ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА
2018. Т. 49. ВЫП. 4. С. 1273–1280

САМОСОПРЯЖЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА ДЛЯ ФЕРМИОНОВ И ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ФОЛДИ–ВАУТХАЙЗЕНА

В. П. Незнамов *

Российский федеральный ядерный центр — Всероссийский научно-исследовательский институт экспериментальной физики, Саров, Россия

На примере внешнего электромагнитного поля получены самосопряженные уравнения второго порядка со спинорными волновыми функциями. Установлена связь этих уравнений с уравнениями типа Шредингера с эффективными потенциалами для вещественных радиальных волновых функций и с уравнениями Дирака в представлении Фолди–Ваутхайзена. С использованием матриц Дирака в киральном представлении получены замкнутые кирально-симметричные уравнения для левых и правых спиноров. Для произвольного электромагнитного поля получено замкнутое кирально-симметричное уравнение Фолди–Ваутхайзена. В рассмотренных уравнениях, независимо от наличия или отсутствия массы у фермионов, отсутствуют слагаемые, смешивающие левые и правые спиноры.

Self-adjoint second-order equations with spinor wave functions in external electromagnetic field were obtained for fermions. The relationship was found between these equations and the Schrödinger-type equations with effective potentials for real radial wave functions and with the Dirac equations in the Foldy–Wouthuysen representation. Closed chiral symmetric equations were obtained for left and right spinors by using the Dirac matrices in chiral representation. A closed chiral symmetric Foldy–Wouthuysen equation was obtained for an arbitrary electromagnetic field. There are no summands, mixing left and right spinors in these equations, irrespective of presence or absence of fermion mass.

PACS: 03.65.-Pm; 11.10.-z

ВВЕДЕНИЕ

Для фермионов с массой m и зарядом e, движущихся во внешнем электромагнитном поле, уравнение Дирака можно записать в виде

$$(p_0 - eA_0(\mathbf{r},t))\,\psi(\mathbf{r},t) = (\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{p} - e\mathbf{A}(\mathbf{r},t)) + \beta m)\,\psi(\mathbf{r},t).$$

* E-mail: neznamov@vniief.ru

В этом уравнении и ниже используются система единиц $\hbar = c = 1$ и сигнатура пространства Минковского

$$g_{\alpha\beta} = \mathrm{diag}\,[1, -1, -1, -1];$$

$\psi(\mathbf{r}, t)$ — биспинорная волновая функция фермиона; $A_0(\mathbf{r}, t), \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ — потенциалы электромагнитного поля; α^k, β — четырехмерные матрицы Дирака, $k = 1, 2, 3$; $p_0 = i\dfrac{\partial}{\partial t}$, $\mathbf{p} = -i\boldsymbol{\nabla}$.

Дирак получил также уравнение второго порядка

$$\left[(p_0 - eA_0)^2 - (\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2 - m^2 + e\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{H} - ie\boldsymbol{\alpha}\mathbf{E}\right]\psi = 0,$$

где $\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}$; σ^k — двумерные матрицы Паули; $\mathbf{H} = \mathrm{rot}\,\mathbf{A}$, $\mathbf{E} = -\dfrac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla A_0$ — магнитное и электрическое поля. Ниже будем рассматривать стационарные состояния, когда $p_0\psi = E\psi$, где E — энергия фермиона $(\psi(\mathbf{r}, t) = \mathrm{e}^{-iEt}\psi(\mathbf{r}))$.

1. САМОСОПРЯЖЕННОЕ УРАВНЕНИЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА СО СПИНОРНОЙ ВОЛНОВОЙ ФУНКЦИЕЙ

Пусть биспинорная волновая функция имеет вид

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \begin{pmatrix} u(\mathbf{r}) \\ v(\mathbf{r}) \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-iEt}.$$

Тогда

$$(E - eA_0 - m)\,u = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{p} - e\mathbf{A})\,v,$$
$$(E - eA_0 + m)\,v = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{p} - e\mathbf{A})\,u,$$

и можно получить уравнения либо для спинора u, либо для спинора v.

Для спинора $u(\mathbf{r})$ уравнение имеет вид

$$\left[(E - eA_0)^2 - (\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2 - m^2 + e\boldsymbol{\sigma}\mathbf{H} - \frac{1}{E - eA_0 + m} ie\boldsymbol{\sigma}\mathbf{E}\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{p} - e\mathbf{A})\right] u(\mathbf{r}) = 0.$$

В случае стационарных состояний электромагнитные потенциалы $A_0(\mathbf{r})$, $A^k(\mathbf{r})$ не зависят от времени.

