ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА
2018. Т. 49. ВЫП. 4. С. 907–917

АТОМНЫЕ СИСТЕМЫ СО СВЯЗАННЫМИ СОСТОЯНИЯМИ ФЕРМИОНОВ В ПОЛЯХ ШВАРЦШИЛЬДА, РАЙССНЕРА–НОРДСТРЁМА — КАНДИДАТЫ В ЧАСТИЦЫ ТЕМНОЙ МАТЕРИИ

В. П. Незнамов, И. И. Сафронов, В. Е. Шемарулин*

Российский федеральный ядерный центр — Всероссийский научно-исследовательский институт экспериментальной физики, Саров, Россия

После перехода от уравнения Дирака к релятивистскому уравнению типа Шредингера с эффективными потенциалами полей Шварцшильда и Райсснера–Нордстрёма (RN) доказано существование стационарных связанных состояний фермионов с вещественными квадратично-интегрируемыми радиальными волновыми функциями. Фермионы в таких состояниях локализованы вблизи горизонтов событий в интервалах от нуля до долей или нескольких единиц комптоновской длины волны фермиона в зависимости от величин гравитационной и электромагнитных констант связи и от величин углового и орбитального моментов j, l. Электрически нейтральные системы атомного типа (коллапсары Шварцшильда и RN с фермионами, находящимися в связанных состояниях) предложены в качестве частиц темной материи.

After transition from the Dirac equation to the Schrödinger-type relativistic equation with effective potentials of the Schwarzschild and Reissner–Nordström fields, the existence of the stationary state of fermions with real square-integrable radial wave functions is proved. The fermions are localized near the event horizon within the range from zero to several fractions or units of the Compton wavelength of a fermion as a function of both the gravitational and electromagnetic coupling constants and the angular and orbital momenta j, l. Electrically neutral atomic-type systems (Schwarzschild and RN collapsars with fermions in bound states) are proposed as particles of dark matter.

PACS: 03.65.-w; 04.20.-q

ВВЕДЕНИЕ

Ранее в [1, 2] для метрик Шварцшильда и Райсснера–Нордстрёма при использовании релятивистских уравнений типа Шредингера с эффективными

*E-mail: neznamov@vniief.ru

потенциалами доказано существование стационарных связанных состояний фермионов, локализованных вблизи горизонтов событий в интервалах от нуля до долей или нескольких единиц комптоновской длины волны фермионов в зависимости от величин гравитационной и электромагнитных констант связи и от величин углового (j) и орбитального (l) моментов*.

В [1] были анонсированы также энергии связанных стационарных состояний фермионов для полей с вращением (пространство-время Керра и Керра–Ньюмена).

В данной работе кратко воспроизводятся результаты [1, 2] и на их основе неиспаряющиеся коллапсары без и с фермионами, находящимися в связанных состояниях, предложены для рассмотрения в качестве частиц темной материи.

В работе используется, как правило, система единиц $\hbar = c = 1$:

$$g_{\alpha\beta} = \mathrm{diag}\,[1, -1, -1, -1]. \tag{1}$$

Приняты следующие обозначения:

— поле Шварцшильда с точечной массой M: $r_0 = 2GM/c^2$ — радиус горизонта событий, безразмерные переменные $\rho = r/l_c$, $r_0/l_c = 2\alpha$, $\alpha = GMm/\hbar c = Mm/M_P^2$, M_P — планковская масса, $l_c = \hbar/mc$ — комптоновская длина волны фермиона, m, E — масса и энергия дираковской частицы, $\varepsilon = E/m$;

— поле Райсснера–Нордстрёма с массой M и зарядом Q: $r_Q = \sqrt{G}Q/c^2$, $\rho = r/l_c$, $\alpha_Q = r_Q/l_c = \sqrt{G}QM/\hbar c$, $\alpha_{\mathrm{em}} = eQ/\hbar c$, e — электрический заряд фермиона; $\rho_\pm = \alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \alpha_Q^2}$, $\rho_\pm$ — безразмерные радиусы внешнего и внутреннего горизонтов событий при $\alpha^2 > \alpha_Q^2$;

— поля Керра с массой M и моментом J и Керра–Ньюмена с массой M, моментом J и зарядом Q: $a = J/Mc$, $\rho = r/l_c$, $\alpha_a = a/l_c$, $\rho_\pm = \alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \alpha_a^2 - \alpha_Q^2}$, $\rho_\pm$ — безразмерные радиусы внешнего и внутреннего горизонтов событий при $\alpha^2 > \alpha_a^2 + \alpha_Q^2$.

