ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА
2018. Т. 49. ВЫП. 4. С. 918–926

КОСМОЛОГИЧЕСКАЯ ИНФЛЯЦИЯ С ГРАВИТАЦИЕЙ ЭЙНШТЕЙНА–ГАУССА–БОННЕ

И. В. Фомин *

Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана, Москва

Рассматриваются модели космологической инфляции, основанные на гравитации Эйнштейна–Гаусса–Бонне (ЭГБ), с неминимальной связью скалярного поля и скаляра Гаусса–Бонне (ГБ) в четырехмерной Вселенной Фридмана–Робертсона–Уокера. Представлен метод построения точных решений, основанный на связи между этими моделями и стандартной инфляцией с гравитацией Эйнштейна.

The models of cosmological inflation based on Einstein–Gauss–Bonnet gravity (EGB) with a non-minimal coupling of a scalar field with Gauss–Bonnet scalar (GB) in four-dimensional Friedman–Robertson–Walker Universe are considered in this paper. The method for constructing the exact solutions based on the relationship between these models and standard inflation with Einstein gravity is presented.

PACS: 04.20.-q; 04.20.Jb; 04.50.Kd

ВВЕДЕНИЕ

Стандартные инфляционные сценарии, рассматривающие динамику скалярного поля на ранней стадии эволюции Вселенной, основанные на теории гравитации Эйнштейна, успешно объясняют происхождение крупномасштабной структуры, анизотропию реликтового излучения и механизмы образования элементарных частиц [1–3].

Хотя такие сценарии соответствуют наблюдательным данным, существуют проблемы, выходящие за рамки стандартного инфляционного подхода, например, квантовая гравитация.

По этой причине в настоящее время рассматривается большое число космологических моделей в рамках метрических теорий гравитации, отличных от гравитации Эйнштейна, или так называемых модифицированных теорий гравитации [4].

Для ранней Вселенной можно рассматривать гравитацию Эйнштейна с некоторыми поправками как эффективную теорию квантовой гравитации.

*E-mail: ingvor@inbox.ru

Эффективное супергравитационное действие для суперструн индуцирует поправочные члены более высокого порядка по кривизне, которые могут играть значительную роль в ранней Вселенной. Одна из таких поправок — скаляр Гаусса–Бонне [5].

Хорошо известно, что вариация ГБ-скаляра дает вклад в уравнения динамики только в пространстве с размерностью не менее пяти. Очевидно, четырехмерное пространство не удовлетворяет этому условию, однако, при учете неминимального взаимодействия скалярного поля с ГБ-скаляром, уравнения динамики скалярного поля в пространстве четырех измерений отличаются от уравнений стандартной космологии [6, 7].

Наблюдательные ограничения в моделях со скалярными полями, связанными со скаляром Гаусса–Бонне, а также параметры космологических возмущений для ЭГБ-инфляции были получены в работах [6, 7]. Модели темной энергии со скаляром Гаусса–Бонне, в контексте повторного ускоренного расширения Вселенной, рассматривались в работе [8], также гравитация ЭГБ возникает как следствие реконструкции гравитационных теорий из истории расширения Вселенной [9].

Таким образом, методы точных решений в космологических моделях со скалярными полями и гравитацией Эйнштейна–Гаусса–Бонне представляют интерес для теоретической и наблюдательной космологии.

1. УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ И МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ

Рассмотрим действие, определяющее уравнения динамики для рассматриваемой модели, которое состоит из действия Эйнштейна–Гильберта и канонического скалярного поля, неминимально взаимодействующего со скаляром ГБ посредством некоторой функции неминимальной связи $\xi(\phi)$ в системе единиц $M_P^{-2} = c = 1$:

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\left[\frac{1}{2}R - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - V(\phi) - \frac{1}{2}\xi(\phi)R^2_{\mathrm{GB}}\right], \tag{1}$$

где R — скаляр Риччи; $g^{\mu\nu}$ — метрический тензор; ϕ — скалярное поле; $V(\phi)$ — потенциал и $R^2_{\mathrm{GB}} = R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma} - 4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + R^2$ — скаляр Гаусса–Бонне; M_P — масса Планка.

