно [9, Theorem 1.2] условие того, что $\operatorname{Rep}\big(\Pi^{\lambda}(Q), \alpha\big) \neq \varnothing$ и модуль в общем положении простой, эквивалентно $\alpha \in \Sigma_{\lambda}$, где $\Sigma_{\lambda}$ — множество корней $\alpha \in R^+_{\lambda}$, таких, что $p(\alpha) > \sum\limits_{l=1}^{r} p(\alpha^{(l)})$, для любого разложения $\alpha = \sum\limits_{l=1}^{r} \alpha^{(l)}$, такого, что $r \geqslant 2$ и $\alpha^{(l)} \in R^+_{\lambda}\ \ \forall\, l$.

**1.4. Гамильтонова редукция и пространства модулей.** Пространство модулей имеет также симплектическую структуру, наследуемую от пространства $\operatorname{Rep}(\overline{Q}, \alpha)$. Чтобы ее описать, воспользуемся гамильтоновой редукцией [18–20]. Сначала кратко опишем общую конструкцию гамильтоновой редукции (в алгебро-геометрической версии), затем применим ее к нашему случаю для построения пространств модулей как симплектических многообразий.

Пусть $M$ — связное гладкое многообразие, снабженное симплектической формой $\omega_M$. Пусть $G$ — связная группа Ли $G$, которая действует на многообразии $M$, сохраняя его симплектическую структуру. Инфинитезимально действие дается векторными полями $\mathcal{V}_{\theta} \in \operatorname{Vect}(M)$, занумерованными элементами $\theta \in \mathfrak{g}$, где $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли группы $G$. Это действие называется *пуассоновским*, если существуют функции $H_{\theta} \in C^{\infty}(M)$, такие, что $\mathcal{V}_{\theta} f = \{H_{\theta}, f\}$ и $\{H_{\theta}, H_{\eta}\} = H_{[\theta,\eta]}$ для любых $\theta, \eta \in \mathfrak{g}$, $f \in C^{\infty}(M)$. Если, например, $M_0$ — связное гладкое многообразие, на котором действует связная группа $G$, то индуцированное действие на $M = T^*M_0$ пуассоновское относительно канонической симплектической структуры кокасательного расслоения [18, гл. 3, § 3.1], [19, доб. 5, § A].

Нас будет интересовать случай, когда $M = T^*\mathbb{C}^n = \mathbb{C}^{2n}$ для некоторого $n$ и группа $G$ действует на $\mathbb{C}^n$ линейными однородными преобразованиями. В стандартных координатах $x_1, \dots, x_n$, $p_1, \dots, p_n$ симплектическая форма и

*Многообразие $M//G := \operatorname{Spec}\big(\mathbb{C}[M]^G\big)$ называется *категорным фактором* аффинного многообразия $M$ по действию группы $G$.

индуцированные ею скобки Пуассона имеют вид $\omega_M = \sum\limits_{i=1}^{n} dp_i \wedge dx_i$, $\{f,h\} = \sum\limits_{i=1}^{n} \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\dfrac{\partial h}{\partial p_i} - \dfrac{\partial f}{\partial p_i}\dfrac{\partial h}{\partial x_i}\right)$. Можно считать, что $G \subset \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ и $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ (если представление $G \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ не точно, то можно заменить группу $G$ на ее фактор по ядру этого представления). Тогда гамильтонианы действия $G$ на $M$ имеют вид $H_\theta = \sum\limits_{i,j=1}^{n} p_i\theta_{ij}x_j$, $\theta \in \mathfrak{g}$.

Обозначим через $\mathfrak{g}^*$ пространство, дуальное к $\mathfrak{g}$. *Отображением момента* на $M$, заданным пуассоновским действием группы $G$, называется $\mathfrak{g}^*$-значная функция $P\colon M \to \mathfrak{g}^*$, определенная формулой $P(x)(\theta) = H_\theta(x)$, $x \in M$, $\theta \in \mathfrak{g}$. Рассмотрим произвольную точку $\lambda \in \mathfrak{g}^*$, и пусть $G_\lambda = \{g \in G \mid \mathrm{Ad}_g^*(\lambda) = \lambda\}$ — ее стабилизатор относительно announceприсоединенного представления. Поскольку $H_\theta$ — регулярные функции на $M = T^*\mathbb{C}^n$, полный прообраз $P^{-1}(\lambda)$ является аффинным подмногообразием в $M$. Действие группы $G$ на $M$ при отображении момента переходит в ее коприсоединенное действие на $\mathfrak{g}^*$, т.е. $P(gx) = \mathrm{Ad}_g^*(P(x))$ (см. [18, гл. 3, § 3.1], [19, доб. 5, § A]). Поэтому прообраз $P^{-1}(\lambda) \subset M$ инвариантен относительно подгруппы $G_\lambda \subset G$. Предположим, что все $G_\lambda$-орбиты в $P^{-1}(\lambda)$ замкнуты, тогда фактор $N_\lambda := P^{-1}(\lambda)/G_\lambda$ есть аффинное многообразие. Оно состоит из (замкнутых) $G_\lambda$-орбит точек подмногообразия $P^{-1}(\lambda) \subset M$ и называется *гамильтоновой редукцией*.

**Теорема 1.8.** (См., например, [19, доб. 5, § Б]). *Если многообразие $N_\lambda = P^{-1}(\lambda)/G_\lambda$ гладко, то оно снабжено следующей симплектической формой $\omega_\lambda$: для $x \in P^{-1}(\lambda)$ и $\xi, \eta \in T_{[x]}N_\lambda$ положим*

$$\omega_\lambda(\xi,\eta) = \omega_M(\xi',\eta'), \tag{1.14}$$

*где $\xi', \eta' \in T_x\bigl(P^{-1}(\lambda)\bigr) \subset T_xM$ — прообразы $\xi$, $\eta$ относительно дифференциала проекции $P^{-1}(\lambda) \twoheadrightarrow N_\lambda$.*

Ограничение инвариантной функции $h \in \mathbb{C}[M]^G$ на $P^{-1}(\lambda) \subset M$ есть $G_\lambda$-инвариантная функция, которую мы отождествляем с функцией на $N_\lambda$ и обозначаем $h_\lambda \in \mathbb{C}[N_\lambda]$.

**Утверждение 1.9.** *Скобки Пуассона $\{-,-\}_{N_\lambda}$ и $\{-,-\}_M$, ассоциированные с симплектическими формами $\omega_\lambda$ и $\omega_M$, связаны соотношением $\{f_\lambda, h_\lambda\}_{N_\lambda}([x]) = \{f,h\}_M(x)$, где $f, h \in \mathbb{C}[M]^G$, $x \in P^{-1}(\lambda)$.*

**Доказательство.** Скобки Пуассона, ассоциированные с симплектической формой $\omega$, имеют вид $\{f,h\} = -\omega(X_f, X_h)$, где $X_f$ — гамильтоново поле с гамильтонианом $f$, определенное с помощью $\omega$ следующим образом: $\omega_x(X_f(x),\xi) = (df)_x(\xi)$ в любой точке $x$ и для любого касательного вектора $\xi$ в $x$. Поля $X_f$ и $X_h$ (в точке $x$) есть прообразы полей $X_{f_\lambda}$ и $X_{h_\lambda}$

(в точке $[x]$) соответственно [19, доб. 5, § B]. Следовательно, $\{f_\lambda, h_\lambda\}_{N_\lambda} = -\omega_\lambda(X_{f_\lambda}, X_{h_\lambda}) = -\omega_M(X_f, X_h) = \{f, h\}$. □

В нашем случае $M_0 = \operatorname{Rep}(Q, \alpha)$ — конечномерное векторное пространство, $M = \operatorname{Rep}(\overline{Q}, \alpha) = T^*M_0$ и группа $\mathrm{GL}(\alpha)$ действует на $M$ линейными однородными преобразованиями, причем это действие пуассоновское, поскольку оно индуцировано действием на $M_0 = \operatorname{Rep}(Q, \alpha)$. Алгебра Ли группы $\mathrm{GL}(\alpha)$ есть

$$\operatorname{End}(\alpha) := \bigoplus_{i\in I} \operatorname{End}(\mathbb{C}^{\alpha_i}) = \bigoplus_{i\in I} \mathfrak{gl}(\alpha_i, \mathbb{C}).$$

Ее дуальное пространство можно отождествить с $\operatorname{End}(\alpha)$ с помощью билинейной формы $(\theta, \eta) = \sum\limits_{i\in I} \operatorname{tr}(\theta_i \eta_i)$, где $\theta = (\theta_i), \eta = (\eta_i) \in \operatorname{End}(\alpha)$.

Ядром представления $\mathrm{GL}(\alpha) \to \mathrm{GL}(M_0)$ является подгруппа $\mathbb{C}^\times$, состоящая из элементов $g \in \mathrm{GL}(\alpha)$ с компонентами $g_i = c \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Фактор-группа $G(\alpha) := \mathrm{GL}(\alpha)/\mathbb{C}^\times$ действует эффективно на $M = \operatorname{Rep}(\overline{Q}, \alpha)$ и поэтому может быть вложена в $\mathrm{GL}(M_0)$. Алгеброй Ли фактор-группы $G = G(\alpha)$ является фактор-алгебра $\mathfrak{g} = \operatorname{End}(\alpha)/(\mathbb{C} \cdot 1)$, где $1 = (\mathrm{id}_{\mathbb{C}^{\alpha_i}})_{i\in I}$, а ее дуальное пространство есть

$$\mathfrak{g}^* = \operatorname{End}(\alpha)_0 := \left\{ u = (u_i) \in \operatorname{End}(\alpha) \mid \sum_{i\in I} \operatorname{tr} u_i = 0 \right\} \subset \operatorname{End}(\alpha). \tag{1.15}$$

Отождествим $\lambda = (\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{C}^I$ с элементом $\big(\lambda_i \,\mathrm{id}_{\mathbb{C}^{\alpha_i}}\big)_{i\in I} \in \operatorname{End}(\alpha)$. Так как $\sum\limits_{i\in I} \operatorname{tr}\left(\lambda_i \,\mathrm{id}_{\mathbb{C}^{\alpha_i}}\right) = \lambda \cdot \alpha$, условие $\lambda \cdot \alpha = 0$ равносильно $\lambda \in \operatorname{End}(\alpha)_0$. Можно всегда предполагать выполнение этого условия: оно необходимо (но не всегда достаточно) для непустоты $\operatorname{Rep}\big(\Pi^\lambda(Q), \alpha\big)$. Отображение момента $P_\alpha\colon \operatorname{Rep}\big(\overline{Q}, \alpha\big) \to \mathfrak{g}^*$ имеет вид

$$P_\alpha(V) = \big(P_{\alpha,i}(V)\big)_{i\in I}, \quad P_{\alpha,i}(V) = \sum_{\substack{a\in\overline{Q}, j\in I\\ a\colon j\to i}} (-1)^a V_a V_{a^*} \tag{1.16}$$

(см. прил. A). Отсюда получаем $P_\alpha^{-1}(\lambda) = \operatorname{Rep}\big(\Pi^\lambda(Q), \alpha\big)$. Стабилизатор $\lambda = (\lambda_i) \in \mathfrak{g}^*$ есть $G_\lambda = G(\alpha)$. Будем предполагать, что условия теоремы 1.5 выполнены. Тогда гамильтонова редукция дает нам пространство модулей

$$N_\lambda(\alpha) := \operatorname{Rep}\big(\Pi^\lambda(Q), \alpha\big)/G(\alpha) = \operatorname{Rep}\big(\Pi^\lambda(Q), \alpha\big)/\mathrm{GL}(\alpha)$$

— связное гладкое аффинное многообразие, которое по теореме 1.8 снабжено симплектической формой $\omega_{\lambda,\alpha}$, заданной формулой (1.14).

Эту симплектическую форму на $N_\lambda(\alpha)$ можно понять следующим образом. Пусть $z_k$ — локальные координаты в области многообразия $N_\lambda(\alpha)$. В этой области точки $z = (z_k)$ можно представить (полупростыми) модулями $V(z) = \big(V_i, V_a(z)\big) \in \operatorname{Rep}\big(\Pi^\lambda(Q), \alpha\big)$, где $V_a = V_a(z)$ ($a \in \overline{Q}$, $a\colon i \to j$) — гладкие $\operatorname{Hom}(\mathbb{C}^{\alpha_i}, \mathbb{C}^{\alpha_j})$-значные функции, удовлетворяющие (1.11). Тогда (1.14) в этой области имеет вид

$$\omega_{\lambda,\alpha} = \sum_{\substack{a\in Q\\ a\colon i\to j}} \operatorname{tr}\left(dV_{a^*} \wedge dV_a\right) = \sum_{\substack{a\in Q\\ a\colon i\to j}} \operatorname{tr}\big(dV_{a^*}(z) \wedge dV_a(z)\big) =$$

$$= \sum_{\substack{a\in Q\\ a\colon i\to j}} \sum_{k,l} \operatorname{tr}\left(\frac{\partial V_{a^*}}{\partial z_k}\frac{\partial V_a}{\partial z_l}\right) dz_k \wedge dz_l. \qquad (1.17)$$

Рассмотрим введенные в п. 1.1 функции $\operatorname{tr}_\alpha(p) \in \operatorname{Rep}\big(\overline{Q}, \alpha\big)$, где $p \in \mathbb{C}\overline{Q}$ — циклы в удвоенном колчане. Ограничивая их на подмногообразие $\operatorname{Rep}\big(\Pi^\lambda(Q), \alpha\big)$, получаем функции $\operatorname{tr}_\alpha(p)_\lambda \in \mathbb{C}[N_\lambda(\alpha)]$. Из теоремы 1.1 получается следующее утверждение (см. [21, Lemma 2.2]).

**Утверждение 1.10.** *Алгебра* $\mathbb{C}\big[N_\lambda(\alpha)\big] = \mathbb{C}\big[\operatorname{Rep}\big(\Pi^\lambda(Q), \alpha\big)\big]^{G(\alpha)}$ *порождена ограничениями функций* $\operatorname{tr}_\alpha(p)$ *на* $\operatorname{Rep}\big(\Pi^\lambda(Q), \alpha\big)$, *т. е. функциями* $\operatorname{tr}_\alpha(p)_\lambda$, *где* $p$ *пробегает все циклы в* $\overline{Q}$.

**Замечание 1.11.** В случае, когда не все $G_\lambda$-орбиты $P^{-1}(\lambda)$ замкнуты, гамильтонова редукция определяется как $N_\lambda = P^{-1}(\lambda)//G_\lambda$, т. е. как аффинное многообразие, состоящее из замкнутых орбит. Если оно гладко, то на нем есть симплектическая структура, определяемая формулой (1.14), где $x \in P^{-1}(\lambda)$ такое, что орбита $Gx$ замкнута. В случае $M = \operatorname{Rep}\big(\overline{Q}, \alpha\big)$, $G = G(\alpha)$ и $\lambda = (\lambda_i)$ гамильтонова редукция дает пространство модулей $N_\lambda(\alpha) = \operatorname{Rep}\big(\Pi^\lambda(Q), \alpha\big)//\mathrm{GL}(\alpha)$ (см. замечание 1.7). Для него также верно утверждение 1.10.

## 2. ФУНКТОР ОТРАЖЕНИЯ

Сначала определим функтор отражения, действующий на представлениях препроективных алгебр фиксированного колчана [7] (см. также [16]). Проверим, что это действительно функтор и что он задает эквивалентность категорий. Затем рассмотрим его действие на пространства модулей и докажем, что оно сохраняет алгебраическую и симплектическую структуру этих пространств.

**2.1. Функтор отражения как эквивалентность категорий.** Введем *дуальные отражения*. Напомним, что для $i \in I_{\text{бп}}$ мы определили отражение $s_i$ как

преобразование решетки $\mathbb{Z}^I$, заданное формулой (1.6). Соответствующее дуальное отражение — это линейное отображение $r_i\colon \mathbb{C}^I \to \mathbb{C}^I$, определенное формулой
$$(r_i\lambda)_j = \lambda_j - (\varepsilon_i, \varepsilon_j)\lambda_i, \quad i \in I_{\text{бп}}. \tag{2.1}$$

Из цепочки равенств

$$r_i\lambda \cdot \alpha = \sum_j \bigl(\lambda_j - (\varepsilon_i, \varepsilon_j)\lambda_i\bigr)\alpha_j = \lambda \cdot \alpha - (\varepsilon_i, \alpha)\lambda_i = \lambda \cdot s_i\alpha$$

и свойства инволютивности $s_i^2 = 1$ получаем инволютивность $r_i$ и свойство дуальности
$$r_i^2 = 1, \quad \lambda \cdot \alpha = r_i\lambda \cdot s_i\alpha, \quad i \in I_{\text{бп}}. \tag{2.2}$$

Будем говорить, что *отражение допустимо в вершине* $k \in I_{\text{бп}}$ для заданного $\lambda \in \mathbb{C}^I$, если $\lambda_k \neq 0$. В этом случае построим функтор $F_k^\lambda$ из категории $\Pi^\lambda(Q)$-модулей в категорию $\Pi^{r_k\lambda}(Q)$-модулей, который переводит представления размерности $\alpha$ в представления размерности $s_k\alpha$.

Фиксируем вершину $k \in I_{\text{бп}}$ и вектор $\lambda \in \mathbb{C}^I$ такой, что $\lambda_k \neq 0$. Пусть $V = (V_i, V_a)$, $i \in I$, $a \in \overline{Q}$, — представление препроективной алгебры $\Pi^\lambda(Q)$. Чтобы определить значение функтора $F_k^\lambda$ на $V$, построим представление $V'$ алгебры $\Pi^{r_k\lambda}(Q)$ следующим образом.

Введем обозначения*

$$H = \{a \in \overline{Q} \mid a\colon j \to k \text{ для некоторого } j\} \subset E \sqcup E^* \tag{2.3}$$

и $V_\oplus = \bigoplus\limits_{\substack{a \in H \\ a\colon j \to k}} V_j$. Для каждого $a\colon j \to k$ определены канонические вложения $\mu_a\colon V_j \hookrightarrow V_\oplus$ и проекция $\pi_a\colon V_\oplus \twoheadrightarrow V_j$. Определим линейные отображения $\mu\colon V_k \to V_\oplus$ и $\pi\colon V_\oplus \to V_k$ как

$$\mu = \sum_{a \in H} \mu_a V_{a^*}, \quad \pi = \frac{1}{\lambda_k} \sum_{a \in H} (-1)^a V_a \pi_a. \tag{2.4}$$

Тогда соотношение (1.11) для $i = k$ примет вид $\pi\mu = 1$. Отсюда, в частности, следует, что отображение $\mu$ инъективно, а $\pi$ — сюръективно, причем точная последовательность
$$0 \to \operatorname{Ker} \pi \to V_\oplus \xrightarrow{\pi} V_k \to 0 \tag{2.5}$$

---

*Обычно при определении функтора отражения предполагают для простоты, что $a \in Q$ для любого $a\colon j \to k$ (см., например, [9]). Чтобы достичь этого условия, нужно переориентировать колчан $Q$ и использовать изоморфизм $\Pi^\lambda(Q) \simeq \Pi^\lambda(Q')$, где $Q'$ — переориентированный колчан (переориентация зависит от $k$). Мы же не будем делать этого предположения, поскольку использование обозначения (1.9) делает это упрощение ненужным.

расщепляется с помощью $\mu\colon V_k \to V_\oplus$, т. е. $V_\oplus = \operatorname{Ker}\pi \oplus V_k$. Пусть $V'_k = \operatorname{Ker}\pi$ и $V'_j = V_j$ для $j \neq k$. Обозначим через $\mu'\colon V'_k \hookrightarrow V_\oplus$ и $\pi'\colon V_\oplus \twoheadrightarrow V'_k$ канонические вложения и проекцию прямой суммы:

$$V'_k \underset{\pi'}{\overset{\mu'}{\rightleftarrows}} V_\oplus \underset{\pi}{\overset{\mu}{\leftrightarrows}} V_k, \tag{2.6}$$

$$\pi\mu = 1, \quad \pi\mu' = 0, \tag{2.7}$$

$$\pi'\mu' = 1, \quad \pi'\mu = 0, \tag{2.8}$$

$$\mu\pi + \mu'\pi' = 1. \tag{2.9}$$

Определим отображения $V'_a\colon V'_i \to V'_j$, $a \in \overline{Q}$, $a\colon i \to j$, следующим образом: если $a \in H$, то $a\colon j \to k$, $a^*\colon k \to j$ для некоторого $j \in I$, тогда определим $V'_a\colon V_j \to V'_k$ и $V'_{a^*}\colon V'_k \to V_j$ формулами

$$V'_a = -\lambda_k(-1)^a \pi'\mu_a, \quad V'_{a^*} = \pi_a\mu'. \tag{2.10}$$

Если $a \notin H$ и $a^* \notin H$, то примем $V'_a = V_a$.

**Лемма 2.1.** *Для любых $a, b \in H$ имеем*

$$V'_{b^*}V'_a = -\lambda_k(-1)^a\delta_{ab} + V_{b^*}V_a, \tag{2.11}$$

$$\sum_{c\in H}(-1)^c V'_c V_{c^*} = 0, \tag{2.12}$$

$$\sum_{c\in H}(-1)^c V_c V'_{c^*} = 0. \tag{2.13}$$

**Доказательство.** Используя (2.9) и $\pi_b\mu_a = \delta_{ab}$, получаем

$$\begin{aligned}V'_{b^*}V'_a = -\lambda_k(-1)^a\pi_b\mu'\pi'\mu_a = -\lambda_k(-1)^a\pi_b(1-\mu\pi)\mu_a =\\ = -\lambda_k(-1)^a\delta_{ab} + \lambda_k(-1)^a\pi_b\mu\pi\mu_a =\\ = -\lambda_k(-1)^a\delta_{ab} + (-1)^a\sum_{c,d\in H}(-1)^d\pi_b\mu_c V_{c^*}V_d\pi_d\mu_a = -\lambda_k(-1)^a\delta_{ab} + V_{b^*}V_a.\end{aligned}$$

Из правых формул (2.8) и (2.7) следует

$$\sum_{c\in H}(-1)^c V'_c V_{c^*} = -\lambda_k\sum_{c\in H}\pi'\mu_c V_{c^*} = -\lambda_k\pi'\mu = 0, \tag{2.14}$$

$$\sum_{c\in H}(-1)^c V_c V'_{c^*} = \sum_{c\in H}(-1)^c V_c\pi_c\mu' = \lambda_k\pi\mu' = 0 \tag{2.15}$$

соответственно. □

Теперь покажем, что $V' = (V_i', V_a')$ является представлением алгебры $\Pi^{r_k\lambda}(Q)$. Для этого нужно проверить соотношения (1.11) для всех $i \in I$. Заметим, что из $n_{kk} = 0$ следует $(\varepsilon_k, \varepsilon_k) = 2$ и $(r_k\lambda)_k = \lambda_k - 2\lambda_k = -\lambda_k$. Соотношение (1.11) при $i = k$ доказывается следующим образом:

$$\sum_{a\colon j\to k}(-1)^a V_a' V_{a^*}' = \sum_{a\in H}(-1)^a V_a' V_{a^*}' =$$
$$= -\lambda_k \sum_{a\in H} \pi' \mu_a \pi_a \mu' = -\lambda_k \pi' \mu' = -\lambda_k = (r_k\lambda)_k,$$

где использованы $\sum\limits_{a\in H} \mu_a \pi_a = 1$ и левая формула (2.8). Для $i \neq k$ получаем $(\varepsilon_i, \varepsilon_k) = -n_{ik}$, $(r_k\lambda)_i = \lambda_i + n_{ik}\lambda_k$ и

$$\sum_{a\colon j\to i}(-1)^a V_a' V_{a^*}' = \sum_{\substack{a\in\overline{Q}, j\neq k\\ a\colon j\to i}}(-1)^a V_a V_{a^*} + \sum_{\substack{a^*\in H\\ a\colon k\to i}}(-1)^a V_a' V_{a^*}'. \tag{2.16}$$

Второй член в (2.16) имеет вид

$$\sum_{\substack{a^*\in H\\ a\colon k\to i}}(-1)^a V_a' V_{a^*}' = -\sum_{\substack{a\in H\\ a\colon i\to k}}(-1)^a V_{a^*}' V_a' = -\sum_{\substack{a\in H\\ a\colon i\to k}}(-\lambda_k + (-1)^a V_{a^*} V_a),$$

где применяется формула (2.11) для $a = b$. Замечая, что

$$\bigl|\{a \in H \mid a\colon i \to k\}\bigr| = \bigl|\{a \in Q \mid a\colon i \to k\}\bigr| + \bigl|\{a^* \in Q \mid a^*\colon i \to k\}\bigr| = n_{ik},$$

продолжим:

$$\sum_{\substack{a^*\in H\\ a\colon k\to i}}(-1)^a V_a' V_{a^*}' = n_{ik}\lambda_k - \sum_{\substack{a\in H\\ a\colon i\to k}}(-1)^a V_{a^*} V_a = n_{ik}\lambda_k + \sum_{\substack{a\in\overline{Q}\\ a\colon k\to i}}(-1)^a V_a V_{a^*}.$$

Складывая, получаем

$$\sum_{a\colon j\to i}(-1)^a V_a' V_{a^*}' = \sum_{\substack{a\in\overline{Q}\\ a\colon j\to i}}(-1)^a V_a V_{a^*} + n_{ik}\lambda_k = \lambda_i + n_{ik}\lambda_k = (r_k\lambda)_i.$$

Следовательно, $V'$ есть $\Pi^{r_k\lambda}(Q)$-модуль.