1. МОЖНО ЛИ РЕАЛИЗОВАТЬ УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ СТАЦИОНАРНЫХ СВЯЗАННЫХ СОСТОЯНИЙ ФЕРМИОНОВ ВО ВНЕШНИХ ГРАВИТАЦИОННЫХ ПОЛЯХ?

Метрики Райсснера–Нордстрёма и Шварцшильда:

$$ds^2 = f_{\mathrm{RN}}dt^2 - \frac{dr^2}{f_{\mathrm{RN}}} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \tag{2}$$

*В [1, 2] приведены необходимые по теме реферативные ссылки. В данной работе эти ссылки не приведены для краткости.

$$g_{00}^{\mathrm{RN}} = f_{\mathrm{RN}} = \left(1 - \frac{r_0}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\right) = \left(1 - \frac{2\alpha}{\rho} + \frac{\alpha_Q^2}{\rho^2}\right). \tag{3}$$

При $r_Q = 0$ реализуется метрика Шварцшильда

$$g_{00}^{s} = f_s = 1 - \frac{r_0}{r} = 1 - \frac{2\alpha}{\rho}. \tag{4}$$

Уравнение Дирака в гамильтоновой форме:

$$i\frac{\partial \Psi_\eta}{\partial t} = H_\eta \Psi_\eta. \tag{5}$$

Что мы имеем?

1. Самосопряженный гамильтониан

$$H_\eta = H_\eta^+ = \sqrt{f_{\mathrm{RN}}}\, m\underline{\gamma^0} - i\underline{\gamma^0}\,\underline{\gamma^3}\left(f_{\mathrm{RN}}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} - \frac{r_0}{2r^2}\right) -$$
$$- i\sqrt{f_{\mathrm{RN}}}\frac{1}{r}\left[\underline{\gamma^0}\,\underline{\gamma^1}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{2}\mathrm{ctg}\theta\right) + \underline{\gamma^0}\,\underline{\gamma^2}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right] + \frac{eQ}{r}. \tag{6}$$

2. Возможность разделения переменных

$$\Psi_\eta = \begin{pmatrix} F(r)\,\xi(\theta) \\ -iG(r)\,\sigma^3\xi(\theta) \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-iEt}\,\mathrm{e}^{im_\varphi\varphi}, \tag{7}$$

$$\xi(\theta) = \begin{pmatrix} {}_{-1/2}Y_{jm_\varphi}(\theta) \\ {}_{1/2}Y_{jm_\varphi}(\theta) \end{pmatrix} = (-1)^{m_\varphi+1/2}\sqrt{\frac{1}{4\pi}\frac{(j-m_\varphi)!}{(j+m_\varphi)!}}\times$$
$$\times\begin{pmatrix} \cos\dfrac{\theta}{2} & \sin\dfrac{\theta}{2} \\ -\sin\dfrac{\theta}{2} & \cos\dfrac{\theta}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \left(\kappa - m_\varphi + \dfrac{1}{2}\right)P_l^{m_\varphi-1/2}(\theta) \\ P_l^{m_\varphi+1/2}(\theta) \end{pmatrix} \tag{8}$$

(в (8) выражение после квадратного корня в круглых скобках является двумерной матрицей).