Для описания однородной и изотропной Вселенной рассмотрим метрику Фридмана–Робертсона–Уокера (ФРУ)

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\left(\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2d\Omega^2\right), \tag{2}$$

где $a(t)$ — масштабный фактор, а постоянная $k = -1, 0, 1$ соответствует замкнутой, плоской и открытой Вселенной ФРУ. Также отметим, что случай $k > 1$ ($3k = \rho_{m0}$) можно рассматривать как случай плоской Вселенной

Фридмана со скалярным полем и идеальной жидкостью с начальным значением плотности ρ_{m0} [10].

Уравнения космологической динамики в такой модели записываются следующим образом [7]:

$$3H^2 = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) - \frac{3k}{a^2} + 12\dot{\xi}H\left(H^2 + \frac{k}{a^2}\right), \tag{3}$$

$$\dot{H} = -\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{k}{a^2} + 2\ddot{\xi}\left(H^2 + \frac{k}{a^2}\right) + 2\dot{\xi}H\left(2\dot{H} - H^2 - \frac{3k}{a^2}\right), \tag{4}$$

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V_{,\phi} + 12\xi_{,\phi}\left(H^2 + \frac{k}{a^2}\right)\left(\dot{H} + H^2\right) = 0, \tag{5}$$

где точка обозначает производную по времени, $H \equiv \dot{a}/a$ — параметр Хаббла и $V_{,\phi} = \partial V/\partial\phi$.

Поскольку из трех уравнений два являются независимыми, полевое уравнение (5) может быть получено из уравнений Эйнштейна–Фридмана (3), (4), на основе которых мы будем рассматривать космологическую динамику.

В случае $\xi = \mathrm{const}$ уравнения (3), (4) сводятся к уравнениям стандартной космологии

$$3H_E^2 = \frac{1}{2}\dot{\phi}_E^2 + V_E(\phi) - \frac{3k}{a_E^2}, \tag{6}$$

$$\dot{H}_E = -\frac{1}{2}\dot{\phi}_E^2 + \frac{k}{a_E^2}, \tag{7}$$

где индекс E соответствует стандартным параметрам космологической инфляции и гравитации Эйнштейна.

Основой нового метода построения точных решений уравнений (3), (4) и определения влияния неминимального взаимодействия на динамику является функциональная связь $H_E = f(H, \dot{\xi}, a, k)$ между стандартной космологией и космологическими моделями с гравитацией ЭГБ, определенная таким образом, чтобы в случае $\xi = \mathrm{const}$ уравнения (3), (4) переходили в уравнения (6), (7) и $H = H_E$, $a = a_E$, $\phi = \phi_E$, $V = V_E$.

Такое соотношение было рассмотрено в совместной работе автора с С. В. Червоном [11] и записывалось следующим образом:

$$H_E = H - 2\dot{\xi}\left(H^2 + \frac{k}{a^2}\right). \tag{8}$$

Уравнения (3), (4) и функцию неминимальной связи ξ в таком случае можно записать следующим образом:

$$V(\phi) = -2H^2 + 5HH_E + \dot{H}_E + \frac{2k}{a^2}, \tag{9}$$

$$\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 = -\dot{H}_E + HH_E - H^2 + \frac{k}{a^2}, \tag{10}$$

$$\dot{\xi} = \frac{H - H_E}{2\left(H^2 + \dfrac{k}{a^2}\right)}, \tag{11}$$

откуда видно, что для $\xi = \text{const}$ получим уравнения (6), (7) и $H = H_E$, $a = a_E$, $\phi = \phi_E$, $V = V_E$.

Поскольку уравнения (9)–(11) содержат пять неизвестных функций, для построения точных решений необходимо задать две из них или определить дополнительные соотношения между ними, руководствуясь требованием ускоренного расширения Вселенной и рассматривая физические потенциалы, соответствующие рождению элементарных частиц по завершении стадии космологической инфляции [3].

