

ЗАГАДКА СПИНА ПРОТОНА И КОНФАЙНМЕНТ КВАРКОВ

Б. Ф. Костенко *

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Показано, что эффект конфайнмента, существенный на больших расстояниях от центра нуклона, способен приводить к заметному перевороту спиральностей кварков. Одновременное изменение проекций углового орбитального момента кварков на направление их движения, следующее из уравнения Дирака, гарантирует сохранение полного углового момента системы. Таким образом, часть спина протона, измеряемого в экспериментах по глубоконеупругому рассеянию лептонов, может быть скрытой в угловом орбитальном моменте кварков.

It is shown that confinement of quarks is able to induce appreciably the quark helicity flipping at big distances from the nucleon center. A simultaneous change of quark orbital angular momentum, following from the Dirac equation, ensures conservation of total angular moment of the system. Thus, a part of proton spin measured in deep inelastic scattering of leptons may be hidden in orbital angular momentum of quarks.

PACS: 13.88+e; 13.60.Hb; 12.39.Ki; 14.20.Dh

ВВЕДЕНИЕ

Загадка спина протона возникла в 1988 г. после измерения коллаборацией ЕМС суммарной проекции спина кварков, входящих в состав продольно-поляризованного протона, на направление его движения [1]. Несмотря на все приложенные усилия, этот вопрос остается нерешенным вплоть до настоящего времени (см., например, работу [2] и имеющиеся в ней ссылки). В простейшей форме данная проблема может быть сформулирована следующим образом. Рассмотрим покоящийся протон, проекция спина которого на ось z равна $1/2$. В соответствии с кварковой моделью такой протон должен состоять из трех кварков, u , u и d , имеющих z -проекции спинов, равные

*E-mail: bkostenko@jinr.ru

$1/2$, $1/2$ и $-1/2$. После перехода в быстро движущуюся вдоль оси z систему отсчета, согласно теории Дирака, в протоне появятся поляризованные антикварки \bar{u} и \bar{d} . Тем не менее прямыми вычислениями можно показать, что суммарная z -проекция спина кварков, как и их суммарный заряд, останутся неизменными после перехода в быстро движущуюся систему. Эксперимент [1], как и все последующие измерения, этот вывод не подтверждает, достоверно демонстрируя нехватку суммарного спина кварков и антикварков: $(\sum S_z^q + S_z^{\bar{q}}) < 1/2$.

Выше неявно подразумевалось, что кварки в нуклоне являются свободными. Конечно, это не так, и этот факт может радикально изменить вышеописанную картину. Например, во всякой связанной физической системе присутствуют короткоживущие виртуальные возбуждения, обусловленные флуктуациями вакуума. В быстро движущейся системе отсчета такие возбужденные состояния могут жить достаточно долго и, следовательно, наблюдаться экспериментально. В частности, в системе бесконечного импульса, которая находится в основе партонной модели, эти состояния могут рассматриваться как реальные возбуждения, мало чем отличающиеся от возбужденных состояний атома водорода. Как обычно, при решении любых уравнений математической физики для нахождения решений соответствующих уравнений в обоих случаях следует выполнить разделение переменных с учетом симметрии данных физических систем [3]. В случае быстро движущегося нуклона из-за лоренцевского сжатия его объема необходимо учитывать аксиальную симметрию. Это обстоятельство вводит в действие проекцию углового орбитального момента кварков L_z на направление движения. Таким образом, если мы допускаем возможность наблюдения возбужденных состояний нуклона в процессах глубоконеупругого рассеяния лептонов, мы можем ожидать сохранения суммарной проекции лишь *полного* углового момента кварков $\sum_i (L_z^i + S_z^i)$. В данной работе рассмотрим эти общие аргументы более детально на основе уравнения Дирака с потенциалом конфайнмента, найденного с использованием КХД на решетке, а также попытаемся оценить возможный эффект.