3. Плотность тока дираковских частиц

$$j^0 = \Psi_\eta^+\Psi_\eta = (F(\rho)F^*(\rho) + G(\rho)G^*(\rho))\xi^+(\theta)\xi(\theta), \tag{9}$$

$$j^\rho = \Psi_\eta^+ f_{\mathrm{RN}}\,\underline{\gamma^0}\,\underline{\gamma^3}\Psi_\eta = -if_{\mathrm{RN}}(F^*(\rho)G(\rho) - F(\rho)G^*(\rho))\xi^+(\theta)\xi(\theta), \tag{10}$$

$$j^{\theta} = \Psi_{\eta}^{+} \frac{f_{\mathrm{RN}}^{1/2}}{\rho} \gamma^{\underline{0}} \gamma^{\underline{1}} \Psi_{\eta} = \\ = -\frac{f_{\mathrm{RN}}^{1/2}}{\rho} \left(F^{*}(\rho) G(\rho) + F(\rho) G^{*}(\rho)\right) \xi^{+}(\theta) \sigma^{2} \xi(\theta), \quad (11)$$

$$j^{\varphi} = \Psi_{\eta}^{+} \frac{f_{\mathrm{RN}}^{1/2}}{\rho \sin\theta} \gamma^{\underline{0}} \gamma^{\underline{2}} \Psi_{\eta} = \frac{f_{\mathrm{RN}}^{1/2}}{\rho \sin\theta} \times \\ \times \left(F^{*}(\rho) G(\rho) + F(\rho) G^{*}(\rho)\right) \xi^{+}(\theta) \sigma^{1} \xi(\theta). \quad (12)$$

Для комплексных радиальных функций плотность тока j^{ρ}, вообще говоря, может быть не равна нулю. В этом случае гамильтониан неэрмитов: $(\Phi, H_{\eta}\Psi) \neq (H_{\eta}\Phi, \Psi)$. Могут существовать лишь квазистационарные состояния фермионов, распадающиеся со временем.

Для вещественных радиальных функций $(F^{*} = F,\ G^{*} = G)$ плотность радиального тока равна нулю во всей области определения волновых функций и дираковский гамильтониан является эрмитовым.

Плотность тока j^{θ} равна нулю как для комплексных, так и для вещественных $F(\rho)$ и $G(\rho)$, так как $\xi^{+}(\theta)\sigma^{2}\xi(\theta) = 0$. Наоборот, плотность тока j^{φ} отлична от нуля для любых функций $F(\rho)$ и $G(\rho)$.

4. Важно: мы ограничиваем себя классом вещественных радиальных функций $F(\rho)$, $G(\rho)$.

5. Система уравнений для вещественных радиальных функций:

$$f_{\mathrm{RN}} \frac{dF(\rho)}{d\rho} + \left(\frac{1 + \kappa\sqrt{f_{\mathrm{RN}}}}{\rho} - \frac{\alpha}{\rho^{2}}\right) F(\rho) - \left(\varepsilon - \frac{\alpha_{\mathrm{em}}}{\rho} + \sqrt{f_{\mathrm{RN}}}\right) G(\rho) = 0, \\ f_{\mathrm{RN}} \frac{dG(\rho)}{d\rho} + \left(\frac{1 - \kappa\sqrt{f_{\mathrm{RN}}}}{\rho} - \frac{\alpha}{\rho^{2}}\right) G(\rho) + \left(\varepsilon - \frac{\alpha_{\mathrm{em}}}{\rho} - \sqrt{f_{\mathrm{RN}}}\right) F(\rho) = 0. \quad (13)$$

Система уравнений вещественна, если $f_{\mathrm{RN}} \geqslant 0$, т. е. областью определения функций $F(\rho)$, $G(\rho)$ являются интервалы $\rho \in [\rho_{+}, \infty)$, $\rho \in (0, \rho_{-}]$.

Для поля Шварцшильда условие $f_{s} \geqslant 0$ приводит к области определения $\rho \in [2\alpha, \infty)$.