Важным случаем является представление функции неминимальной связи в следующем виде:

$$\dot{\xi} = \frac{Ca^3}{\dot{a}^2 + k}, \tag{12}$$

где C — произвольная постоянная, и уравнения (9)–(11) записываются следующим образом:

$$V(\phi) = 3H^2 + \dot{H} + \frac{2k}{a^2} - 12C\dot{a}, \tag{13}$$

$$\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 = -\dot{H} + \frac{k}{a^2}. \tag{14}$$

Отличие уравнений (13), (14) от уравнений стандартной космологии в данном случае заключается в поправке к потенциалу $V = V_E + V_{\mathrm{GB}}$, $V_{\mathrm{GB}} = -12C\dot{a}$ за счет неминимальной связи скалярного поля и скаляра Гаусса–Бонне.

Точные решения уравнений динамики скалярного поля (9)–(11) и (12)–(14) на стадии космологической инфляции приведены в работе [11].

2. ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ В ПЛОСКОЙ ВСЕЛЕННОЙ ФРИДМАНА–РОБЕРТСОНА–УОКЕРА

Рассмотрим уравнения динамики для плоской Вселенной ФРУ $(k = 0)$

$$V(\phi) = -2H^2 + 5HH_E + \dot{H}_E, \tag{15}$$

$$\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 = -\dot{H}_E + HH_E - H^2, \tag{16}$$

$$\dot{\xi} = \frac{H - H_E}{2H^2}. \tag{17}$$

При решении уравнений (15)–(17) рассмотрим три случая: модели, связанные со стандартной инфляцией, с $H_E = H + \beta$, где β — некоторая произвольная постоянная; модели без связи со стандартной инфляцией с $H_E = 0$ и модели, совпадающие со стандартной инфляцией только на стадии де Ситтера, с $H_E = H + \dot{H}H^{-1}$.

2.1. Модели с $H_E = H + \beta$. Уравнения (15)–(17) записываются следующим образом:

$$V(\phi) = 3H^2 + 5\beta H + \dot{H}, \tag{18}$$

$$\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 = \beta H - \dot{H}, \quad \beta = -2\dot{\xi}H^2. \tag{19}$$

Рассмотрим следующие параметр Хаббла и постоянную β:

$$H(t) = C\exp\left(-At\right), \quad \beta = \frac{A^2B^2}{8C} - A. \tag{20}$$

В результате получим точные решения уравнений (18), (19) с потенциалом Хиггса

$$\phi(t) = B\exp\left(-\frac{A}{2}t\right), \tag{21}$$

$$V(\phi) = \frac{\phi^2}{4B^2}\left(\frac{24C^2}{B^2}\phi^2 + 5A^2B^2 - 48AC\right), \tag{22}$$

$$\dot{\xi} = \frac{A(8C - AB^2)}{16C^2}\exp\left(2At\right), \quad \xi(\phi) = \frac{(8C - AB^2)B^4}{32C^2}\phi^{-4}. \tag{23}$$

Для случая $8C = AB^2$ получим решения для стандартной инфляции с гравитацией Эйнштейна.

При другом выборе соотношения между параметрами $C = (5/48)AB^2$ получим потенциал

$$V(\phi) = \frac{25}{384}A^2\phi^4, \tag{24}$$

соответствующий хаотической инфляции [3], с функцией неминимальной связи

$$\xi(\phi) = -\frac{4{,}608}{A^2}\phi^{-4}, \tag{25}$$

параметром Хаббла и скалярным полем, следующими из (20) и (21).

2.2. Модели с $H_E = 0$. Исходя из рассматриваемого условия, мы можем записать решения уравнений (15)–(17) для фантомных полей в следующем виде:

$$V(\phi) = -2H^2, \tag{26}$$

$$\dot{\phi}^2 = 2H^2, \; 2\dot{\xi}H = 1. \tag{27}$$

Таким образом, посредством выбора параметра Хаббла $H = H(\phi)$ из уравнения (26) можно сразу определить потенциал скалярного поля.

