

# ЭФФЕКТЫ НЕУСТОЙЧИВОСТИ В $F(R)$ -МОДИФИЦИРОВАННОЙ ГРАВИТАЦИИ И ПРИ ГРАВИТАЦИОННОМ БАРИОГЕНЕЗИСЕ

*Е. В. Арбузова*<sup>1, 2, \*</sup>, *А. Д. Долгов*<sup>2, 3, \*\*</sup>

<sup>1</sup> Государственный университет «Дубна», Дубна, Россия

<sup>2</sup> Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия

<sup>3</sup> Институт теоретической и экспериментальной физики, Москва

ВВЕДЕНИЕ	1116
Ускоренное расширение Вселенной: история открытия и наблюдаемые проявления	1116
Стандартная космологическая модель	1118
ОТО и уравнения Эйнштейна	1121
Основные уравнения космологии и космологические параметры	1124
Механизмы возникновения космологического ускорения	1127
Барионная асимметрия Вселенной	1132
Структура обзора	1134
НЕУСТОЙЧИВОСТЬ И ОСЦИЛЛЯЦИИ КРИВИЗНЫ В $F(R)$ -МОДЕЛЯХ	1136
Неустойчивость кривизны в системах с растущей плотностью энергии	1136
Осцилляции кривизны в $F(R)$ -моделях модифицированной гравитации	1143
Рождение частиц осциллирующей кривизной	1150
КОСМОЛОГИЧЕСКАЯ ЭВОЛЮЦИЯ В $R^2$ -ТЕОРИИ	1154
Эволюция Вселенной от инфляционной космологии до космологии Фридмана	1154
Поправки к классической космологии на стадии доминирования излучения	1178

---

\*E-mail: arbusova@uni-dubna.ru

\*\*E-mail: dolgov@fe.infn.it

ДЖИНСОВСКАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ И АНТИГРАВИТАЦИЯ В $F(R)$ -ТЕОРИЯХ	1196
Сферически-симметричные решения в $F(R)$ -гравитации и гравитационное отталкивание	1197
Эволюция возмущений плотности в ньютоновской гравитации и в ОТО	1204
Возмущения плотности в модифицированной гравитации	1212
ПРОБЛЕМЫ СПОНТАННОГО И ГРАВИТАЦИОННОГО БАРИОСИНТЕЗА	1237
Спонтанный бариосинтез	1237
Неустойчивость гравитационного бариосинтеза со скалярами	1266
Неустойчивость гравитационного бариосинтеза с фермионами	1274
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	1281
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	1282

# ЭФФЕКТЫ НЕУСТОЙЧИВОСТИ В $F(R)$ -МОДИФИЦИРОВАННОЙ ГРАВИТАЦИИ И ПРИ ГРАВИТАЦИОННОМ БАРИОГЕНЕЗИСЕ

*Е. В. Арбузова*<sup>1, 2, \*</sup>, *А. Д. Долгов*<sup>2, 3, \*\*</sup>

<sup>1</sup> Государственный университет «Дубна», Дубна, Россия

<sup>2</sup> Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия

<sup>3</sup> Институт теоретической и экспериментальной физики, Москва

Обзор посвящен развитию и последующему применению методов исследования устойчивости решений дифференциальных уравнений высших порядков, возникающих в различных моделях модифицированной гравитации и бариосинтеза. Основное внимание уделяется  $F(R)$ -модифицированным теориям, предложенным для описания ускоренного расширения Вселенной, а также генерации барионной асимметрии в рамках спонтанного и гравитационного бариогенезиса.

The review is devoted to development and subsequent application of methods for studying stability of solutions of higher-order differential equations arising in various models of modified gravity and baryogenesis. The major attention is paid to  $F(R)$ -modified theories proposed to describe the accelerated expansion of the universe and to baryon asymmetry generation in the frameworks of spontaneous and gravitational baryogenesises.

PACS: 04.20.Dw; 04.40.-b; 04.50.Kd; 98.80.-k

## ВВЕДЕНИЕ

**В.1. Ускоренное расширение Вселенной: история открытия и наблюдаемые проявления.** В течение последних двух десятилетий было надежно установлено, что космологическое расширение Вселенной происходит с ускорением, как будто гравитация на космологических больших расстояниях меняет свой знак, и сила гравитационного притяжения превращается в силу отталкивания. Имеется большое количество независимых данных, основанных на совершенно различных космологических и астрофизических явлениях, подтверждающих, что скорость расширения Вселенной начала расти

---

\*E-mail: arbusova@uni-dubna.ru

\*\*E-mail: dolgov@fe.infn.it

со временем в относительно недавнюю космологическую эпоху, на красных смещениях порядка единицы ( $z_{\text{acc}} \approx 0,65$ ).

Среди наблюдательных данных, доказывающих существование ускоренного космологического расширения, наиболее впечатляющими являются непосредственные измерения ускорения по уменьшению яркости удаленных сверхновых типа Ia, проводившиеся в 1998 г. Имеются убедительные аргументы в пользу того, что эти сверхновые представляют собой так называемые «стандартные свечи», т. е. источники с известной светимостью. Зарегистрированный от этих сверхновых поток излучения оказался меньше ожидаемого. То, что сверхновые оказались более тусклыми, чем предполагалось, означает, что они находились на расстояниях больших, чем могли бы быть при нормальном замедленном расширении. Естественным выводом из этого наблюдения является то, что Вселенная расширяется быстрее, чем ожидалось. За обнаружение этого потрясающего эффекта Сол Перлмуттер, Брайан Шмидт и Адам Рисс получили в 2011 г. Нобелевскую премию по физике [1–5].

