

## ЭФФЕКТ АРОНОВА–БОМА. АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ ПОДХОД

*Д. А. Славнов\**

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва

В рамках алгебраического подхода рассматривается эффект Аронова–Бома. Построена математическая схема, которая, с одной стороны, согласуется с экспериментальными результатами, а с другой стороны, дает этому эффекту наглядную физическую интерпретацию, не противоречащую классическим представлениям.

In the framework of an algebraic approach we consider the Aharonov–Bohm effect. We have constructed a mathematical scheme which fits experimental data. On the other hand, this scheme gives this effect an obvious physical interpretation which does not contradict classical conceptualization.

PACS: 03.65.Ud

### ВВЕДЕНИЕ

Эффект Аронова–Бома (эффект АБ) является одним из ключевых эффектов квантовой физики. Он теснейшим образом связан с целым рядом принципиальных проблем квантовой теории. К ним относятся проблема квантовых измерений, соотношение между квантовыми величинами и их классическими аналогами, проблема локальности и причинности.

Эффект был теоретически предсказан в 1959 г. [1] и год спустя получил первое экспериментальное подтверждение [2]. Однако к этому результату и целому ряду последующих экспериментальных подтверждений было высказано много претензий.

Развернулась очень оживленная дискуссия, в которой ставилось под сомнение существование эффекта. Значительно позже, в 1986 г. группе профессора Тономуры [3] удалось окончательно экспериментально доказать, что эффект АБ действительно существует.

Уже в работе [1] из наличия эффекта предлагалось сделать вывод, что «... в отличие от классической механики, существует воздействие потенциалов на заряженную частицу, даже если в области, где она находится, все поля (и, следовательно, силы, действующие на частицу) исчезают» и поэтому

---

\*E-mail: slavnov@goa.bog.msu.ru

«необходимо дальнейшее развитие теории». В работе было предложено два направления такого развития. Во-первых, можно отказаться от условия локальности, во-вторых, можно в квантовой теории отвести потенциалам особую роль. В недавно опубликованной статье [4] Аронова и его сотрудников упор делается на нелокальность.

Надо отметить, что в последние годы появилось большое количество сообщений об экспериментах, результаты которых вроде бы свидетельствуют о наличии нелокальности многих квантовых явлений. К таким экспериментам относятся эксперименты с так называемым отсроченным выбором (см., например, [5, 6]), с квантовой телепортацией (см., например, [7, 8]), с квантовым ластиком [9, 10]. С другой стороны, условие локальности остается центральным принципом при построении современной квантовой теории поля.

В работах [11–14] автора данной статьи показано, что в рамках алгебраического подхода все эти результаты можно согласовать с принципом локальности квантового взаимодействия. В предлагаемой статье показывается, что то же самое справедливо и для эффекта АБ.

В рамках стандартного математического аппарата, в котором первичным понятием является гильбертово пространство, обсуждение локальных свойств исследуемой физической системы затруднено тем, что элементы гильбертова пространства не имеют определенной локализации в четырехмерном пространстве-времени  $\mathcal{M}$ . Особенно явно это проявляется в гейзенберговском представлении, где векторы гильбертова пространства определяют состояние системы в любой момент времени.

В алгебраическом подходе ситуация существенным образом иная. Смотрите [15–21]. В этом подходе первичным понятием является локальная наблюдаемая. Под этим термином понимается такой атрибут изучаемой системы, для которого с помощью измерения в некоторой ограниченной области  $\mathcal{O}$  пространства  $\mathcal{M}$  можно получить численное значение. Таким образом, для обсуждения локальных свойств алгебраический подход приспособлен значительно лучше, чем традиционный аппарат квантовой механики, основанный на гильбертовом пространстве.

Еще одним достоинством алгебраического подхода является то, что в его рамках легче обсуждать вопрос, какие понятия являются первичными — силы, как в динамике Ньютона, или потенциалы, как в гамильтоновой динамике, используемой в квантовой механике.

## 1. АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ ПОДХОД

Исходный постулат алгебраического подхода выглядит следующим образом.

**Постулат 1.** Наблюдаемые физической системы являются эрмитовыми элементами некоторой  $C^*$ -алгебры  $\mathfrak{A}$ .

О свойствах  $C^*$ -алгебры смотрите [22]. Основным таким свойством является то, что любая  $C^*$ -алгебра имеет точное представление в соответствующем гильбертовом пространстве.

В дальнейшем у нас наблюдаемые обозначаются латинскими буквами с «крышечкой», например,  $\hat{B}$ . Значение этой наблюдаемой обозначается той же буквой  $B$ , но без крышечки. Предполагается, что выбрана определенная система единиц и все наблюдаемые можно считать безразмерными. Множество эрмитовых элементов алгебры  $\mathfrak{A}$  будем обозначать  $\mathfrak{A}_+$ . Множество наблюдаемых, локализованных в области  $\mathcal{O}$ , обозначается  $\mathfrak{A}_+(\mathcal{O})$ . В алгебраическом подходе точки области  $\mathcal{O}$  в качестве наблюдаемых не рассматриваются.

В общем случае измерение может сильно повлиять на исследуемую систему. Поэтому следует различать воспроизводимые и невозпроизводимые измерения наблюдаемой. Для воспроизводимых измерений повторное измерение дает тот же результат, что и предыдущее.

Что такое физическая система, интуитивно более или менее понятно. Далее нам будет удобнее перейти на формальный уровень и под термином «физическая система» подразумевать совокупность двух множеств:  $\mathcal{O}$  (область локализации системы) и  $\mathfrak{A}_+(\mathcal{O})$  (множество ее наблюдаемых). Это позволит естественно переходить от физической системы к ее физической подсистеме:  $\mathcal{O}, \mathfrak{A}_+(\mathcal{O}) \rightarrow \mathcal{O}', \mathfrak{A}_+(\mathcal{O}')$ , где  $\mathcal{O}' \subset \mathcal{O}$  и  $\mathfrak{A}_+(\mathcal{O}') \subset \mathfrak{A}_+(\mathcal{O})$ . При этом мы не будем предполагать, что подсистемы обязательно изолированы друг от друга. В общем случае системы и подсистемы могут быть открытыми.

Измерения двух наблюдаемых  $\hat{B}$  и  $\hat{C}$  одной физической системы назовем совместимыми, если в последовательности измерений: сначала наблюдаемой  $\hat{B}$ , затем наблюдаемой  $\hat{C}$ , потом опять наблюдаемой  $\hat{B}$  и, наконец, наблюдаемой  $\hat{C}$  — измерения каждой из двух наблюдаемых будут воспроизводимыми. Наблюдаемые  $\hat{B}$  и  $\hat{C}$  назовем совместимыми, если их можно измерить совместимым образом.

Постулат 1 пригоден как для квантовой, так и для классической системы. Разница заключается в том, что в случае классической системы  $C^*$ -алгебра коммутативна, а в случае квантовой системы — некоммутативна. Одновременно с этим у классической системы все наблюдаемые совместимы, а у квантовой системы есть как совместимые, так и несовместимые наблюдаемые.