6. Асимптотика решений вблизи горизонтов событий

$$6.1: \quad F|_{\rho \to \rho_{+}} = \frac{A}{\sqrt{\rho - \rho_{+}}} \sin\left(\frac{\rho_{+}^{2}}{\rho_{+} - \rho_{-}} \left(\varepsilon - \frac{\alpha_{\mathrm{em}}}{\rho_{+}}\right) \ln(\rho - \rho_{+}) + \varphi_{+}\right), \\ G|_{\rho \to \rho_{+}} = \frac{A}{\sqrt{\rho - \rho_{+}}} \cos\left(\frac{\rho_{+}^{2}}{\rho_{+} - \rho_{-}} \left(\varepsilon - \frac{\alpha_{\mathrm{em}}}{\rho_{+}}\right) \ln(\rho - \rho_{+}) + \varphi_{+}\right); \quad (14)$$

6.2:

$$\begin{aligned} F|_{\rho\to\rho_-} &= -\frac{B}{\sqrt{\rho_- - \rho}}\sin\left(\frac{\rho_-^2}{\rho_+ - \rho_-}\left(\varepsilon - \frac{\alpha_{\rm em}}{\rho_-}\right)\ln(\rho_- - \rho) + \varphi_-\right), \\ G|_{\rho\to\rho_-} &= \frac{B}{\sqrt{\rho_- - \rho}}\cos\left(\frac{\rho_-^2}{\rho_+ - \rho_-}\left(\varepsilon - \frac{\alpha_{\rm em}}{\rho_-}\right)\ln(\rho_- - \rho) + \varphi_-\right); \end{aligned} \tag{15}$$

6.3. для поля Шварцшильда

$$\begin{aligned} F|_{\rho\to 2\alpha} &= \frac{A}{\sqrt{\rho - 2\alpha}}\,\sin(2\alpha\varepsilon\,\ln(\rho - 2\alpha) + \varphi), \\ G|_{\rho\to 2\alpha} &= \frac{A}{\sqrt{\rho - 2\alpha}}\,\cos(2\alpha\varepsilon\,\ln(\rho - 2\alpha) + \varphi). \end{aligned} \tag{16}$$

Неприятная констатация:

— в окрестности горизонтов событий функции $F(\rho)$, $G(\rho)$ квадратично-неинтегрируемы (например, нормировочный интеграл $N = \int\limits_{\rho_+}^{\infty}(F(\rho)^2 + G(\rho)^2)\rho^2\,d\rho$ логарифмически расходится);

— для $\varepsilon \neq \alpha_{\rm em}/\rho_+$, $\varepsilon \neq \alpha_{\rm em}/\rho_-$ (поле Райсснера–Нордстрёма), $\varepsilon \neq 0$ (поле Шварцшильда) представленные асимптотики свидетельствуют о реализации «падения» частиц на горизонты событий.

Положительный момент:

— для $\varepsilon = \alpha_{\rm em}/\rho_+$, $\varepsilon = \alpha_{\rm em}/\rho_-$ (поле Райсснера–Нордстрёма), $\varepsilon = 0$ (поле Шварцшильда) асимптотики свидетельствуют об отсутствии режима «падения» фермионов на горизонты событий.

Для существования стационарных связанных состояний фермионов осталось решить проблему квадратичной неинтегрируемости волновых функций.

7. Уравнение типа Шредингера с эффективным потенциалом.

Преобразуем систему дираковских уравнений для радиальных функций $F(\rho)$, $G(\rho)$ к релятивистским уравнениям типа Шредингера для функции $\psi_F(\rho)$, пропорциональной $F(\rho)$, и для функции $\psi_G(\rho)$, пропорциональной $G(\rho)$:

$$\begin{aligned} \psi_F(\rho) &= F(\rho)\exp\left(\frac{1}{2}\int^{\rho} A_F(\rho')\,d\rho'\right), \\ \psi_G(\rho) &= G(\rho)\exp\left(\frac{1}{2}\int^{\rho} A_G(\rho')\,d\rho'\right), \end{aligned} \tag{17}$$