1.1. Пусть $A_0(\mathbf{r}) = 0$, $A^k(\mathbf{r}) \neq 0$. Тогда уравнение для спинора $u(\mathbf{r})$ является самосопряженным и

$$Eu(\mathbf{r}) = \left(\pm\sqrt{m^2 + (\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2 + e\boldsymbol{\sigma}\mathbf{H}}\right) u(\mathbf{r}).$$

1.2. Далее рассмотрим случай $A^k(\mathbf{r}) = 0$, $A_0(\mathbf{r}) \neq 0$. В этом случае последнее слагаемое в уравнении для спинора $u(\mathbf{r})$ является несамосопряженным оператором. Проведем неунитарное преобразование подобия этого уравнения и спинора $u(\mathbf{r})$:

$$\Phi(\mathbf{r}) = gu(\mathbf{r}),$$

где

$$g = (E - eA_0 + m)^{-1/2}.$$

В результате уравнение для спинора $u(\mathbf{r})$ сводится к виду

$$g\left[(E - eA_0)^2 - \mathbf{p}^2 - m^2 - \frac{1}{(E - eA_0 + m)} i\boldsymbol{\sigma}\mathbf{E}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p}\right] g^{-1}\Phi(\mathbf{r}) = 0$$

и окончательно

$$\left[(E - eA_0)^2 - \mathbf{p}^2 - m^2 - \frac{3}{4}\frac{1}{(E - eA_0 + m)^2}\mathbf{E}^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}\frac{1}{E - eA_0 + m}\operatorname{div}\mathbf{E} + \frac{1}{E - eA_0 + m}\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{E} \times \mathbf{p})\right] \Phi(\mathbf{r}) = 0.$$

Для центрально-симметричного кулоновского потенциала допускается разделение переменных в сферических координатах (r, θ, φ):

$$\Phi(r, \theta, \varphi) = F(r)\, \chi_\kappa^{m_\varphi}(\theta)\, \mathrm{e}^{im_\varphi\varphi},$$

где $\chi_\kappa^{m_\varphi}$ — сферические спиноры; $m_\varphi = -j, -j + 1, \ldots, j$ — азимутальная компонента углового момента j; κ — квантовое число уравнения Дирака

$$\kappa = \mp 1, \mp 2 \ldots = \begin{cases} -(l + 1), & j = l + 1/2, \\ l, & j = l - 1/2, \end{cases}$$

где j, l — квантовые числа углового и орбитального моментов фермиона.

С учетом известных соотношений

а) $\mathbf{p}^2 = \mathbf{p}_r^2 + \mathbf{p}_{\theta,\varphi}^2$, где $\mathbf{p}_r^2 = -\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\dfrac{\partial}{\partial r}\right)$,

$$\mathbf{p}_{\theta,\varphi}^2\chi_\kappa^{m_\varphi} = -\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r^2}\operatorname{ctg}\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)\chi_\kappa^{m_\varphi} = \frac{\kappa(\kappa + 1)}{r^2}\chi_\kappa^{m_\varphi};$$

б) $e\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{E}\times\mathbf{p}) = -e\dfrac{dV}{dr}\dfrac{1}{r}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{L}$, где $\mathbf{L}=\mathbf{r}\times\mathbf{p}$ — оператор орбитального момента;

в) $-\boldsymbol{\sigma}\mathbf{L}\chi_\kappa^{m_\varphi} = (\kappa+1)\chi_\kappa^{m_\varphi}$

получим уравнение типа Шредингера с эффективным потенциалом для радиальной функции $F(r)$:

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d}{dr}\right)F(r) + \left((E-V)^2 - m^2 - \frac{\kappa(\kappa+1)}{r^2} - \frac{3}{4}\frac{\left(\dfrac{dV}{dr}\right)^2}{(E-V+m)^2} - \right.$$
$$\left. -\frac{1}{2}\frac{\dfrac{d^2V}{dr^2}}{(E-V+m)} + \frac{1}{(E-V+m)}\frac{1}{r}\frac{dV}{dr}\kappa\right)F(r) = 0.$$

Здесь $V(\mathbf{r}) = eA_0(\mathbf{r})$.

Это уравнение удобно использовать для анализа движения фермионов в кулоновских полях разной интенсивности.

2. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ФОЛДИ–ВАУТХАЙЗЕНА И КИРАЛЬНАЯ СИММЕТРИЯ

Для случая $A^k(\mathbf{r}) \neq 0, A_0(\mathbf{r}) = 0$ уравнение для спинора $u(\mathbf{r})$ можно записать в гамильтоновом виде

$$Eu(\mathbf{r}) = Hu(\mathbf{r}),$$

где $H = \pm\sqrt{m^2 + (\mathbf{p}-e\mathbf{A})^2 + e\boldsymbol{\sigma}\mathbf{H}}$.

Это уравнение легко сопоставляется с уравнением Дирака в представлении Фолди–Ваутхайзена (FW). В этом представлении формально биспинорная волновая функция имеет вид

$$\psi_{\mathrm{FW}} = \begin{pmatrix} u(\mathbf{r}) \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-iEt}, \quad E>0,$$
$$\psi_{\mathrm{FW}} = \begin{pmatrix} 0 \\ v(\mathbf{r}) \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-iEt}, \quad E<0,$$

а гамильтониан равен

$$H_{\mathrm{FW}} = \beta\sqrt{m^2 + (\mathbf{p}-e\mathbf{A})^2 + e\boldsymbol{\sigma}\mathbf{H}}.$$

В случае $A^k(\mathbf{r}) = 0, A_0(\mathbf{r}) \neq 0$ уравнение для спинора $u(\mathbf{r})$ невозможно записать в замкнутом гамильтоновом виде

$$\left[(E - eA_0)^2 - \mathbf{p}^2 - m^2 + e\boldsymbol{\sigma}\mathbf{H} - \frac{1}{E - eA_0 + m} ie\boldsymbol{\sigma}\mathbf{E}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p}\right] u(\mathbf{r}) = 0.$$

Это можно сделать лишь методом последовательных приближений. Сначала подставляем в знаменатель последнего слагаемого этого уравнения с $A^k(\mathbf{r}) = 0$ значение $E = E_0$. Затем проводим преобразование с g_0, обеспечивающее самосопряженность уравнения. Получаем значение оператора H_1 ($E_1\Phi(\mathbf{r}) = H_1\Phi(\mathbf{r})$). Далее этот процесс повторяется со значением $E = H_1$ в знаменателе последнего слагаемого в уравнении для спинора $u(\mathbf{r})$ до необходимого для рассматриваемой физической задачи уровня точности.

Для примера пусть $E_0 = m$. Тогда

$$E\Phi(\mathbf{r}) = H_1\Phi(\mathbf{r}) = \\ = \left(eA_0 \pm \sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2 + \frac{3}{16m^2}\mathbf{E}^2 - \frac{1}{4m}\operatorname{div}\mathbf{E} - \frac{1}{2m}\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{E} \times \mathbf{p})}\right)\Phi(\mathbf{r}).$$

Если ограничиться в разложении выражения под квадратным корнем этого уравнения по степеням m слагаемыми $\sim 1/m^2$, получим для знака «+» перед корнем выражение, совпадающее с известным нерелятивистским разложением Фолди–Ваутхайзена.

Киральное представление Фолди–Ваутхайзена. В этом случае используются матрицы α^k, β в представлении Вейля, широко употребляемом в Стандартной модели: $\beta = \gamma_0 = \rho_1$; $\alpha^k = \beta\gamma^k = \rho_3\sigma^k$; $\gamma^k = \beta\alpha^k = -i\rho_2\sigma^k$; $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \rho_3$; $\Sigma^i = E_{4\times4}\sigma^i$; $E_{4\times4}$ — единичная матрица.

Если биспинор ψ представить в виде

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \begin{pmatrix} \psi_L(\mathbf{r}) \\ \psi_R(\mathbf{r}) \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-iEt},$$

то в уравнении Дирака слагаемое βm смешивает спиноры $\psi_L(\mathbf{r})$, $\psi_R(\mathbf{r})$, и уравнение Дирака с ненулевой массой фермиона не обладает киральной симметрией.

Наоборот, в уравнении второго порядка нет слагаемых, смешивающих спиноры ψ_L, ψ_R, и его можно записать в виде

$$\left[(p_0 - eA_0)^2 - (\mathbf{p} - e\mathbf{A}_0)^2 - m^2 + \boldsymbol{\sigma}\mathbf{H} - ie\boldsymbol{\sigma}\mathbf{E}\right]\psi_L = 0,$$
$$\left[(p_0 - eA_0)^2 - (\mathbf{p} - e\mathbf{A}_0)^2 - m^2 + \boldsymbol{\sigma}\mathbf{H} + ie\boldsymbol{\sigma}\mathbf{E}\right]\psi_R = 0.$$

Ранее аналогичные уравнения рассматривались Фейнманом и Гелл-Манном.