Соответственно, принимается следующий постулат.

**Постулат 2.** Множество совместимых между собой наблюдаемых является действительной ассоциативной коммутативной алгеброй. Наоборот, если наблюдаемые принадлежат некоторой действительной ассоциативной коммутативной алгебре, то они совместимы.

Каждая  $C^*$ -алгебра имеет коммутативные подалгебры. Соответственно, можно считать, что каждая квантовая система имеет классические подси-

стемы. Если  $C^*$ -алгебра некоммутативна, то она имеет бесконечно много максимальных коммутативных подалгебр  $\Omega_\xi$ . Индекс  $\xi$  будет отличать одну такую подалгебру от другой.

Каждому состоянию классической системы соответствует гомоморфное отображение алгебры наблюдаемых в множество действительных чисел. Для коммутативной  $C^*$ -алгебры такое отображение

$$\hat{B} \rightarrow B_\xi = \varphi_\xi(\hat{B}), \text{ если } \hat{B} \in \Omega_\xi,$$

называется характером алгебры.

Таким образом, мы можем считать, что состояние классической системы задается характером ее алгебры. По сравнению с традиционным способом задания состояния классической системы с помощью точки в фазовом пространстве такой способ имеет целый ряд преимуществ. Во-первых, он пригоден для открытых систем. Во-вторых, он не предполагает знания уравнения движения. В-третьих, он не требует, чтобы каждая наблюдаемая системы (подсистемы) имела канонически сопряженную.

Такое определение состояния системы можно обобщить и на случай квантовой системы. Для квантовой системы каждая наблюдаемая  $\hat{B}$ , принадлежащая множеству  $\mathfrak{A}_+$ , одновременно принадлежит некоторой максимальной коммутативной подалгебре  $\Omega_\xi$ . Поэтому при каждом конкретном измерении наблюдаемой  $\hat{B} \in \Omega_\xi$  мы можем считать, что имеем дело не с квантовой системой, а с ее классической подсистемой, наблюдаемые которой принадлежат подалгебре  $\Omega_\xi$ . Конечно, такая система будет открытой, но это не является препятствием для описания ее состояния с помощью характера подалгебры  $\Omega_\xi$ .

Таким образом, для предсказания результата измерения наблюдаемой  $\hat{B}$  нам достаточно знать вид функционала  $\varphi_\xi(\hat{B})$ . Соответственно, для предсказания результата измерения любой наблюдаемой, принадлежащей  $\mathfrak{A}_+$ , нам достаточно знать вид функционалов  $\varphi_\xi(\cdot)$  для всех значений индекса  $\xi$ . Обозначим такую совокупность функционалов символом  $\varphi = [\varphi_\xi]$  и назовем эту совокупность элементарным состоянием.

Теперь мы можем принять следующий постулат.

**Постулат 3.** Результат каждого индивидуального эксперимента по измерению наблюдаемой физической системы определяется элементарным состоянием этой системы.

Для классической системы этот постулат справедлив тривиальным образом, так как в этом случае набор  $\varphi = [\varphi_\xi]$  состоит из одного характера  $\varphi_\xi(\cdot)$ .

Постулат 3 не противоречит тому факту, что для квантовой системы, в общем случае, можно предсказать только вероятность результата измерения. Дело в том, что в этом случае нельзя однозначно определить элементарное состояние, так как для такого определения обязательно потребуется проводить

несовместимые измерения, в результате которых измерения одних наблюдаемых неконтролируемым образом искажают значения других наблюдаемых.

Кроме того, одна и та же наблюдаемая  $\hat{B}$  может одновременно принадлежать нескольким подалгебрам  $\Omega_\xi$ . Поэтому не определено однозначно, при каком значении индекса  $\xi$  функционал  $\varphi_\xi(\cdot)$  будет описывать результат наблюдения  $\hat{B}$ . Этот вопрос не возникнет, если потребовать, чтобы выполнялось равенство

$$\varphi_\xi(\hat{B}) = \varphi_{\xi'}(\hat{B}), \text{ если } \hat{B} \in \Omega_\xi \cap \Omega_{\xi'}, \quad \varphi_\xi(\cdot) \in \varphi, \varphi_{\xi'}(\cdot) \in \varphi. \quad (1)$$

Однако если потребовать, чтобы всегда выполнялось это равенство, то нельзя доказать, что соответствующее элементарное состояние существует. Если же не требовать обязательного выполнения равенства (1), то такое доказательство провести можно (см. статью [23]).

Отказ от требования (1) можно оправдать следующим рассуждением. Сведения о значении наблюдаемой мы получаем из показаний измерительного прибора, а это показание может зависеть не только от состояния исследуемой системы, но и от состояния прибора.

Простейший классический пример — это измерение скорости. Различным образом движущиеся приборы для одной и той же исследуемой системы зафиксируют различные значения скорости. Огромное количество более сложных примеров можно привести из специальной и общей теории относительности. В подобных случаях обычно говорится, что значение многих наблюдаемых может зависеть от выбранной системы координат.

Физически выбор определенной системы координат — это выбор определенной совокупности измерительных приборов. В общем случае приборы могут отличаться друг от друга не только своими пространственно-временными характеристиками. Можно показать (см. [12, 14]), что в квантовом случае благодаря наличию несовместимых измерений калибровка приборов не позволяет добиться выполнения условия (1) для всех квантовых наблюдаемых. Однако для некоторых наблюдаемых условие (1) может выполняться. Будем говорить, что элементарное состояние стабильно на наблюдаемой  $\hat{B}$ , если условие (1) выполняется для всех  $\Omega_\xi$  и  $\Omega'_{\xi'}$ , которые содержат наблюдаемую  $\hat{B}$ .

Таким образом, в общем случае значение наблюдаемой нельзя считать объективной характеристикой исследуемой системы. Оно может зависеть от характеристик измерительного прибора. С другой стороны, ничто не мешает считать такой характеристикой (физической реальностью) элементарное состояние.

Возвращаясь к обсуждению элементарного состояния, можем констатировать, что с помощью совместимых измерений из набора  $\varphi = [\varphi_\xi]$  функционалов  $\varphi_\xi(\cdot)$  мы в состоянии определить только один функционал, например  $\varphi_\eta(\cdot)$ . В связи с этим удобно ввести класс  $\varphi_\eta$ -эквивалентных элементарных

состояний. Обозначим этот класс  $\{\varphi\}_{\varphi_\eta}$ . Членами этого класса являются элементарные состояния  $\varphi = [\varphi_\xi]$ , у которых для  $\xi = \eta$  функционал  $\varphi_\xi$  один и тот же, а при  $\xi \neq \eta$  для разных членов класса функционалы  $\varphi_\xi$  независимы.

Таким образом, с помощью совместимых измерений мы можем только установить, что имеем дело с одним из элементарных состояний из определенного класса эквивалентности, но не более того. Иными словами, мы можем выделить класс эквивалентности, а не конкретное элементарное состояние.