где $A_F(\rho) = -\dfrac{1}{B}\dfrac{dB}{d\rho} - A - D$, $A_G(\rho) = -\dfrac{1}{C}\dfrac{dC}{d\rho} - A - D$ и

$$\begin{aligned} A(\rho) &= -\frac{1}{f_{\mathrm{RN}}}\left(\frac{1+\kappa\sqrt{f_{\mathrm{RN}}}}{\rho} - \frac{\alpha}{\rho^2}\right), \\ B(\rho) &= \frac{1}{f_{\mathrm{RN}}}\left(\varepsilon + \sqrt{f_{\mathrm{RN}}}\right), \\ C(\rho) &= -\frac{1}{f_{\mathrm{RN}}}\left(\varepsilon - \sqrt{f_{\mathrm{RN}}}\right), \\ D(\rho) &= -\frac{1}{f_{\mathrm{RN}}}\left(\frac{1-\kappa\sqrt{f_{\mathrm{RN}}}}{\rho} - \frac{\alpha}{\rho^2}\right). \end{aligned} \tag{18}$$

Уравнения для $\psi_F(\rho)$ и $\psi_G(\rho)$ имеют вид уравнения Шредингера

$$\frac{d^2\psi_F(\rho)}{d\rho^2} + 2(E_{\mathrm{Schr}} - U^F_{\mathrm{eff}}(\rho))\,\psi_F(\rho) = 0, \tag{19}$$

$$\frac{d^2\psi_G\,(\rho)}{d\rho^2} + 2(E_{\mathrm{Schr}} - U^G_{\mathrm{eff}}(\rho))\,\psi_G(\rho) = 0, \tag{20}$$

где

$$E_{\mathrm{Schr}} = \frac{1}{2}(\varepsilon^2 - 1), \tag{21}$$

$$\begin{aligned} U^F_{\mathrm{eff}}(\rho) = E_{\mathrm{Schr}} &+ \frac{3}{8}\frac{1}{B^2}\left(\frac{dB}{d\rho}\right)^2 - \frac{1}{4}\frac{1}{B}\frac{d^2B}{d\rho^2} + \frac{1}{4}\frac{d}{d\rho}(A-D) - \\ &- \frac{1}{4}\frac{(A-D)}{B}\frac{dB}{d\rho} + \frac{1}{8}(A-D)^2 + \frac{1}{2}BC, \end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned} U^G_{\mathrm{eff}}(\rho) = E_{\mathrm{Schr}} &+ \frac{3}{8}\frac{1}{C^2}\left(\frac{dC}{d\rho}\right)^2 - \frac{1}{4}\frac{1}{C}\frac{d^2C}{d\rho^2} - \frac{1}{4}\frac{d}{d\rho}(A-D) + \\ &+ \frac{1}{4}\frac{(A-D)}{C}\frac{dC}{d\rho} + \frac{1}{8}(A-D)^2 + \frac{1}{2}BC. \end{aligned} \tag{23}$$

8. Квадратичная интегрируемость $\psi_F(\rho)$, $\psi_G(\rho)$. Важным обстоятельством является то, что при переходе к уравнениям типа Шредингера радиальные волновые функции $\psi_F(\rho)$, $\psi_G(\rho)$ становятся квадратично-интегрируемыми во всех областях определения $\rho \in [\rho_+, \infty)$, $\rho \in (0, \rho_-]$, $\rho \in [2\alpha, \infty)$:

$$\psi_F\left(\varepsilon = \frac{\alpha_{\mathrm{em}}}{\rho_+}\right)\Bigg|_{\rho\to\rho_+} = C_1(\rho - \rho_+)^{1/4}, \tag{24}$$

$$\psi_F\left(\varepsilon = \frac{\alpha_{\rm em}}{\rho_-}\right)\Big|_{\rho\to\rho_-} = C_2(\rho_- - \rho)^{1/4}, \tag{25}$$

$$\psi_F(\varepsilon = 0)\big|_{\rho\to 2\alpha} = C_3(\rho - 2\alpha)^{1/4}. \tag{26}$$

Волновые функции на горизонтах событий ρ_+, ρ_-, 2α равны нулю.