При использовании вышеуказанных уравнений воспроизводятся все эффекты квантовой электродинамики при дополнительном предположении, что электроны и позитроны рождаются или уничтожаются парами. Эти уравнения являются кирально-симметричными. Наличие или отсутствие массы у фермиона не влияет на киральную симметрию уравнений. Примечательно, что эти уравнения позволяют получить замкнутое выражение для гамильтониана FW в киральном представлении.

Действительно, из них следует

$$p_0\psi_{\mathrm{FW}}(\mathbf{r},t) = H_{\mathrm{FW}}\psi_{\mathrm{FW}}(\mathbf{r},t),$$

где для стационарных состояний

$$\psi_{\mathrm{FW}} = \begin{pmatrix} \psi_L \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-iEt}, \quad E > 0,$$

$$\psi_{F\mathrm{W}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_R \end{pmatrix} \mathrm{e}^{iEt}, \quad E < 0,$$

$$H_{\mathrm{FW}} = eA_0 + \gamma_5\sqrt{m^2 + (\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2 + e\boldsymbol{\sigma}\mathbf{H} - ie\boldsymbol{\alpha}\mathbf{E}}.$$

Для гамильтониана возможно также другое представление волновых функций:

$$\psi_{\mathrm{FW}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_R \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-iEt}, \quad E > 0,$$

$$\psi_{\mathrm{FW}} = \begin{pmatrix} \psi_L \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{iEt}, \quad E < 0.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. В работе для описания квантово-механического движения фермионов получены самосопряженные уравнения второго порядка со спинорными волновыми функциями. Показана связь этих уравнений с уравнением типа Шредингера с эффективными потенциалами и с уравнением Дирака в представлении Фолди–Ваутхайзена.

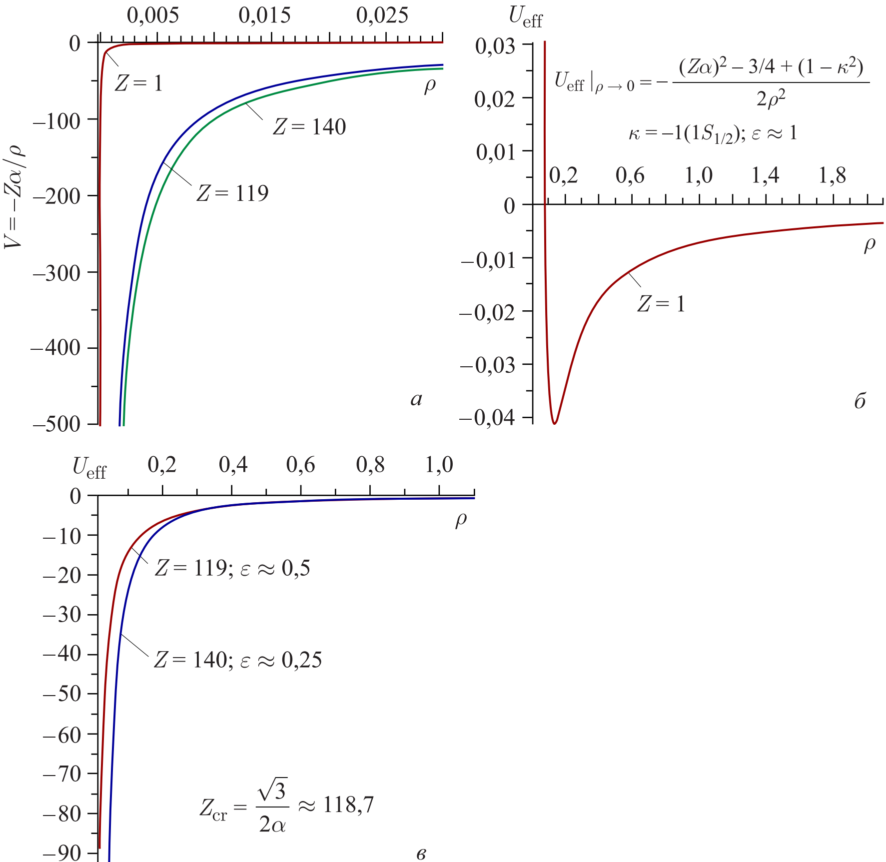
2. При использовании четырехмерных матриц $\gamma^0, \gamma^k, \gamma^5$ в представлении Дирака–Паули показана причина отсутствия замкнутого преобразования FW при ненулевом скалярном потенциале электромагнитного поля $A_0(\mathbf{r},t)$. Наоборот, при использовании матриц $\gamma^0, \gamma^k, \gamma^5$ в киральном представлении существует замкнутое выражение для гамильтониана FW в случае общего выражения для электромагнитного поля $A^0(\mathbf{r},t), A^k(\mathbf{r},t)$. При этом уравнения второго порядка со спинорными волновыми функциями обладают киральной симметрией независимо от наличия или отсутствия массы у фермионов.