Чтобы определить функтор на морфизмах, рассмотрим морфизм $\phi\colon V \to \widetilde{V}$ между двумя $\Pi^\lambda(Q)$-модулями $V = (V_i, V_a)$ и $\widetilde{V} = (\widetilde{V}_i, \widetilde{V}_a)$, заданный отображениями $\phi_i\colon V_i \to \widetilde{V}_i$ такими, что $\phi_j V_a = \widetilde{V}_a \phi_i \ \ \forall\, a\colon i \to j$. Конструкция, описанная выше, дает $\Pi^{r_k\lambda}(Q)$-модули $V' = (V_i', V_a')$ и $\widetilde{V}' = (\widetilde{V}_i', \widetilde{V}_a')$. Положим $\phi'_i = \phi_i$ для $i \neq k$ и $\phi'_k = -\dfrac{1}{\lambda_k} \sum\limits_{b\colon j\to k} (-1)^b \widetilde{V}'_b \phi_j V'_{b^*}$. Проверим, что $\phi' = (\phi'_i)$ — морфизм $V' \to \widetilde{V}'$.

Если $a\colon i \to j$ и $i \neq k \neq j$, то $\phi'_j V'_a = \phi_j V_a = \widetilde{V}_a \phi_i = \widetilde{V}'_a \phi'_i$. Пусть $a\colon i \to k$, тогда, используя формулу (2.11), получаем

$$\phi'_k V'_a = -\frac{1}{\lambda_k} \sum_{b\colon j\to k} (-1)^b \widetilde{V}'_b \phi_j V'_{b^*} V'_a = \widetilde{V}'_a \phi_i - \frac{1}{\lambda_k} \sum_{b\colon j\to k} (-1)^b \widetilde{V}'_b \phi_j V_{b^*} V_a.$$

Докажем, что второй член равен нулю:

$$\sum_{b\colon j\to k} (-1)^b \widetilde{V}'_b \phi_j V_{b^*} = \sum_{b\in H} (-1)^b \widetilde{V}'_b \widetilde{V}_{b^*} \phi_k = 0$$

в силу (2.12). Аналогично для $a^*\colon k \to i$ имеем

$$\widetilde{V}'_{a^*} \phi'_k = -\frac{1}{\lambda_k} \sum_{b\colon j\to k} (-1)^b \widetilde{V}'_{a^*} \widetilde{V}'_b \phi_j V'_{b^*} = \phi_i V'_{a^*} - \frac{1}{\lambda_k} \sum_{b\colon j\to k} (-1)^b \widetilde{V}_{a^*} \widetilde{V}_b \phi_j V'_{b^*}.$$

Вновь второй член зануляется:

$$\sum_{b\colon j\to k} (-1)^b \widetilde{V}_b \phi_j V'_{b^*} = \sum_{b\in H} (-1)^b \phi_k V_b V'_{b^*} = 0$$

в силу (2.13). Итак, $\phi'$ — морфизм.

Обозначим через $\Pi^\lambda(Q)$-$\mathrm{Mod}$ категорию (левых) $\Pi^\lambda(Q)$-модулей.

**Определение 2.2.** Пусть $k \in I_{\text{бп}}$ и $\lambda \in \mathbb{C}^I$ такие, что $\lambda_k \neq 0$. Функтор

$$F_k^\lambda\colon \Pi^\lambda(Q)\text{-}\mathrm{Mod} \to \Pi^{r_k\lambda}(Q)\text{-}\mathrm{Mod}, \tag{2.17}$$

который $\Pi^\lambda(Q)$-модулю $V$ сопоставляет $\Pi^{r_k\lambda}(Q)$-модуль $V'$, а морфизму $\Pi^\lambda(Q)$-модулей $\phi$ сопоставляет морфизм $\Pi^{r_k\lambda}(Q)$-модулей $\phi'$, называется *функтором отражения*.

Напомним (см., например, [22]), что две категории $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$ называются *эквивалентными*, если существуют функторы $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ и $G\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ такие, что все объекты $X \in \mathcal{C}$ и $Y \in \mathcal{D}$ естественно изоморфны объектам $GF(X)$ и $FG(Y)$ соответственно (слово *естественно* означает, что при отождествлениях $GF(X) = X$ и $FG(Y) = Y$ имеем $\phi = GF(\phi)$ и $\psi = FG(\psi)$ для любых морфизмов $\phi$ в $\mathcal{C}$ и $\psi$ в $\mathcal{D}$). В этом случае объекты $X \in \mathcal{C}$ и $F(X) \in \mathcal{D}$ имеют одинаковые свойства, такие как простота, полупростота, неразложимость и пр. При этом изоморфные объекты переходят в изоморфные.

**Теорема 2.3.** *Для любых $k \in I_{\text{бп}}$ и $\lambda \in \mathbb{C}^I$, где $\lambda_k \neq 0$, функтор $F_k^\lambda$ задает эквивалентность категорий* $\Pi^\lambda(Q)$-$\mathrm{Mod}$ *и* $\Pi^{r_k\lambda}(Q)$-$\mathrm{Mod}$.

**Доказательство.** Поскольку $(r_k\lambda)_k = -\lambda_k \neq 0$ и $r_k^2(\lambda) = \lambda$, определен функтор $F_k^{r_k\lambda}\colon \Pi^{r_k\lambda}(Q)\text{-Mod} \to \Pi^\lambda(Q)\text{-Mod}$. Пусть $V' = F_k^\lambda(V)$ и $V'' = F_k^{r_k\lambda}(V')$. Рассмотрим элементы конструкции $\Pi^\lambda(Q)$-модуля $V''$ из $\Pi^{r_k\lambda}(Q)$-модуля $V'$. Пространство $V_\oplus$, вложения $\mu_a$ и проекции $\pi_a$ для этой конструкции те же, что и для конструкции $V'$ из $V$. Заменяя $\lambda_k$, $V_a$ и $V_{a^*}$ в определении (2.4) на $-\lambda_k$, $V'_a$ и $V'_{a^*}$, находим, что отображения (2.4) для конструкции $V''$ из $V'$ равны

$$\sum_{a\in H}\mu_a V'_{a^*} = \sum_{a\in H}\mu_a\pi_a\mu' = \mu', \quad -\frac{1}{\lambda_k}\sum_{a\in H}(-1)^a V'_a\pi_a = \sum_{a\in H}\pi'\mu_a\pi_a = \pi'.$$

Это означает, что диаграмма прямой суммы (2.6) для конструкции $V''$ из $V'$ имеет вид

$$V''_k = V_k \underset{\pi}{\overset{\mu}{\rightleftarrows}} V_\oplus \underset{\pi'}{\overset{\mu'}{\leftrightarrows}} V'_k. \tag{2.18}$$

Заменяя $\lambda_k \to -\lambda_k$, $\mu' \to \mu$ и $\pi' \to \pi$ в формулах (2.10), получаем

$$V''_a = \lambda_k(-1)^a\pi\mu_a = (-1)^a\sum_{b\in H}(-1)^b V_a\pi_b\mu_a = V_a, \tag{2.19}$$

$$V''_{a^*} = \pi_a\mu = \pi_a\sum_{b\in H}\mu_b V_{b^*} = V_{a^*}. \tag{2.20}$$

В итоге $V''$ совпадает с $V$ как $\Pi^\lambda(Q)$-модуль. Далее, пусть $\phi\colon V \to \widetilde{V}$ — морфизм $\Pi^\lambda(Q)$-модулей, $F_k^\lambda(\phi) = \phi'\colon V' \to \widetilde{V}'$ и $F_k^{r_k\lambda}(\phi') = \phi''\colon V \to \widetilde{V}$. Тогда $\phi''_i = \phi'_i = \phi_i$ для любого $i \neq k$ и

$$\phi''_k = -\frac{1}{(r_k\lambda)_k}\sum_{b\colon j\to k}(-1)^b\widetilde{V}''_b\phi'_j V''_{b^*} = \frac{1}{\lambda_k}\sum_{b\colon j\to k}(-1)^b\widetilde{V}_b\phi_j V_{b^*} =$$
$$= \frac{1}{\lambda_k}\sum_{b\in H}(-1)^b\widetilde{V}_b\widetilde{V}_{b^*}\phi_k = \phi_k.$$

Следовательно, тождество $F_k^{r_k\lambda}F_k^\lambda(V) = V$ есть естественный изоморфизм для $\Pi^\lambda(Q)$-модулей $V$. Заменяя $\lambda$ на $r_k\lambda$, получаем естественный изоморфизм $F_k^\lambda F_k^{r_k\lambda}(V) = V$ для $\Pi^{r_k\lambda}(Q)$-модулей $V$. □

**2.2. Функтор отражения как изоморфизм пространств модулей.** Функтор отражения $F_k^\lambda$ переводит конечномерные модули в конечномерные. Более точно, если $V$ есть $\Pi^\lambda(Q)$-модуль размерности $\alpha \in \mathbb{Z}^I_{\geqslant 0}$, то $V' = F_k^\lambda(V)$ есть $\Pi^{r_k\lambda}(Q)$-модуль размерности $s_k\alpha$. В самом деле, $\dim V'_i = \dim V_i = \alpha_i$ для $i \neq k$ и

$$\dim V'_k = \dim V_\oplus - \dim V_k = \sum_{\substack{a\in H\\ a\colon j\to k}}\dim V_j - \dim V_k = \sum_{j\neq k} n_{jk}\alpha_j - \alpha_k.$$

С другой стороны,

$$s_k\alpha = \alpha - (\alpha, \varepsilon_k)\varepsilon_k = \sum_{i\in I} \alpha_i\varepsilon_i - \left(2\alpha_k - \sum_{j\neq k} n_{jk}\alpha_j\right)\varepsilon_k, \tag{2.21}$$

или покомпонентно: $(s_k\alpha)_i = \alpha_i$ для $i \neq k$ и $(s_k\alpha)_k = \sum\limits_{j\neq k} n_{jk}\alpha_j - \alpha_k$.

Из конструкции модуля $V'$ мы не можем выделить канонический базис в $V'_k$ по базисам, определенным в пространствах $V_i$, $i \in I$. Поэтому функтор $F_k^\lambda$ не дает отображения из $\operatorname{Rep}\bigl(\Pi^\lambda(Q), \alpha\bigr)$ в $\operatorname{Rep}\bigl(\Pi^{r_k\lambda}(Q), s_k\alpha\bigr)$. Однако из теоремы 2.3 следует, что функтор $F_k^\lambda$ задает биекцию между пространствами орбит

$$\operatorname{Rep}\bigl(\Pi^\lambda(Q), \alpha\bigr)/G(\alpha) \leftrightarrow \operatorname{Rep}\bigl(\Pi^{r_k\lambda}(Q), s_k\alpha\bigr)/G(s_k\alpha), \tag{2.22}$$

но она не является диффеоморфизмом, если эти пространства не наделяются структурой многообразия. Заметим также, что для $\alpha \in \mathbb{Z}^I_{\geqslant 0}$ вектор $s_k\alpha$ в общем случае не принадлежит $\mathbb{Z}^I_{\geqslant 0}$. Следующее утверждение также является следствием теоремы 2.3.

**Утверждение 2.4.** *Пусть* $\alpha \in \mathbb{Z}^I_{\geqslant 0}$ *и* $\lambda \in \mathbb{C}^I$ *такое, что* $\lambda_k \neq 0$.

*а)** *Если* $\operatorname{Rep}\bigl(\Pi^\lambda(Q), \alpha\bigr) \neq \varnothing$, *то* $\operatorname{Rep}\bigl(\Pi^{r_k\lambda}(Q), s_k\alpha\bigr) \neq \varnothing$ *и, в частности,* $s_k\alpha \in \mathbb{Z}^I_{\geqslant 0}$.

*б) Если все модули* $V \in \operatorname{Rep}\bigl(\Pi^\lambda(Q), \alpha\bigr)$ *просты, то тогда все модули* $V \in \operatorname{Rep}\bigl(\Pi^{r_k\lambda}(Q), s_k\alpha\bigr)$ *также просты.*

Из утверждения 2.4 следует, что если $\lambda_k \neq 0$, то условие теоремы 1.5 выполнено для $\lambda$ и $\alpha$ тогда и только тогда, когда оно выполнено для $r_k\lambda$ и $s_k\alpha$. В этом случае многообразия $N_\lambda(\alpha)$ и $N_{r_k\lambda}(s_k\alpha)$ связны и гладки.

В дальнейшем будем предполагать, что $\lambda_k \neq 0$ и условие теоремы 1.5 выполнено. Тогда биективное отображение (2.22), индуцированное функтором $F_k^\lambda$, есть отображение многообразий

$$\varrho_k^{\lambda,\alpha}\colon N_\lambda(\alpha) \to N_{r_k\lambda}(s_k\alpha). \tag{2.23}$$

Выясним, как меняются функции $\operatorname{tr}_\alpha(p)$ при этом отображении. Назовем *подциклом* цикла $p = a_\ell \cdots a_2a_1$ любой цикл вида $a_{j_m} \cdots a_{j_2}a_{j_1}$, где $1 \leqslant j_1 < j_2 < \ldots < j_m \leqslant \ell$ и $0 \leqslant m \leqslant \ell$ (подцикл длины $m = 0$ — это тривиальный путь $1_i$, где $i \in I$ такое, что $a_j\colon i \to i'$ для некоторых $j = 1, \ldots, \ell$ и $i' \in I$).

*Этот пункт также можно получить из следствия 1.4 и теории систем корней.

**Лемма 2.5.** *Пусть $p = a_\ell \cdots a_2 a_1$ — цикл в $\overline{Q}$, а именно $a_j\colon i_{j-1} \to i_j$, где $j = 1, \ldots, \ell$ и $i_\ell = i_0$. Обозначим $a_{\ell+1} = a_1$.*

*а) Функция $\operatorname{tr}_{s_k\alpha}(p)_{r_k\lambda} \circ \varrho_k^{\lambda,\alpha}$ есть линейная комбинация $\operatorname{tr}_\alpha(p')_\lambda$, где $p'$ — подциклы цикла $p$. В частности, $\operatorname{tr}_{s_k\alpha}(p)_{r_k\lambda} \circ \varrho_k^{\lambda,\alpha} \in \mathbb{C}[N_\lambda(\alpha)]$.*

*б) Предположим, что $a_j \ne a_{j+1}^*$ для любого $j = 1, \ldots, \ell$, такого, что $i_j = k$. Тогда $\operatorname{tr}_{s_k\alpha}(p)_{r_k\lambda} \circ \varrho_k^{\lambda,\alpha} = \operatorname{tr}_\alpha(p)_\lambda$. В частности, это так, если $a_j \in Q$ для всех $j$ или $a_j^* \in Q$ для всех $j$.*

**Доказательство.** Рассмотрим модули $V = (V_i, V_a) \in \operatorname{Rep}\bigl(\Pi^\lambda(Q), \alpha\bigr)$ и $V' = (V_i', V_a') = F_k^\lambda(V)$. Значение функции $\operatorname{tr}_{s_k\alpha}(p)_{r_k\lambda} \circ \varrho_k^{\lambda,\alpha}$ в точке $V$ равно $\operatorname{tr}_{s_k\alpha}(p)_{r_k\lambda}(V') = \operatorname{tr}(V'_{a_\ell} \cdots V'_{a_2} V'_{a_1})$. Если $i_{j-1} \ne k$ и $i_j \ne k$, то $V'_{a_j} = V_{a_j}$. Если $j$ такое, что $i_j = k$, то из формулы (2.11) получаем

$$V'_{a_{j+1}} V'_{a_j} = V_{a_{j+1}} V_{a_j} - \lambda_k (-1)^{a_j} \delta_{a_j, a_{j+1}^*}. \tag{2.24}$$

Причем для таких $j$ имеем $i_{j-1} \ne k$ и $i_{j+1} \ne k$, где $i_{\ell+1} = i_1$, поэтому, подставляя (2.24) для этих $j$ в $\operatorname{tr}(V'_{a_\ell} \cdots V'_{a_2} V'_{a_1})$, получаем линейную комбинацию функций $\operatorname{tr}(V_{a_{j_m}} \cdots V_{a_{j_2}} V_{a_{j_1}})$ с коэффициентами, не зависящими от $V$. Если условие пункта б) этой леммы выполняется, то второй член в правой части (2.24) отсутствует и мы получаем просто $\operatorname{tr}(V_{a_\ell} \cdots V_{a_2} V_{a_1})$. □

Напомним, что аффинное многообразие $N_\lambda(\alpha)$ снабжено симплектической структурой, заданной формулой (1.17).

**Теорема 2.6.** *Отображение $\varrho_k^{\lambda,\alpha}\colon N_\lambda(\alpha) \to N_{r_k\lambda}(s_k\alpha)$ есть изоморфизм алгебраических симплектических многообразий.*

**Доказательство.** Поскольку отображение $\varrho_k^{\lambda,\alpha}$ биективно, нужно лишь доказать, что оно регулярно и сохраняет симплектическую структуру. Регулярность отображения $\varrho_k^{\lambda,\alpha}$ эквивалентна тому, что $f \circ \varrho_k^{\lambda,\alpha} \in \mathbb{C}\bigl[N_\lambda(\alpha)\bigr]$ для любого $f \in \mathbb{C}\bigl[N_{r_k\lambda}(s_k\alpha)\bigr]$. Но это следует из пункта а) леммы 2.5, поскольку согласно утверждению 1.10 алгебра $\mathbb{C}\bigl[N_{r_k\lambda}(s_k\alpha)\bigr]$ образована функциями $\operatorname{tr}_{s_k\alpha}(p)_{r_k\lambda}$ (в прил. Б также дается прямое доказательство регулярности $\varrho_k^{\lambda,\alpha}$, не основанное на утверждении 1.10).

Для доказательства сохранения симплектической структуры нужно установить равенство $(\varrho_k^{\lambda,\alpha})^* \omega_{r_k\lambda, s_k\alpha} = \omega_{\lambda,\alpha}$. Запишем его правую часть как

$$\omega_{\lambda,\alpha} = \sum_{\substack{a\in Q \\ a,a^*\notin H}} \operatorname{tr}(dV_{a^*} \wedge dV_a) + \sum_{\substack{a\in Q \\ a\in H}} \operatorname{tr}(dV_{a^*} \wedge dV_a) + \sum_{\substack{a^*\in Q \\ a\in H}} \operatorname{tr}(dV_a \wedge dV_{a^*}) =$$
$$= \sum_{\substack{a\in Q \\ a,a^*\notin H}} \operatorname{tr}(dV_{a^*} \wedge dV_a) + \sum_{a\in H} (-1)^a \operatorname{tr}(dV_{a^*} \wedge dV_a).$$

Аналогично, обозначая $V' = F_k^{\lambda}(V)$, получаем

$$(\varrho_k^{\lambda,\alpha})^* \omega_{r_k\lambda, s_k\alpha} = \sum_{\substack{a\in Q\\ a,a^*\notin H}} \operatorname{tr}(dV'_{a^*} \wedge dV'_a) + \sum_{a\in H} (-1)^a \operatorname{tr}(dV'_{a^*} \wedge dV'_a).$$

Поскольку первые члены в правых частях равны, достаточно доказать равенство вторых членов правых частей:

$$\sum_{a\in H} (-1)^a \operatorname{tr}(dV'_{a^*} \wedge dV'_a) = -\lambda_k \sum_{a\in H} \operatorname{tr}\big(\pi_a d\mu' \wedge d(\pi')\mu_a\big) = \\ = -\lambda_k \operatorname{tr}\left(d\mu' \wedge d(\pi') \sum_{a\in H} \mu_a \pi_a\right) = -\lambda_k \operatorname{tr}\big(d\mu' \wedge d\pi'\big).$$

Подставляя (2.9), получаем

$$\operatorname{tr}\big(d\mu' \wedge d\pi'\big) = \operatorname{tr}\big((\mu\pi + \mu'\pi')\, d\mu' \wedge d\pi'\big) = \\ = \operatorname{tr}\big(\pi d\mu' \wedge d(\pi')\mu\big) + \operatorname{tr}\big(\pi' d\mu' \wedge d(\pi')\mu'\big).$$

Дифференцируя (2.7) и (2.8), получаем

$$\begin{aligned} d(\pi)\mu &= -\pi d\mu, & d(\pi)\mu' &= -\pi d\mu', \\ d(\pi')\mu' &= -\pi' d\mu', & d(\pi')\mu &= -\pi' d\mu. \end{aligned} \tag{2.25}$$

Используя (2.25), (2.9) и общие формулы

$$\operatorname{tr}(xdy \wedge xdy) = 0, \quad \operatorname{tr}(d(y)x \wedge d(y)x) = 0,$$

где $x, y$ — матрично-значные функции, находим

$$\operatorname{tr}\big(d\mu' \wedge d\pi'\big) = \operatorname{tr}\big(d(\pi)\mu'\pi' \wedge d\mu\big) - \operatorname{tr}\big(d(\pi')\mu' \wedge d(\pi')\mu'\big) = \\ = \operatorname{tr}\big(d(\pi)(1-\mu\pi) \wedge d\mu\big) = \operatorname{tr}\big(d\pi \wedge d\mu\big) + \operatorname{tr}\big(\pi d\mu \wedge \pi d\mu\big) = \operatorname{tr}\big(d\pi \wedge d\mu\big).$$

В итоге, подставляя (2.4), получаем

$$\sum_{a\in H} (-1)^a \operatorname{tr}\big(dV'_{a^*} \wedge dV'_a\big) = -\lambda_k \operatorname{tr}\big(d\mu' \wedge d\pi'\big) = -\lambda_k \operatorname{tr}\big(d\pi \wedge d\mu\big) = \\ = -\sum_{a,b\in H} (-1)^a \operatorname{tr}\big(d(V_a)\pi_a \wedge \mu_b\, dV_{b^*}\big) = \\ = -\sum_{a\in H} (-1)^a \operatorname{tr}\big(dV_a \wedge dV_{a^*}\big) = \sum_{a\in H} (-1)^a \operatorname{tr}\big(dV_{a^*} \wedge dV_a\big),$$

где было применено $\pi_a \mu_b = \delta_{ab}$. □

**Замечание 2.7.** Результаты, полученные в этом разделе, обобщаются на случай $N_\lambda(\alpha) = \operatorname{Rep}\bigl(\Pi^\lambda(Q), \alpha\bigr)//G(\alpha)$, описанный в замечании 1.11. Из теоремы 2.3 следует, что функтор $F_k^\lambda$ полупростые и только полупростые модули отображает в полупростые. Следовательно, даже если условие теоремы 1.5 не выполняется, то $F_k^\lambda$ все равно индуцирует биекцию $\varrho_k^{\lambda,\alpha}\colon N_\lambda(\alpha) \to N_{r_k\lambda}(s_k\alpha)$. Она также является изоморфизмом аффинных многообразий, что доказывается аналогично (см. также утверждение Б.1). При этом $N_\lambda(\alpha)$ гладко тогда и только тогда, когда $N_{r_k\lambda}(s_k\alpha)$ гладко (если $\lambda_k \neq 0$). В этом случае изоморфизм $\varrho_k^{\lambda,\alpha}$ сохраняет симплектическую структуру.

**Замечание 2.8.** Доказательство регулярности $\varrho_k^{\lambda,\alpha}$, данное здесь, использует нетривиально доказываемые факты: теорему 1.1 и утверждение 1.10, основанное на этой теореме. В прил. Б дается элементарное доказательство регулярности $\varrho_k^{\lambda,\alpha}$ (в более общем случае, описанном в замечании 2.7).

## 3. КОЛЧАННЫЕ МНОГООБРАЗИЯ И ИНТЕГРИРУЕМЫЕ СИСТЕМЫ

Колчанные многообразия — частный случай пространств модулей препроективных алгебр. Используя их специальный вид, можно определить на них гамильтоновы системы. Функтор отражения применяется к колчанным многообразиям как к пространствам модулей и действует при этом на гамильтоновы системы.