2. ЭНЕРГИИ СТАЦИОНАРНЫХ СВЯЗАННЫХ СОСТОЯНИЙ ЧАСТИЦ СО СПИНОМ 1/2 ВО ВНЕШНИХ ПОЛЯХ ШВАРЦШИЛЬДА И РАЙССНЕРА–НОРДСТРЁМА, КЕРРА, КЕРРА–НЬЮМЕНА

Поле Шварцшильда:

$$\varepsilon_S = 0. \tag{27}$$

Поле Райсснера–Нордстрёма:

$$\rho_+ = \alpha + \sqrt{\alpha^2 - \alpha_Q^2}, \quad \rho_- = \alpha - \sqrt{\alpha^2 - \alpha_Q^2},$$

$$\varepsilon_{\rm RN} = \frac{\alpha_{\rm em}}{\rho_+}, \quad \rho \in [\rho_+, \infty], \tag{28}$$

$$\varepsilon_{\rm RN} = \frac{\alpha_{\rm em}}{\rho_-}, \quad \rho \in (0, \rho_-]. \tag{29}$$

Поле Керра:

$$\rho_+ = \alpha + \sqrt{\alpha^2 - \alpha_a^2}, \quad \rho_- = \alpha - \sqrt{\alpha^2 - \alpha_a^2},$$

$$\varepsilon_K = \frac{m_\varphi \alpha_a}{\alpha_a^2 + \rho_+^2}, \quad \rho \in [\rho_+, \infty), \tag{30}$$

$$\varepsilon_K = \frac{m_\varphi \alpha_a}{\alpha_a^2 + \rho_-^2}, \quad \rho \in (0, \rho_-]. \tag{31}$$

Поле Керра–Ньюмена:

$$\rho_+ = \alpha + \sqrt{\alpha^2 - \alpha_a^2 - \alpha_Q^2}, \quad \rho_- = \alpha - \sqrt{\alpha^2 - \alpha_a^2 - \alpha_Q^2},$$

$$\varepsilon_{\rm KN} = \frac{m_\varphi \alpha_a + \alpha_{\rm em}\rho_+}{\rho_+^2 + \alpha_a^2}, \quad \rho \in [\rho_+, \infty), \tag{32}$$

$$\varepsilon_{\rm KN} = \frac{m_\varphi \alpha_a + \alpha_{\rm em}\rho_-}{\alpha_a^2 + \rho_-^2}, \quad \rho \in (0, \rho_-]. \tag{33}$$

Всюду разрешенным интервалом энергии частицы в связанном состоянии является интервал $-1 \leqslant \varepsilon \leqslant 1$.

Для каждого решения существуют несколько отличающиеся для разных j, l квадратично-интегрируемые собственные волновые функции, являющиеся решениями уравнения типа Шредингера с эффективными потенциалами.

3. КОЛЛАПСАРЫ ШВАРЦШИЛЬДА, РАЙССНЕРА–НОРДСТРЁМА БЕЗ И СО СВЯЗАННЫМИ ФЕРМИОНАМИ — КАНДИДАТЫ В ЧАСТИЦЫ «ТЕМНОЙ МАТЕРИИ»

3.1. Решение для поля Шварцшильда $\varepsilon_S = 0$. Если пренебречь гравитационным взаимодействием незаряженных дираковских частиц, то для коллапсара Шварцшильда с массой M возможна система атомного типа связанных частиц со спином 1/2 и $\varepsilon_S = 0$. Заполнение вырожденных состояний с различными значениями m_φ должно осуществляться с учетом принципа Паули. Аналогией является, например, атом водорода с вырожденными состояниями по значениям орбитального момента l.

Атомная система — неиспаряющийся коллапсар Шварцшильда с незаряженными дираковскими частицами с $\varepsilon_S = 0$ — взаимодействует с другими объектами лишь гравитационным образом. Из-за отсутствия квантовых переходов между состояниями с различными j, l такая система не излучает и не поглощает свет и другие излучения. Обнаружить такую систему можно только через гравитационное взаимодействие. Массы таких систем должны выбираться из условия наилучшего согласия со Стандартной космологической моделью.