Если мы имеем дело с классом эквивалентности  $\{\varphi\}_{\varphi_\eta}$ , в котором элементарные состояния стабильны на наблюдаемых  $\hat{B} \in \Omega_\eta$ , то при измерении этих наблюдаемых мы будем получать определенные значения, вне зависимости от того, с каким элементарным состоянием мы столкнемся в эксперименте. Для других наблюдаемых ничего определенного сказать нельзя, так как для разных элементарных состояний из этого класса значения наблюдаемых могут быть разными. Именно таким физическим свойством обладает квантовое состояние, фиксируемое определенными собственными значениями наблюдаемых  $\hat{B} \in \Omega_\eta$ . Поэтому такой класс эквивалентности мы можем отождествить с соответствующим квантовым состоянием  $\Psi_{\varphi_\eta}$ , т. е.  $\Psi_{\varphi_\eta} \equiv \{\varphi\}_{\varphi_\eta}$ .

Если элементарное состояние мы можем считать объективным атрибутом отдельной физической системы, то квантовое состояние (класс эквивалентности элементарных состояний) следует считать атрибутом ансамбля физических систем. Такой ансамбль будем называть квантовым ансамблем. В принципе, класс эквивалентности элементарных состояний можно сопоставить и отдельной физической системе. Для этого достаточно считать, что отдельное элементарное состояние является атрибутом этой системы в фиксированный момент времени, а разным моментам времени сопоставлять разные элементарные состояния.

Концепция элементарного состояния позволяет вернуть классическую (колмогоровскую) теорию вероятностей в лоно квантовой физики. Напомним, что в основе колмогоровской теории вероятностей (см., например, [24, 25]) лежит так называемое вероятностное пространство  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . Здесь  $\Omega$  — множество элементарных событий. Элементарные события должны быть взаимоисключающими, и в каждом испытании должно реализоваться одно и только одно элементарное событие. В нашем случае в качестве такого элементарного события может выступать элементарное состояние. В стандартном математическом аппарате квантовой механики претендента на эту роль нет.

Помимо элементарных событий вводится еще понятие случайного события, или просто события. Каждое событие  $F$  — это некоторое подмножество множества  $\Omega$ . Считается, что произошло событие  $F$ , если произошло одно из элементарных событий, принадлежащих  $F$ . Предполагается, что в каждом испытании можно установить, произошло событие или нет. В квантовом случае

это требует, чтобы исследуемые события можно было различить с помощью совместимых измерений.

Второй компонент вероятностного пространства — это так называемая  $\sigma$ -алгебра  $\mathcal{F}$ . Элементами  $\sigma$ -алгебры являются события  $F$ , включая все множество  $\Omega$  и пустое множество. Опять-таки, в квантовом случае в  $\sigma$ -алгебру должны входить события, различимые совместимыми измерениями. Поэтому каждую допустимую  $\sigma$ -алгебру можно проиндексировать символом  $\xi$ , которым индексируются алгебры совместимых наблюдаемых. Множество, оснащенное  $\sigma$ -алгеброй, называется измеримым. Выбор определенной  $\sigma$ -алгебры  $\mathcal{F}_\xi$  физически соответствует выбору определенной совокупности измерительных приборов, которые могут проводить совместимые измерения.

Третьим компонентом вероятностного пространства является вероятностная мера  $P$ . Она каждому событию  $F \in \mathcal{F}$  ставит в соответствие число  $P(F)$  такое, что: а)  $0 \leq P(F) \leq 1$  для всех  $F \in \mathcal{F}$ ,  $P(\Omega) = 1$ ; б)  $P(\sum_j F_j) = \sum_j P(F_j)$  для любой счетной совокупности непересекающихся подмножеств  $F_j \in \mathcal{F}$ .

Обратим внимание на то, что вероятность  $P$  не является атрибутом какого-то элементарного события. Она, во-первых, зависит от множества  $\Omega$ , элементом которого является это событие. Во-вторых, она зависит от того, какая  $\sigma$ -алгебра выбрана в множестве  $\Omega$ . На этот пункт физики обычно не обращают внимание. В частности, это делается в случаях доказательств неравенств Белла [26]. Напомним, что именно неравенства Белла явились основным аргументом в утверждении, что колмогоровская теория вероятностей неприменима в квантовой теории. Как показано в работах [23, 27], при учете этой особенности квантовых систем приведенные доказательства неравенств Белла не проходят.

Если колмогоровская теория вероятностей допустима в квантовой физике, то среднее значение наблюдаемой  $\hat{B} \in \mathcal{Q}_\eta$  по классу эквивалентности  $\{\varphi\}_{\varphi_\eta}$  можно задать стандартной формулой теории вероятностей

$$\Psi_{\varphi_\eta}(\hat{B}) = \int_{\varphi \in \Psi_{\varphi_\eta}} P_{\hat{B}}(d\varphi) \varphi_\xi(\hat{B}), \quad (2)$$

где

$$P_{\hat{B}}(d\varphi) = P(\varphi : \varphi_\xi(\hat{B}) \leq B + d\hat{B}) - P(\varphi : \varphi_\xi(\hat{B}) \leq B)$$

— вероятностная мера на классе  $\{\varphi\}_{\varphi_\eta}$ .

Формула (2) будет исполнять роль квантового среднего, если справедлив следующий постулат.

**Постулат 4.** Вероятностное распределение на классе эквивалентности  $\{\varphi\}_{\varphi_\eta}$  таково, что правая часть равенства (2) не зависит от  $\xi$  и задает линейный функционал  $\Psi_{\varphi_\eta}(\hat{B})$  на алгебре  $\mathcal{A}$ .

Как показано в статье [23], такие функционалы существуют. Указанными в постулате 4 свойствами обладают функционалы, которые удовлетворяют соотношению

$$\Psi_{\varphi_\eta}(\hat{B})\tilde{p}_{\varphi_\eta} = \tilde{p}_{\varphi_\eta}\tilde{B}\tilde{p}_{\varphi_\eta}, \quad (3)$$

где  $\tilde{p}_{\varphi_\eta}$  — некоторый одномерный проектор в гильбертовом пространстве, в котором реализуется точное представление алгебры, а  $\tilde{B}$  — оператор в этом представлении, соответствующий  $\hat{B}$ . Наоборот, функционал, удовлетворяющий соотношению (3), удовлетворяет постулату 4.