1. КВАРКИ БЕЗ УЧЕТА КОНФАЙНМЕНТА

Следуя партонной модели, в которой кварки рассматриваются как свободные частицы, и принимая во внимание аксиальную симметрию их состояний, запишем уравнение Дирака для свободных фермионов в цилиндрических координатах:

$$\left[i \left(\gamma^r \frac{\partial}{\partial r} + \gamma^\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} + \gamma^z \frac{\partial}{\partial z} \right) + \gamma^0 E - m \right] \psi(r, \varphi, z; E) = 0.$$

Здесь*

$$\gamma^r = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^r \\ -\sigma^r & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^\varphi = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\varphi \\ -\sigma^\varphi & 0 \end{pmatrix},$$

$$\gamma^z = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^z \\ -\sigma^z & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$$

и

$$\sigma^r = \begin{pmatrix} 0 & e^{-i\varphi} \\ e^{i\varphi} & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^\varphi = \begin{pmatrix} 0 & -ie^{-i\varphi} \\ ie^{i\varphi} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\sigma^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Подстановка

$$\psi = \begin{pmatrix} q(r, \varphi) \\ \bar{q}(r, \varphi) \end{pmatrix} e^{ip_z z}$$

разделяет волновые функции кварков и антикварков и сводит уравнение Дирака к следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} (E - m)q + \left[i \left(\sigma^r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\sigma^\varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \sigma^z p_z \right) \right] \bar{q} = 0, \\ (E + m)\bar{q} + \left[i \left(\sigma^r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\sigma^\varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \sigma^z p_z \right) \right] q = 0. \end{cases}$$

Используя второе уравнение этой системы, можно выразить \bar{q} в терминах q и подставить результат в первое уравнение. В итоге находим

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) q + p_\perp^2 q = 0, \quad (1)$$

где символом $p_\perp = \sqrt{E^2 - (p_z^2 + m^2)}$ обозначен поперечный импульс кварка. Разделение переменных с помощью подстановки $q(r, \varphi) = u(r) e^{in\varphi}$, где n является положительным или отрицательным целым числом (вследствие требования однозначности функций $q(r, \varphi)$), приводит к уравнению Бесселя

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{n^2}{r^2} u + p_\perp^2 u = 0.$$

*Выражения для γ -матриц в цилиндрических координатах могут быть найдены с использованием векторной формы их преобразований, $\gamma^s = \gamma^i \partial x^s / \partial x^i$, сопровождающих замену переменных $x^i \rightarrow x^s$ (см., например, [4]).

Его решения, конечные в точке $r = 0$, представляют собой функции Бесселя первого рода, $u(r) \sim J_n(p_\perp r)$. Соответствующие волновые функции кварков в поперечной плоскости, $q(r, \varphi) = u(r) e^{in\varphi}$, являются собственными функциями z -компоненты оператора орбитального момента $\hat{L}_z = -i(\partial/\partial\varphi)$. В принципе, волновые функции такого типа могут описывать вклад углового орбитального момента кварков в спин протона*. Однако полные решения $q(r, \varphi)$, учитывающие радиальную зависимость, не могут описать локализацию кварков внутри нуклона. Действительно, $J_n(p_\perp r)$ представляют собой осциллирующие функции, убывающие на больших расстояниях по закону $1/\sqrt{p_\perp r}$. И поскольку $\int_0^{r_N} u^2(r) r dr < \int_{r_N}^{\infty} u^2(r) r dr = \infty$, найденные решения отвечают волновым функциям кварков, локализованным главным образом вне нуклона**.

В дальнейшем будем считать, что кварки, в соответствии с партонной моделью, являются свободными, если они находятся вблизи центральной области нуклона. Если же они расположены на достаточном удалении от центра, то необходимо учитывать потенциал конфайнмента, способный подавить вышеуказанную расходимость.

2. КВАРКИ В ПОТЕНЦИАЛЕ КОНФАЙНМЕНТА

Далее рассмотрим модель, описывающую конфайнмент кварков с помощью внешнего статического потенциала $V(r)$, обладающего цилиндрической симметрией***. С этой целью мы подставим в уравнение Дирака вместо E выражение $E - V(r)$. В результате уравнение (1) также преобразуется и выглядит следующим образом:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + p_\perp^2 \right) q(r, \varphi) + i\sigma^r \frac{-dV/dr}{E - V + m} \left[i \left(\sigma^r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\sigma^\varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) - \sigma^z p_z \right] q(r, \varphi) = 0.$$

*Здесь и далее решения уравнения Дирака не подвергаются вторичному квантованию. Они имеют обычную вероятностную интерпретацию, принятую в релятивистской квантовой механике [5].

**Интересно отметить, что невзаимодействующие глюоны, обладающие определенным угловым орбитальным моментом, описываются полями, хорошо локализованными в конечной пространственной области [6].