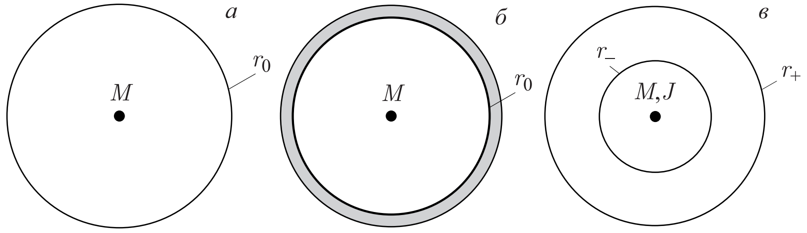

Рис. 1. *а*) Коллапсар Шварцшильда; *б*) коллапсар Шварцшильда со связанными фермионами; *в*) коллапсар Керра

3.2. Решения для поля Райсснера–Нордстрёма (RN). Рассмотрим решение $\varepsilon = \alpha_{\text{em}}/\rho_-$. Если при образовании неиспаряющегося коллапсара RN возникла атомная система со связанными фермионами, находящимися вблизи внутренней окрестности горизонта событий ρ_-, и если при этом заряд источника поля RN скомпенсирован суммарным зарядом связанных фермионов, то для внешнего мира такая атомная система взаимодействует с другими объектами лишь гравитационным образом. Из-за отсутствия квантовых переходов между состояниями с различными κ (или j, l) такая система не излучает и не поглощает свет и другие излучения. Обнаружить такую систему можно только через гравитационное взаимодействие.

В качестве второй атомной системы может рассматриваться система связанных фермионов в поле RN с энергией $\varepsilon = \alpha_{\rm em}/\rho_+$. В этом случае фермионы с подавляющей вероятностью находятся вблизи внешней окрестности ρ_+ и при компенсации заряда источника поля RN суммарным зарядом связанных фермионов такая атомная система взаимодействует с другими внешними объектами лишь гравитационным образом. Как и в первом случае, атомная система не излучает и не поглощает свет и другие излучения. В данной атомной системе обнаружить заряд источника поля RN можно, лишь «выбив» часть фермионов со своих орбит внешним воздействием.

Кандидатами в частицы темной материи могут быть другие атомные системы с энергией связанных фермионов частично с $\varepsilon = \alpha_{\rm em}/\rho_+$, частично с $\varepsilon = \alpha_{\rm em}/\rho_-$. В присутствии вращения (поля Керра, Керра–Ньюмена) ситуация качественно не меняется.

Массы рассмотренных систем должны выбираться из условия наилучшего согласия со Стандартной космологической моделью.

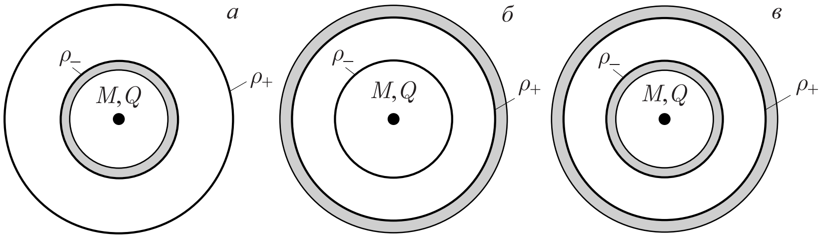

Рис. 2. Коллапсары Райсснера–Нордстрёма со связанными фермионами

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате рассмотрения решений уравнения типа Шредингера с эффективными потенциалами в квантовой механике движения фермионов в классических полях Шварцшильда, Райсснера–Нордстрёма получены следующие результаты.