**3.1. Колчанные многообразия.** Определим колчанные многообразия согласно работе [9].

Пусть $Q = (I, E)$ — колчан и $\zeta \in \mathbb{Z}^I_{\geqslant 0}$. Добавим еще одну новую вершину, которую обозначим $\infty$. Также для каждой вершины $i \in I$ добавим $\zeta_i$ новых ребер с началом в $\infty$ и концом в $i$. Таким образом получаем новый колчан $Q_\zeta = (I_\infty, E_\zeta)$, где

$$I_\infty = \{\infty\} \sqcup I, \qquad E_\zeta = E \sqcup \{b_{ir}\colon \infty \to i \mid i \in I,\ r = 1, \dots, \zeta_i\}. \tag{3.1}$$

Заданные векторы $\alpha \in \mathbb{Z}^I_{\geqslant 0}$ и $\lambda \in \mathbb{C}^I$ можно единственным образом расширить до векторов $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{Z}^{I_\infty}_{\geqslant 0}$ и $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{C}^{I_\infty}$ так, чтобы $\boldsymbol{\alpha}_\infty = 1$ и $\boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\alpha} = 0$:

$$\boldsymbol{\alpha} = (1, \alpha), \qquad \boldsymbol{\lambda} = (-\lambda \cdot \alpha, \lambda). \tag{3.2}$$

Поскольку $\boldsymbol{\alpha}_\infty = 1$, имеем $\mathrm{GL}(\boldsymbol{\alpha}) \simeq \mathrm{GL}(\alpha) \times \mathbb{C}^\times$ и, следовательно, $G(\boldsymbol{\alpha}) \simeq \mathrm{GL}(\alpha)$. *Колчанное многообразие* $M_\lambda(\alpha, \zeta)$ определяется как пространство модулей $N_{\boldsymbol{\lambda}}(\boldsymbol{\alpha})$ для колчана $Q_\zeta$:

$$M_\lambda(\alpha, \zeta) = \operatorname{Rep}\bigl(\Pi^{\boldsymbol{\lambda}}(Q_\zeta), \boldsymbol{\alpha}\bigr)/G(\boldsymbol{\alpha}) = \operatorname{Rep}\bigl(\Pi^{\boldsymbol{\lambda}}(Q_\zeta), \boldsymbol{\alpha}\bigr)/\mathrm{GL}(\alpha). \tag{3.3}$$

Модуль $V \in \operatorname{Rep}(\overline{Q}_\zeta, \boldsymbol{\alpha})$ принадлежит $\operatorname{Rep}(\Pi^{\boldsymbol{\lambda}}(Q_\zeta), \boldsymbol{\alpha})$ тогда и только тогда, когда выполняются условия

$$\sum_{\substack{a \in \overline{Q}_\zeta, j \in I \\ a\colon j \to i}} (-1)^a V_a V_{a^*} \equiv \sum_{\substack{a \in \overline{Q}, j \in I \\ a\colon j \to i}} (-1)^a V_a V_{a^*} + \\ + \sum_{r=1}^{\zeta_i} V_{b_{i,r}} V_{b^*_{i,r}} = \lambda_i \operatorname{id}_{V_i}, \quad i \in I. \quad (3.4)$$

Для $i = \infty$ соответствующее условие

$$\sum_{\substack{a \in \overline{Q}_\zeta, j \in I \\ a\colon j \to \infty}} (-1)^a V_a V_{a^*} \equiv -\sum_{j \in I} \sum_{r=1}^{\zeta_j} V_{b^*_{j,r}} V_{b_{j,r}} = \boldsymbol{\lambda}_\infty \equiv -\lambda \cdot \alpha \quad (3.5)$$

следует из (3.4): нужно взять след (3.4) и просуммировать по $i \in I$ с учетом формул $\sum\limits_{a \in \overline{Q}} (-1)^a \operatorname{tr}(V_a V_{a^*}) = \sum\limits_{a \in Q} \bigl(\operatorname{tr}(V_a V_{a^*}) - \operatorname{tr}(V_{a^*} V_a)\bigr) = 0$ и $\operatorname{tr}(V_{b_{i,r}} V_{b^*_{i,r}}) = V_{b^*_{i,r}} V_{b_{i,r}}$.

Будем называть вектор $\lambda \in \mathbb{C}^I$ *регулярным*, если $\lambda \cdot \alpha \neq 0$ для любого $\alpha \in \Delta(Q)$ (см. [23]).

**Лемма 3.1.** *Если вектор $\lambda \in \mathbb{C}^I$ регулярный, то любой модуль $V \in \operatorname{Rep}(\Pi^{\boldsymbol{\lambda}}(Q_\zeta), \boldsymbol{\alpha})$ прост.*

**Доказательство.** Поскольку $\dim_{\mathbb{C}} V = |\boldsymbol{\alpha}| \geqslant 1$, модуль $V$ ненулевой. Если $V$ не прост, то существует нетривиальный $\Pi^{\boldsymbol{\lambda}}(Q_\zeta)$-подмодуль $V^{(1)} \subset V$. Пусть $V^{(2)} = V/V^{(1)}$ — фактор-модуль, $\boldsymbol{\alpha}^{(1)} = \dim_{\mathbb{C}I_\infty} V^{(1)}$, $\boldsymbol{\alpha}^{(2)} = \dim_{\mathbb{C}I_\infty} V^{(2)}$. Тогда $\boldsymbol{\alpha}^{(l)} = (0, \alpha^{(l)})$ для некоторого $l \in \{1, 2\}$ и $V^{(l)}$ — $\Pi^\lambda(Q)$-модуль. Поскольку $\alpha^{(l)} \neq 0$, существует неразложимый $\mathbb{C}Q$-подмодуль $V' \subset V^{(l)}$, являющийся прямым слагаемым $\mathbb{C}Q$-модуля $V^{(l)}$. Из теоремы 1.2 следует $\alpha' := \dim_{\mathbb{C}I} V' \in \Delta(Q)$, а согласно теореме 1.3 имеем $\lambda \cdot \alpha' = 0$. Это противоречит регулярности $\lambda$. $\square$

Теперь применим теорему 1.5.

**Теорема 3.2.** *Если вектор $\lambda \in \mathbb{C}^I$ регулярный и $\operatorname{Rep}(\Pi^{\boldsymbol{\lambda}}(Q_\zeta), \boldsymbol{\alpha})$ не пусто, то колчанное многообразие $M_\lambda(\alpha, \zeta) = \operatorname{Rep}(\Pi^{\boldsymbol{\lambda}}(Q_\zeta), \boldsymbol{\alpha})/\operatorname{GL}(\alpha)$ есть связное гладкое аффинное многообразие размерности*

$$2p(\boldsymbol{\alpha}) = 2\zeta \cdot \alpha - 2q(\alpha) = 2\sum_{i \in I} \zeta_i \alpha_i + 2\sum_{a\colon i \to j} \alpha_i \alpha_j - 2\sum_{i \in I} \alpha_i^2. \quad (3.6)$$

Заметим, что из условия этой теоремы следует, что $\boldsymbol{\alpha} \in \Delta^+(Q)$. При этом $\dim M_\lambda(\alpha, \zeta) \geqslant 1$ тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{\alpha} \in \Delta^+_{\mathrm{im}}(Q_\zeta)$. В дальнейшем, если не оговорено противное, будем предполагать, что $\lambda$ регулярно и $\boldsymbol{\alpha} = (1, \alpha)$ — положительный корень. Согласно следствию 1.4 это предполагает непустоту $\operatorname{Rep}(\Pi^{\boldsymbol{\lambda}}(Q_\zeta), \boldsymbol{\alpha})$, а значит, и выполнение условия теоремы 3.2.

**3.2. Гамильтонианы на колчанных многообразиях.** Теперь зададим гамильтоновы системы на колчанных многообразиях, обобщая идеи, предложенные в [1]. Эти системы задаются пуассоново-коммутирующими гамильтонианами. Также рассмотрим более общие интегралы движения этих гамильтонианов.

Пусть $p = a_\ell \cdots a_2 a_1 1_{i_0} \in \mathbb{C}\overline{Q}$, где $a_k \colon i_{k-1} \to i_k$. Будем говорить, что $p$ — путь в $Q^*$, если $a_k^* \in Q \quad \forall\, k = 1, \ldots, \ell$, и что $p$ — цикл в $Q^*$, если к тому же $i_\ell = i_0$. Обозначим через $\mathsf{P}_{i_0, i_\ell}$ множество путей в $Q^*$ из фиксированного $i_0$ в фиксированное $i_\ell$, а множество циклов в $Q^*$ для фиксированного $i_0 = i_\ell$ — через $\mathsf{P}_{i_0} = \mathsf{P}_{i_0, i_0}$. Пусть также $\mathsf{P} = \bigsqcup\limits_{i,j \in I} \mathsf{P}_{ij}$ — множество всех путей в $Q^*$.

Пусть $V \in \operatorname{Rep}\bigl(\Pi^{\boldsymbol{\lambda}}(Q_\zeta), \boldsymbol{\alpha}\bigr)$. Для $p = a_\ell \cdots a_2 a_1 1_i \in \mathsf{P}_{ij}$ введем обозначение $V_p := V_{a_\ell} \cdots V_{a_2} V_{a_1} \operatorname{id}_{\mathbb{C}^{\alpha_i}} \in \operatorname{Hom}(\mathbb{C}^{\alpha_i}, \mathbb{C}^{\alpha_j})$. Для циклов $p$ в $Q^*$ введем функции $H_p \in \mathbb{C}\bigl[M_\lambda(\alpha, \zeta)\bigr] = \mathbb{C}\bigl[\operatorname{Rep}\bigl(\Pi^{\boldsymbol{\lambda}}(Q_\zeta), \boldsymbol{\alpha}\bigr)\bigr]^{\mathrm{GL}(\alpha)}$ формулой

$$H_p(V) = \operatorname{tr}(V_p), \quad p \in \bigsqcup_{i \in I} \mathsf{P}_i. \tag{3.7}$$

Если $p$ и $p'$ — два цикла в $Q^*$, которые отличаются циклической перестановкой ребер, то очевидно $H_p = H_{p'}$. Согласно утверждению 1.9 скобки Пуассона функций на $M_\lambda(\alpha, \zeta)$ совпадают со скобками соответствующих (инвариантных) функций на $\operatorname{Rep}\bigl(\Pi^{\boldsymbol{\lambda}}(Q_\zeta), \boldsymbol{\alpha}\bigr)$. Поскольку элементы матриц $V_{a^*}$ и $V_{b*}$ пуассоново коммутируют для любых $a, b \in Q$, получаем $\{H_p, H_{p'}\} = 0$ для любых циклов $p$ и $p'$ в $Q^*$. Так получается коммутативное семейство гамильтонианов на $M_\lambda(\alpha, \zeta)$, но в некоторых случаях его недостаточно для интегрируемости.

На пространстве $\mathsf{L}_\zeta := \bigoplus\limits_{\substack{i,j \in I \\ p \in \mathsf{P}_{ij}}} \operatorname{Hom}(\mathbb{C}^{\zeta_j}, \mathbb{C}^{\zeta_i})$ определим структуру алгебры Ли:

$$[A, B]_p = \sum_{\substack{p', p'' \in \mathsf{P} \\ p'' p' = p}} (A_{p''} B_{p'} - B_{p''} A_{p'}), \quad p \in \mathsf{P}, \tag{3.8}$$

где $A_p$ — соответствующая компонента элемента $A \in \mathsf{L}_\zeta$. Далее, имея модуль $V \in \operatorname{Rep}\bigl(\Pi^{\boldsymbol{\lambda}}(Q_\zeta), \boldsymbol{\alpha}\bigr)$, для каждой вершины $i \in I$ введем матрицы $v_i \in \operatorname{Hom}(\mathbb{C}^{\zeta_i}, \mathbb{C}^{\alpha_i})$ и $w_i \in \operatorname{Hom}(\mathbb{C}^{\alpha_i}, \mathbb{C}^{\zeta_i})$ с элементами $(v_i)_{l,r} = (V_{b_{ir}})_l$ и $(w_i)_{r,l} = (V_{b_{ir}^*})_l$. Тогда $V = (V_a, v_i, w_i)$, где $a \in \overline{Q}$ и $i \in I$. Используя эти обозначения, определим функции $I_A \in \mathbb{C}\bigl[M_\lambda(\alpha, \zeta)\bigr]$ как

$$I_A(V) = -\sum_{i,j \in I} \sum_{p \in \mathsf{P}_{ij}} \operatorname{tr}(A_p w_j V_p v_i), \quad A \in \mathsf{L}_\zeta. \tag{3.9}$$

Их скобки Пуассона рассчитаны в прил. А:

$$\{I_A, I_B\} = I_{[A,B]}, \quad A, B \in \mathsf{L}_\zeta. \tag{3.10}$$

Таким образом, получаем алгебру Ли интегралов движения для гамильтонианов (3.7):

$$\{H_p, I_A\} = 0 \tag{3.11}$$

(эта формула доказывается аналогично пуассоновой коммутативности функций $H_p$). Далее нас будут интересовать коммутативные подалгебры в алгебре Ли, состоящей из функций (3.7), (3.9) и их линейных комбинаций.

Пусть $E_r \in \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m)$ — прямоугольная матрица с элементами $(E_r)_{st} = \delta_{rs}\delta_{rt}$ (если $r > \min(n, m)$, то $E_r = 0$). Рассмотрим элементы $E_r^{(\ell)} \in \mathsf{L}_\zeta$ ($\ell \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, $r \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$) с компонентами $(E_r^{(\ell)})_p = \delta_{\ell,|p|}E_r$, где $|p|$ — длина пути $p$. Эти элементы попарно коммутируют в $\mathsf{L}_\zeta$:

$$\Big[E_r^{(k)}, E_s^{(\ell)}\Big]_p = \sum_{\substack{p',p''\in \mathsf{P}\\ p''p'=p}} \big((E_r^{(k)})_{p''}(E_s^{(\ell)})_{p'} - (E_s^{(\ell)})_{p''}(E_r^{(k)})_{p'}\big) =$$
$$= \delta_{rs} \sum_{\substack{p',p''\in \mathsf{P}\\ p''p'=p}} (\delta_{k,|p''|}\delta_{\ell,|p'|} - \delta_{\ell,|p''|}\delta_{k,|p'|})E_r = \delta_{rs}(\delta_{k+\ell,|p|} - \delta_{k+\ell,|p|})E_r = 0.$$

Здесь использован тот факт, что путь длины $k+\ell$ можно единственным способом разбить на произведение двух путей длины $k$ и $\ell$ соответственно. В итоге получаем следующую теорему.

**Теорема 3.3.** *Функции* (3.7) *и*

$$\begin{gathered} H_{\ell,r}(V) = I_{E_r^{(\ell)}}(V) = -\sum_{i,j\in I}\sum_{\substack{p\in \mathsf{P}_{ij}\\ |p|=\ell}} \mathrm{tr}\,(E_r w_j V_p v_i), \\ \ell, r \in \mathbb{Z}, \quad \ell \geqslant 0, \quad 1 \leqslant r \leqslant \max_{i\in I} \zeta_i, \end{gathered} \tag{3.12}$$

*образуют семейство пуассоново-коммутирующих гамильтонианов на колчанных многообразиях $M_\lambda(\alpha,\zeta)$:*

$$\{H_p, H_{p'}\} = 0, \quad \{H_p, H_{k,r}\} = 0, \quad \{H_{k,r}, H_{\ell,s}\} = 0. \tag{3.13}$$

**Замечание 3.4.** При $\ell = 0$ гамильтонианы (3.12) имеют следующий вид: $H_{0,r} = -\sum\limits_{i\in I}\mathrm{tr}(E_r w_i v_i)$. В силу уравнения (3.5), т. е. $-\sum\limits_{j\in I}\mathrm{tr}(w_j v_j) = -\lambda\cdot\alpha$, имеется связь $\sum\limits_r H_{0,r} = -\lambda\cdot\alpha$.

**Замечание 3.5.** Выбор гамильтонианов (3.12) не единственный. Мы так определили гамильтонианы, чтобы получить интегрируемые системы в случае циклического колчана, но в общем случае этот выбор не дает интегрируемой системы. Например, из гамильтонианов (3.12) не получается интегрируемости в случае древесных графов, поэтому для них нужно рассмотреть другую подалгебру в алгебре Ли $\mathsf{L}_\zeta$, т. е. другой набор гамильтонианов вида (3.9).

Для общих $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{C}^{I_\infty}$ и $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}^{I_\infty}$ (таких, что $\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{\alpha} = 0$) также можно определить $H_p$ и $I_A$ формулами (3.7) и (3.9), но в последней надо считать, что $v_i \in \operatorname{Hom}(\mathbb{C}^{\boldsymbol{\alpha}_\infty}\otimes\mathbb{C}^{\zeta_i}, \mathbb{C}^{\alpha_i})$, $w_i \in \operatorname{Hom}(\mathbb{C}^{\alpha_i}, \mathbb{C}^{\boldsymbol{\alpha}_\infty}\otimes\mathbb{C}^{\zeta_i})$ — матрицы с элементами $(v_i)_{l,kr} = (V_{b_{ir}})_{lk}$ и $(w_i)_{kr,l} = (V_{b_{ir}^*})_{kl}$, где $l = 1, \dots, \alpha_i$, $k = 1, \dots, \boldsymbol{\alpha}_\infty$, $r = 1, \dots, \zeta_i$. В этом случае также справедлива формула (3.10) (см. прил. А).

**3.3. Функтор отражения на колчанных многообразиях.** Выясним, как действует функтор отражения на гамильтонианах $H_p$ и интегралах движения $I_A$, заданных на колчанных многообразиях и на более общих пространствах модулей.

Заметим, что $(I_\infty)_{\text{бп}} = \{\infty\} \sqcup I_{\text{бп}}$. Поскольку $\varepsilon_i \in \Delta(Q)$, из регулярности $\lambda$ следует, что $\lambda_i = \lambda\cdot\varepsilon_i \neq 0$ для любого $i \in I_{\text{бп}}$. Поэтому при параметре $\boldsymbol{\lambda} = (-\lambda\cdot\alpha, \lambda)$ отражение допустимо в любой вершине $i \in I_{\text{бп}}$. Однако после отражения в вершине $i \in I_{\text{бп}}$ получаем $s_i\boldsymbol{\alpha} = (1, \alpha')$ и $r_i\boldsymbol{\lambda} = (-\lambda'\cdot\alpha', \lambda')$, где новый вектор $\lambda' \in \mathbb{C}^I$ уже может быть нерегулярным (если $\zeta_i \neq 0$). К тому же нет гарантии, что отражение в вершине $\infty$ допустимо.

Пусть $\boldsymbol{\lambda}', \boldsymbol{\lambda}'' \in \mathbb{C}^{I_\infty}$ и $\boldsymbol{\alpha}', \boldsymbol{\alpha}'' \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}^{I_\infty}$. Будем говорить, что пара $(\boldsymbol{\lambda}'', \boldsymbol{\alpha}'')$ получается из $(\boldsymbol{\lambda}', \boldsymbol{\alpha}')$ цепочкой допустимых отражений, если $(\boldsymbol{\lambda}'', \boldsymbol{\alpha}'')$ можно получить из $(\boldsymbol{\lambda}', \boldsymbol{\alpha}')$ некоторым конечным числом преобразований вида

$$(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\alpha}) \mapsto (r_k\boldsymbol{\lambda}, s_k\boldsymbol{\alpha}), \quad k \in (I_\infty)_{\text{бп}}, \quad \boldsymbol{\lambda}_k \neq 0. \tag{3.14}$$

Нас будет интересовать случай колчанных многообразий, т. е. когда начальная и конечная пары имеют вид (3.2) для регулярных векторов $\lambda$ (достаточно требовать регулярности этого вектора для начальной пары), но промежуточные пары могут не иметь вида (3.2). В любом случае согласно утверждению 2.4 для любой промежуточной пары $(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\alpha})$ все модули $V \in \operatorname{Rep}\big(\Pi^{\boldsymbol{\lambda}}(Q_\zeta), \boldsymbol{\alpha}\big)$ просты, следовательно, $N_{\boldsymbol{\lambda}}(\boldsymbol{\alpha})$ — гладкое многообразие.

Для каждого преобразования (3.14) теорема 2.6 дает симплектический изоморфизм $N_{\boldsymbol{\lambda}}(\boldsymbol{\alpha}) \simeq N_{r_k\boldsymbol{\lambda}}(s_k\boldsymbol{\alpha})$. Выясним теперь, как преобразуются функции $H_p$ и $I_A$ при этом изоморфизме. Для этого представим их как линейные комбинации функций $\operatorname{tr}_{\boldsymbol{\alpha}}(p)_{\boldsymbol{\lambda}}$ (см. конец п. 1.4):

$$H_p = \operatorname{tr}_{\boldsymbol{\alpha}}(p)_{\boldsymbol{\lambda}}, \qquad p \in \bigsqcup_{i\in I} \mathsf{P}_i; \tag{3.15}$$

$$I_A = -\sum_{i,j\in I}\sum_{p\in\mathsf{P}_{ij}}\sum_{r=1}^{\zeta_i}\sum_{s=1}^{\zeta_j}(A_p)_{rs}\operatorname{tr}_{\boldsymbol{\alpha}}(b_{js}^* p b_{ir})_{\boldsymbol{\lambda}}, \qquad A \in \mathsf{L}_\zeta. \tag{3.16}$$

Функция $f \in \mathbb{C}\big[N_{\boldsymbol{\lambda}}(\boldsymbol{\alpha})\big]$ переходит в $f \circ (\varrho_k^{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\alpha}})^{-1} \in \mathbb{C}\big[N_{r_k\boldsymbol{\lambda}}(s_k\boldsymbol{\alpha})\big]$. Из пункта б) леммы 2.5 следует, что функции $H_p = \mathrm{tr}_{\boldsymbol{\alpha}}(p)_{\boldsymbol{\lambda}}$ всегда переходят в $H_p = \mathrm{tr}_{s_k\boldsymbol{\alpha}}(p)_{r_k\boldsymbol{\lambda}}$.

Выясним, куда переходят слагаемые в формуле (3.16). Пусть сначала $k \neq \infty$. Для путей $p \in \mathsf{P}_{ij}$ таких, что $|p| \geqslant 1$, функции $\mathrm{tr}_{\boldsymbol{\alpha}}(b_{js}^* p b_{ir})_{\boldsymbol{\lambda}}$ переходят в $\mathrm{tr}_{s_k\boldsymbol{\alpha}}(b_{js}^* p b_{ir})_{r_k\boldsymbol{\lambda}}$. Если $|p| = 0$, то $p = 1_i$ для некоторого $i \in I$. В случае, когда $i \neq k$ или $r \neq s$, функции $\mathrm{tr}_{\boldsymbol{\alpha}}(b_{is}^* 1_i b_{ir})_{\boldsymbol{\lambda}} = \mathrm{tr}_{\boldsymbol{\alpha}}(b_{is}^* b_{ir})_{\boldsymbol{\lambda}}$ переходят в $\mathrm{tr}_{s_k\boldsymbol{\alpha}}(b_{is}^* b_{ir})_{r_k\boldsymbol{\lambda}}$. При $i = k$ и $r = s$ имеем

$$\mathrm{tr}_{\boldsymbol{\alpha}}(b_{kr}^* b_{kr})_{\boldsymbol{\lambda}} \circ (\varrho_k^{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\alpha}})^{-1}(V') = \mathrm{tr}_{\boldsymbol{\alpha}}(b_{kr}^* b_{kr})_{\boldsymbol{\lambda}}(V) = \mathrm{tr}(V_{b_{kr}^*} V_{b_{kr}}), \tag{3.17}$$

где $V' \simeq F_k^{\boldsymbol{\lambda}}(V)$. По формуле (2.24) получаем

$$\mathrm{tr}(V_{b_{kr}^*} V_{b_{kr}}) = \mathrm{tr}(V'_{b_{kr}^*} V'_{b_{kr}} + \boldsymbol{\lambda}_k) = \mathrm{tr}_{s_k\boldsymbol{\alpha}}(b_{kr}^* b_{kr})_{r_k\boldsymbol{\lambda}}(V') + \boldsymbol{\lambda}_k \boldsymbol{\alpha}_\infty. \tag{3.18}$$

В итоге $\mathrm{tr}_{\boldsymbol{\alpha}}(b_{ir}^* b_{is})_{\boldsymbol{\lambda}} \circ (\varrho_k^{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\alpha}})^{-1} = \mathrm{tr}_{s_k\boldsymbol{\alpha}}(b_{ir}^* b_{is})_{r_k\boldsymbol{\lambda}} + \delta_{ik}\delta_{rs}\boldsymbol{\lambda}_k\boldsymbol{\alpha}_\infty$ для любых $i \in I$, $r, s = 1, \dots, \zeta_i$.