Процедурой, которая реализует представление  $C^*$ -алгебры, является так называемая каноническая конструкция (см., например, [17, 28]) Гельфанда–Наймарка–Сигала (ГНС). Вкратце она состоит в следующем. Пусть имеется некоторая  $C^*$ -алгебра  $\mathfrak{A}$  и линейный положительный нормированный функционал  $\Psi$  на этой алгебре. В нашем случае таким функционалом может служить функционал  $\Psi_{\varphi_\eta}$ , задаваемый формулой (2). Будем считать элементы  $\hat{B}$  и  $\hat{B}'$  алгебры  $\mathfrak{A}$  эквивалентными, если для любого  $\hat{W} \in \mathfrak{A}$  справедливо равенство  $\Psi(\hat{W}^*(\hat{B} - \hat{B}')) = 0$ . Символ  $*$  означает эрмитовское сопряжение в алгебре  $C^*$ . Обозначим через  $\Phi(\hat{B})$  класс эквивалентности элемента  $\hat{B}$  и рассмотрим множество  $\mathfrak{A}(\Psi)$  — множество всех классов эквивалентности в  $\mathfrak{A}$ . Превратим множество  $\mathfrak{A}(\Psi)$  в линейное пространство, определив в нем линейные операции формулой

$$b\Phi(\hat{B}) + c\Phi(\hat{C}) = \Phi(b\hat{B} + c\hat{C}),$$

а скалярное произведение

$$\left(\Phi(\hat{B}), \Phi(\hat{C})\right) = \Psi(\hat{B}^*\hat{C}). \quad (4)$$

Это скалярное произведение порождает в  $\mathfrak{A}(\Psi)$  норму. Пополнение по этой норме превращает  $\mathfrak{A}(\Psi)$  в гильбертово пространство. Каждый элемент  $\hat{B}$  алгебры  $\mathfrak{A}$  однозначно представляется в этом пространстве линейным оператором  $\tilde{B}$ , действующим по правилу

$$\tilde{B}\Phi(\hat{C}) = \Phi(\hat{B}\hat{C}). \quad (5)$$

Конструкция ГНС позволяет построить представление любой  $C^*$ -алгебры. Рассмотрим ГНС-конструкцию, в которой в качестве функционала, порождающего представление, фигурирует  $\Psi_{\varphi_\eta}(\hat{B})$ . Пусть  $\Phi(\hat{I})$  — класс эквивалентности единичного элемента  $\hat{I}$ , тогда согласно формулам (4) и (5) имеем

$$\left(\Phi(\hat{I}), \tilde{B}\Phi(\hat{I})\right) = \Psi(\hat{B}).$$



Это не что иное, как правило Борна. Таким образом, конструкция ГНС позволяет воспроизвести стандартный математический аппарат квантовой механики.

На этот факт можно посмотреть и с другой точки зрения. Правило Борна отражает экспериментальную ситуацию в квантовых процессах. При взаимодействии квантовых систем с классическими приборами, осуществляющими воспроизводимые измерения квантовых наблюдаемых, квантовая система автоматически переходит в соответствующее квантовое состояние, в котором распределение значений квантовых наблюдаемых подчиняется правилу Борна. Это означает, что квантовые состояния обладают некоторым выделенным свойством — равновесностью, или, другими словами, устойчивостью. Поэтому мы можем считать, что постулат 4 отражает свойство устойчивости ансамблей, соответствующих классам эквивалентности. Иначе можно сказать, что среднее значение наблюдаемой  $\hat{V}$ , которое удовлетворяет соотношению (3), соответствует устойчивому вероятностному распределению.

Наличие у квантовых систем несовместимых наблюдаемых может существенным образом повлиять на процедуру описания динамики таких систем. Динамика классической системы в идеальном случае может быть описана уравнениями Ньютона. Это означает, что для описания такой системы достаточно знать все силы, которые действуют в системе, и полный набор граничных условий. Начальные условия можно рассматривать как составную часть этого набора. Конечно, для реальных систем такой полный набор знать невозможно. Всегда будут неконтролируемые возмущения, и, строго говоря, необходимо исследовать устойчивость движения относительно этих возмущений. Но в большом числе случаев на это можно закрыть глаза.

Для квантовых систем ситуация принципиально другая. Даже в идеальном случае нельзя установить полный набор граничных (начальных) условий, так как любой измерительный прибор может зафиксировать только набор совместимых наблюдаемых. Поэтому вопрос устойчивости движения становится принципиально важным. В действительности, при формулировке законов динамики квантовых систем отцы-основатели квантовой механики проблемой устойчивости движения специально не занимались, но удачно пошли по пути использования не ньютоновской механики, а гамильтонова формализма. В этом формализме гамильтониан и действие играют центральную роль. В преломлении к алгебраическому подходу это означает, что эти величины должны входить в алгебру наблюдаемых.

Надо отметить, что и для классических систем далеко не всегда применим ньютоновский формализм. Простейшим примером является газ в термостате. Ясно, что совершенно безнадежно пытаться описывать динамику этой системы в терминах сил взаимодействия между молекулами газа и стенками термостата и между собой. С другой стороны, эта система вполне успешно описывается в терминах температуры и давления при условии установления

равновесного распределения в газе. В этом случае в качестве наблюдаемых следует рассматривать температуру и давление. Хотя ясно, что абсолютное равновесие никогда не реализуется. Вместе с тем при очень малом количестве молекул вполне применим ньютоновский формализм, в котором силы рассматриваются в качестве наблюдаемых. Но в этом случае условие равновесного распределения будет не реалистично.

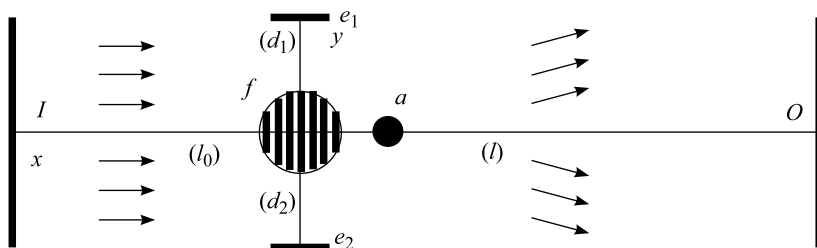
Таким образом, вопрос о том, какие величины должны включаться в множество наблюдаемых, не всегда имеет однозначный ответ. Это множество может зависеть от способа описания системы, в первую очередь от приближения, которое используется.

## 2. ЭФФЕКТ АРОНОВА–БОМА

Теперь перейдем к обсуждению непосредственно эффекта Аронова–Бома. Принципиальная схема мысленного и первого реально осуществленного эксперимента изображена на рисунке.

Эксперимент состоит в следующем. Пучок электронов с одинаковыми импульсами падает слева на бипризму  $[e_1 f e_2]$ . Бипризма состоит из алюминированной кварцевой нити  $f$  диаметром 1,5 мкм и двух электродов  $e_1$  и  $e_2$ . В тени нити  $f$  помещается тонкий соленоид бесконечной длины (в мысленном эксперименте) или длинный намагниченный стержень  $a$  диаметром 1 мкм (в реальном эксперименте). Нить и стержень перпендикулярны плоскости рисунка. Чтобы упростить математические выкладки в эксперименте, изображенном на рисунке, в качестве источника электронов принята пластина  $I$ , перпендикулярная плоскости рисунка. В реальном эксперименте в качестве источника использовался электронный микроскоп, который, скорее, следовало бы изобразить в виде точки. Но, так как расстояния  $l_0$  и  $l$  много больше диаметров нити и стержня ( $l_0 \sim 6,5$  см,  $l \sim 13,5$  см), то это вносит несущественное искажение в окончательный результат.