1. При наличии горизонтов событий 2α, ρ_+, ρ_- существуют регулярные решения с энергиями $\varepsilon = 0$ (поле Шварцшильда), $\varepsilon = \alpha_{\rm em}/\rho_+$, $\varepsilon = \alpha_{\rm em}/\rho_-$

(поле RN). Эти решения представляют собой стационарные связанные состояния заряженных и незаряженных фермионов с квадратично-интегрируемыми волновыми функциями и с областями определения $\rho \in [2\alpha, \infty)$, $\rho \in [\rho_+, \infty)$, $\rho \in (0, \rho_-]$. Волновые функции слабо зависят от j, l и обращаются в нуль на горизонтах событий. Фермионы в связанных состояниях с подавляющей вероятностью расположены вблизи горизонтов событий. Максимумы плотностей вероятности отстоят от горизонтов событий на расстоянии от долей до единиц комптоновской длины волны фермионов.

2. Электрически нейтральные атомные системы с определенным числом фермионов, находящихся в вырожденных связанных состояниях с $\varepsilon = 0$ (поле Шварцшильда), $\varepsilon = \alpha_{\text{em}}/\rho_+$, $\varepsilon = \alpha_{\text{em}}/\rho_-$ (поле RN), могут рассматриваться в Стандартной космологической модели в качестве частиц темной материи. Атомные системы такого типа не поглощают и не испускают свет и другие излучения и взаимодействуют с окружающей средой только гравитационным образом.

3. Несмотря на снятие вырождения по магнитному квантовому числу m_φ, атомные системы с фермионами, находящимися в стационарных связанных состояниях с $\varepsilon = \dfrac{m_\varphi \alpha_a}{\alpha_a^2 + \rho_+^2}$, $\varepsilon = \dfrac{m_\varphi \alpha_a}{\alpha_a^2 + \rho_-^2}$ (поле Керра); $\varepsilon = \dfrac{m_\varphi \alpha_a + \alpha_{\text{em}}\rho_+}{\alpha_a^2 + \rho_+^2}$, $\varepsilon = \dfrac{m_\varphi \alpha_a + \alpha_{\text{em}}\rho_-}{\alpha_a^2 + \rho_-^2}$ (поле Керра–Ньюмена), могут рассматриваться при определенных условиях в качестве частиц темной материи.

4. Неиспаряющиеся коллапсары Шварцшильда и Керра без связанных фермионов также могут рассматриваться в качестве частиц темной материи.

Регулярные решения для связанных состояний с энергиями фермионов $\varepsilon = 0$ — метрика Шварцшильда и $\varepsilon = \alpha_{\text{em}}/\rho_+$, $\varepsilon = \alpha_{\text{em}}/\rho_-$ — метрика Райсснера–Нордстрёма получены с использованием уравнения типа Шредингера с эффективными потенциалами. Волновая функция связана с одной из радиальных функций уравнения Дирака неунитарным преобразованием. В результате, волновые функции уравнений типа Шредингера для стационарных связанных состояний в отличие от радиальных функций уравнения Дирака становятся квадратично-интегрируемыми в окрестности горизонтов событий ρ_+, ρ_-. Уравнение типа Шредингера может быть также получено квадрированием ковариантного уравнения Дирака–Фока в неэвклидовом пространстве-времени с переходом от биспинорной к спинорной волновой функции и с проведением соответствующего неунитарного преобразования. Для плоского пространства-времени Минковского ковариантное уравнение второго порядка для фермионов, движущихся во внешних электромагнитных полях, предложено П. Дираком еще в 30-е годы прошлого века.

Наше рассмотрение показывает, что использование релятивистского уравнения второго порядка расширяет возможности получения регулярных решений уравнений квантовой механики движения частиц со спином 1/2 во внешних гравитационных полях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Незнамов В. П., Сафронов И. И.* // ВАНТ. Сер. «Теор. и прикл. физика». 2016. Вып. 4. С. 9–24.
2. *Незнамов В. П., Сафронов И. И., Шемарулин В. Е.* // ВАНТ. Сер. «Теор. и прикл. физика». 2017. Вып. 2. С. 12–40.