Аналогично для $k = \infty$ и $p \in \mathsf{P}_i$ получаем

$$\mathrm{tr}_{\boldsymbol{\alpha}}(b_{ir}^* p b_{ir})_{\boldsymbol{\lambda}} \circ (\varrho_\infty^{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\alpha}})^{-1}(V') = \mathrm{tr}(V_p V_{b_{ir}} V_{b_{ir}^*}) = \mathrm{tr}(V'_p V'_{b_{ir}} V'_{b_{ir}^*} - \boldsymbol{\lambda}_\infty V'_p).$$

Следовательно,

$$\mathrm{tr}_{\boldsymbol{\alpha}}(b_{js}^* p b_{ir})_{\boldsymbol{\lambda}} \circ (\varrho_\infty^{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\alpha}})^{-1} = \mathrm{tr}_{s_\infty\boldsymbol{\alpha}}(b_{js}^* p b_{ir})_{r_\infty\boldsymbol{\lambda}} - \delta_{ij}\delta_{rs}\boldsymbol{\lambda}_\infty \,\mathrm{tr}_{s_\infty\boldsymbol{\alpha}}(p)_{r_\infty\boldsymbol{\lambda}}$$

для любого $p \in \mathsf{P}_{ij}$. В частности, для $p = 1_i$ имеем

$$\mathrm{tr}_{\boldsymbol{\alpha}}(b_{is}^* b_{ir})_{\boldsymbol{\lambda}} \circ (\varrho_\infty^{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\alpha}})^{-1} = \mathrm{tr}_{s_\infty\boldsymbol{\alpha}}(b_{is}^* b_{ir})_{r_\infty\boldsymbol{\lambda}} - \delta_{rs}\boldsymbol{\lambda}_\infty\boldsymbol{\alpha}_i. \tag{3.19}$$

С учетом этих формул получаем следующее утверждение.

**Утверждение 3.6.** *При отображении $f \mapsto f \circ (\varrho_k^{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\alpha}})^{-1}$ алгебра $\mathbb{C}[H_p, I_A]$, порожденная функциями* (3.7), (3.9), *и ее подалгебра $\mathbb{C}[H_p, H_{\ell,r}]$ переходят в алгебры $\mathbb{C}[H_p, I_A]$ и $\mathbb{C}[H_p, H_{\ell,r}]$ соответственно. Более точно отображение на этой алгебре имеет вид*

$$H_p \circ (\varrho_k^{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\alpha}})^{-1} = H_p, \qquad p \in \bigsqcup_{i\in I} \mathsf{P}_i, \quad k \in (I_\infty)_{\text{бп}}; \tag{3.20}$$

$$I_A \circ (\varrho_k^{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\alpha}})^{-1} = I_A - \boldsymbol{\lambda}_k\boldsymbol{\alpha}_\infty \,\mathrm{tr}(A_{1_k}), \qquad A \in \mathsf{L}_\zeta, \quad k \in I_{\text{бп}}; \tag{3.21}$$

$$I_A \circ (\varrho_\infty^{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\alpha}})^{-1} = I_A + \boldsymbol{\lambda}_\infty \sum_{i\in I} \sum_{p\in\mathsf{P}_i} \mathrm{tr}(A_p) H_p, \quad A \in \mathsf{L}_\zeta \quad (k = \infty); \tag{3.22}$$

$$H_{0,r} \circ (\varrho_k^{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\alpha}})^{-1} = H_{0,r} - \boldsymbol{\lambda}_k \boldsymbol{\alpha}_\infty, \qquad r \leqslant \zeta_k, \quad k \in I_{\text{бп}}; \tag{3.23}$$

$$H_{0,r} \circ (\varrho_k^{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\alpha}})^{-1} = H_{0,r}, \qquad r > \zeta_k, \quad k \in I_{\text{бп}}; \tag{3.24}$$

$$H_{0,r} \circ (\varrho_\infty^{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\alpha}})^{-1} = H_{0,r} + \boldsymbol{\lambda}_\infty \sum_{\substack{i\in I\\ r\leqslant\zeta_i}} \boldsymbol{\alpha}_i, \qquad \forall\, r \quad (k=\infty); \tag{3.25}$$

$$H_{\ell,r} \circ (\varrho_k^{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\alpha}})^{-1} = H_{\ell,r}, \qquad \ell \geqslant 1, \quad k \in I_{\text{бп}}; \tag{3.26}$$

$$H_{\ell,r} \circ (\varrho_\infty^{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\alpha}})^{-1} = H_{\ell,r} + \boldsymbol{\lambda}_\infty \sum_{\substack{i\in I\\ r\leqslant\zeta_i}} \sum_{\substack{p\in \mathsf{P}_i\\ |p|=\ell}} H_p, \qquad \ell \geqslant 1 \quad (k=\infty). \tag{3.27}$$

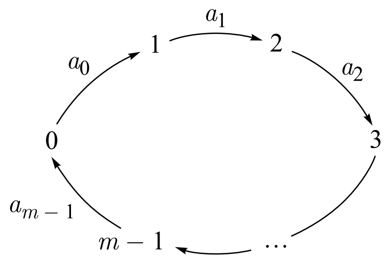
Применяя это утверждение к интересующему нас случаю, получаем следующую теорему.

**Теорема 3.7.** *Пусть* $\lambda', \lambda'' \in \mathbb{C}^I$ *— регулярные векторы (или хотя бы* $\lambda'$ *регулярен),* $\zeta, \alpha', \alpha'' \in \mathbb{Z}^I_{\geqslant 0}$, $\boldsymbol{\lambda}' = (-\lambda' \cdot \alpha', \lambda')$, $\boldsymbol{\lambda}'' = (-\lambda'' \cdot \alpha'', \lambda'')$, $\boldsymbol{\alpha}' = (1, \alpha')$, $\boldsymbol{\alpha}'' = (1, \alpha'')$. *Предположим, что пара* $(\boldsymbol{\lambda}'', \boldsymbol{\alpha}'')$ *получается из* $(\boldsymbol{\lambda}', \boldsymbol{\alpha}')$ *цепочкой допустимых отражений. Соответствующий изоморфизм колчанных многообразий* $\varrho\colon M_{\lambda'}(\alpha', \zeta) \simeq M_{\lambda''}(\alpha'', \zeta)$ *индуцирует изоморфизм пуассоновых алгебр регулярных функций* $f \mapsto f \circ \varrho^{-1}$, $f \in \mathbb{C}\big[M_{\lambda'}(\alpha', \zeta)\big]$. *Подалгебры* $\mathbb{C}[H_p, H_{\ell,r}] \subset \mathbb{C}[H_p, I_A] \subset \mathbb{C}\big[M_{\lambda'}(\alpha', \zeta)\big]$ *отображаются при этом изоморфизме в подалгебры* $\mathbb{C}[H_p, H_{\ell,r}] \subset \mathbb{C}[H_p, I_A] \subset \mathbb{C}\big[M_{\lambda''}(\alpha'', \zeta)\big]$ *соответственно. Более точно отображение на этих подалгебрах задается формулами* (3.20)–(3.27) *для каждого отражения вида* (3.14). *В частности, гамильтонианы* $H_p$ *всегда переходят в* $H_p$.

## 4. ИНТЕГРИРУЕМЫЕ СИСТЕМЫ ДЛЯ ЦИКЛИЧЕСКОГО КОЛЧАНА

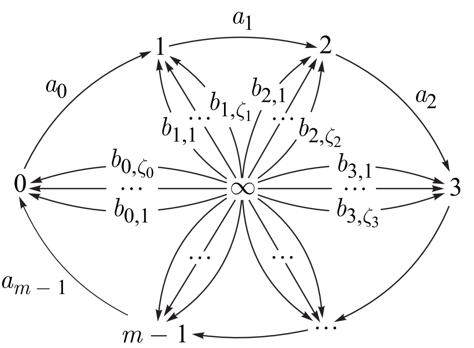
В этом разделе рассмотрим случай циклического колчана, описанный в работе [1]. После краткого рассмотрения общего случая перейдем к более детальному рассмотрению случаев частных.

**4.1. Колчанные многообразия для циклического колчана.** Циклический колчан с $m \geqslant 1$ вершинами — это колчан $Q = (I, E)$, где $I = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} = \{0, 1, \ldots, m-1\}$ и $E = \{a_i\colon i \to i+1 \mid i = 0, \ldots, m-1\}$:



Введем обозначение $|\lambda| := \sum\limits_{i\in I} \lambda_i$, где $\lambda = (\lambda_0, \ldots, \lambda_{m-1}) \in \mathbb{Z}^I_{\geqslant 0}$. Поскольку $\delta := \sum\limits_{i\in I} \varepsilon_i \in \Delta_{\mathrm{im}}(Q)$, для регулярного вектора $\lambda$ имеем $|\lambda| \neq 0$.

В этом случае $\zeta = (\zeta_0, \ldots, \zeta_{m-1}) \in \mathbb{Z}^m_{\geqslant 0}$ и колчан $Q_\zeta$ имеет вид




Для представления $V \in \mathrm{Rep}\big(\Pi^{\boldsymbol{\lambda}}(Q_\zeta), \boldsymbol{\alpha}\big)$ обозначим

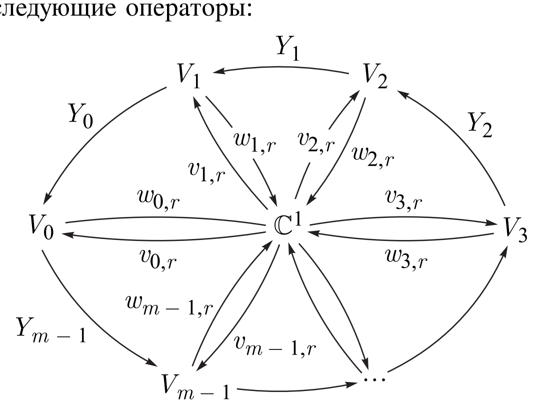
$$X_i = V_{a_i}\colon V_i \to V_{i+1}, \quad Y_i = V_{a_i^*}\colon V_{i+1} \to V_i, \tag{4.1}$$

где $V_i = \mathbb{C}^{\alpha_i}$. Тогда уравнения (1.11) принимают вид

$$X_{i-1}Y_{i-1} - Y_iX_i + v_iw_i = \lambda_i \,\mathrm{id}_{V_i}, \quad i = 0, 1, \ldots, m-1, \tag{4.2}$$

$$\sum_{i=0}^{m-1} \mathrm{tr}\,(w_iv_i) = \lambda \cdot \alpha, \tag{4.3}$$

причем (4.3) следует из (4.2). Интегралы движения, введенные в п. 3.2, выражаются через следующие операторы:




где $v_{i,r} = V_{b_{i,r}}$, $w_{i,r} = V_{b^*_{i,r}}$, $r = 1, \ldots, \zeta_i$.

Заметим, что в случае циклического колчана существует единственный цикл $p \in \mathsf{P}_i$ длины $m$, обозначим его $p_i$. Тогда $\mathsf{P}_i = \{p_i^k \mid k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}\}$ (где $p_i^0 = 1_i$), т. е. возможные длины циклов кратны $m$ и цикл $p \in \mathsf{P}_i$ длины $mk$ единственный для каждого $k$. При этом циклы $p_i^k \in \mathsf{P}_i$ и $p_j^k \in \mathsf{P}_j$ отличаются циклической перестановкой. Это означает, что множество гамильтонианов (3.7) сводится к набору

$$H_{mk}(V) = \operatorname{tr}(V_{p_0^k}) = \operatorname{tr}(V_{p_0}^k) = \operatorname{tr}(Y_0 Y_1 \cdots Y_{mk-1}), \quad k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}. \tag{4.4}$$

Аналогично, обозначая через $p_{ij}$ наикратчайший из путей $p \in \mathsf{P}_{ij}$, получаем $\mathsf{P}_{ij} = \{p_{ij} p_i^k = p_j^k p_{ij} \mid k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}\}$. Таким образом, получаем

$$\begin{gathered} H_{\ell,r}(V) = -\sum_{i\in I} \operatorname{tr}\left(E_r w_{i-\ell} V_{p_{i,i-\ell}} V_{p_i}^k v_i\right) = -\sum_{i\in I} w_{i-\ell,r} Y_{i-\ell} \cdots Y_{i-2} Y_{i-1} v_{i,r}, \\ \ell \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}, \quad r \leqslant \min\left(\zeta_i, \zeta_{i-\ell}\right), \end{gathered} \tag{4.5}$$

где $k = (\ell - |p_{i,i-\ell}|)/m$ — целая часть отношения $\ell/m$. Суммируя гамильтонианы $H_{mk,r}$ по $r = 1, \ldots, \max\limits_{i\in I}\{\zeta_i\}$ и используя (4.2), получаем

$$\begin{aligned} \sum_{r\geqslant 1} H_{mk,r}(V) = -\sum_{i\in I} \operatorname{tr}(w_i V_{p_i}^k v_i) = -\sum_{i\in I} \operatorname{tr}(V_{p_i}^k v_i w_i) = \\ = \sum_{i\in I} \operatorname{tr}(V_{p_i}^k X_{i-1} Y_{i-1} - V_{p_i}^k Y_i X_i - \lambda_i V_{p_i}^k) = \\ = \sum_{i\in I} \operatorname{tr}(V_{a_i^*} V_{p_{i+1}}^k X_i) - \sum_{i\in I} \operatorname{tr}(V_{p_i}^k V_{a_i^*} X_i) - \sum_{i\in I} \lambda_i \operatorname{tr}(V_{p_i}^k) = -|\lambda|\, H_{mk}(V), \end{aligned}$$

где использовано $a_i^* p_{i+1}^k = p_{i+1,i} p_{i+1}^k = p_i^k p_{i+1,i} = p_i^k a_i^*$. Поскольку $|\lambda| \neq 0$, гамильтонианы (4.4) выражаются через гамильтонианы (4.5):

$$H_{mk} = -\frac{1}{|\lambda|} \sum_{r\geqslant 1} H_{mk,r}. \tag{4.6}$$

Формула (4.6), в частности, показывает, что в тривиальном случае $\zeta = 0$ не только $H_{\ell,r} = 0$, но даже гамильтонианы $H_{mk}$ равны нулю. Это значит, что рассмотрение конструкции пространств модулей для самого циклического колчана без дополнительных ребер бессмысленно с точки зрения гамильтоновых систем.

Элементы $A \in \mathsf{L}_\zeta$ имеют компоненты $A_{(i,\ell)} := A_p$, где $i \in I$, $\ell \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, и $p \in \mathsf{P}_{i,i-\ell}$ такой, что $|p| = \ell$, т. е. $p = p_{i,i-\ell} p_i^k$, где $k = (\ell - |p_{i,i-\ell}|)/m$. Коммутатор в $\mathsf{L}_\zeta$ дается формулой

$$[A, B]_{(i,\ell)} = \sum_{\ell'=0}^{\ell} \left(A_{(i-\ell',\ell-\ell')} B_{(i,\ell')} - B_{(i-\ell',\ell-\ell')} A_{(i,\ell')}\right). \tag{4.7}$$

Интегралы движения (3.9) принимают вид

$$I_A(V) = -\sum_{i=0}^{m-1}\sum_{\ell=0}^{\infty}\operatorname{tr}(A_{(i,\ell)}w_{i-\ell}Y_{i-\ell}\cdots Y_{i-1}v_i). \tag{4.8}$$

В завершение этого раздела введем обозначения, которые будут использованы в разд. 5. Пусть $\mathbf{V} := \bigoplus\limits_{i=0}^{m-1} V_i$ — прямая сумма с каноническими вложениями $\mu_i\colon V_i \hookrightarrow \mathbf{V}$ и проекциями $\pi_i\colon \mathbf{V} \twoheadrightarrow V_i$. Обозначим

$$\mathbf{X} = \sum_{i=0}^{m-1}\mu_{i+1}\circ X_i\circ\pi_i, \quad \mathbf{Y} = \sum_{i=0}^{m-1}\mu_i\circ Y_i\circ\pi_{i+1}, \tag{4.9}$$

$$\mathbf{v}_i = \mu_i v_i, \qquad \mathbf{w}_i = w_i\pi_i, \tag{4.10}$$

где $i \in I$. Матрицы

$$\mathbf{X},\mathbf{Y} \in \operatorname{End}(\mathbf{V}), \quad \mathbf{v}_i \in \operatorname{Hom}(\mathbb{C}^{\zeta_i},\mathbf{V}), \quad \mathbf{w}_i \in \operatorname{Hom}(\mathbf{V},\mathbb{C}^{\zeta_i}) \tag{4.11}$$

имеют вид (4.9), (4.10) для некоторых $X_i, Y_i, v_i, w_i$ тогда и только тогда, когда

$$\pi_j\mathbf{X}\mu_i = 0, \quad \pi_i\mathbf{Y}\mu_j = 0 \ \text{ при } j \neq i+1; \tag{4.12}$$

$$\pi_j\mathbf{v}_i = 0, \quad \mathbf{w}_i\mu_j = 0 \ \text{ при } j \neq i. \tag{4.13}$$

Соотношение (4.2) эквивалентно

$$[\mathbf{X},\mathbf{Y}] + \sum_{i\in I}\mathbf{v}_i\mathbf{w}_i = \sum_{i\in I}\lambda_i\mu_i\pi_i. \tag{4.14}$$

Таким образом, точка $M_\lambda(\alpha,\zeta)$ задается $(2m+2)$-матрицами (4.11), удовлетворяющими (4.12), (4.13), (4.14), по модулю преобразований

$$\mathbf{X} \mapsto \mathbf{g}\mathbf{X}\mathbf{g}^{-1}, \quad \mathbf{Y} \mapsto \mathbf{g}\mathbf{Y}\mathbf{g}^{-1}, \quad \mathbf{v} \mapsto \mathbf{g}\mathbf{v}, \quad \mathbf{w} \mapsto \mathbf{w}\mathbf{g}^{-1}, \tag{4.15}$$

где $\mathbf{g} = \sum\limits_{i\in I}\mu_i g_i\pi_i$, $g_i \in \mathrm{GL}(\alpha_i,\mathbb{C})$. Функции (4.4), (4.5), (4.8) в этих терминах имеют вид

$$H_{mk}(V) = \frac{1}{m}\operatorname{tr}_{\mathbf{V}}(\mathbf{Y}^{mk}), \tag{4.16}$$

$$H_{\ell,r}(V) = -\sum_{i\in I}\operatorname{tr}(E_r\mathbf{w}_{i-\ell}\mathbf{Y}^{\ell}\mathbf{v}_i), \tag{4.17}$$

$$I_A(V) = -\sum_{i\in I}\sum_{\ell=0}^{\infty}\operatorname{tr}(A_{(i,\ell)}\mathbf{w}_{i-\ell}\mathbf{Y}^{\ell}\mathbf{v}_i). \tag{4.18}$$

**4.2. Случай $m = 1$, $\zeta = 1$: пространства Калоджеро–Мозера.** Пусть $m = 1$. В этом случае векторы $\zeta$ и $\alpha$ имеют по одной компоненте $\zeta_0 = d$ и $\alpha_0 = n$, где $d, n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$. Также пусть $d = 1$. Тогда колчаны $Q$ и $Q_\zeta$ имеют вид

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[loop above, "a_0"] \end{tikzcd} \qquad\qquad \begin{tikzcd} \infty \arrow[r, "b_{0,1}"] & 0 \arrow[loop above, "a_0"] \end{tikzcd}$$

Матрицы $X = X_0, Y = Y_0 \in \operatorname{End}(\mathbb{C}^n)$, $v = v_{0,1} \in \mathbb{C}^n$, $w = w_{0,1} \in (\mathbb{C}^n)^*$ удовлетворяют условию $[X, Y] + vw = \lambda \operatorname{id}_{\mathbb{C}^n}$. Поскольку $\lambda \neq 0$, перенормировкой $Y$ и $w$ можно достичь $\lambda = 1$. Четверка $(X, Y, v, w)$, удовлетворяющая условию

$$[X, Y] + vw = \operatorname{id}_{\mathbb{C}^n}, \tag{4.19}$$

задает точку многообразия $\operatorname{Rep}\bigl(\Pi^{\boldsymbol{\lambda}}(Q_\zeta, \boldsymbol{\alpha})\bigr)$, где $\boldsymbol{\lambda} = (-n, 1)$, $\zeta = 1$, $\boldsymbol{\alpha} = (1, n)$. Группа $\mathrm{GL}(\alpha) = \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ действует на этом многообразии как

$$g\colon (X, Y, v, w) \mapsto (gXg^{-1}, gYg^{-1}, gv, wg^{-1}), \quad g \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}). \tag{4.20}$$

Многообразие четверок $(X, Y, v, w) \in \bigl(\operatorname{End}(\mathbb{C}^n)\bigr)^2 \times (\mathbb{C}^n) \times (\mathbb{C}^n)^*$, удовлетворяющих (4.19), профакторизованное по действию (4.20), называется *пространством Калоджеро–Мозера* [5] и обозначается $\mathcal{C}_n$. (Многообразие $\mathcal{C}_n$ изоморфно фактор-многообразию пар $(X, Y)$ таких, что ранг $[X, Y] - \operatorname{id}_{\mathbb{C}^n}$ равен 1, по действию $g\colon (X, Y) \mapsto (gXg^{-1}, gYg^{-1})$ группы $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$.) Таким образом, колчанное многообразие в рассматриваемом случае — это $M_\lambda(\alpha, \zeta) = M_\lambda(n, 1) \simeq M_1(n, 1) = \mathcal{C}_n$. Ввиду формулы (4.6) гамильтонова система на $\mathcal{C}_n$ задается функциями $H_k(V) = \operatorname{tr}(Y^k)$. Каждый гамильтониан $H_k$ определяет поток $f = f(t_k)$ уравнением $(\partial/\partial t_k) f = \{H_k, f\}$. Явно его можно задать формулами

$$X(t_k) = X - kt_k Y^{k-1}, \quad Y(t_k) = Y, \quad v(t_k) = v, \quad w(t_k) = w, \tag{4.21}$$

где $(X, Y, v, w)$ — четверка, задающая начальную точку. Поскольку гамильтонианы $H_k$ пуассоново коммутируют, уравнения потока, которые они задают, совместимы. Решение получающейся системы уравнений дается формулой

$$X(t) = X - \sum_{k \geqslant 1} kt_k Y^{k-1}, \tag{4.22}$$

где $t = (t_1, t_2, \dots) \in \bigoplus_{k \geqslant 1} \mathbb{C}$, а $Y$, $v$ и $w$ при этом постоянны.

Пусть $\mathcal{C}'_n \subset \mathcal{C}_n$ — подмножество точек, для которых $X$ диагонализуется. Тогда в точке, принадлежащей $\mathcal{C}'_n$, после некоторого преобразования (4.20) имеем

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & x_n \end{pmatrix}, \tag{4.23}$$

где $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{C}$. При этом условие (4.19) примет вид

$$(x_a - x_b)Y_{ab} + v_a w_b = \delta_{ab}, \quad a, b = 1, \dots, n. \tag{4.24}$$

Для $a = b$ это дает $v_a \neq 0$ и $w_a = 1/v_a$. Применяя преобразование (4.20) с матрицей $g = \operatorname{diag}(v_1^{-1}, \dots, v_n^{-1})$, получаем новую четверку $(X, Y, v, w)$ с тем же $X$ и

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w = (1, \dots, 1). \tag{4.25}$$

Из уравнения (4.24) для $a \neq b$ теперь получаем $Y_{ab} = -\dfrac{1}{x_a - x_b}$, следовательно,

$$Y = \begin{pmatrix} p_1 & & -(x_a - x_b)^{-1} \\ & \ddots & \\ -(x_b - x_a)^{-1} & & p_n \end{pmatrix}, \tag{4.26}$$

где $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{C}$ — произвольны. В частности, мы доказали, что если матрица $X$ диагонализуема, то все ее собственные числа $x_1, \dots, x_n$ различны. Из формулы (3.6) получаем $\dim \mathcal{C}_n = \dim M_\lambda(n, 1) = 2n$. Отсюда, в частности, следует, что $\{x_1, \dots, x_n; p_1, \dots, p_n\}$ — локальные координаты на $\mathcal{C}_n$. Подставляя формулы (4.23), (4.25) и (4.26) в (1.17), получаем

$$\omega_{\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\alpha}} = \operatorname{tr}(dY \wedge dX) + dw \wedge dv = \sum_{a=1}^{n} dp_a \wedge dx_a. \tag{4.27}$$

Это означает, что $\{x_1, \dots, x_n; p_1, \dots, p_n\}$ — координаты Дарбу.

Гамильтонианы (или, точнее, их ограничения на $\mathcal{C}_n'$) в этих координатах принимают вид

$$H_1 = \sum_{a=1}^{n} p_a, \tag{4.28}$$

$$H_2 = \sum_{a=1}^{n} p_a^2 - 2\sum_{a<b} (x_a - x_b)^{-2}, \tag{4.29}$$

$$H_k = \sum_{a=1}^{n} p_a^k + \dots, \tag{4.30}$$

где многоточие обозначает более низкие члены по степеням $p_1, \dots, p_n$. Из алгебраической независимости функций $\sum\limits_{a=1}^{n} p_a^k$, $k = 1, \dots, n$ следует алгебраическая независимость $H_k$, $k = 1, \dots, n$. Поскольку гамильтонианы $H_k$ к тому же пуассоново коммутируют, они определяют интегрируемую систему. Она называется *системой Калоджеро–Мозера* (типа $A_{n-1}$), а матрица (4.26), следы степеней которой дают гамильтонианы, называется *матрицей Лакса* этой системы.