Также, учитывая, что $\dot{\xi} = \xi_{,\phi}\dot{\phi}$, из уравнений (26), (27) получим

$$\xi_{,\phi} = \pm\frac{1}{2\sqrt{2}H^2}. \tag{28}$$

Рассмотрим параметр Хаббла вида

$$H(\phi) = \frac{A}{\sqrt{12}}\cos\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\,\phi\right), \quad A > 0. \tag{29}$$

Из уравнений (26)–(28) получим точные решения

$$\phi(t) = \sqrt{\frac{2}{3}}\arctan\left(\frac{\mathrm{e}^{At}-1}{\mathrm{e}^{At}+1}\right), \quad V(\phi) = -\frac{A^2}{6}\cos^2\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\,\phi\right), \tag{30}$$

$$\dot{\xi} = \frac{\sqrt{6(1+\mathrm{e}^{2At})}}{A(1+\mathrm{e}^{At})}, \quad \xi(\phi) = \pm\frac{2\sqrt{3}}{A^2}\tan\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\,\phi\right) + \mathrm{const}, \tag{31}$$

$$a(t) = a_0\exp\left\{\frac{1}{2\sqrt{6}}\left[\arcsin\left(\mathrm{e}^{At}\right) - \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}^{2At}+1}}\right)\right]\right\}. \tag{32}$$

Также можно записать уравнения (26), (27) в другой форме:

$$\phi(t) = \pm\sqrt{2}\ln\left(a(t)\right) + c, \tag{33}$$

$$V(t) = -2\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2, \quad \xi(t) = \frac{1}{2}\int\frac{a}{\dot{a}}\,dt, \tag{34}$$

где c — константа интегрирования.

Таким образом, по заданному масштабному фактору $a = a(t)$ мы получаем точные решения уравнений динамики.

В качестве примера рассмотрим масштабный фактор

$$a(t) = A\exp\left(Bt^m\right), \quad m > 0, \quad B > 0. \tag{35}$$

Из уравнений (33), (34) запишем точные решения

$$\phi(t) = \pm\sqrt{2}Bt^m + c_1, \quad c_1 = c \pm \sqrt{2}\ln\,A, \tag{36}$$

$$V(\phi) = -2B^2m^2\left(\pm\frac{\phi - c_1}{\sqrt{2}B}\right)^{\frac{2(m-1)}{m}}, \tag{37}$$

$$\dot{\xi} = \frac{t^{1-m}}{2Bm}, \quad \xi(\phi) = \frac{1}{2(2-m)mB}\left(\pm\frac{\phi - c_1}{\sqrt{2}B}\right)^{\frac{2-m}{m}} + \mathrm{const}. \tag{38}$$

Для специального выбора параметра $m = 1/2$ и $m = 1/3$ получим потенциалы $V(\phi) \propto -(\phi - c_1)^{-2}$ и $V(\phi) \propto -(\phi - c_1)^{-4}$.

2.3. Модели с $H_E = H + \dot{H}H^{-1}$. В таком случае уравнения (15)–(17) записываются следующим образом:

$$V(\phi) = 3H^2 + 6\dot{H} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{H}}{H}\right), \tag{39}$$

$$\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 = -\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{H}}{H}\right), \quad \dot{\xi} = -\frac{\dot{H}}{2H^3}. \tag{40}$$

Из соотношения $H_E = H + \dot{H}H^{-1}$ видно, что $H_E = H$ только для случая $H = \mathrm{const}$, что соответствует стадии де Ситтера. Определяя $\mathrm{const} = \sqrt{\Lambda/3}$, где Λ — космологическая постоянная, получим $V = \Lambda$, $\phi = \mathrm{const}$, $\xi = \mathrm{const}$, с масштабным фактором $a(t) \propto \exp\left(\sqrt{\Lambda/3}\, t\right)$.

Теперь рассмотрим модель космологической инфляции с параметром Хаббла

$$H(t) = At^n, \quad n \neq -1 \tag{41}$$

или с масштабным фактором

$$a(t) = a_0 \exp\left(\frac{A}{n+1}t^{n+1}\right). \tag{42}$$

Соответствующий параметр Хаббла для стандартной инфляции

$$H_E(t) = At^n + \frac{n}{t}. \tag{43}$$

Точные решения для степенной ЭГБ-инфляции с $n = -1$ рассматривались в работе [12].

Из уравнений (39), (40) получим

$$\phi(t) = \pm\sqrt{2n}\ln t + c_2, \tag{44}$$

$$V = 3A^2 \exp\left(\mp\sqrt{2n}\varphi\right) + 6An \exp\left(\mp\frac{n-1}{\sqrt{2n}}\varphi\right) - n\exp\left(\pm\sqrt{\frac{2}{n}}\varphi\right), \tag{45}$$

$$\dot{\xi} = -\frac{n}{2A^2}t^{-2n-1}, \quad \xi = \frac{1}{4A^2}\exp\left(\pm\sqrt{2n}\varphi\right) + \mathrm{const}, \tag{46}$$

где $\varphi = \phi - c_2$ и c_2 — константа интегрирования.