*** Такое описание справедливо, строго говоря, лишь в системе бесконечного импульса, когда все партоны сосредоточены в плоскости, перпендикулярной направлению движения протона.

Видно, что по сравнению с (1) появился дополнительный член, пропорциональный силе $-dV/dr$. Ключевое наблюдение, объясняющее механизм переверота спина кварков, состоит в том, что этот дополнительный член содержит матрицу

$$\sigma^r \sigma^z = -i\sigma^\varphi,$$

которая, действуя на состояние кварка с положительной спиральностью и нулевым угловым орбитальным моментом, дает

$$-i\sigma^\varphi \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{i\varphi} \end{pmatrix}.$$

Видно, что благодаря этому члену проекция спина кварка изменила свой знак, а проекция углового орбитального момента увеличилась на единицу. Таким образом, проекция полного углового момента осталась равной $1/2$:

$$(S_z + L_z)q = \frac{1}{2}q, \quad (S_z + L_z)q' = \frac{1}{2}q', \quad q' = -i\sigma^\varphi q.$$

Нетрудно догадаться, разделение переменных r и φ выполняется теперь с помощью подстановки

$$q(r, \varphi) = \begin{pmatrix} u_+(r) e^{in\varphi} \\ -iu_-(r) e^{i(n+1)\varphi} \end{pmatrix}.$$

Далее ограничимся рассмотрением случая $n = 0$, который отвечает предположению о том, что перевероты спинов в центральной области нуклона полностью отсутствуют, а эффект переверота обусловлен только силами, проявляющимися на некотором удалении от центра. Разделяя переменные, приходим к следующей системе дифференциальных уравнений для волновых функций кварков с положительной и отрицательной спиральностью:

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + p_\perp^2 \right) u_+(r) - \frac{dV/dr}{E - V + m} \left[\frac{\partial u_+(r)}{\partial r} + p_z u_-(r) \right] = 0, \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + p_\perp^2 - \frac{1}{r^2} \right) u_-(r) - \\ - \frac{dV/dr}{E - V + m} \left[\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) u_-(r) + p_z u_+(r) \right] = 0. \end{cases} \quad (2)$$

В качестве $V(r)$ мы использовали потенциал конфайнмента, найденный в рамках решеточной КХД в работах [7]. Он может быть аппроксимирован формулой $V(r) = -1,167/r + 2,315r + 4,66$, где энергия измеряется в ГэВ, а r — в фм. Следуя партонной модели, будем считать кварки свободными, если они находятся в центральной области нуклона (для конкретности, при

$r < r_0 = 0,7$ фм), а силы конфайнмента проявляют себя на больших расстояниях — в области так называемой Y-струны. Тогда математическая задача может быть сформулирована в виде задачи Коши для системы (2), описывающей эволюцию проекции спина с увеличением расстояния от центра нуклона. С учетом вышесказанного начальные условия задаем в виде

$$u_+(r_0) = J_0(p_{\perp} r_0), \quad u'_+(r_0) = J'_0(p_{\perp} r_0), \quad u_-(r_0) = 0, \quad u'_-(r_0) = 0.$$

Для численного решения поставленной задачи система компьютерной математики MAPLE рекомендует использовать алгоритм Рунге–Кутты–Фельберга (rkf45 procedure). Было, однако, установлено, что найденное таким образом решение не согласуется с необходимым (но недостаточным) условием конфайнмента $u_+, u_-|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow 0$, а сформулированная задача Коши обладает несколькими решениями. Для того, чтобы продвинуться дальше, поступим следующим образом. Потенциал конфайнмента запишем в кусочно-постоянной форме или, что то же самое, аппроксимируем его производную в виде $dV/dr = \Delta V(r_i)\delta(r - r_i)$. Понятно, что везде, кроме точек r_i , система (2) переходит в два независимых уравнения Бесселя для u_+ и u_- . Решения этих уравнений в случае, когда $p_{\perp}^2 > 0$, имеют вид * $u_+(r) = A_1 J_0(p_{\perp} r) + A_2 Y_0(p_{\perp} r)$, $u_-(r) = B_1 J_1(p_{\perp} r) + B_2 Y_1(p_{\perp} r)$, где J_i и Y_i — функции Бесселя первого и второго рода соответственно. Аналогично для $p_{\perp}^2 < 0$ решения могут быть выражены через модифицированные функции Бесселя первого и второго рода: $u_+(r) = C_1 I_0(|p_{\perp}| r) + C_2 K_0(|p_{\perp}| r)$, $u_-(r) = D_1 I_1(|p_{\perp}| r) + D_2 K_1(|p_{\perp}| r)$.