Фазовым пространством системы Калоджеро–Мозера является кокасательное расслоение $T^*\mathbb{C}^n_{\mathrm{reg}}$ к аффинному многообразию

$$\mathbb{C}^n_{\mathrm{reg}} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n \mid x_i \neq x_j \ \forall i \neq j\}. \tag{4.31}$$

Из-за того, что гамильтонианы симметричны, фазовым пространством можно считать фактор $T^*\mathbb{C}^n_{\mathrm{reg}}/S_n$, где $S_n$ — симметрическая группа, элементы которой одновременно переставляют: $x_1, \dots, x_n$ и $p_1, \dots, p_n$.

Так как собственные числа $x_1, \dots, x_n$ различны и определены с точностью до перестановки, получаем $\mathcal{C}'_n \simeq T^*\mathbb{C}^n_{\mathrm{reg}}/S_n$. Таким образом, пространство Калоджеро–Мозера $\mathcal{C}_n$ — это пополнение фазового пространства системы Калоджеро–Мозера.

Точки, с помощью которых происходит это пополнение, (элементы множества $\mathcal{C}_n \backslash \mathcal{C}'_n$) соответствуют случаям недиагонализуемого $X$. Тогда матрицу $X$ можно привести к жордановой форме, причем разные жордановы блоки будут отвечать разным собственным числам. Эти случаи условно интерпретируются как столкновения частиц в комплексной плоскости. Позже увидим, что добавление этих случаев находит свое применение для описания решений уравнения КП и его иерархии (см. п. 5.1).

**Пример 4.1.** Рассмотрим случай $n = 2$. Тогда точки множества $\mathcal{C}_2 \backslash \mathcal{C}'_2$ имеют следующий вид:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ 0 & x_1 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & a \end{pmatrix}, \qquad v = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad w = (0, 1), \tag{4.32}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ 0 & x_1 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} a & b \\ -1 & a \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w = (2, 0), \tag{4.33}$$

где $x_1, a, b$ — произвольные комплексные числа.

**4.3. Случай $m = 1$ с общим $\zeta$: системы Гиббонса–Хермсена.** Пусть все еще $m = 1$, но как $\alpha_0 = n$, так и $\zeta_0 = d$ — любые натуральные числа: $n, d \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$ (мы не рассматриваем тривиальные случаи $n = 0$ и $d = 0$). Тогда колчан $Q_\zeta$ имеет вид

$$\begin{tikzcd} \infty \arrow[r, bend left, "b_{0,1}"] \arrow[r, bend right, "b_{0,d}"'] \arrow[r, "\cdots" description] & 0 \arrow[loop above, "a_0"] \end{tikzcd}$$

Матрицы $X = X_0, Y = Y_0 \in \operatorname{End}(\mathbb{C}^n)$, $v_{0,r} \in \mathbb{C}^n$, $w_{0,r} \in (\mathbb{C}^n)^*$ удовлетворяют условию

$$[X, Y] + \sum_{r=1}^{d} v_{0,r} w_{0,r} = \lambda \operatorname{id}_{\mathbb{C}^n}. \tag{4.34}$$

Поскольку $\mathsf{P} = \mathsf{P}_0 = \{(a_0^*)^k \mid k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}\}$, алгебра Ли $\mathsf{L}_\zeta$ состоит из элементов $A = (A_{(k)})_{k \geqslant 0}$, где $A_{(k)} := A_{(0,k)} \in \operatorname{End}(\mathbb{C}^d)$. Отображение $A \mapsto \sum\limits_{k=0}^{\infty} A_{(k)} t^k$ задает изоморфизм алгебр Ли $\mathsf{L}_\zeta \simeq \mathfrak{gl}(d, \mathbb{C}) \otimes \mathbb{C}[t]$. Если $\mathfrak{h}$ — максимальная коммутативная подалгебра в $\mathfrak{gl}(d, \mathbb{C})$, то $\mathfrak{h} \otimes \mathbb{C}[t]$ — максимальная коммутативная подалгебра в $\mathfrak{gl}(d, \mathbb{C}) \otimes \mathbb{C}[t]$. С точностью до автоморфизма в качестве максимальной коммутативной подалгебры $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{gl}(d, \mathbb{C})$ можно выбрать алгебру диагональных матриц, тогда подалгебре $\mathfrak{h} \otimes \mathbb{C}[t]$ будет соответствовать подалгебра в $\mathsf{L}_\zeta$, натянутая на элементы $E_r^{(k)}$, $k \geqslant 0$, $r = 1, \ldots, d$. Это объясняет выбор гамильтонианов (3.12) среди всех интегралов $I_A$ для этого примера.

Пусть $\varphi_a \in \mathbb{C}^d$, $\psi_a \in (\mathbb{C}^d)^*$ — векторы и ковекторы, занумерованные $a = 1, \ldots, n$ и имеющие компоненты

$$(\varphi_a)_r = (v_{0,r})_a, \quad (\psi_a)_r = (w_{0,r})_a, \quad r = 1, \ldots, d. \tag{4.35}$$

Тогда точка колчанного многообразия $M_\lambda(\alpha, \zeta) = M_\lambda(n, d)$ определяется набором матриц $(X, Y, \varphi_1, \ldots, \varphi_n, \psi_1, \ldots, \psi_n)$, удовлетворяющих условию (4.34). Пусть $U \subset M_\lambda(n, d)$ — подмножество точек с диагонализуемой $X$:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & x_n \end{pmatrix}. \tag{4.36}$$

Тогда условие (4.34) записывается в виде

$$(x_a - x_b) Y_{ab} + \psi_b \varphi_a = \lambda \delta_{ab}, \tag{4.37}$$

где $\psi_b \varphi_a = \sum\limits_{r=1}^{d} (\varphi_a)_r (\psi_b)_r$. Пусть $U' \subset U$ — подмножество (тоже всюду плотное), где $(\varphi_a)_1 \neq 0$ для всех $a = 1, \ldots, n$. Для точек $U'$, если рассуждать, как выше, можно считать, что $(\varphi_a)_1 = 1$ для всех $a = 1, \ldots, n$. Полагая $a = b$ в (4.37), получаем $(\psi_a)_1 = \lambda - \sum_{r=2}^{d} (\varphi_a)_r (\psi_a)_r$. Аналогично предыдущему случаю имеем

$$Y_{aa} = p_a, \quad Y_{ab} = -\frac{\psi_b \varphi_a}{x_a - x_b}, \quad a \neq b, \tag{4.38}$$

где $p_1, \ldots, p_n$ — произвольные комплексные числа. Из формулы (3.6) получаем $\dim \mathcal{C}_n = \dim M_\lambda(n, d) = 2nd$. Локальные координаты

$$\big\{x_a, (\varphi_a)_2, \ldots, (\varphi_a)_d; p_a, (\psi_a)_2, \ldots, (\psi_a)_d\big\}_{a=1}^{n} \tag{4.39}$$

являются координатами Дарбу:

$$\omega_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\alpha}} = \operatorname{tr}(dY \wedge dX) + \sum_{r=1}^{d} dw_{0,r} \wedge dv_{0,r} = \\ = \sum_{a=1}^{n} dp_a \wedge dx_a + \sum_{a=1}^{n} \sum_{r=2}^{d} d(\psi_a)_r \wedge d(\varphi_a)_r. \tag{4.40}$$

В этих координатах гамильтонианы (их ограничения на $U$) имеют вид

$$H_1 = \sum_{a=1}^{n} p_a, \tag{4.41}$$

$$H_2 = \sum_{a=1}^{n} p_a^2 - 2 \sum_{a<b} \frac{(\psi_a \varphi_b)(\psi_b \varphi_a)}{(x_a - x_b)^2}, \tag{4.42}$$

$$H_k = \sum_{a=1}^{n} p_a^k + \ldots \tag{4.43}$$

Числитель в выражении для $H_2$ можно интерпретировать как взаимодействие спинов: $(\psi_a \varphi_b)(\psi_b \varphi_a) = \operatorname{tr}(s_a s_b)$, где $s_a = \varphi_a \psi_a$ — операторы спина. Таким образом, сопряженные координаты $(\varphi_a)_r$, $(\psi_a)_r$ можно назвать спиновыми переменными. Гамильтонианы $H_k$ определяют интегрируемую систему, которая была введена в работе [10]. Она называется *системой Гиббонса–Хермсена* или *спиновой системой Калоджеро–Мозера* типа $A_{n-1}$. Многообразие $M_\lambda(n, d)$ есть (пополненное) фазовое пространство этой системы.

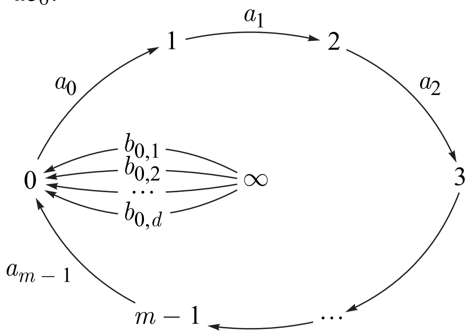
В работе [10] также рассмотрены более общие интегралы

$$J_k(T) = \operatorname{tr}(T w_0 Y^k v_0), \quad T \in \operatorname{End}(\mathbb{C}^d). \tag{4.44}$$

Их линейные комбинации формируют семейство интегралов (3.9) в этом случае:

$$I_A = -\sum_{k \geqslant 0} J(A_{(k)}), \quad A \in \mathsf{L}_\zeta. \tag{4.45}$$

**4.4. Случай $\zeta = (d, 0, \ldots, 0)$.** Рассмотрим теперь случай общего $m$. Предположим сначала, что в колчане $Q_\zeta$ все ребра, выходящие из вершины $\infty$, входят в какую-то одну вершину $i \in I$. Без потери общности можно считать, что $i = 0$, т. е. $\zeta = d\varepsilon_0$:




Для любого $A \in \mathsf{L}_{d\varepsilon_0}$ имеем $A_p \neq 0$, только если $p \in \mathsf{P}_0$. Аналогично предыдущему случаю получаем $\mathsf{P}_0 = \{p_0^k \mid k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}\}$. Следовательно, $\mathsf{L}_{d\varepsilon_0}$ состоит из элементов $A = (A_{(k)})_{k \geqslant 0}$, где $A_{(k)} := A_{(0,mk)} \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^d)$. Снова имеем $\mathsf{L}_{d\varepsilon_0} \simeq \mathfrak{gl}(d, \mathbb{C}) \otimes \mathbb{C}[t]$, а предыдущее рассуждение дает объяснение выбора гамильтонианов (3.12) и в этом случае.

Таким образом, ненулевыми гамильтонианами являются

$$H_{mk,r} = -w_{0,r}(Y_0 \cdots Y_{m-1})^k v_{0,r}. \tag{4.46}$$

Рассмотрим случай $\alpha = n\delta$, где $\delta = \varepsilon_0 + \ldots + \ldots \varepsilon_{m-1}$. Тогда имеем $\boldsymbol{\alpha} = (1, n\delta) \in \Delta^+_{\mathrm{im}}(Q_{d\varepsilon_0})$ и $\boldsymbol{\lambda} = (-n|\lambda|, \lambda)$. По формуле (3.6) получаем $\dim M_\lambda(\alpha, \zeta) = \dim M_\lambda(n\delta, d\varepsilon_0) = 2nd$. Локальные координаты строятся, как в п. 4.3. В точке общего положения матрица $X_{m-1} \cdots X_1 X_0$ невырождена и диагонализуема с собственными числами $x_1^m, \ldots, x_n^m$ для некоторых $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$. Применим преобразование

$$g = (g_0, g_1, \ldots, g_{m-1}) \in \mathrm{GL}(n\delta) \tag{4.47}$$

такое, что $g_0 \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ диагонализует эту матрицу:

$$X_{m-1} \cdots X_1 X_0 \mapsto \mathrm{diag}\,(x_1^m, \ldots, x_n^m). \tag{4.48}$$

Поскольку матрицы $X_{m-1}, \ldots, X_1$ не вырождены, можно последовательным подбором $g_{m-1}, \ldots, g_1 \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ сделать их любыми невырожденными матрицами, в частности:

$$X_i \mapsto \mathrm{diag}\,(x_1, \ldots, x_n), \quad i = 1, \ldots, m-1. \tag{4.49}$$

Тогда из (4.48) и (4.49) следует

$$X_0 \mapsto \mathrm{diag}\,(x_1, \ldots, x_n). \tag{4.50}$$

Пусть, как и раньше, $\varphi_a \in \mathbb{C}^d$ и $\psi_a \in (\mathbb{C}^d)^*$ с компонентами

$$(\varphi_a)_r = (v_{0,r})_a, \quad (\psi_a)_r = (w_{0,r})_a, \quad r = 1, \dots, d. \tag{4.51}$$

Суммируя диагональные элементы в (4.2) по $i \in I$, где $v_i = 0, w_i = 0$ при $i \neq 0$, получаем $\psi_a \varphi_a = |\lambda|$. В точке общего положения имеем $(\varphi_a)_1 \neq 0$ $\forall\, a = 1, \dots, n$. Тогда множество переменных $x_a$ достраивается до локальных координат

$$\big\{x_a, (\varphi_a)_2, \dots, (\varphi_a)_d; p_a, (\psi_a)_2, \dots, (\psi_a)_d\big\}_{a=1}^{n}, \tag{4.52}$$

для которых

$$(X_i)_{ab} = x_a \delta_{ab}, \tag{4.53}$$

$$(Y_i)_{aa} = \frac{1}{m} p_a + \frac{1}{x_a} \left( \sum_{l=1}^{m-1} \frac{m-l}{m} \lambda_l - \sum_{l=1}^{i} \lambda_l \right), \tag{4.54}$$

$$(Y_i)_{ab} = -\frac{x_a^i x_b^{m-i-1}}{x_a^m - x_b^m} \psi_b \varphi_a, \quad a \neq b, \tag{4.55}$$

$$(\varphi_a)_1 = 1, \quad (\psi_a)_1 = |\lambda| - \sum_{r=2}^{d} (\varphi_a)_r (\psi_a)_r, \tag{4.56}$$

где $i = 0, \dots, m-1$, $a, b = 1, \dots, n$ (формулы (4.54), (4.55) получаются из (4.2), см. [1]). Координаты (4.52) также являются координатами Дарбу:

$$\omega_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\alpha}} = \sum_{i \in I} \operatorname{tr}(dY_i \wedge dX_i) + \sum_{r=1}^{d} dw_{0,r} \wedge dv_{0,r} = \\ = \sum_{a=1}^{n} dp_a \wedge dx_a + \sum_{a=1}^{n} \sum_{r=2}^{d} d(\psi_a)_r \wedge d(\varphi_a)_r. \tag{4.57}$$

**Замечание 4.2.** Замены вида $p_a \to p_a + c_a x_a^{-1}$, где $c_a$ — постоянные (или даже функции от $x_a$) не меняют вид симплектической формы (4.57), но они не могут обнулить коэффициент при $x_a^{-1}$ в формуле (4.54), поскольку он зависит от $i$. Этот коэффициент выбран так, чтобы $\sum\limits_{i \in I} (Y_i)_{aa} = p_a$. Тогда переменные $p_a$ интерпретируются как импульсы частиц с координатами $x_a$ (см. примеры ниже). Для такого выбора гамильтонианы $H_{mk}$ имеют вид $m^{-mk} \sum\limits_{a=1}^{n} p_a^{mk} + O(|p|^{mk-2})$, т. е. члены порядка $mk-1$ по импульсам отсутствуют.

Используя координаты (4.52), можно доказать следующую теорему [1].

**Теорема 4.3.** *Гамильтонианы*

$$H_{mk,r} \in \mathbb{C}\big[M_\lambda(n\delta, d\varepsilon_0)\big], \quad k = 1, \dots, n, \quad r = 1, \dots, d, \tag{4.58}$$

*функционально независимы. Следовательно, они образуют интегрируемую систему на колчанном многообразии* $M_\lambda(n\delta, d\varepsilon_0)$.

**Пример 4.4.** При $m = 1$ получаем системы Гиббонса–Хермсена, подробно описанные в п. 4.3.

**Пример 4.5.** При $m = 2$ получаем $B_n$-аналог системы Гиббонса–Хермсена с квадратичным гамильтонианом

$$-\frac{1}{|\lambda|}\sum_{r=1}^{d} H_{2,r} = H_2 = \operatorname{tr}(Y_0Y_1) = \frac{1}{4}\sum_{a=1}^{n}\left(p_a^2 - \frac{\lambda_1^2}{x_a^2}\right) - \\ - \frac{1}{2}\sum_{a<b}\left(\frac{1}{(x_a-x_b)^2} + \frac{1}{(x_a+x_b)^2}\right)(\psi_a\varphi_b)(\psi_b\varphi_a). \quad (4.59)$$

**Пример 4.6.** Если при общем $m$ $d = 1$, то спиновые переменные $\varphi_a$ и $\psi_a$ отсутствуют, тогда получаем системы Калоджеро–Мозера для обобщенной симметрической группы $S_n \ltimes (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^n$. В частности, при $m = 2$ получаем систему Калоджеро–Мозера с гамильтонианом (4.59), где $(\psi_a\varphi_b)(\psi_b\varphi_a) = |\lambda|^2$, т. е. без спинового взаимодействия. Системы Калоджеро–Мозера для $S_n \ltimes (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^n$ также пополняются до соответствующих *пространств Калоджеро–Мозера* [6], которые изоморфны $M_\lambda(n\delta, \varepsilon_0)$. Потоки $(\partial/\partial t_{mk})f = \{H_{mk,1}, f\}$ имеют вид

$$X_i(t') = X_i - |\lambda|\sum_{k\geqslant 1} kt_{mk}Y_{i+1}Y_{i+2}\cdots Y_{i+mk-1}, \quad (4.60)$$

$$Y_i(t') = Y_i, \quad v_0(t') = v_0, \quad w_0(t') = w_0, \quad (4.61)$$

где $t' = (t_m, t_{2m}, t_{3m}, \ldots) \in \bigoplus_{k\geqslant 1}\mathbb{C}$. В обозначениях (4.9), (4.10) формулы (4.60), (4.61) имеют вид

$$\mathbf{X}(t') = \mathbf{X} - |\lambda|\sum_{k\geqslant 1} kt_{mk}\mathbf{Y}^{mk-1}, \quad (4.62)$$

$$\mathbf{Y}(t') = \mathbf{Y}, \quad \mathbf{v}_0(t') = \mathbf{v}_0, \quad \mathbf{w}_0(t') = \mathbf{w}_0. \quad (4.63)$$

Используя теорему 3.7, можно обобщить теорему 4.3 для более общих $\alpha$.

**Следствие 4.7.** *Пусть* $\boldsymbol{\alpha}' = (1, n\delta)$ *и* $\boldsymbol{\lambda}' = (-n|\lambda'|, \lambda')$ *для регулярного* $\lambda' \in \mathbb{C}^m$. *Если* $\boldsymbol{\alpha} = (1,\alpha)$ *и* $\boldsymbol{\lambda} = (-\lambda\cdot\alpha, \lambda)$ *для некоторых* $\alpha \in \mathbb{Z}^I_{\geqslant 0}$, $\lambda \in \mathbb{C}^m$ *и пара* $(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\alpha})$ *получается из* $(\boldsymbol{\lambda}', \boldsymbol{\alpha}')$ *цепочкой допустимых отражений, то гамильтонианы* $H_{mk,r} \in \mathbb{C}\bigl[M_\lambda(\alpha, d\varepsilon_0)\bigr]$ *образуют интегрируемую систему на многообразии* $M_\lambda(\alpha, d\varepsilon_0)$.

Условие следствия 4.7, в частности, предполагает $\boldsymbol{\alpha} \in \Delta^+_{\mathrm{im}}(Q_{d\varepsilon_0})$. Возникает вопрос: можно ли применить это следствие для любого мнимого корня $\boldsymbol{\alpha} = (1,\alpha)$? Пусть $\boldsymbol{\alpha} = (1,\alpha) = s_{i_1}s_{i_2}\cdots s_{i_\ell}\boldsymbol{\alpha}'$ для некоторых $i_1, i_2, \ldots, i_\ell \in (I_\infty)_{\text{бп}}$ и $\boldsymbol{\lambda} = (-\lambda\cdot\alpha, \lambda)$. Тогда если $(r_{i_{k-1}}\cdots r_{i_1}\boldsymbol{\lambda})_{i_k} \neq 0$ для всех $k = 1, \ldots, \ell$, то $(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\alpha})$ получается из $(\boldsymbol{\lambda}', \boldsymbol{\alpha}')$ цепочкой допустимых отражений, где $\boldsymbol{\lambda}' = r_{i_\ell} \cdots r_{i_1} \boldsymbol{\lambda}$. Поскольку $\boldsymbol{\lambda}' \cdot \boldsymbol{\alpha}' = \boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\alpha} = 0$, имеем $\boldsymbol{\lambda}' = (-n|\lambda'|, \lambda')$ для некоторого $\lambda' \in \mathbb{C}^I$. Требование регулярности $\lambda'$ накладывает условия $r_{i_\ell} \cdots r_{i_1} \boldsymbol{\lambda} \cdot (0, \beta) \neq 0 \ \ \forall \beta \in \Delta(Q)$. Таким образом, условие следствия 4.7 выполнено для любого корня $\boldsymbol{\alpha} = (1, \alpha)$ из $W$-орбиты корня $\boldsymbol{\alpha}' = (1, n\delta)$ и вектора $\lambda$ в общем положении, где $W$ — группа, порожденная отражениями $s_i$ для колчана $Q_{d\varepsilon_0}$.

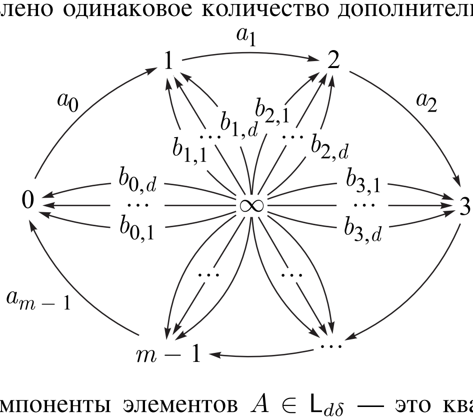
Рассмотрим случай $d = 1$. Заметим, что в этом случае все корни вида $(0, \alpha)$ и $(1, \alpha)$ из фундаментальной области $F$ есть $(0, n\delta)$, $n \geqslant 1$, и $(1, n\delta)$, $n \geqslant 2$, соответственно. Причем $(1, \delta) = s_\infty(0, \delta)$.

**Гипотеза 4.8.** *Любой корень* $\boldsymbol{\alpha} = (1, \alpha) \in \Delta^+_{\mathrm{im}}(Q_{\varepsilon_0})$ *принадлежит* $W$*-орбите корня* $(1, n\delta)$ *для некоторого* $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$.

Если гипотеза 4.8 верна, то в силу следствия 4.7 гамильтонианы $H_{mk,1}$ образуют интегрируемую систему на многообразии $M_\lambda(\alpha, \varepsilon_0)$ для любого вектора $\lambda \in \mathbb{C}^m$ в общем положении и любого $\alpha \in \mathbb{Z}^I_{\geqslant 0}$, такого, что $(1, \alpha) \in \Delta^+_{\mathrm{im}}(Q_{\varepsilon_0})$.

**Замечание 4.9.** В случае $d \geqslant 2$ гипотеза 4.8 дословно не верна, если $m \geqslant 2$, поскольку в этом случае элементы фундаментальной области $F$ вида $(1, \alpha)$ не исчерпываются корнями $(1, n\delta)$. Можно, однако, предположить, что любой мнимый корень $(1, \alpha)$ принадлежит орбите корня вида $(0, \beta)$ или $(1, \beta)$ из $F$.

**4.5. Случай $\zeta = (d, d, \ldots, d)$.** Рассмотрим еще один частный случай. Пусть $m$ опять любое, но теперь $\zeta = d\delta$, т. е. в каждую вершину циклического колчана $Q$ направлено одинаковое количество дополнительных ребер:




В этом случае компоненты элементов $A \in \mathsf{L}_{d\delta}$ — это квадратные матрицы $A_{(i,\ell)} \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^d)$. Рассмотрим подалгебру $\mathsf{L}'_{d\delta} \subset \mathsf{L}_{d\delta}$, состоящую из элементов $A$, для которых $A_{(i,\ell)}$ не зависят от $i$. Соответствующая алгебра Ли интегралов движения натянута на

$$J_\ell(T) = \sum_{i \in I} \mathrm{tr}\,(T w_{i-\ell} Y_{i-\ell} \cdots Y_{i-1} v_i), \tag{4.64}$$

где $\ell \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, $T \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^d)$. Подалгебра $\mathsf{L}'_{d\delta}$ изоморфна $\mathfrak{gl}(d,\mathbb{C}) \otimes \mathbb{C}[t]$, а алгебра, натянутая на $E_r^{(\ell)}$, — ее максимальная коммутативная подалгебра. Последняя соответствует гамильтонианам

$$H_{\ell,r} = -J_\ell(E_r) = -\sum_{i\in I} w_{i-\ell,r} Y_{i-\ell} \cdots Y_{i-1} v_{i,r}. \tag{4.65}$$

**Утверждение 4.10.** *Многообразие $M_\lambda(\alpha, d\varepsilon_0)$ можно отождествить с подмногообразием в $M_\lambda(\alpha, d\delta)$, определяемым уравнениями*

$$v_i = 0, \quad w_i = 0, \quad i = 1, \dots, m-1. \tag{4.66}$$

*Потоки, определяемые функциями $J_\ell(T)$, сохраняют это подмногообразие тогда и только тогда, когда $\ell$ кратно $m$ (или $T = 0$). Ограничения гамильтонианов $H_{mk,r} = -J_{mk}(E_r)$ на $M_\lambda(\alpha, d\varepsilon_0)$ совпадают с* (4.46).