Нить  $f$  разделяет падающий поток электронов на две части. Одна проходит через щель  $d_1$ , другая — через щель  $d_2$ . На нить накладывается неболь-



Принципиальная схема эксперимента АБ

шой положительный потенциал, благодаря которому после обхода нити  $f$  и стержня  $a$  эти две части объединяются в единый поток электронов, рассеянных в бипризме. Падая на экран  $O$ , эти электроны образуют интерференционные полосы.

Вне стержня  $a$  напряженность магнитного поля равна нулю. Поэтому согласно классической электродинамике интерференционная картина на экране не должна зависеть от величины потока магнитной индукции, идущей по стержню  $a$ . С другой стороны, значение  $A$  векторного потенциала в области прохождения электронов не может везде равняться нулю, так как согласно теореме Стокса интеграл от  $A$  по любому замкнутому контуру вокруг стержня  $a$  должен равняться потоку магнитной индукции через этот контур. Наличие зависимости интерференционной картины от потока магнитной индукции и называется эффектом АБ.

При квантовом рассмотрении картина процесса существенным образом меняется. В уравнение Шредингера для электрона входит именно векторный потенциал  $\hat{A}$ , а не напряженность магнитного поля. Поэтому векторный потенциал влияет на поведение электрона даже в том случае, когда волновая функция электрона исчезающе мала в области, где напряженность магнитного поля отлична от нуля. Это дало основание Аронову и Бому сделать предположение об особой роли потенциалов в квантовой теории. Они даже вынесли это утверждение в заголовок своей статьи [1].

Как уже было упомянуто во введении, эффект АБ сразу же вызвал оживленную дискуссию, предварительные итоги которой были подведены в статье Фейнберга [29]. В своей статье Фейнберг обосновывает утверждение, что эта роль не такая уж особая, что нечто подобное можно увидеть и при классическом рассмотрении. Об этом уже было сказано и в данной статье. Далее мы попытаемся выявить физические причины влияния магнитного стержня на поведение рассеянных электронов. Для этого более внимательно рассмотрим процесс взаимодействия квантовых частиц с объектами, которые можно описывать классическим образом. В частности, такими объектами являются приборы, используемые в экспериментах с квантовыми частицами.

### 3. МЯГКИЕ ФОТОНЫ В КВАНТОВЫХ ПРОЦЕССАХ

Одним из таких экспериментов является исследование упругого рассеяния электрона на ядре. Этот процесс хорошо изучен как теоретически, так и экспериментально (см., например, [30]). При расчетах в старших порядках теории возмущений появляются инфракрасные расходимости. В квантовой теории поля разработан эффективный метод устранения этих трудностей. Метод заключается в том, что при расчете сечения рассеяния помимо диаграмм Фейнмана, которые описывают чисто упругое рассеяние, нужно учиты-

вать диаграммы, которые описывают рассеяние, сопровождающееся испусканием мягких тормозных фотонов. В реальном эксперименте мы всегда имеем дело с совокупностью таких двух процессов. При этом для компенсации всех инфракрасных расходимостей необходимо считать, что тормозных фотонов испускается бесконечно много, но они суммарно уносят очень малую долю энергии. Поэтому можно ожидать, что это облако фотонов будет вести себя как классическая система.

С этим облаком будет взаимодействовать рассеянный электрон. Обычно считается, что этот электрон, наряду с корпускулярными свойствами, обладает свойствами волны де Бройля с волновым вектором  $\mathbf{k}$  ( $\mathbf{k}\hbar$  — импульс электрона). Но в этом случае для достаточно мягкого электрона длина волны могла бы принять макроскопические размеры. Гораздо более естественно предположить, что рассеянный электрон обладает свойствами осциллятора с частотой  $\omega_k = |\mathbf{k}|$ . Иными словами, что электрон обладает не только собственным угловым моментом, но и частотой собственных колебаний. Эти собственные колебания порождают в облаке мягких фотонов волну. Надо сказать, что де Бройль не утверждал, что квантовая частица является волной. Он утверждал (см., например, [31]), что с частицей *связана* волна с частотой  $\omega_k$ .

Иначе можно сказать, что электрону с импульсом  $\mathbf{k}\hbar$  когерентна волна мягких фотонов с частотой  $\omega_k$ . Естественно предположить, что электрон и когерентная с ним волна мягких фотонов составляют единый физический объект «маркированную волну», который, как всякая волна, обладает свойством относительной устойчивости. В этом случае вполне уместным может оказаться формализм когерентных состояний, предложенный Глаубером (см. [32, 33]).

В формализме Глаубера векторный потенциал  $\hat{\mathbf{A}}$  (элемент  $C^*$ -алгебры) представляется оператором в гильбертовом пространстве, который раскладывается по функциям мод  $\mathbf{u}_k$ :

$$\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}t) = \sum_k \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_k}} [b_k^- \mathbf{u}_k(\mathbf{r}) e^{-i\omega_k t} + b_k^+ \mathbf{u}_k^*(\mathbf{r}) e^{+i\omega_k t}].$$

Здесь индекс  $k$  — это мультииндекс, определяемый как проекциями вектора  $\mathbf{k}$ , так и поляризацией волны  $\mathbf{u}_k$ . Так как с дискретными индексами работать значительно удобнее, чем с непрерывными, то считается, что система занимает большой, но конечный объем. Функции  $\mathbf{u}_k$  являются решениями волнового уравнения

$$\nabla^2 \mathbf{u}_k + \omega_k^2 \mathbf{u}_k = 0$$

с соответствующими граничными условиями, образуют полный ортонормированный набор и удовлетворяют требованию поперечности.

Квантово-механические свойства  $\hat{A}$  полностью фиксируются, постулируя, что операторы  $b_k^\pm$  удовлетворяют каноническим перестановочным соотношениям

$$[b_k^-, b_{k'}^+] = \delta_{kk'}, \quad [b_k^\pm, b_{k'}^\pm] = 0.$$

После этого каждую моду можно рассматривать отдельно.

Состояние электромагнитного поля в формализме Глаубера описывается в терминах когерентных состояний  $|\beta_k\rangle$ , которые удовлетворяют соотношению

$$b_k^- |\beta_k\rangle = \beta_k |\beta_k\rangle,$$

где  $\beta_k$  — комплексное число  $\beta_k = |\beta_k| \exp(i\phi_k)$ .

Применительно к маркированной волне,  $|\beta_k|$  можно интерпретировать как параметр, характеризующий энергию колебаний мягких фотонов в маркированной волне, а  $\phi_k$  — как фазу волны, которая фиксируется положением маркера (электрона) в волне.

#### 4. РОЛЬ МЯГКИХ ФОТОНОВ В ЭФФЕКТЕ АБ

В формировании эффекта АБ принимают участие большое количество электронов и огромное количество мягких фотонов. Они находятся в довольно сложных связях между собой. Чтобы разобраться в этих связях, удобно из этой сложной физической системы различным образом выделять подсистемы, каждую из которых описать сравнительно просто.