В следующем разделе, на основе вышеизложенного, будет выяснена причина неоднозначности решения задачи Коши, а также найдено ее решение, согласующееся с требованием конфайнмента.

3. МЕТОД ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ И РЕЗУЛЬТАТЫ

С помощью суперпозиций функций Бесселя, найденных в предыдущем разделе, можно аппроксимировать решение поставленной задачи Коши, если наложить на них условия сшивки, согласованные с системой (2). Эти условия имеют вид

$$\begin{cases} \Delta u'_+(r_{i+1}) = \frac{\Delta V(r_i)}{E - V(r_i) + m} (u'_+(r_i) + p_z u_-(r_i)), \\ \Delta u'_-(r_{i+1}) = \frac{\Delta V(r_i)}{E - V(r_i) + m} \left(u'_-(r_i) + \frac{u_-(r_i)}{r_i} + p_z u_+(r_i) \right) \end{cases} \quad (3)$$

*Здесь используются наименования и обозначения для специальных функций, принятые в системе MAPLE.

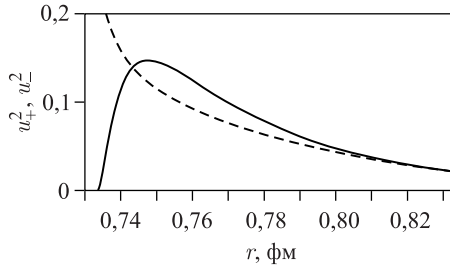
и могут быть найдены из (2) после пренебрежения вкладом всех конечных в точках $r = r_i$ членов. Источник неоднозначности решения задачи Коши в данном случае состоит в том, что в каждой из областей, $p_{\perp}^2 > 0$ или $p_{\perp}^2 < 0$, для нахождения четырех коэффициентов, A_i, B_i или C_i, D_i соответственно, в нашем распоряжении имеется лишь два уравнения (3). Если считать, что все коэффициенты в каждой из областей не равны нулю, то мы можем наложить на решения еще два условия в точках сшивки r_i функций $u_+(r)$ и $u_-(r)$. Например, для $u_+(r)$ в области $p_{\perp}^2 > 0$ одно из дополнительных условий можно взять в виде

$$A_1^i J_0(p_{\perp}^i r^i) + A_2^i Y_0(p_{\perp}^i r^i) = A_1^{i-1} J_0(p_{\perp}^{i-1} r^{i-1}) + A_2^{i-1} Y_0(p_{\perp}^{i-1} r^{i-1}).$$

Аналогичное условие для $u_-(r)$ получается заменой $A \rightarrow B$ и $J_0 \rightarrow Y_0$, $Y_0 \rightarrow J_0$. Эти условия, хотя и не следуют из системы (3), но и не противоречат ей. Очевидно, что этот математический трюк приводит к постоянным значениям функций $u_+(r)$ и $u_-(r)$ как в классически доступной, так и в подбарьерной областях, несмотря на то, что $K_i(p_{\perp} r), Y_i(|p_{\perp}| r) \rightarrow \infty$ при $|p_{\perp}| \rightarrow 0$. Такие решения можно использовать для описания перехода из классически доступной области (КДО) в область подбарьерного проникновения (ОПП) в нашей задаче Коши. Обозначим длину этого перехода символом Δr_{tr} , а точку остановки классического движения, в которой $p_{\perp}(r) = 0$, символом r_{stop} .

Уравнений (3) вполне достаточно для решения задачи Коши на некотором удалении от точки r_{stop} в КДО в том случае, когда один из коэффициентов A_i и один из коэффициентов B_i зафиксирован с помощью каких-то дополнительных требований. Аналогичное утверждение относится к коэффициентам C_i и D_i , определяющим решение в ОПП. Следуя общему принципу метода Галёркина [8], мы задаем эти требования таким образом, чтобы удовлетворить необходимым граничным условиям. Поскольку функции Бесселя $I_0(|p_{\perp}| r)$ и $I_1(|p_{\perp}| r)$ возрастают с увеличением r , понятно, что для обеспечения условия конфайнмента необходимо взять $C_1 = 0$ и $D_1 = 0$ в ОПП. В КДО естественно присвоить нулевые значения коэффициентам A_2 и B_2 , так как решения, соответствующие такому выбору, гладко переходят при малых r в решения уравнения (1), которые согласуются с партонной моделью.