**Доказательство.** Уравнения (4.66) определяют вложение многообразий $\mathrm{Rep}\big(\Pi^{\boldsymbol\lambda}(Q_{d\varepsilon_0}), \boldsymbol\alpha\big) \subset \mathrm{Rep}\big(\Pi^{\boldsymbol\lambda}(Q_{d\delta}), \boldsymbol\alpha\big)$. Действие группы $\mathrm{GL}(\alpha)$ сохраняет уравнения (4.66). Взяв фактор по этому действию, получаем искомое вложение колчанных многообразий. Остальное проверяется непосредственными вычислениями. $\square$

Остановимся подробно на случае $\alpha = n\delta$. Формула (3.6) дает $\dim M_\lambda(n\delta, d\delta) = 2nmd$. Пусть $\varphi_a \in \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^m, \mathbb{C}^d)$ и $\psi_a \in \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^d, \mathbb{C}^m)$ с компонентами

$$(\varphi_a)_{ri} = (v_{i,r})_a, \quad (\psi_a)_{ir} = (w_{i,r})_a. \tag{4.67}$$

Таким же образом, как и в п. 4.4, в точке общего положения можно выразить эти матрицы и матрицы $X_i$, $Y_i$ через локальные координаты Дарбу

$$x_a, (\varphi_a)_{ri}, \quad p_a, (\psi_a)_{ir}, \quad (i,r) \neq (0,1), \tag{4.68}$$

и получить (см. детали в [1])

$$(X_i)_{ab} = x_a \delta_{ab}, \tag{4.69}$$

$$(Y_i)_{aa} = \frac{1}{m} p_a + \frac{1}{x_a} \sum_{l=1}^{m-1} \frac{m-l}{m} \big(\lambda_l - (\psi_a\varphi_a)_{ll}\big) - \frac{1}{x_a} \sum_{l=1}^{i} \big(\lambda_l - (\psi_a\varphi_a)_{ll}\big),$$

$$(Y_i)_{ab} = -\sum_{j=0}^{m-1} \frac{x_a^j x_b^{m-j-1}}{x_a^m - x_b^m} (\psi_b\varphi_a)_{i-j,i-j}, \quad a \neq b, \tag{4.70}$$

$$(\varphi_a)_{10} = 1, \tag{4.71}$$

$$(\psi_a)_{01} = |\lambda| - \sum_{r=2}^{d} (\varphi_a)_{r0} (\psi_a)_{0r} - \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{r=1}^{d} (\varphi_a)_{ri} (\psi_a)_{ir}, \tag{4.72}$$

где $i = 0, \ldots, m-1$, $a, b = 1, \ldots, n$, и

$$\omega_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\alpha}} = \sum_{i\in I} \mathrm{tr}\,(dY_i \wedge dX_i) + \sum_{i\in I}\sum_{r=1}^{d} dw_{i,r} \wedge dv_{i,r} = \\ = \sum_{a=1}^{n} dp_a \wedge dx_a + \sum_{a=1}^{n} \mathrm{tr}\,(d\psi_a \wedge d\varphi_a). \quad (4.73)$$

Заметим, что вследствие (4.71) слагаемые в последнем члене имеют вид

$$\mathrm{tr}\,(d\psi_a \wedge d\varphi_a) = \sum_{r=2}^{d} d(\psi_a)_{0r} \wedge d(\varphi_a)_{r0} + \sum_{i=1}^{m-1}\sum_{r=1}^{d} d(\psi_a)_{ir} \wedge d(\varphi_a)_{ri}.$$

**Замечание 4.11.** Пусть $\mu := \mathrm{e}^{2\pi i/m}$ и $E = \mathrm{diag}\,(1, \mu, \mu^2, \ldots, \mu^{m-1})$. Тогда, используя тождество*

$$\frac{x^{m-j-1}y^j}{x^m - y^m} = \frac{1}{m}\sum_{l=0}^{m-1} \frac{\mu^{-jl}}{x - \mu^l y}, \quad j = 0, \ldots, m-1, \quad (4.74)$$

можно переписать выражение (4.70) следующим образом:

$$(Y_i)_{ab} = \frac{1}{m}\sum_{l=0}^{m-1} \frac{\mu^{-il}\,\mathrm{tr}\left(\varphi_a\, E^l\, \psi_b\right)}{x_b - \mu^l x_a},$$

где $E^l$ — степень матрицы $E$.

**Замечание 4.12.** Рассмотрим многообразие

$$\mathsf{Q}_{m,d} = \big\{(\varphi, \psi) \in \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^m, \mathbb{C}^d) \times \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^d, \mathbb{C}^m) \mid \mathrm{tr}\,(\varphi\psi) = |\lambda|\big\}/\mathbb{C}^{\times},$$

где $\mathbb{C}^{\times} = \mathbb{C}\backslash\{0\}$ — группа, действующая как $c.(\varphi, \psi) = (c\varphi, c^{-1}\psi)$. Оно является гамильтоновой редукцией для $M = T^*M_0$, $M_0 = \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^m, \mathbb{C}^d)$, $G = \mathbb{C}^{\times}$. Точки $M_\lambda(n\delta, d\delta)$, для которых матрица $X_{m-1}\cdots X_0$ диагонализуема и не вырождена, параметризуются координатами $x_a, p_a$ и элементами $q_a = (\varphi_a, \psi_a) \in \mathsf{Q}_{m,d}$. Аналогично точки $M_\lambda(n\delta, d\varepsilon_0)$ в общем положении параметризуются координатами $x_a, y_a$ и элементами $q_a = (\varphi_a, \psi_a) \in \mathsf{Q}_{1,d}$, где $\mathsf{Q}_{1,d} = \big\{(\varphi, \psi) \in \mathbb{C}^d \times (\mathbb{C}^d)^* \mid \psi\varphi = |\lambda|\big\}/\mathbb{C}^{\times}$ [24].

*Формула (4.74) доказывается следующим образом. Умножая левую и правую части на $m(x^m - y^m) = m\prod_{i=0}^{m-1}(x - \mu^i y)$, получаем многочлены $f(x) = mx^{m-1-j}y^j$ и $g(x) = \sum_{l=0}^{m-1}\mu^{-jl}\prod_{i\neq l}(x - \mu^i y)$. Равенство $\prod_{i=1}^{m-1}(x - \mu^i) = (x^m - 1)/(x - 1)$ в пределе дает $\prod_{i=1}^{m-1}(1 - \mu^i) = m$. Отсюда получаем $f(\mu^l y) = g(\mu^l y)$. Поскольку степени многочленов $f(x)$ и $g(x)$ не превышают $m-1$, этого достаточно для тождества $f(x) \equiv g(x)$.

Теорема 4.3 обобщается следующим образом [1].

**Теорема 4.13.** *Гамильтонианы $H_{\ell,r} \in \mathbb{C}\big[M_\lambda(n\delta, d\delta)\big]$, $\ell = 1, \dots, nm$, $r = 1, \dots, d$, функционально независимы и, следовательно, образуют интегрируемую систему на колчанном многообразии $M_\lambda(n\delta, d\delta)$.*

**Замечание 4.14.** Гамильтонианы $H_{\ell,r}$, $\ell = 0, \dots, nm-1$, $r = 1, \dots, d$, зависимы, поскольку $\sum\limits_{r=1}^{d} H_{0,r} = -n|\lambda|$ (см. замечание 3.4). Можно получить $nmd$ независимых гамильтонианов, выкинув из этого семейства один из $H_{0,r}$ и добавив, например, $H_{mn} = -|\lambda|^{-1} \sum\limits_{r=1}^{d} H_{mn,r}$.

При $m = 1$ опять получаем системы Гиббонса–Хермсена. При больших $m$ явный вид гамильтонианов достаточно сложен, даже для $m = 2$.

**Пример 4.15.** [1]. Пусть $m = 2$ и $d = 1$. Тогда система определяется гамильтонианами $H_{\ell,1}$, $\ell \geqslant 1$. Обозначим $Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $F_\pm = \begin{pmatrix} 0 & \pm 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Первые два гамильтониана имеют вид

$$\begin{aligned} H_{1,1} &= -w_0 Y_0 v_1 - w_1 Y_1 v_0 = \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{a=1}^{n} \left( (\varphi_a F_+ \psi_a) p_a + \frac{1}{x_a} (\varphi_a F_- \psi_a)\big(\lambda_1 + (\varphi_a)_1 (\psi_a)_1\big) \right) - \\ &\qquad - \frac{1}{2} \sum_{a \neq b} \left( \frac{(\varphi_a F_+ \psi_b)(\varphi_b \psi_a)}{x_a - x_b} + \frac{(\varphi_a F_- \psi_b)(\varphi_b Z \psi_a)}{x_a + x_b} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_2 = -\frac{1}{|\lambda|} H_{2,1} = \operatorname{tr}(Y_0 Y_1) &= \frac{1}{4} \sum_{a=1}^{n} \left( p_a^2 - \frac{1}{x_a^2} \big(\lambda_1 - (\varphi_a)_1 (\psi_a)_1\big)^2 \right) + \\ &+ \frac{1}{4} \sum_{a \neq b} \left( \frac{(\varphi_a \psi_b)(\varphi_b \psi_a)}{(x_a - x_b)^2} + \frac{(\varphi_a Z \psi_b)(\varphi_b Z \psi_a)}{(x_a + x_b)^2} \right) + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{a \neq b} \frac{(\varphi_a)_1 (\psi_b)_1 (\varphi_b)_0 (\psi_a)_0 - (\varphi_a)_0 (\psi_b)_0 (\varphi_b)_1 (\psi_a)_1}{x_a^2 - x_b^2}, \end{aligned}$$

где $\varphi_a \in (\mathbb{C}^2)^*$, $\psi_a \in \mathbb{C}^2$ с компонентами $(\varphi_a)_i = (\varphi_a)_{1i}$, $(\psi_a)_i = (\psi_a)_{i1}$, $i = 0, 1$. В точке общего положения (где $(\varphi_a)_1 \neq 0 \ \ \forall\, a$) можно выбрать $(\varphi_a)_0 = 1$, $(\psi_a)_0 = |\lambda| - (\varphi_a)_1 (\psi_a)_1$ и остаются две независимые «спиновые» переменные $(\varphi_a)_1$ и $(\psi_a)_1$.

Как и прежде, теорема 3.7 позволяет обобщить теорему 4.13 для более общих $\alpha$.

**Следствие 4.16.** *Пусть* $\boldsymbol{\alpha}' = (1, n\delta)$ *и* $\boldsymbol{\lambda}' = (-n|\lambda'|, \lambda')$ *для регулярного* $\lambda' \in \mathbb{C}^m$. *Если* $\boldsymbol{\alpha} = (1, \alpha)$ *и* $\boldsymbol{\lambda} = (-\lambda \cdot \alpha, \lambda)$ *для некоторых* $\alpha \in \mathbb{Z}^I_{\geqslant 0}$, $\lambda \in \mathbb{C}^m$ *и пара* $(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\alpha})$ *получается из* $(\boldsymbol{\lambda}', \boldsymbol{\alpha}')$ *цепочкой допустимых отражений, то гамильтонианы* $H_{mk,r} \in \mathbb{C}\big[M_\lambda(\alpha, d\delta)\big]$ *образуют интегрируемую систему на многообразии* $M_\lambda(\alpha, d\delta)$.

Рассуждая, как и прежде, получаем, что условие следствия 4.16 выполнено для вектора $\lambda$ в общем положении и такого $\alpha$, что $\boldsymbol{\alpha} = (1, \alpha)$ лежит в $W$-орбите корня $\boldsymbol{\alpha}' = (1, n\delta)$, где $W$ — группа, порожденная отражениями $s_i$ для колчана $Q_{d\delta}$.

## 5. ПРИЛОЖЕНИЕ К ОБОБЩЕННЫМ ИЕРАРХИЯМ КП

В случае циклического колчана гамильтонова динамика на колчанных многообразиях, рассмотренная в разд. 4, может быть применена к построению решений иерархии КП и ее обобщений. Здесь функтор отражения также играет свою роль.

**5.1. Иерархия КП и пространства Калоджеро–Мозера.** Сначала определим иерархию КП и предъявим ее рациональные решения в терминах пространств Калоджеро–Мозера.

Иерархия КП — это система из бесконечного количества нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных с бесконечным количеством неизвестных функций и переменных, от которых они зависят. Эти функции удобно считать коэффициентами псевдодифференциального оператора, записывая уравнения в «операторной» форме [25, 26].

*Псевдодифференциальный оператор* — это выражение вида

$$F = \sum_{k=-\infty}^{N} f_k(x)\,\partial^k, \tag{5.1}$$

где $N \in \mathbb{Z}$, $f_k(x) \in \mathbb{C}(x)$ (или любые другие функции от $x$, которые можно бесконечно дифференцировать); $\partial = \partial_x$ — оператор дифференцирования по $x$ и $\partial^{-1}$ — его формальный обратный. Несмотря на свое название, псевдодифференциальные операторы нигде не действуют. Вместо этого определяются правила для их коммутирования друг с другом. Постулируя коммутативность функций между собой и соотношения

$$[\partial, f(x)] = f'(x), \quad \partial\partial^{-1} = \partial^{-1}\partial = 1, \tag{5.2}$$

можно вывести из условия ассоциативности умножения соотношение

$$\partial^k f(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \binom{k}{l} f^{(l)}(x)\, \partial^{k-l}, \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{5.3}$$

где $f^{(l)}(x)$ — $l$-я производная. Формально псевдодифференциальные операторы — это элементы ассоциативной алгебры, состоящей из выражений вида (5.1) с умножением, заданным формулой (5.3). То, что эта формула корректно определяет умножение, и то, что это умножение действительно ассоциативно, проверяется непосредственными вычислениями. Чисто дифференциальную и чисто псевдодифференциальную части элемента (5.1) будем обозначать

$$F_+ = \sum_{k=0}^{N} f_k(x)\partial^k \quad \text{и} \quad F_- = \sum_{k=-\infty}^{-1} f_k(x)\, \partial^k \tag{5.4}$$

соответственно.

**Замечание 5.1.** На алгебраическом языке алгебра псевдодифференциальных операторов является микролокализацией [27] алгебры дифференциальных операторов $\left\{ \sum\limits_{k=0}^{N} f_k(x)\partial^k \mid N \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0} \right\}$.

Рассмотрим псевдодифференциальный оператор

$$L = \partial + \sum_{l=1}^{\infty} f_l(x)\, \partial^{-l}. \tag{5.5}$$

Будем считать, что функции $f_l(x)$ зависят от бесконечного числа переменных: $f_l(x) = f_l(x;t)$, где $t = (t_1, t_2, t_3, \ldots)$ (иногда $t_1$ отождествляют с $x$). *Иерархией КП* называется система совместных уравнений

$$\frac{\partial}{\partial t_k} L = [(L^k)_+, L], \quad k = 1, 2, 3, \ldots \tag{5.6}$$

(см. [25, 26]).

Можно показать, что любой псевдодифференциальный оператор вида (5.5) имеет вид

$$L = M \partial M^{-1} \tag{5.7}$$

для некоторого

$$M = 1 + \sum_{l=1}^{\infty} u_l(x)\, \partial^{-l}. \tag{5.8}$$

Решение иерархии КП удобно искать в терминах $M$: если (5.8) удовлетворяет системе уравнений

$$\frac{\partial}{\partial t_k} M = -\big(M\partial^k M^{-1}\big)_- \cdot M, \quad k = 1, 2, 3, \ldots, \tag{5.9}$$

то (5.7) решает (5.6).

Пусть $(X, Y, v, w)$ — четверка, задающая точку пространства Калоджеро–Мозера $\mathcal{C}_n$, определенного в п. 4.2. Рассмотрим псевдодифференциальный оператор

$$M = 1 - w(X - x)^{-1}(Y - \partial)^{-1} v, \tag{5.10}$$

где $(Y - \partial)^{-1} = -\sum_{l=0}^{\infty} Y^l \partial^{-l-1}$, $(X - x)^{-1}$ — матрица над полем $\mathbb{C}(x)$, обратная к матрице $X - x = X - x\,\mathrm{id}_{\mathbb{C}^n}$. Он имеет вид (5.8) и не зависит от выбора представителя $(X, Y, v, w)$ точки пространства $\mathcal{C}_n$. Пусть теперь эта точка движется под действием гамильтоновых потоков, заданных уравнениями $(\partial/\partial t_k) f = \{H_k, f\}$. Тогда формула (5.10) дает псевдодифференциальный оператор $M = M(t)$ с коэффициентами, зависящими от переменных $t_1, t_2, t_2, \ldots$ Он получается заменой $X$ на (4.22) в формуле (5.10). В работе [5] показано, что $L(t) = M(t)\partial M(t)^{-1}$ есть решение иерархии КП (5.6) и что этим исчерпываются все ее рациональные решения. Каждое такое решение задается начальными условиями $(X, Y, v, w)$. Таким образом, рациональные решения КП находятся во взаимно-однозначном соответствии с точками множества $\bigsqcup_{n\geqslant 0} \mathcal{C}_n$.

**Замечание 5.2.** Эта биекция есть часть *соответствия Калоджеро–Мозера*. Последнее есть взаимно-однозначное соответствие между такими элементами, как [28, 5, 23]:

- точки $\bigsqcup_{n\geqslant 0} \mathcal{C}_n$,
- элементы аделических грассманианов,
- рациональные решения иерархии КП,
- классы изоморфности правых идеалов (как правых модулей) *алгебры Вейля* $A_1(\mathbb{C}) := \left\{ \sum_{l=0}^{N} f_l(x)\,\partial^k \mid f_l(x) \in \mathbb{C}[x], N \geqslant 0 \right\}$, т. е. алгебры, порожденной $x$ и $\partial$ с соотношением $\partial x - x\partial = 1$.

*Уравнение КП* — это уравнение в частных производных

$$3\frac{\partial^2 u}{\partial t_2^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(4\frac{\partial u}{\partial t_3} - 6u\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right), \tag{5.11}$$

где $u = u(x, t_2, t_3)$. Оно получается из (5.6), если положить $u = 2f_1$ [25]. Подставляя формулы (4.23), (4.25) в (5.10), получаем $u_1 = -\sum\limits_{a=1}^{n} \dfrac{1}{x - x_a}$ и

$$u = 2f_1 = -2\frac{\partial u_1}{\partial x} = -\sum_{a=1}^{n} \frac{2}{(x - x_a)^2}, \tag{5.12}$$

где $x_1 = x_1(t), \ldots, x_n = x_n(t)$ — решение системы Калоджеро–Мозера*

$$\frac{\partial x_a}{\partial t_2} = \{H_2, x_a\}, \quad \frac{\partial p_a}{\partial t_2} = \{H_2, p_a\}, \tag{5.13}$$

$$\frac{\partial x_a}{\partial t_3} = \{H_3, x_a\}, \quad \frac{\partial p_a}{\partial t_3} = \{H_3, p_a\}. \tag{5.14}$$

Решения (5.12) уравнения (5.11) были найдены в работах [13, 14].

Точки фазового пространства $T^*\mathbb{C}^n_{\mathrm{reg}}$ не дают всех рациональных решений, поскольку существуют решения, соответствующие точкам $\mathcal{C}_n$ с недиагонализуемым $X$. Они отвечают случаям «столкновений» частиц.

**Замечание 5.3.** Подобным образом выглядят рациональные решения *уравнения КдФ*

$$4\frac{\partial u}{\partial t_3} = 6u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}, \tag{5.15}$$

где $u = u(x, t_3)$, найденные ранее в [12]. Они имеют вид (5.12), где функции $x_a = x_a(t_3)$ удовлетворяют уравнениям $\{H_2, x_a\} = \{H_2, p_a\} = 0$ и (5.14).

**5.2. Обобщенная иерархия КП.** Опишем обобщенную иерархию КП, определенную в [1], и ее рациональные решения, найденные там же.

Рассмотрим циклическую группу $\Gamma = \{1, \sigma, \sigma^2, \ldots, \sigma^{m-1}\} \simeq \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, в которой $\sigma^m = 1$. Групповая алгебра $\mathbb{C}\Gamma$ обладает базисом, состоящим из идемпотентов

$$\epsilon_k = \frac{1}{m}\sum_{j=0}^{m-1} \mu^{-kj}\sigma^j, \quad k \in I, \tag{5.16}$$

где $\mu = \mathrm{e}^{2\pi i/m}$ и $I = \{0, \ldots, m-1\} = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$. Чтобы обобщить иерархию КП, рассмотрим *алгебру Чередника* $\mathcal{H}_\lambda$ для группы $\Gamma$. Она определяется образующими $x, y, \sigma$ и соотношениями

$$yx - xy = \sum_{k=0}^{m-1} \lambda_k \epsilon_k, \quad \sigma^m = 1, \quad \sigma x = \mu^{-1} x\sigma, \quad \sigma y = \mu y\sigma, \tag{5.17}$$

*Функции $f_1$ и $u_1$ выражаются только через координаты $x_a$, тогда как в общем случае $f_l$ и $u_l$ выражаются и через координаты $x_a$, и через импульсы $p_a$.

где $\lambda_k$ — комплексные параметры*. В терминах базиса (5.16) последние три соотношения имеют вид

$$\epsilon_i \epsilon_j = \delta_{ij} \epsilon_i, \quad \epsilon_i x = x \epsilon_{i+1}, \quad \epsilon_i y = y \epsilon_{i-1}. \tag{5.18}$$

Как любая алгебра Чередника, $\mathcal{H}_\lambda$ обладает *базисом Пуанкаре–Биркгофа–Витта*:

$$x^i \sigma^j y^k, \quad i, k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}, \quad j \in I. \tag{5.19}$$

Расширим $\mathcal{H}_\lambda$ до алгебры $\overline{\mathcal{H}}_\lambda$, состоящей из элементов

$$F = \sum_{k=-\infty}^{N} \sum_{j=0}^{m-1} f_{jk}(x)\, \sigma^j y^k, \tag{5.20}$$

где $f_{jk}(x) \in \mathbb{C}(x)$, $y^{-1}$ — обратный к $y$: $yy^{-1} = y^{-1}y = 1$. (Можно рассматривать $f_{jk}(x)$ в другом (более широком) классе функций, но поскольку нас интересуют только рациональные решения, достаточно рассмотреть случай $\mathbb{C}(x)$.) Ассоциативность алгебры $\overline{\mathcal{H}}_\lambda$ следует из теории микролокализации [27] (см. подробности в [1]). Подалгебра, натянутая на $f(x)\sigma^j$, где $f(x) \in \mathbb{C}(x)$, обозначается $\mathbb{C}(x)\#\Gamma$ (или $\mathbb{C}(x) * \Gamma$). Элементы (5.20) имеют вид

$$F = \sum_{k=-\infty}^{N} f_k(x) y^k, \tag{5.21}$$

для некоторых $f_k(x) \in \mathbb{C}(x)\#\Gamma$. Для элементов $F \in \overline{\mathcal{H}}_\lambda$ вида (5.21) введем обозначения, аналогичные псевдодифференциальным операторам:

$$F_+ = \sum_{k=0}^{N} f_k(x) y^k \quad \text{и} \quad F_- = \sum_{k=-\infty}^{-1} f_k(x) y^k. \tag{5.22}$$

Рассмотрим элементы $L \in \overline{\mathcal{H}}_\lambda$ вида

$$L = y + \sum_{l=0}^{\infty} f_l(x) y^{-l} \tag{5.23}$$

с коэффициентами $f_l(x) = f_l(x; t) \in \mathbb{C}(x)\#\Gamma$, где $t = (t_1, t_2, t_3, \dots) \in \bigoplus_{\ell=1}^{\infty} \mathbb{C}$ (при $m \geqslant 2$ переменная $t_1$ уже не отождествляется с $x$). *Обобщенная иерархия КП* — это система совместных уравнений

$$\frac{\partial}{\partial t_\ell} L = [(L^\ell)_+, L], \quad \ell = 1, 2, 3, \dots \tag{5.24}$$

*Можно было бы просто сказать, что правая часть первого соотношения есть произвольный элемент $\mathbb{C}\Gamma$, но мы специально раскладываем его по базису (5.16), чтобы надлежащим образом отождествить параметры алгебры Чередника с параметрами соответствующего колчанного многообразия.