3. При получении для вещественных радиальных волновых функций самосопряженных уравнений типа Шредингера с эффективными потенциалами необходимо производить неунитарные преобразования подобия, что может приводить к новым физическим следствиям.

Отметим два из них.

• При анализе уравнения типа Шредингера с эффективным кулоновским потенциалом достаточно просто выделить три области при изменении Z в исходном кулоновском поле $V(r) = -Ze^2/r$.

Для основного состояния $1S_{1/2}$ в первой области $1 \leqslant Z < \dfrac{Z \cdot 137\sqrt{3}}{2} \approx$ 118,7 при $r \to 0$ существует положительный барьер $\sim 1/r^2$ с последую-



а) Притягивающее кулоновское поле ($V = -Z\alpha/\rho$); *б, в*) эффективные потенциалы уравнения второго порядка: при $Z < Z_{\text{cr}}$ (*б*); при $Z > Z_{\text{cr}}$ (*в*) щей потенциальной ямой. Во второй области изменения Z ($119 \leqslant Z \leqslant 137$) остается потенциальная яма $\sim K/r^2$, где коэффициент $K \leqslant 1/8$, что допускает возможность существования фермионных стационарных связанных состояний. В третьей области с $Z > 137$ существует потенциальная яма с коэффициентом $K > 1/8$, что свидетельствует о реализации режима «падения» частицы на центр.

• Вещественные радиальные волновые функции уравнения Дирака во внешних гравитационных полях Шварцшильда, Райсснера–Нордстрема, Керра и Керра–Ньюмена являются квадратично-неинтегрируемыми вблизи горизонтов событий. При переходе к уравнению типа Шредингера с эффективными потенциалами радиальные волновые функции становятся квадратично-интегрируемыми во всех допустимых областях определения, причем волновые функции на горизонтах событий равны нулю.

Таким образом, использование самосопряженных уравнений второго порядка со спинорными волновыми функциями расширяет возможности квантовой механики движения фермионов во внешних электромагнитных и гравитационных полях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Dirac P. A. M.* The Principles of Quantum Mechanics. Fourth Ed. Oxford: Clarendon Press, 1958.
2. *Зельдович Я. Б., Попов В. С.* // УФН. 1971. Т. 105, вып. 3. С. 403; Sov. Phys. Usp. 1972. V. 14. P. 673.
3. *Gorbatenko M. V., Neznamov V. P., Popov E. Yu.* // XVI Workshop on High Energy Spin Physics (D-SPIN2015). J. Phys.: Conf. Ser. 2016. V. 678. P. 012037; DOI:10.1088/1742-6596/678/1/012037; arxiv:1511.05058 (gr-qc); ВАНТ. Сер. «Теор. и прикл. физика». 2015. Вып. 2. С. 21–31.
4. *Foldy L. L., Wouthuysen S. A.* // Phys. Rev. 1950. V. 78. P. 29.
5. *Case K. M.* // Phys. Rev. 1954. V. 95. P. 1323.
6. *Feynman R. P., Gell-Mann M.* // Phys. Rev. 1958. V. 109. P. 193.
7. *Brown L.* // Ibid. V. 111. P. 462.
8. *Незнамов В. П.* // ЭЧАЯ. 2006. Т. 37, вып. 1. С. 152 (Part. Nucl. 2006. V. 37, No. 1. P. 86).
9. *Незнамов В. П.* // ЭЧАЯ. 2012. Т. 43, вып. 1 (Part. Nucl. 2012. V. 43, No. 1. P. 15).
10. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Квантовая механика. Нерелятивистская теория. М.: Физматлит, 1963 (*Landau L. D., Lifshitz E. M.* Quantum Mechanics. Nonrelativistic Theory. Oxford: Pergamon Press, 1965).
11. *Незнамов В. П., Сафронов И. И.* // ВАНТ. Сер. «Теор. и прикл. физика». 2016. Вып. 4. С. 9–24.