Одной из таких подсистем будет маркированная волна мягких фотонов, которую мы обозначим  $|\beta_k\rangle$ . Эта волна состоит из огромного числа мягких фотонов, подобно тому, как газ в термостате состоит из огромного числа молекул. Каждая из молекул в газе обладает определенной кинетической энергией, но эта энергия практического интереса не представляет. Значительно удобнее характеризовать отдельную молекулу средней по ансамблю кинетической энергией (температурой) и отклонением индивидуальной энергии от этого среднего значения. После этого можно считать среднюю энергию стабильной по ансамблю наблюдаемой, а значением отклонения энергии от среднего значения просто не интересоваться.

Аналогично, в случае маркированной волны, можно считать  $\beta_k$  значением стабильной по ансамблю наблюдаемой, а значениями других наблюдаемых не интересоваться. Тогда можно сказать, что волна находится в определенном квантовом состоянии и описывается соответствующим вектором гильбертова пространства  $\mathfrak{H}_{ph}$ . Этим объясняется использованное выше обозначение для волны. Волна мягких фотонов имеет вполне определенную локализацию в пространстве  $\mathfrak{M}$  и обладает относительной устойчивостью. Основным фактором устойчивости волны являются не силы непосредственного взаимодействия

между фотонами, составляющими волну, а динамическое равновесие в процессе взаимодействия этих фотонов с возбудителем волны и с классическим объектом, фиксирующим граничные условия. Этот процесс является стохастическим и контролируется теорией вероятностей. В терминах волны удобно следить за локальными свойствами системы и за ее динамикой. Однако из-за своей очень малой энергии эта волна непосредственно измерительными приборами не регистрируется.

Другой важной подсистемой является ансамбль маркеров (электронов). Маркеры легко регистрируются — оставляют след на экране  $O$ . Но электроны излучаются источником  $I$  независимо друг от друга и в различные моменты времени. Друг с другом они никак не взаимодействуют. Поэтому этот ансамбль как единое целое не имеет определенной локализации и не имеет собственной динамики. Однако некоторые сведения о локализации электронов можно получить опосредованно, считая, что каждый из электронов имеет локализацию в пределах соответствующей маркированной волны.

Ансамблю электронов можно сопоставить и вектор некоторого гильбертова пространства  $\mathcal{H}_e$ , если мы будем считать, что маркеры в маркированных волнах распределены случайным образом и каждый мягкий фотон в маркированной волне имеет одну и ту же вероятность быть замещенным маркером. Представим теперь, что источник  $I$  испускает электроны не последовательно, а все сразу. Тогда по своим пространственным (в трехмерном пространстве) характеристикам ансамбль электронов будет точной копией ансамбля мягких фотонов одной маркированной волны, испущенной в этот момент времени.

Иными словами, средние по времени пространственные характеристики ансамбля электронов будут совпадать с пространственными характеристиками одной маркированной волны — такое свойство эргодичности. Соответственно, гильбертово пространство  $\mathcal{H}_e$  должно быть изоморфно пространству  $\mathcal{H}_{ph}$ . Математически ансамбль испущенных электронов мы можем трактовать как когерентную волну, хотя физической волной в виде единого физического объекта она не является. Можно сказать, что ансамбль электронов образует вероятностную волну.

## 5. ОПИСАНИЕ ДИНАМИКИ В ЭКСПЕРИМЕНТЕ АБ

Сначала опишем динамику в физических, интуитивно понятных терминах. Затем постараемся все это облачить в математическую форму. По предположению рассматриваемая физическая система однородна вдоль оси, перпендикулярной плоскости рисунка. Поэтому будем считать, что все события происходят в плоскости рисунка. Рассмотрение начнем с левого края рисунка.

Источник  $I$  испускает множество маркированных волн  $|\beta_k\rangle$ . У всех этих волн один и тот же волновой вектор  $\mathbf{k}$ , направленный вдоль оси  $x$ . У каждой волны есть один маркер, расположенный случайным образом. В дальнейшем каждой волне мы будем сопоставлять вектор гильбертова пространства. Поэтому с самого начала мы будем обозначать волны теми же символами, что и соответствующие векторы гильбертова пространства.

Нить  $f$  расщепляет волну на две когерентные части:  $|d_1\rangle$  и  $|d_2\rangle$ , которые, соответственно, пойдут в щели  $d_1$  и  $d_2$ . Электрон (маркер) случайным образом пойдет с одной из частей. При прохождении щелей волновые векторы получают случайные небольшие отклонения по направлению оси  $y$ . Кроме того, теорема Стокса утверждает, что намагниченный стержень влияет на структуру электромагнитного поля. В частности, он влияет на мягкие фотоны, образующие маркированную волну. В результате волны  $|d_1\rangle$  и  $|d_2\rangle$ , оставаясь когерентными, приобретут разность фаз. Это может повлиять на величину отклонений волнового вектора. Благодаря положительному потенциалу на нити  $f$ , после прохождения щелей волны  $|d_1\rangle$  и  $|d_2\rangle$  когерентно складываются. В получившейся волне волновой вектор уже не будет направлен по оси  $x$ . В результате, при попадании мягких фотонов на экран  $O$  они могли бы образовать на нем интерференционную картину. Однако эти фотоны обладают слишком малой энергией, чтобы оставить регистрируемый след.

Вместе с тем в каждой маркированной волне помимо мягких фотонов присутствует один электрон. Этот электрон обладает достаточной энергией, чтобы оставить след на экране в виде точки. В действительности на экран попадет не одиночная маркированная волна, а ансамбль таких волн, в каждой из которых имеется по одному электрону. Эти электроны нарисуют на экране уже видимую интерференционную картину. В силу сказанного в предыдущем разделе эта картина должна быть видимой копией невидимой интерференционной картины, образованной мягкими фотонами одной маркированной волны.

Для электрона намагниченный стержень  $a$  находится в тени нити  $f$ . Поэтому непосредственно электрон со стержнем  $a$  не взаимодействует. С другой стороны, как уже указывалось, всякая волна, в том числе маркированная, является относительно устойчивой конструкцией. Это означает, что между множеством мягких фотонов и электроном, входящими в одну маркированную волну, взаимодействие должно быть существенным. Иными словами, через посредника электрон с магнитным стержнем взаимодействует. Если забыть о посреднике, то это взаимодействие выглядит как нелокальное. Но локальность, как общий принцип теории, не нарушается.

Теперь приступим к математическому расчету интерференционной картины, рисуемой электронами. В свете сказанного выше при этом можно следить не за электронами, а за мягкими фотонами маркированных волн. Ансам-

бли таких волн будем описывать соответствующими векторами гильбертова пространства. В своих расчетах будем ориентироваться на соотношение (3). Начнем с построения подходящего оператора проектирования  $\tilde{p}_{\varphi\eta}$ .