Оператор (5.23) имеет вид

$$L = MyM^{-1}, \quad M = 1 + \sum_{l=1}^{\infty} u_l(x)y^{-l}, \tag{5.25}$$

где $u_l(x) \in \mathcal{F}\#\Gamma$ для некоторой алгебры (многозначных) функций $\mathcal{F}$, содержащей $\mathbb{C}(x)$ (любой $M$ такого вида обратим). Легко выводится, что уравнения (5.24) следуют из

$$\frac{\partial}{\partial t_\ell} M = -\big(My^\ell M^{-1}\big)_- \cdot M, \quad \ell = 1, 2, 3, \dots \tag{5.26}$$

Пусть $\lambda = (\lambda_0, \dots, \lambda_{m-1})$, где $\lambda_k$ — параметры алгебры $\overline{\mathcal{H}}_\lambda$ (как и раньше, если не оговорено противное, предполагаем, что $\lambda$ регулярен относительно системы корней циклического колчана).

Пусть матрицы (4.11) задают точку многообразия $M_\lambda(\alpha, \delta)$, т. е. случай $d = 1$, описанный в п. 4.5. Гамильтонианы $H_{\ell,1}$ задают потоки $\partial/\partial t_\ell$ на $M_\lambda(\alpha, \delta)$: $\mathbf{X} = \mathbf{X}(t)$, $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}(t)$, $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_i(t)$, $\mathbf{w}_i = \mathbf{w}_i(t)$.

**Утверждение 5.4.** [1]. *Матрица*

$$M(t) = 1 - \sum_{i,j \in I} \epsilon_i \mathbf{w}_i (\mathbf{X} - x)^{-1} (\mathbf{Y} - y)^{-1} \mathbf{v}_j \varepsilon_j \tag{5.27}$$

*удовлетворяет уравнениям* (5.26).

Следовательно, формулы (5.25), (5.27) дают решение (5.24). Так получается решение обобщенной иерархии КП из потоков на потоках $M_\lambda(\alpha, \delta)$, заданных начальными значениями $\mathbf{X}(0)$, $\mathbf{Y}(0)$, $\mathbf{v}_i(0)$, $\mathbf{w}_i(0)$ и соответствующими гамильтонианами.

Рассматривая (5.23) как деформацию $y$, естественно фиксировать коммутационное соотношение с элементами группы:

$$\sigma L = \mu L \sigma \ \text{ или эквивалентно } \ \epsilon_i L = L \epsilon_{i-1}, \quad i \in I. \tag{5.28}$$

Условие (5.28) совместимо с теми и только с теми уравнениями (5.24), для которых $\ell$ кратно $m$:

$$\frac{\partial}{\partial t_{mk}} L = [(L^{mk})_+, L], \quad k = 1, 2, 3, \dots \tag{5.29}$$

Система (5.29) с условием (5.28) называется *сферической подыерархией.*

Рассмотрим теперь многообразие $M_\lambda(\alpha, \varepsilon_0)$, т. е. случай $d = 1$ из п. 4.4. Гамильтонианы $H_{km,1} = -|\lambda| H_{km}$ задают потоки $\mathbf{X} = \mathbf{X}(t')$, $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}(t')$, $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}_0(t')$, $\mathbf{w}_0 = \mathbf{w}_0(t')$, где $t' = (t_m, t_{2m}, t_{3m}, \dots)$ (см. формулы (4.62), (4.63)). Тогда, применяя утверждение 4.10 к формуле (5.27), получаем решение сферической подыерархии $L(t') = M(t')yM(t')^{-1}$, где

$$M(t') = 1 - \epsilon_0 \mathbf{w}_0 (\mathbf{X} - x)^{-1} (\mathbf{Y} - y)^{-1} \mathbf{v}_0 \varepsilon_0. \tag{5.30}$$

**5.3. Обобщенная матричная иерархия КП.** В случае общего $d$ многообразия $M_\lambda(\alpha, d\varepsilon_0)$, $M_\lambda(\alpha, d\delta)$ и гамильтоновы системы на них дают решения обобщенных матричных иерархий КП и соответствующих подыерархий [1]. Обычная матричная иерархия КП описана, например, в [26]. Определим ее сразу в обобщенном виде (для общего $m$).

Роль алгебры $\overline{\mathcal{H}}_\lambda$ в данном случае играет тензорное произведение алгебр $\mathrm{End}(\mathbb{C}^d)\otimes\overline{\mathcal{H}}_\lambda$, т. е. кольцо матриц $d\times d$ с коэффициентами в $\overline{\mathcal{H}}_\lambda$. Операции $(\cdot)_+$ и $(\cdot)_-$ на этой алгебре матриц будем понимать поэлементно. В тензорных обозначениях они имеют вид $(A\otimes F)_\pm = A\otimes F_\pm$, где $A\in\mathrm{End}(\mathbb{C}^d)$, $F\in\overline{\mathcal{H}}_\lambda$.

Рассмотрим элементы алгебры $\mathrm{End}(\mathbb{C}^d)\otimes\overline{\mathcal{H}}_\lambda$ вида

$$L = y + \sum_{l=0}^{\infty} F_l y^{-l}, \tag{5.31}$$

$$R_r = E_r + \sum_{l=1}^{\infty} R_{l,r} y^{-l}, \quad r = 1,\ldots,d, \tag{5.32}$$

где $F_l, R_{l,r}\in\mathrm{End}(\mathbb{C}^d)\otimes\big(\mathbb{C}(x)\#\Gamma\big)$, а матрицы $E_r\in\mathrm{End}(\mathbb{C}^d)$ определены в п. 3.2. Наложим условия

$$[L,R_r]=0, \quad R_rR_s=\delta_{rs}R_r, \quad \sum_{r=1}^{d} R_r = 1. \tag{5.33}$$

Определим *обобщенную матричную иерархию КП* как совместную систему уравнений на рассматриваемые матрицы $L, R_1,\ldots,R_d$:

$$\frac{\partial L}{\partial t_{\ell,r}} = \big[(L^\ell R_r)_+, L\big], \tag{5.34}$$

$$\frac{\partial R_s}{\partial t_{\ell,r}} = \big[(L^\ell R_r)_+, R_s\big]. \tag{5.35}$$

Эта система определяет зависимость элементов $F_l, R_{l,s}$ от переменных $t_{\ell,r}$, $\ell\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, $r=1,\ldots,d$. Переменные $t_{0,r}$ (а точнее, их потоки) зависимы, поскольку из третьей формулы (5.33) следует $\sum\limits_{r=1}^{d}\dfrac{\partial}{\partial t_{0,r}}=0$.

Ассоциируем переменные $t_{\ell,r}$ с гамильтонианами $H_{\ell,r}$ на колчанном многообразии $M_\lambda(\alpha, d\delta)$. Эти гамильтонианы задают на $M_\lambda(\alpha, d\delta)$ потоки $\mathbf{X}=\mathbf{X}(t)$, $\mathbf{Y}=\mathbf{Y}(t)$, $\mathbf{v}_i=\mathbf{v}_i(t)$, $\mathbf{w}_i=\mathbf{w}_i(t)$, где $t=(t_{\ell,r})$. Зависимость $\sum\limits_{r=1}^{d}\dfrac{\partial}{\partial t_{0,r}}=0$ для этих потоков следует из $\sum\limits_{r=1}^{d} H_{0,r} = -\lambda\cdot\alpha$ (см. замечание 3.4). Заметим, что

$$\mathbf{v}_j \in \operatorname{Hom}(\mathbb{C}^d, \mathbf{V}), \quad (\mathbf{Y} - y)^{-1} = -\sum_{l=0}^{\infty} Y^l y^{-l-1} \in \operatorname{End}\mathbf{V} \otimes \overline{\mathcal{H}}_\lambda,$$

$$(\mathbf{X} - x)^{-1} \in \operatorname{End}\mathbf{V} \otimes \mathbb{C}(x) \subset \operatorname{End}\mathbf{V} \otimes \overline{\mathcal{H}}_\lambda, \quad \mathbf{w}_i \in \operatorname{Hom}(\mathbf{V}, \mathbb{C}^d).$$

Следовательно, матрица $M$, определенная формулой (5.27) с помощью этих потоков на $M_\lambda(\alpha, d\delta)$, есть элемент $\operatorname{End}(\mathbb{C}^d) \otimes \overline{\mathcal{H}}_\lambda$ вида (5.25), где $u_l(x) \in \operatorname{End}(\mathbb{C}^d) \otimes \big(\mathcal{F}\#\Gamma\big)$.

**Утверждение 5.5.** [1].

*1) Матрица $M = M(t)$ удовлетворяет системе уравнений*

$$\frac{\partial}{\partial t_{\ell,r}} M = -\big(My^\ell E_r M^{-1}\big)_- \cdot M, \quad \ell \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0},\ r = 1, \dots, d. \tag{5.36}$$

*2) Из уравнений* (5.36) *следует, что матрицы*

$$L = MyM^{-1}, \quad R_r = ME_rM^{-1} \tag{5.37}$$

*решают систему* (5.34)*,* (5.35).

Поскольку матрицы (5.37) имеют вид (5.31), (5.32) и удовлетворяют условиям (5.33), они дают решение обобщенной матричной иерархии КП.

*Матричной сферической подыерархией* называется система

$$\frac{\partial L}{\partial t_{mk,r}} = \big[(L^{mk}R_r)_+, L\big], \tag{5.38}$$

$$\frac{\partial R_s}{\partial t_{mk,r}} = \big[(L^{mk}R_r)_+, R_s\big], \tag{5.39}$$

где $k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, $r = 1, \dots, d$, $L, R_r$ — матрицы вида (5.31), (5.32), удовлетворяющие условиям (5.33) и

$$\sigma L = \mu L \sigma, \quad \sigma R_r = R_r \sigma. \tag{5.40}$$

Пусть $t' = (t_{mk,r})$, $M = M(t')$ — матрица, определяемая формулой (5.30) с потоками $\mathbf{w}_0 = \mathbf{w}_0(t')$, $\mathbf{X} = \mathbf{X}(t')$, $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}(t')$, $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}_0(t')$ на колчанном многообразии $M_\lambda(\alpha, d\varepsilon_0)$. Подставляя $M = M(t')$ в (5.37), получаем решение матричной сферической подыерархии.

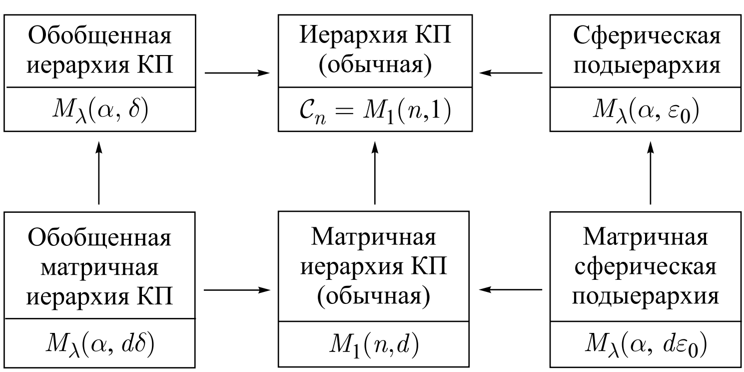
**Замечание 5.6.** Согласно работе [26] следует рассмотреть более общие иерархии. Для этого надо заменить формулу (5.31) на

$$L = Ay + \sum_{l=0}^{\infty} F_l y^{-l}, \tag{5.41}$$

где $A = \operatorname{diag}(a_1, \dots, a_d)$ — постоянная диагональная матрица с элементами $a_r \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Чтобы получить решение этой иерархии из потоков на $M_\lambda(\alpha, d\delta)$, нужно в той же матрице $M = M(t)$ заменить переменные $t_{\ell,r}$ на $a_r^{-\ell} t_{\ell,r}$ и подставить ее в $L = MAyM^{-1}$ и $R_r = ME_rM^{-1}$. Аналогично получаются решения соответствующей матричной сферической подыерархии из потоков на $M_\lambda(\alpha, d\varepsilon_0)$.

**Пример 5.7.** Пусть $m = 1$. Поскольку в этом случае параметр $\lambda$ одномерен и не равен нулю, можно его нормировать: $\lambda = 1$. Тогда элементы алгебры $\operatorname{End}(\mathbb{C}) \otimes \overline{\mathcal{H}}_\lambda$ будут матрицами над алгеброй псевдодифференциальных операторов (5.1). В этом случае система (5.34), (5.35) с условиями (5.31)–(5.33) (при $m = 1$ она совпадает с матричной сферической подыерархией) есть обычная матричная (мультикомпонентная) иерархия КП [26] (по модулю замечания 5.6). Ее решения даются гамильтоновыми системами на многообразиях $M_1(n, d)$, рассмотренными в п. 4.3. Вопрос о связи этих систем (т. е. систем Гиббонса–Хермсена) с матричными иерархиями КП рассмотрен ранее в работах [29, 24, 30].

Следующая таблица показывает соответствие иерархий и колчанных многообразий, с помощью которых строятся рациональные решения иерархий. Каждой иерархии соответствует множество многообразий, отвечающих разным $\alpha$ (или $n$). Вертикальные стрелки обозначают переход к частному случаю $d = 1$, а горизонтальные — к случаю $m = 1$, т. е. к случаю однопетлевого колчана (при этом можно принять $\lambda = 1$).




Для получения явного решения иерархии из этой таблицы нужно предъявить явное решение гамильтоновой системы на соответствующем колчанном многообразии и подставить его в соответствующие формулы, данные выше. При $m \geqslant 2$ выделяется класс рациональных решений, соответствующий случаю $\alpha = n\delta$. В этом случае, чтобы найти матрицы $\mathbf{X}(t)$, $\mathbf{Y}(t)$, $\mathbf{v}_i(t)$, $\mathbf{w}_i(t)$, надо найти решение соответствующего «спинового» обобщения системы Калоджеро–Мозера, описанного в п. 4.4 или 4.5. Если $\alpha, \lambda$ удовлетворяют условию следствия 4.7 или 4.16, то решения соответствующей гамильтоновой системы получаются применением некоторых функторов отражения к решениям «спиновых» систем Калоджеро–Мозера на $M_\lambda(n\delta, \zeta)$, где $\zeta = d\delta$ или $d\varepsilon_0$. Например, если $d = 1$, в сферическом случае, при справедливости гипотезы 4.8 задача поиска решений сводится к применению функторов отражения к решениям (4.62), (4.63).

Если $\boldsymbol{\alpha} \in \Delta^+_{\mathrm{re}}(Q_\zeta)$, то $\dim M_\lambda(\alpha, \zeta) = 0$, т. е. $\mathbf{w}_i, \mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{v}_j$ постоянны. Следовательно, в этом случае имеем ровно одно решение соответствующей иерархии и это решение стационарно.

**Замечание 5.8.** В случае произвольного вектора $\alpha \in \mathbb{Z}^I_{\geqslant 0}$ (даже если $\boldsymbol{\alpha} = (1, \alpha)$ не является корнем) можно определить матрицу $M$ формулой (5.27) (или (5.30)), зависящую от точки многообразия $M_\lambda(\alpha, d\delta)$ (или $M_\lambda(\alpha, d\varepsilon_0)$). Пусть $M$ построено по матрицам $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$, $\mathbf{v}_i$, $\mathbf{w}_i$, которые задают приводимое представление размерности $\boldsymbol{\alpha} = (1, \alpha)$ алгебры $\Pi^{\boldsymbol{\lambda}}(Q_\zeta)$, где $\zeta = d\delta$ или $d\varepsilon_0$. Тогда $\boldsymbol{\alpha} = \sum\limits_l \boldsymbol{\alpha}^{(l)}$, где $\boldsymbol{\alpha}^{(l)} \in \mathbb{Z}^I_{\geqslant 0}$ — размерности факторов $V^{(l)}$ композиционного ряда этого представления и $\boldsymbol{\alpha}^{(l)}_\infty = \delta_{l,l_0}$ для некоторого $l_0$. Подставляя матрицы $\widetilde{\mathbf{X}}$, $\widetilde{\mathbf{Y}}$, $\widetilde{\mathbf{v}}_i$, $\widetilde{\mathbf{w}}_i$, задающие модуль $V^{(l_0)}$, в (5.27) (или (5.30)), получаем ту же матрицу $M$. Поскольку $\Pi^{\boldsymbol{\lambda}}(Q_\zeta)$-модуль $V^{(l_0)}$ простой, его размерность $\boldsymbol{\alpha}^{(l_0)}$ является корнем [9, Theorem 1.2]. Таким образом, можно считать, что $\boldsymbol{\alpha}$ — положительный корень, а начальная точка $\bigl(\mathbf{X}(0), \mathbf{Y}(0), \mathbf{v}_i(0), \mathbf{w}_i(0)\bigr)$ задает простой модуль.

**Замечание 5.9.** Если вектор $\lambda \in \mathbb{C}^I$ не регулярен, то колчанные многообразия $M_\lambda(\alpha, \zeta)$ следует определять как многообразия $N_{\boldsymbol{\lambda}}(\boldsymbol{\alpha})$, состоящие из классов изоморфности полупростых модулей размерности $\boldsymbol{\alpha} = (1, \alpha)$ (см. замечание 1.7). В этом случае описанная конструкция все равно дает решение соответствующей иерархии для неособых начальных точек $\bigl(\mathbf{X}(0), \mathbf{Y}(0), \mathbf{v}_i(0), \mathbf{w}_i(0)\bigr)$. В силу замечания 5.8 в качестве начальных точек потоков достаточно брать простые модули, которые являются неособыми точками $M_\lambda(\alpha, \zeta)$.

## 6. ОТКРЫТЫЕ ВОПРОСЫ

По описанному материалу остается еще много нерешенных вопросов. Представим некоторые из них (см. также список в [1]).

1) Интегрируемость системы (3.7) доказана только в случаях циклического колчана. В общем случае она не верна (хотя, возможно, для каждого графа существует ориентация, при которой система с гамильтонианами $H_p$ интегрируема). Возникает задача: выяснить, когда гамильтоновы системы, определенные в п. 3.2, интегрируемы, или хотя бы доказать их интегрируемость для более широкого класса колчанов.

2) Даже в случае циклического колчана разобраны не все случаи. Во-первых, не рассмотрены все случаи корней вида $(1,\alpha)$ из фундаментальной области $F$ (см. замечание 4.9). Во-вторых, не рассмотрен случай общего $\zeta$, хотя бы при $\alpha = n\delta$. В частности, случай $\zeta = d\sum_{i=0}^{m'} \varepsilon_i$, $0 \leqslant m' \leqslant m-1$, должен описываться в полной аналогии случаям $\zeta = d\varepsilon_0$ и $\zeta = d\delta$, которые он обобщает. Также возникает вопрос: какие иерархии соответствуют этим, а также общим $\zeta$?

3) В случае циклического колчана также неизвестно, можно ли получить все положительные мнимые $\boldsymbol{\alpha} = (1,\alpha)$, применяя функтор отражения к корням вида $(1,\beta)$ из $F$. Это не доказано даже для простейшего случая $\zeta = \varepsilon_0$ (гипотеза 4.8).

4) Заменяя алгебру Чередника ее тригонометрической или эллиптической версией, можно определить соответствующую обобщенную иерархию КП. Чтобы найти их решения, предположительно надо рассматривать более общие препроективные алгебры.

## Приложение А
## СКОБКИ ПУАССОНА В ТЕНЗОРНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЯХ

В этой части докажем формулу (1.16) для отображения момента $P_\alpha\colon \mathrm{Rep}(\overline{Q},\alpha) \to \mathfrak{g}^*$ и выведем формулу (3.10). Для этого введем тензорный формализм, позволяющий считать скобки Пуассона в матричной форме.

Пусть $A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^n,\mathbb{C}^{n'})$ и $B \in \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^m,\mathbb{C}^{m'})$ — произвольные матрицы, тогда их тензорное произведение есть матрица $A\otimes B$, принадлежащая $\mathrm{Hom}(\mathbb{C}^n,\mathbb{C}^{n'}) \otimes \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^m,\mathbb{C}^{m'}) = \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^n\otimes\mathbb{C}^m,\mathbb{C}^{n'}\otimes\mathbb{C}^{m'})$, с элементами $(A\otimes B)_{ij,kl} = A_{ik}B_{jl}$. Введем обозначения $A^{(1)} = A\otimes \mathrm{id}_{\mathbb{C}^m}$ (предполагается $m = m'$) и $B^{(2)} = \mathrm{id}_{\mathbb{C}^n}\otimes B$ (предполагается $n = n'$). Заметим, что $A\otimes B = A^{(1)}B^{(2)}$. Для квадратных матриц $A$ и $B$ имеем $\mathrm{tr}(A^{(1)}B^{(2)}) = \mathrm{tr}(A)\,\mathrm{tr}(B)$. Матрица перестановки $\mathcal{P}\colon \mathbb{C}^n\otimes\mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^m\otimes\mathbb{C}^n$ с элементами $\mathcal{P}_{ij,kl} := \delta_{il}\delta_{jk}$ обладает свойством

$$\mathrm{tr}\,(A^{(1)}\mathcal{P}B^{(2)}) = \mathrm{tr}\,(AB), \quad A\in\mathrm{Hom}(\mathbb{C}^m,\mathbb{C}^n), \quad B\in\mathrm{Hom}(\mathbb{C}^n,\mathbb{C}^m) \quad (\mathrm{A}.1)$$

(в левой части след берется по $\mathbb{C}^n\otimes\mathbb{C}^n$, а в правой — по $\mathbb{C}^n$).

Скобки Пуассона на $\mathrm{Rep}\big(\overline{Q},\alpha\big)$, соответствующие симплектической форме (1.7), определяются формулой $\{(V_a)_{kl},(V_{b^*})_{pq}\} = (-1)^a\delta_{ab}\delta_{pl}\delta_{kq}$, где $a,b\in\overline{Q}$. В матричной форме она имеет вид $\{V_a^{(1)},V_{b^*}^{(2)}\} = (-1)^a\delta_{ab}\mathcal{P}$ (здесь размеры $\mathcal{P}$ зависят от $a\colon i\to j$, а именно $n=\alpha_i$, $m=\alpha_j$). Правило Лейбница в матричной форме можно записать следующим образом: $\{A^{(1)}B^{(1)},C^{(2)}\} = A^{(1)}\{B^{(1)},C^{(2)}\} + \{A^{(1)},C^{(2)}\}B^{(1)}$, где $A,B,C$ — матрично-значные функции.