3. ВЛИЯНИЕ НЕМИНИМАЛЬНОЙ СВЯЗИ НА КОСМОЛОГИЧЕСКУЮ ДИНАМИКУ

Влияние неминимальной связи на динамику можно оценить по знаку $\dot{\xi}$, в случае убывания функции $\xi(t)$ ($\dot{\xi} < 0$) получим $H - H_E < 0$, что означает уменьшение темпа расширения Вселенной относительно стандартной космологической модели и обратное влияние (ускорение) в случае роста функции неминимальной связи $\xi(t)$.

Для плоской Вселенной ФРУ можно оценить влияние неминимального взаимодействия на динамику посредством разности числа e-фолдов между стандартной и ЭГБ-инфляцией:

$$\Delta_N = N - N_E = \int\limits_{t_i}^{t_e} (H - H_E)\, dt = 2 \int\limits_{t_i}^{t_e} \dot{\xi} H^2\, dt, \tag{47}$$

где t_i и t_e — времена, соответствующие началу и завершению инфляционной стадии.

Для моделей с $H_E = H + \beta$ получим $\Delta_N = -\beta(t_e - t_i)$, т. е. различие по числу e-фолдов зависит от значения и знака параметра β.

Для моделей с $H_E = H + \dot{H} H^{-1}$ получим

$$\Delta_N = -\int\limits_{t_i}^{t_e} \frac{\dot{H}}{H} dt = -\int\limits_{H_i}^{H_e} \frac{dH}{H} = \ln\left(\frac{H_i}{H_e}\right). \tag{48}$$

Для моделей с $H_E = 0$ различие $\Delta_N = N = \int\limits_{t_i}^{t_e} H dt$, т. е. равно числу e-фолдов в ЭГБ-инфляции.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате найденной в явном виде функциональной связи параметров Хаббла для стандартной инфляции и инфляции с ЭГБ-гравитацией $H_E = f(H, \dot{\xi}, a, k)$ появляется возможность простой процедуры генерирования точных решений с физическими потенциалами, а также возможность качественной (по знаку $\dot{\xi}$) и количественной (по значению Δ_N) оценки влияния неминимального взаимодействия скалярного поля и скаляра Гаусса–Бонне на космологическую динамику.

Перспективным направлением дальнейшего исследования является оценка влияния неминимального взаимодействия на параметры космологических возмущений.

Благодарности. Автор благодарит С. В. Червона за обсуждение и комментарии по поводу данной работы.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ 16-02-00488А и 16-08-00618А.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Starobinsky A.* // Phys. Lett. B. 1980. V. 91. P. 99.
2. *Guth A.* // Phys. Rev. D. 1981. V. 23. P. 374.
3. *Linde A.* Particle Physics and Inflationary Cosmology. Harwood Acad. Publ., 1990. 270 p.
4. *Clifton T., Ferreira P., Padilla A., Skordis C.* // Phys. Rep. 2012. V. 513. P. 1.
5. *Zwiebach B.* // Phys. Lett. B. 1985. V. 156. P. 315.
6. *Guo Z., Schwarz D.* // Phys. Rev. D. 2010. V. 81. P. 123520.
7. *Koh S., Lee B., Lee W., Tumurtushaa G.* // Phys. Rev. D. 2014. V. 6. P. 063527.
8. *Nojiri S., Odintsov S., Sasaki M.* // Phys. Rev. D. 2005. V. 71. P. 123509.
9. *Cognola G., Elizalde E., Nojiri S., Odintsov S., Zerbini S.* // Phys. Rev. D. 2007. V. 71. P. 086002.
10. *Barrow J., Paliathanasis A.* // Phys. Rev. D. 2016. V. 8. P. 083518.
11. *Fomin I., Chervon S.* // Mod. Phys. Lett. A. 2017. V. 32, No. 25. P. 1750129.
12. *Guo Z., Schwarz D.* // Phys. Rev. D. 2009. V. 80. P. 063523.