Как уже отмечалось, в алгебраическом подходе необходимо выбрать систему единиц, чтобы все наблюдаемые стали безразмерными. В рассматриваемом случае в качестве единицы длины удобно выбрать ширину каждой из щелей ( $|d_1| = |d_2| = d = 1$ ), а в качестве единицы волнового вектора —  $\omega_k$ .

Щель  $d_1$  отберет в прошедшей через нее волне мягкие фотоны, координата  $y$  которых лежит в интервале  $[r, r + 1]$ , где  $r$  — радиус нити  $f$  в единицах  $d$ . Поэтому состояние этой волны можно описать вектором

$$|d_1\rangle = 1 \text{ при } y \in [r, r + 1] \text{ и } |d_1\rangle = 0 \text{ в противном случае.}$$

Аналогично

$$|d_2\rangle = 1 \text{ при } -y \in [r, r + 1] \text{ и } |d_2\rangle = 0 \text{ в противном случае.}$$

В результате последующего когерентного сложения этих частей состояние волны будет описываться вектором

$$|s\rangle = 2^{(-1/2)}[|d_1\rangle + \exp(i2\pi\alpha)|d_2\rangle].$$

Здесь параметр  $\alpha$  описывает смещение фазы волны  $|d_2\rangle$  относительно фазы волны  $|d_1\rangle$ . Значение этого параметра согласно теореме Стокса определяется магнитным потоком через стержень  $a$ .

Основные споры между сторонниками и противниками эффекта АБ сосредоточились именно вокруг этого параметра. Дело в том, что в теореме Стокса фигурирует не напряженность электромагнитного поля, а векторный потенциал  $\mathbf{A}$ . С другой стороны, значение  $\mathbf{A}$  векторного потенциала не определено однозначно, а зависит от выбранной калибровки. Поэтому, утверждали противники, векторный потенциал не может быть наблюдаемой величиной и не может порождать физически наблюдаемый эффект.

В рамках используемого в данной статье алгебраического подхода такие рассуждения неправомочны, так как требовать определенных значений можно только от тех наблюдаемых, которые стабильны на рассматриваемых элементарных состояниях. Определенность значений не является непременным свойством наблюдаемых. Непременным свойством наблюдаемых является их принадлежность алгебре. Вполне допустимо, что какие-то наблюдаемые не являются стабильными, а их алгебраические комбинации стабильны и имеют определенные значения.

Именно такая ситуация реализуется в эффекте АБ. Вызванное векторным потенциалом изменение фаз каждой из волн  $|d_1\rangle$  и  $|d_2\rangle$  не имеет определенного значения, но разность фаз является стабильной наблюдаемой и имеет



определенное значение. Заметим, что аналогичная ситуация характерна и для классических систем. Скорость какого-то одного классического объекта не имеет определенного значения (зависит от системы координат), а относительная скорость двух объектов имеет определенное значение (является стабильной наблюдаемой).

В формуле (3) оператор проектирования  $\tilde{p}_{\varphi_\eta}$  определяет структуру ансамбля, по которому происходит усреднение наблюдаемой  $\hat{B}$ . Соответственно, в нашем случае в качестве проектора следует взять оператор  $|s\rangle\langle s|$ . В качестве наблюдаемой  $\hat{B}$  возьмем проектор на состояние  $|k_y\rangle$ , в котором проекция волнового вектора на ось  $y$  имеет определенное значение. В координатном представлении это состояние имеет вид  $|k_y\rangle = \exp(iy k_y)$ .

В этих обозначениях формула (3) приобретет вид  $\Psi_{\varphi_\eta}(\hat{B})|s\rangle\langle s| = |s\rangle\langle s| \times |k_y\rangle\langle k_y| |s\rangle\langle s|$ , что равносильно

$$\Psi_{\varphi_\eta}(\hat{B}) = |\langle s|k_y\rangle|^2. \quad (6)$$

Чтобы переписать формулу (6) в безразмерных терминах, нужно в ней сделать замену  $k_y \rightarrow k_y/\omega_k \equiv \theta$ . Физически  $\theta$  характеризует угол рассеяния волны мягких фотонов. Соответственно,  $\Psi_{\varphi_\eta}$  имеет смысл плотности  $\rho(\theta)$  числа мягких фотонов, рассеянных на угол  $\theta$ .

В формуле (6)

$$\langle s|k_y\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_r^{1+r} dy [e^{i\theta y} + e^{-i\theta y} e^{-i2\pi\alpha y}].$$

Вычисляя интеграл, формулу (6) можно переписать в виде

$$\rho(\theta) = \frac{8}{\theta^2} \cos^2 \left( r\theta + \frac{\theta}{2} + \pi\alpha \right) \sin^2 \left( \frac{\theta}{2} \right). \quad (7)$$

В реально проведенном эксперименте  $r \sim 10^{-3}$ . Поэтому можно положить  $r = 0$ . Наиболее яркой частью интерференционной картины является центральная ( $\theta \sim 0$ ). Расположение полос в ней управляется косинусом. Видно, что при изменении магнитного потока (при изменении  $\alpha$ ) интерференционная картина смещается. Именно это смещение и является эффектом АБ.

Непосредственно формула (7) описывает интерференционную картину, которую могли бы нарисовать мягкие фотоны одной когерентной волны. Конечно, энергия этих фотонов слишком мала, чтобы оставить видимый след на регистрирующем экране. Но, как уже отмечалось, при падении на экран большого количества маркированных волн маркеры (электроны) статистически воспроизводят видимую копию этой картины.

Было бы поучительно воспроизвести процесс постепенного проявления такой интерференционной картины. Иными словами, использовать источник, который испускает очень небольшое количество электронов в единицу времени, а лучше по одному, и наблюдать, как интерференционная картина постепенно проявляется с увеличением времени экспозиции. Насколько нам известно, с эффектом АБ такой эксперимент еще не проводился. Вместе с тем тот же Тономура [34, 35] наблюдал такое постепенное проявление интерференционной картины при рассеянии электронов в бипризме. Правда, в этом эксперименте не было потока магнитной индукции.

Конечно, наше рассмотрение в полной мере подходит для описания результатов и этого эксперимента. Достаточно в формуле (7) положить  $\alpha = 0$ . Поэтому данная статья находится в резком противоречии с советом замечательного физика Ричарда Фейнмана [36], высказанным по поводу рассеяния электрона на двух щелях:

«Но, мне кажется, я смело могу сказать, что квантовой механики никто не понимает. . . не думайте, что вам действительно необходимо понять ее содержание и построить какую-то мысленную модель. Передохните и попытайтесь просто развлечься.

. . . Если сможете, не мучайте себя вопросом: “Но как же так может быть?”, ибо в противном случае вы зайдете в тупик, из которого еще никто не выбрался. Никто не знает, как же так может быть».