Построим отображение момента для действия группы $G = G(\alpha)$ на многообразии $M = \operatorname{Rep}(\overline{Q}, \alpha)$ (см. п. 1.4). Элемент $[g] \in G(\alpha)$ (смежный класс $g \in \mathrm{GL}(\alpha)$ по подгруппе $\mathbb{C}^\times$) действует по формуле (1.3), где $a \in \overline{Q}$. Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ группы $G(\alpha)$ состоит из классов $\theta = [(\theta_i)_{i \in I}] \in \operatorname{End}(\alpha)/(\mathbb{C} \cdot 1)$, где $\theta_i \in \operatorname{End}(\mathbb{C}^{\alpha_i})$ и $\mathbb{C} \cdot 1 \subset \operatorname{End}(\alpha)$ — подалгебра Ли, соответствующая подгруппе $\mathbb{C}^\times \subset \mathrm{GL}(\alpha)$. Скобка в $\mathfrak{g}$ выглядит следующим образом: $[\theta, \eta] = [([\theta_i, \eta_i])_{i \in I}]$. Инфинитезимально действие группы $G = G(\alpha)$ дается векторами $\mathcal{V}_\theta \in \Gamma(M, TM)$, определенными как $(\mathcal{V}_\theta f)(V) = (d/dt) f(\exp(-t\theta).V)\big|_{t=0}$. Определим $\partial_{V_a}$ как матрицу с элементами $(\partial_{V_a})_{ll'} = \partial/\partial(V_a)_{l'l}$. Тогда векторные поля $\mathcal{V}_\theta$ можно записать $\mathcal{V}_\theta = \sum_{a\colon i \to j} \operatorname{tr}\big((V_a\theta_i - \theta_j V_a)\partial_{V_a}\big)$. Докажем то, что эти поля даются гамильтонианами $H_\theta(V) = \sum_{a\colon i\to j} (-1)^a \operatorname{tr}(V_a V_{a^*} \theta_j)$, и то, что эти гамильтонианы удовлетворяют $\{H_\theta, H_\eta\} = H_{[\theta,\eta]}$. Во-первых, заметим, что гамильтонианы определены корректно, так как одновременный сдвиг $\theta_i \to \theta_i + c$ дает дополнительный член $c \sum_{a \in \overline{Q}} (-1)^a \operatorname{tr}(V_a V_{a^*})$; меняя $a$ на $a^*$ и используя цикличность следа, видим, что он равен нулю. Далее,

$$
\begin{aligned}
\{H_\theta, f\}(V) &= \sum_{b \in \overline{Q}} \{H_\theta, (V_b)_{kl}\} \frac{\partial f}{\partial (V_b)_{kl}} = \sum_{b \in \overline{Q}} \operatorname{tr}\big(\{H_\theta, V_b\}\partial_{V_b}\big) f = \\
&= \sum_{\substack{a,b \in \overline{Q} \\ a\colon i \to j}} (-1)^a \operatorname{tr}\big(\{V_a^{(1)} V_{a^*}^{(1)} \theta_j^{(1)}, V_b^{(2)}\}\partial_{V_b}^{(2)}\big) f = \\
&= \sum_{\substack{a,b \in \overline{Q} \\ a\colon i \to j}} (-1)^a \operatorname{tr}\big(V_{a^*}^{(1)} \theta_j^{(1)} \{V_a^{(1)}, V_b^{(2)}\}\partial_{V_b}^{(2)}\big) f + \\
&\quad + \sum_{\substack{a,b \in \overline{Q} \\ a\colon i \to j}} (-1)^a \operatorname{tr}\big(\theta_j^{(1)} V_a^{(1)} \{V_{a^*}^{(1)}, V_b^{(2)}\}\partial_{V_b}^{(2)}\big) f = \\
&= \sum_{a\colon i\to j} \operatorname{tr}\big(V_{a^*}^{(1)} \theta_j^{(1)} \mathcal{P} \partial_{V_{a^*}}^{(2)}\big) f - \sum_{a\colon i\to j} \operatorname{tr}\big(\theta_j^{(1)} V_a^{(1)} \mathcal{P} \partial_{V_a}^{(2)}\big) f = \\
&= \sum_{a\colon i\to j} \operatorname{tr}\big((V_a\theta_i - \theta_j V_a)\partial_{V_a}\big) f = (\mathcal{V}_\theta f)(V),
\end{aligned}
$$

где использовано (A.1). Аналогично получаем

$$
\begin{aligned}
\{H_\theta, H_\eta\}(V) &= \sum_{\substack{a\colon i \to j \\ b\colon k \to l}} (-1)^a (-1)^b \operatorname{tr}\big(\{V_a^{(1)} V_{a^*}^{(1)} \theta_j^{(1)}, V_b^{(2)} V_{b^*}^{(2)} \eta_l^{(2)}\}\big) = \\
&= \sum_{a\colon i\to j} (-1)^a \operatorname{tr}\big(-V_{a^*}\theta_j V_a \eta_i - \theta_j V_a V_{a^*} \eta_j + V_{a^*}\theta_j \eta_j V_a + \theta_j V_a \eta_i V_{a^*}\big) = \\
&= H_{[\theta,\eta]}(V).
\end{aligned}
$$

Таким образом, пуассоновское действие группы $G(\alpha)$ задается гамильтонианами $H_\theta$, определенными выше. Из формулы $P(V)(\theta) = H_\theta(V)$ получаем $P(V) = \Bigg(\sum\limits_{\substack{i\in I\\ a\colon i\to j}} (-1)^a V_a V_{a^*}\Bigg)_{j\in I}$. Принадлежность $P(V)\in \mathrm{End}(\alpha)_0$ следует из общей теории, но можно проверить ее явно:

$$\sum_{j\in I}\mathrm{tr}\Bigg(\sum_{\substack{i\in I\\ a\colon i\to j}} (-1)^a V_a V_{a^*}\Bigg) = \sum_{a\in\overline{Q}}(-1)^a\,\mathrm{tr}\,(V_aV_{a^*}) = 0.$$

Докажем теперь формулу (3.10) (не будем предполагать, что $\boldsymbol{\alpha}_\infty = 1$, см. конец п. 3.2). Согласно утверждению 1.9, скобки Пуассона на $N_{\boldsymbol{\lambda}}(\boldsymbol{\alpha})$ считаются как скобки Пуассона соответствующих (инвариантных) функций на $\mathrm{Rep}\big(\Pi^{\boldsymbol{\lambda}}(Q_\zeta),\boldsymbol{\alpha}\big)$. В обозначениях п. 3.2 имеем $\{v_i^{(1)}, w_j^{(2)}\}_{rl,l's} = \{(v_i)_{rl'},(w_j)_{ls}\} = \{(V_{b_{ir}})_{l'},(V_{b^*_{js}})_l\} = \delta_{ij}\delta_{rs}\delta_{ll'}$, т. е. $\{v_i^{(1)}, w_j^{(2)}\} = \delta_{ij}\mathcal{P}$ $\forall\, i,j\in I$. Также учитывая $\{V^{(1)}_{p''}, V^{(2)}_{p'}\} = 0$ и то, что $V_{p''}V_{p'} = V_{p''p'}$ для любых $p',p''\in \mathsf{P}$, таких, что $p''p'\in\mathsf{P}$, получаем

$$\begin{aligned}
\{I_A,I_B\}(V) &= \sum_{\substack{i,j\in I\\ k,l\in I}}\sum_{\substack{p''\in\mathsf{P}_{ij}\\ p'\in\mathsf{P}_{kl}}}\mathrm{tr}\,\Big(A^{(1)}_{p''}\{w_j^{(1)}V^{(1)}_{p''}v_i^{(1)}, w_l^{(2)}V^{(2)}_{p'}v_k^{(2)}\}B^{(2)}_{p'}\Big) = \\
&= \sum_{\substack{i,j\in I\\ k,l\in I}}\sum_{\substack{p''\in\mathsf{P}_{ij}\\ p'\in\mathsf{P}_{kl}}}\mathrm{tr}\,\Big(A^{(1)}_{p''}\big(w_j^{(1)}V^{(1)}_{p''}\{v_i^{(1)}, w_l^{(2)}\}V^{(2)}_{p'}v_k^{(2)} + \\
&\qquad + w_l^{(2)}V^{(2)}_{p'}\{w_j^{(1)}, v_k^{(2)}\}V^{(1)}_{p''}v_i^{(1)}\big)B^{(2)}_{p'}\Big) = \\
&\qquad = \sum_{i,j,k\in I}\sum_{\substack{p''\in\mathsf{P}_{ij}\\ p'\in\mathsf{P}_{ki}}}\mathrm{tr}\,\big(A_{p''}w_jV_{p''}V_{p'}v_kB_{p'}\big) - \\
&\qquad - \sum_{i,j,l\in I}\sum_{\substack{p''\in\mathsf{P}_{ij}\\ p'\in\mathsf{P}_{jl}}}\mathrm{tr}\,\big(V_{p''}v_iA_{p''}B_{p'}w_lV_{p'}\big) = \\
&= \sum_{\substack{j,k\in I\\ p\in\mathsf{P}_{kj}}}\sum_{\substack{p'',p'\in\mathsf{P}\\ p''p'=p}}\mathrm{tr}\,\big(B_{p'}A_{p''}w_jV_pv_k\big) - \sum_{\substack{i,l\in I\\ p\in\mathsf{P}_{il}}}\sum_{\substack{p'',p'\in\mathsf{P}\\ p'p''=p}}\mathrm{tr}\,\big(A_{p''}B_{p'}w_lV_pv_i\big).
\end{aligned}$$

В итоге получаем $\{I_A,I_B\}(V) = I_{[A,B]}(V)$.

## Приложение Б
## ФУНКТОР ОТРАЖЕНИЯ НА $\mathrm{Rep}\big(\Pi^\lambda(Q),\alpha\big)$

Здесь явно опишем, как можно представить функтор отражения на многообразиях $\mathrm{Rep}\big(\Pi^\lambda(Q),\alpha\big)$. Используя это описание, докажем регулярность

$\varrho_k^{\lambda,\alpha}$ без использования утверждения 1.10 (см. теорему 2.6). В этом приложении используются обозначения из разд. 2 и предполагается, что $\lambda_k \neq 0$ и $k \in I_{\text{бп}}$.

Рассмотрим точку $V \in \operatorname{Rep}\bigl(\Pi^\lambda(Q), \alpha\bigr)$. Ее аффинные координаты — это матричные элементы операторов $V_a$. Они определяются с помощью стандартных базисов пространств $V_j = \mathbb{C}^{\alpha_j}$, которые обозначим через $\{e_l^{(j)}\}_{l=1}^{\alpha_j}$. Построим представитель $V' \in \operatorname{Rep}\bigl(\Pi^{r_k\lambda}(Q), s_k\alpha\bigr)$, изоморфный модулю $F_k^{\lambda,\alpha}(V)$, задав базис в пространствах $V'_j$ для каждого $j \in I$. Для $j \neq k$ базис $V'_j = V_j$ уже задан. Векторы $e_{al}^{\oplus} := \mu_a(e_l^{(j)})$, $a\colon j \to k$, $j \in I$, образуют базис пространства $V_\oplus = \bigoplus\limits_{a\colon j\to k} V_j$. Его подпространство $V'_k = \operatorname{Ker}\pi = \operatorname{Im}\mu' = \operatorname{Im}\mu'\pi' = \operatorname{Im}(1-\mu\pi)$ натянуто на векторы $e'_{al} := (1-\mu\pi)(e_{al}^{\oplus})$. Компоненты векторов $e'_{al}$ в базисе $\{e_{al}^{\oplus}\}$ формируют матрицу ранга $p_0 := \dim V'_k = (s_k\alpha)_k$. Ее матричные элементы определяются из формулы $(1-\mu\pi)(e_{a'l'}^{\oplus}) = \sum\limits_{a,l}(1-\mu\pi)_{al,a'l'}e_{al}^{\oplus}$.

Явно имеем

$$\mu\pi(e_{a'l'}^{\oplus}) = \frac{1}{\lambda_k}\sum_{a\in H}\mu_a V_{a^*}\sum_{b\in H}(-1)^b V_b\pi_b(e_{a'l'}^{\oplus}) =$$
$$= \frac{1}{\lambda_k}\sum_{a,b\in H}(-1)^b(\mu_a V_{a^*}V_b)(\delta_{ba'}e_{l'}) = \frac{1}{\lambda_k}(-1)^{a'}\sum_{a,l}\mu_a(e_l)(V_{a^*}V_{a'})_{l,l'} =$$
$$= \frac{1}{\lambda_k}(-1)^{a'}\sum_{a,l}(V_{a^*}V_{a'})_{ll'}e_{al}^{\oplus}$$

(опущен индекс $j$ в $e_l^{(j)}$). Таким образом, матричные элементы $(1-\mu\pi)_{al,a'l'} = \delta_{aa'}\delta_{ll'} - \dfrac{1}{\lambda_k}(-1)^{a'}(V_{a^*}V_{a'})_{ll'}$ — многочлены от координат $(V_a)_{ll'}$. Для заданного $V$ можно выбрать базис $\{e'_p\}_{p=1}^{p_0}$ пространства $V'_k$ из множества $\{e'_{al}\}$, в частности, $e'_p = \sum\limits_{a,l} n_{al,p}e'_{al}$ для некоторых $n_{al,p} \in \{0,1\}$. Это дает нам изоморфизм $V'_k \simeq \mathbb{C}^{p_0}$, который отождествляет $V'$ с элементом $\operatorname{Rep}\bigl(\Pi^{r_k\lambda}(Q), s_k\alpha\bigr)$. Линейная независимость $e'_1, \dots, e'_{p_0}$ эквивалентна тому, что соответствующий минор $p_0 \times p_0$ матрицы $(1-\mu\pi)$ не зануляется в точке $V$. Поскольку этот минор есть многочлен от $(V_a)_{ll'}$, он отличен от нуля на некотором открытом (в топологии Зарисского) множестве $U \subset \operatorname{Rep}\bigl(\Pi^\lambda(Q), \alpha\bigr)$, содержащем $V$. Поэтому мы можем выбрать базис $e'_p = \sum\limits_{a,l} n_{al,p}e'_{al}$ для всех $V \in U$, где $n_{al,p}$ не зависят от $V$. Векторы $e'_{al}$ могут быть (единственным образом) разложены по базису $e'_p$, т. е. $e'_{al} = \sum\limits_{p=1}^{p_0} t_{p,al}e'_p$, где $t_{p,al}$ — рациональные функции от $(V_a)_{ll'}$, регулярные на $U$. Далее имеем

$$\mu'(e'_p) = e'_p = \sum_{a',l'} n_{a'l',p} e'_{a'l'} = \sum_{a',l'} n_{a'l',p}(1-\mu\pi)(e^{\oplus}_{a'l'}) = \\ = \sum_{a,a',l,l'} n_{a'l',p}(1-\mu\pi)_{al,a'l'} e^{\oplus}_{al},$$

$$\pi'(e^{\oplus}_{al}) = \mu'\pi'(e^{\oplus}_{al}) = (1-\mu\pi)(e^{\oplus}_{al}) = e'_{al} = \sum_p t_{p,al} e'_p.$$

Для $a \in H$ получаем

$$V'_a(e_l) = -\lambda_k(-1)^a \pi'(e^{\oplus}_{al}) = -\lambda_k(-1)^a \sum_p t_{p,al} e'_p,$$

$$V'_{a^*}(e'_p) = \pi_a\bigl(\mu'(e'_p)\bigr) = \sum_{a',l,l'} n_{a'l',p}(1-\mu\pi)_{al,a'l'} e_l.$$

То есть для $V \in U$ определенный выше элемент $V' \in \operatorname{Rep}\bigl(\Pi^{r_k\lambda}(Q), s_k\alpha\bigr)$ имеет координаты

$$\begin{aligned} (V'_a)_{ll'} &= (V_a)_{ll'} \quad \text{для } a, a^* \notin H, \\ (V'_a)_{pl} &= -\lambda_k(-1)^a t_{p,al} \quad \text{для } a \in H, \\ (V'_{a^*})_{lp} &= \sum_{a',l'} n_{a'l',p}(1-\mu\pi)_{al,a'l'} \quad \text{для } a \in H. \end{aligned}$$

Таким образом, многообразие $\operatorname{Rep}\bigl(\Pi^{\lambda}(Q), \alpha\bigr)$ покрывается открытыми множествами $U^{(\rho)}$, на которых заданы регулярные отображения

$$\varphi^{(\rho)} \colon U^{(\rho)} \to \operatorname{Rep}\bigl(\Pi^{r_k\lambda}(Q), s_k\alpha\bigr),$$

переводящие любой модуль $V \in U^{(\rho)}$ в построенный выше $V'$. На пересечении $U^{(\rho)} \cap U^{(\sigma)}$ имеем $\varphi^{(\rho)}(V) = g_{\rho\sigma}\varphi^{(\sigma)}(V)$ для некоторого элемента $g_{\rho\sigma} \in G(s_k\alpha)$, не зависящего от $V \in U^{(\rho)} \cap U^{(\sigma)}$. Выбор отображений $\varphi^{(\rho)}$ не единственный, они могут быть заменены на $\tilde{\varphi}^{(\rho)}(V) = g_\rho\varphi^{(\rho)}$ для некоторых элементов $g_\rho \in G(s_k\alpha)$ (заметим, что $\varphi^{(\rho)}$ не инъективны, так как $\varphi^{(\rho)}(gV) = \varphi^{(\rho)}(V)$ при любом $V \in U^{(\rho)}$ и $g \in \mathrm{GL}(\alpha_k) \subset \mathrm{GL}(\alpha)$ таком, что $gV \in U^{(\rho)}$).

Пусть $\mathrm{cl}_\lambda(\alpha)$ — подмножество полупростых модулей $V \in \operatorname{Rep}\bigl(\Pi^{\lambda}(Q), \alpha\bigr)$. Тогда $N_\lambda(\alpha) = \mathrm{cl}_\lambda(\alpha)/G(\alpha)$ — аффинное многообразие с алгеброй регулярных функций $\mathbb{C}[N_\lambda(\alpha)] = \mathbb{C}\bigl[\operatorname{Rep}\bigl(\Pi^{\lambda}(Q), \alpha\bigr)\bigr]^{G(\alpha)}$ (см. замечание 1.7). Если все модули $V \in \operatorname{Rep}\bigl(\Pi^{\lambda}(Q), \alpha\bigr)$ полупросты (в частности, если выполнено условие теоремы 1.5), то тогда $N_\lambda(\alpha) = \operatorname{Rep}\bigl(\Pi^{\lambda}(Q), \alpha\bigr)/G(\alpha)$. В случае, когда условие теоремы 1.5 выполнено, следующее утверждение содержится в утверждении теоремы 2.6. В общем случае оно доказывается точно так же (с помощью леммы 2.5 и утверждения 1.10). Мы его формулируем, чтобы привести альтернативное доказательство.

**Утверждение Б.1.** *Функтор $F_k^{\lambda,\alpha}$ индуцирует изоморфизм аффинных многообразий $\varrho_k^{\lambda,\alpha}\colon N_\lambda(\alpha) \to N_{r_k\lambda}(s_k\alpha)$.*

**Доказательство.** Биективность отображения $\varrho_k^{\lambda,\alpha}$ аргументирована в замечании 2.7. Его регулярность $\varrho_k^{\lambda,\alpha}$ эквивалентна тому, что функция $h = f\circ\varrho_k^{\lambda,\alpha}$ регулярна (принадлежит $\mathbb{C}\big[N_\lambda(\alpha)\big]$) для любой функции $f \in \mathbb{C}\big[N_{r_k\lambda}(s_k\alpha)\big]$.

При изоморфизме $\mathbb{C}[N_{r_k\lambda}(s_k\alpha)] = \mathbb{C}\big[\mathrm{Rep}\big(\Pi^{r_k\lambda}(Q), s_k\alpha\big)\big]^{G(s_k\alpha)}$ функция $f$ переходит в функцию $\bar f \in \mathbb{C}\big[\mathrm{Rep}\big(\Pi^{r_k\lambda}(Q), s_k\alpha\big)\big]^{G(s_k\alpha)}$, такую, что $\bar f(V) = f([V])$ для любого $V \in \mathrm{cl}_{r_k\lambda}(s_k\alpha)$. Определим $G(\alpha)$-инвариантную функцию $\bar h\colon \mathrm{Rep}\big(\Pi^\lambda(Q), \alpha\big) \to \mathbb{C}$ формулой $\bar h(V) = \bar f(V')$, где $V'$ — любой элемент $\mathrm{Rep}\big(\Pi^{r_k\lambda}(Q), s_k\alpha\big)$, изоморфный $F_k^{\lambda,\alpha}(V)$, как $\Pi^{r_k\lambda}(Q)$-модуль. Она регулярна в каждой области $U^{(\rho)}$, поскольку $\bar h\big|_{U^{(\rho)}} = \bar f\circ\varphi^{(\rho)}$, а также $\bar f$ и $\varphi^{(\rho)}$ — регулярны. Следовательно, $\bar h \in \mathbb{C}\big[\mathrm{Rep}\big(\Pi^\lambda(Q), \alpha\big)\big]^{G(\alpha)}$. Поскольку $\bar h(V) = \bar f(V') = f([V']) = f\big(\varrho_k^{\lambda,\alpha}([V])\big) = h([V])$ для любого модуля $V \in \mathrm{cl}_\lambda(\alpha)$, функция $\bar h$ переходит в функцию $h$ при изоморфизме $\mathbb{C}\big[\mathrm{Rep}\big(\Pi^\lambda(Q), \alpha\big)\big]^{G(\alpha)} = \mathbb{C}\big[N_\lambda(\alpha)\big]$. Следовательно, $h \in \mathbb{C}\big[N_\lambda(\alpha)\big]$. □

**Благодарности**. Автор выражает благодарность Олегу Чалыху и Юрию Бересту за объяснение известных результатов по теме и плодотворные дискуссии. Работа частично написана при поддержке гранта EPSRC EP/K004999/1.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Chalykh O., Silantyev A.* KP Hierarchy for the Cyclic Quiver // J. Math. Phys. 2017. V. 59, No. 7. P. 071702-1–071702-31.

2. *Бернштейн И. Н., Гельфанд И. М., Пономарев В. А.* Функторы Кокстера и теорема Габриеля // УМН. 1973. Т. 28, вып. 2(170). С. 19–33.

3. *Gelfand I. M., Ponomarev V. A.* Problems of Linear Algebra and Classification of Quadruples of Subspaces in a Finite-Dimensional Vector Space // Hilbert Space Operators and Operator Algebras: Proc. of Intern. Conf., Tihany, 1970. P. 163–237; *Gelfand I. M., Ponomarev V. A.* Problems of Linear Algebra and Classification of Quadruples of Subspaces in a Finite-Dimensional Vector Space // Colloq. Math. Soc. János Bolyai. 5. Amsterdam: North-Holland, 1972.

4. *Nakajima H.* Instantons on ALE Spaces, Quiver Varieties, and Kac–Moody Algebras // Duke Math. J. 1994. V. 76, No. 2. P. 365–416.

5. *Wilson G.* Collisions of Calogero–Moser Particles and an Adelic Grassmannian (with an Appendix by I. G. Macdonald) // Invent. Math. 1998. V. 133, No. 1. P. 1–41.

6. *Etingof P., Ginzburg V.* Symplectic Reflection Algebras, Calogero–Moser Space, and Deformed Harish-Chandra Homomorphism // Invent. Math. 2002. V. 147, No. 2. P. 243–348.

7. *Crawley-Boevey W., Holland M.* Noncommutative Deformations of Kleinian Singularities // Duke Math. J. 1998. V. 92, No. 3. P. 605–635.

8. *Kac V. G.* Infinite Root Systems, Representations of Graphs and Invariant Theory // Invent. Math. 1980. V. 56, No. 1. P. 57–92;
*Kac V. G.* Root Systems, Representations of Quivers and Invariant Theory // Invariant Theory. Montecatini, 1982. P. 74–108;
*Kac V. G.* Root Systems, Representations of Quivers and Invariant Theory // Lecture Notes in Math. V. 996. Berlin: Springer, 1983.

9. *Crawley-Boevey W.* Geometry of the Moment Map for Representations of Quivers // Compositio Math. 2001. V. 126, No. 3. P. 257–293.

10. *Gibbons J., Hermsen T.* A Generalisation of the Calogero–Moser System // Physica. 1984. V. 11D. P. 337–348.

11. *Chalykh O., Fairon M.* Multiplicative Quiver Varieties and Generalised Ruijsenaars–Schneider Models // J. Geom. Phys. 2017. V. 121. P. 413–437.

12. *Airault H., McKean H. P., Moser J.* Rational and Elliptic Solutions of the Korteweg–de Vries Equation and a Related Many-Body Problem // Commun. Pure Appl. Math. 1977. V. 30, No. 1. P. 95–148.

13. *Chudnovsky D. V., Chudnovsky G. V.* Pole Expansions of Nonlinear Partial Differential Equations // Nuovo Cim. 1977. V. 40B, No. 2. P. 339–353.

14. *Кричевер И. М.* О рациональных решениях уравнения Кадомцева–Петвиашвили и об интегрируемых системах $N$ частиц на прямой // Функционал. анализ и его приложения. 1978. Т. 12. С. 76–78.

15. *Le Bruyn L., Procesi C.* Semisimple Representations of Quivers // Trans. Am. Math. Soc. 1990. V. 317, No. 2. P. 585–598.

16. *Crawley-Boevey W.* Representations of Quivers, Preprojective Algebras and Deformations of Quotient Singularities // Lectures from a DMV Seminar “Quantizations of Kleinian Singularities”, May 1999.

17. *Humphreys J. E.* Reflection Groups and Coxeter Groups. Cambridge Univ. Press, 1990.

18. *Арнольд В. И., Гивенталь А. Б.* Симплектическая геометрия. Ижевск: РХД, 2000.

19. *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики. М.: Наука, 1989.

20. *Etingof P.* Calogero–Moser Systems and Representation Theory. Zurich Lectures in Advanced Mathematics. EMS, 2007.

21. *Crawley-Boevey W.* Decomposition of Marsden–Weinstein Reductions for Representations of Quivers // Compositio Math. 2002. V. 130, No. 2. P. 225–239.

22. *Маклейн С.* Категории для работающего математика: Пер. с англ. / Под ред. В. А. Артамонова. М.: Физматлит, 2004.

23. *Berest Yu., Chalykh O., Eshmatov F.* Recollement of Deformed Preprojective Algebras and the Calogero–Moser Correspondence // Mosc. Math. J. 2008. V. 8, No. 1. P. 21–37.

24. *Wilson G.* Notes on the Vector Adelic Grassmannian. arXiv:1507.00693. Compiled in 2009.

25. *Miwa T., Jimbo M., Date E.* Solitons: Differential Equations, Symmetries and Infinite Dimensional Algebras. Cambridge Univ. Press, 2000.

26. *Dickey L.* Soliton Equations and Hamiltonian Systems // Adv. Ser. of Math. Phys. 2003. V. 26.

27. *Asensio M. J., Van den Bergh M., Van Ostaeyen F.* A New Algebraic Approach to Microlocalization of Filtered Rings // Trans. AMS. 1989. V. 316, No. 2. P. 537–553.

28. *Cannings R. C., Holland M. P.* Right Ideals of Rings of Differential Operators // J. Algebra. 1994. V. 167. P. 116–141.

29. *Krichever I. M., Babelon O., Billey E., Talon M.* Spin Generalization of the Calogero–Moser System and the Matrix KP Equation // Am. Math. Soc. Transl. Ser. 1995. V. 2. P. 170.

30. *Bielawski R., Pidstrygach V.* On the Symplectic Structure of Instanton Moduli Spaces // Adv. Math. 2011. V. 226, No. 3. P. 2796–2824.