Уравнения (3) могут быть использованы в качестве разностной схемы для численного решения поставленной задачи. Приведенные ниже результаты расчетов отвечают следующему выбору параметров модели: $p_z = 27,6$ ГэВ, в соответствии с экспериментом HERMES [9], и $m = 0$, что формально соответствует системе бесконечного импульса. Начальное значение поперечного импульса кварков $p_{\perp}(r = 0,7) = 2$ ГэВ, возможно сильно преувеличенное, взято для удлинения их пути в КДО с целью более досконального изучения их волновых функций в этой области. Эти расчеты, а также вычисления



Квадраты модулей ненормированных волновых функций кварков, отвечающих положительной и отрицательной спиральностям в области подбарьерного проникновения (штриховая и сплошная кривые соответственно). Длина перехода Δr_{tr} из классически доступной области в область подбарьерного проникновения положена равной 0,0178 фм с учетом точки остановки классического движения, выбранной посредине между ними. Средняя поляризация кварков в интервале радиусов, показанных на рисунке, равна $-0,0144$

с еще более высокими начальными значениями p_{\perp} показали, что потенциал конфайнмента не способен стимулировать существенно перевороты спина в КДО. В то же время эффект отчетливо проявился в ОПП (см. рисунок). Для $\Delta r_{tr} = 0,0002$ фм поляризация кварков в ОПП даже достигла значения $-0,7159$.

В заключение следует отметить, что метод `rcf45` дает весьма правдоподобное описание поведения волновых функций $u_{+}(r)$, $u_{-}(r)$ в области, прилегающей к точке остановки классического движения r_{stop} в некоторой конечной окрестности справа от нее, и демонстрирует здесь убывание $u_{+}(r)$, как того требуют условия конфайнмента. Поэтому в настоящее время на передний план выходит проблема гладкой сшивки решений `rcf45` с решениями типа Галёркина, способными удовлетворить условиям конфайнмента. Этот вопрос требует дальнейшего изучения.

Подводя окончательный итог, можно сказать, что в данной работе описан эффект переворота спина кварков в потенциале конфайнмента, который может внести свой вклад в объяснение загадки спина протона.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ashman J., Badelek B., Baum G., Beaufays J., Bee C.P., Benchouk C., Bird I.G., Brown S.C., Caputo M.C., Cheung H.W.K., Chima J., Ciborowski J., Clift R.W., Coignet G., Combley F. (EMC Collab.) // Phys. Lett. B. 1988. V.206. P.364.
2. Adare A., Aidala C., Ajitanand N.N., Akiba Y., Akimoto R., Alexander J., Alfred M., Aoki K., Apadula N., Aramaki Y., Asano H., Atomssa E.T., Awes T.C., Azmoun B., Babintsev V. (PHENIX Collab.) // Phys. Rev. D. 2016. V.93. P.011501(R).

3. *Miller W., Jr.* Symmetry and Separation of Variables. London: Addison-Wesley, 1977.
4. *Cook A. H.* // Proc. Roy. Soc. London. A. 1982. V. 383. P. 247.
5. *Bjorken J. D., Drell S. D.* Relativistic Quantum Mechanics. New York: McGraw-Hill, 1964.
6. *Kostenko B.* // EPJ Web of Conf. 2017. V. 138. P. 8009.
7. *Takahashi T. T., Matsufuru H., Nemoto Y., Suganuma H.* // Phys. Rev. Lett. 2001. V. 86. P. 18; Nucl. Phys. A. 2001. V. 680. P. 159c.
8. *Fletcher C. A. J.* Computational Galerkin Methods. New York: Springer, 1984.
9. *Airapetian A., Akopov N., Akopov Z., Andrus A., Aschenauer E. C., Augustyniak W., Avakian R., Avetissian A., Avetissian E., Belostotski S., Bianchi N., Blok H. P., Böttcher H., Borissov A., Borysenko A. (HERMES Collab.)* // Phys. Rev. D. 2007. V. 75. P. 012007.