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной статье активно используется представление о маркированных волнах, которые являются некоторым вариантом волн де Бройля – Бома. При этом предлагается модель этих волн в виде физических волн, генерируемых колебаниями наблюдаемых частиц (маркеров), в среде ненаблюдаемых мягких фотонов. Здесь в качестве таких наблюдаемых частиц рассматриваются электроны, но в качестве маркеров могут выступать и достаточно энергичные фотоны. Конечно, непосредственное взаимодействие этих фотонов с мягкими фотонами значительно более слабое, чем взаимодействие электронов. Однако для возникновения когерентности между маркерами и волнами мягких фотонов существенно не непосредственное взаимодействие между ними. Более существенно взаимодействие через граничные условия. Маркеры возбуждают колебания в ограничительных стенках, а эти колебания индуцируют волны в среде мягких фотонов.

Предложенная физическая модель наводит на мысль, что, подобно кваркам, свободные электроны в природе не существуют. Они существуют лишь в составе атомов, молекул, твердых тел и в качестве маркеров в когерентных

волнах мягких фотонов. Эти фотоны не являются виртуальными, они вполне реальны, только имеют очень малую энергию.

Маркированная волна — очень интересный физический объект. С помощью макроскопических приборов такая волна может быть разделена на две когерентные части: с маркером и без маркера. Часть без маркера несет ничтожную энергию, но может содержать существенную информацию. В принципе, это может открыть новые возможности для передачи информации.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Aharonov Y., Bohm D.* Significance of Electromagnetic Potentials in Quantum Theory // *Phys. Rev.* 1959. V. 115. P. 485–491.
2. *Chambers R. G.* Shift of an Electron Interference Pattern by Enclosed Magnetic Flux // *Phys. Rev. Lett.* 1960. V. 5. P. 3.
3. *Osakabe N., Matsuda T., Kawasaki T., Endo J., Tonomura A., Yano S., Yamada H.* Experimental Confirmation of Aharonov–Bohm Effect Using a Toroidal Magnetic Field Confined by a Superconductor // *Phys. Rev. A.* 1986. V. 34. P. 815–822.
4. *Aharonov Y., Cohen E., Rohrlich D.* Nonlocality of the Aharonov–Bohm Effect // *Phys. Rev. A.* 2016. V. 93. P. 42110 (5).
5. *Wheeler J. A.* *Mathematical Foundation of Quantum Theory.* N. Y.: Acad. Press, 1978.
6. *Jacques V., Wu E., Grosshans F., Treussart F., Grangier P., Aspect A., Roch J. F.* Experimental Realization of Wheeler’s Delayed-Choice Gedanken Experiment // *Science.* 2007. V. 315, Iss. 5814. P. 966–968.
7. *Боумейстер Д., Вайнфуртер Х., Цайлингер А.* Протокол квантовой телепортации // *Физика квантовой информации / Под общ. ред. Д. Боумейстера, А. Экерта, А. Цайлингера.* М.: Постмаркет, 2002. С. 76.
8. *Боумейстер Д., Пэн Дж.-В., Вайнфуртер Х., Цайлингер А.* Эксперименты по квантовой телепортации кубитов // *Там же.* С. 95.
9. *Kim Yoon-Ho, Yu R., Kulik S. P., Shin Y.* Delayed Choice Quantum Erasure // *Phys. Rev. Lett.* 2000. V. 84. P. 1–5; arXiv:quant-ph/9903047v1 13 Mar 1999.
10. *Ma X. S., Kofler J., Qarry A., Tetik N., Scheidl T., Ursin R., Ramelow S., Herbst T., Ratschbacher L., Fedrizzi A., Jennew T., Zeller A.* Quantum Erasure with Causally Disconnected Choice // *PNAS.* 2013. V. 110, No. 4. P. 1221–1226.
11. *Славнов Д. А.* О квантовой телепортации // *ТМФ.* 2008. Т. 157, № 1. С. 79–98.
12. *Славнов Д. А.* Проблема локальности в квантовых измерениях // *ЭЧАЯ.* 2010. Т. 41, вып. 1. С. 149–173.
13. *Славнов Д. А.* Корпускулярно-волновой дуализм // *ЭЧАЯ.* 2015. Т. 46, вып. 4. С. 1199–1225.
14. *Славнов Д. А.* Квантовый ластик и проблема локальности // *ЭЧАЯ.* 2017. Т. 48, вып. 4. С. 503–528.

15. *Araki H.* On the Algebra of All Local Observables // *Progr. Theor. Phys.* 1964. V. 32, No. 5. P. 844–854.
16. *Naag R., Kastler D.* An Algebraic Approach to Quantum Field Theory // *J. Math. Phys.* 1964. V. 5, No. 7. P. 848–861.
17. *Эмх Ж.* Алгебраический подход в статистической механике и квантовой теории поля. М.: Мир, 1976.
18. *Хоружий С. С.* Введение в алгебраическую квантовую теорию поля. М.: Наука, 1986.
19. *Боголюбов Н. Н., Логунов А. А., Оксак А. И., Тодоров И. Т.* Общие принципы квантовой теории поля. М.: Наука, 1987.
20. *Браттели У., Робинсон Д.* Операторные алгебры и квантовая статистическая механика. М.: Мир, 1982.
21. *Сигал И.* Математические проблемы релятивистской физики. М.: Мир, 1968.
22. *Диксмье Ж.*  $C^*$ -алгебры и их представления. М.: Наука, 1974.
23. *Славнов Д. А.* Измерения и математический аппарат квантовой физики // *ЭЧАЯ.* 2007. Т. 38, вып. 2. С. 295–359.
24. *Колмогоров А. Н.* Основные понятия теории вероятностей. М.: Наука, 1974.
25. *Неве Ж.* Математические основы теории вероятностей. М.: Мир, 1969.
26. *Bell J. S.* On the Einstein–Podolsky–Rosen Paradox // *Speakable and Unsayable in Quantum Mechanics: Collected Papers on Quantum Philosophy.* Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1993. P. 139.
27. *Славнов Д. А.* О возможности согласования квантовой механики с классической теорией вероятностей // *ТМФ.* 2006. Т. 149, вып. 3. С. 457–472.
28. *Наймарк М. А.* Нормированные кольца. М.: Наука, 1968.
29. *Фейнберг Е. Л.* Об «особой роли» электромагнитных потенциалов в квантовой механике // *УФН.* 1962. Т. 78, вып. 1. С. 53–64.
30. *Пескин М., Шредер Д.* Введение в квантовую теорию поля. Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2001.
31. *де Бройль Л.* Революция в физике. М.: Атомиздат, 1965.
32. *Glauber R. J.* The Quantum Theory of Optical Coherence // *Phys. Rev.* 1963. V. 130. P. 2529–2539.
33. *Glauber R. J.* Coherent and Incoherent States of the Radiation Field // *Phys. Rev.* 1963. V. 131. P. 2766–2788.
34. *Tomomura A., Endo J., Matsuda T., Kawasaki T.* Demonstration of Single-Electron Buildup of an Interference Pattern // *Am. J. Phys.* 1989. V. 57. P. 117–120.
35. *Tomomura A.* Direct Observation of Thitherto Unobservable Quantum Phenomena by Using Electrons // *PNAS.* 2005. V. 102, No. 42. P. 14952–14959.
36. *Фейнман Р.* Характер физических законов. М.: Мир, 1968.