В пользу ускоренного космологического расширения Вселенной говорят не только данные, полученные при измерении светимости сверхновых, но и другие независимые астрономические наблюдения. Сюда относится проблема возраста Вселенной, возникшая в 1980-х гг. Вычисленный по известным в то время значениям космологических параметров возраст Вселенной [6–8] оказывался значительно меньше, чем возраст старых звезд и звездных скоплений [9–11].

Положение первого пика в спектре угловых флуктуаций микроволнового фона [12, 13] указывало, что геометрия Вселенной очень близка к плоской, евклидовой. Для реализации этого, как показывают приведенные ниже космологические уравнения, плотность вещества во Вселенной должна быть достаточно велика, т. е. близка к критической плотности (см. ниже). Однако непосредственные измерения плотности вещества [14, 15] приводят к втрое меньшему значению, что означает наличие какой-то новой формы материи во Вселенной.

Анализ крупномасштабной структуры Вселенной (см., например, обзоры [16, 17]) также свидетельствует о том, что кроме вещества, создающего обычное гравитационное притяжение, должна существовать некоторая неизвестная субстанция, называемая темной энергией, проявляющая антигравитирующие свойства. Она подавляет образование космических структур на очень больших масштабах, а также влияет на форму спектра угловых флуктуаций космического микроволнового фона.

Выводы о наличии во Вселенной необычной формы материи/энергии были сделаны в рамках теории гравитации Эйнштейна — общей теории относительности (ОТО). Альтернативное объяснение этих множественных астрономических наблюдений может быть получено на основе модификации ОТО на космологически больших расстояниях. Оба подхода объясняют ускорен-

ное расширение Вселенной, так как приводят к эффективной замене гравитационного притяжения на гравитационное отталкивание на космологических масштабах. Различие между ними состоит в том, что темная энергия является источником антигравитации, тогда как модификация гравитации приводит к изменению знака гравитационной силы даже при отсутствии материи.

**В.2. Стандартная космологическая модель.** Стандартная космологическая модель в настоящее время является наилучшей теорией для описания Вселенной. Она основана на двух фундаментальных ингредиентах: Стандартной модели физики частиц, используемой для описания свойств материи, заполняющей наш мир, и общей теории относительности, описывающей гравитационное взаимодействие. Она также требует предположения об инфляции, которая является элегантным механизмом для решения ряда проблем исходного доинфляционного сценария. Стандартная космологическая модель детально описана в книгах [18–22].

Из уравнений Фридмана (см. ниже) следует так называемая *модель Большого взрыва* Вселенной [23, 24]. В этой картине Вселенная начала расширяться из бесконечно плотной первичной плазмы. Время  $t = 0$  есть момент Большого взрыва, который, однако, должен интерпретироваться с осторожностью, поскольку уравнения Фридмана предсказывают пространственно-временную сингулярность с бесконечной плотностью энергии материи. В силу этой патологии уравнения Фридмана, и вообще классическая ОТО, неприменимы вблизи сингулярности. Как полагают, неизвестные пока эффекты квантовой гравитации могут устранить это патологическое поведение.

Перечислим основные события в истории Вселенной, от сингулярности Большого взрыва до настоящего времени [25–29]. Физика при энергиях выше нескольких тераэлектронвольт неизвестна, так что наши представления об очень ранних этапах истории мира при температурах, превосходящих эти значения, основываются на более или менее правдоподобных рассуждениях и зависят от конкретных моделей. Более того, в настоящее время у нас нет наблюдаемых указаний о состоянии Вселенной на очень ранних стадиях, предшествующих первичному нуклеосинтезу (важным исключением является спектр возмущений первичной плотности, сформированный задолго до первичного нуклеосинтеза, предположительно, во время инфляции и сразу после нее), и хотя, согласно электрослабой теории и квантовой хромодинамике (КХД), в ранней Вселенной должны происходить фазовые переходы с изменением состояния системы, нет прямых доказательств, что Вселенная действительно находилась при необходимых для этого плотностях и температурах.

Когда и как зародилась Вселенная и что было в самом начале в доинфляционный период, неизвестно. Фактически вся информация об этом периоде оказалась стертой после достаточно длительного периода инфляции, т. е. экспоненциального расширения Вселенной. Предположение об инфляции было

выдвинуто в 1979 г. Казанасом [30] и Старобинским [31–33], и в более полной форме Гутом [34] в 1980 г. Однако конкретный механизм инфляции, предложенный Гутом, был нереалистичным. Этот недостаток был исправлен Линде [35,36] в 1982 г. и, независимо, Альбрехтом и Стейнхардтом [37], которые предложили так называемую новую инфляционную модель и ввели динамическое инфлатонное поле, вызывающее экспоненциальное расширение Вселенной. Механизм генерации возмущений плотности на инфляционной стадии был указан Мухановым и Чибисовым [38]. Подробное описание инфляционной модели содержится в книгах [39–43]. Недавний обзор различных сценариев инфляции и возможных альтернатив приведен в работе [44].

В настоящее время парадигма инфляции все еще находится на уровне гипотезы. Однако из известных моделей только модель инфляционного расширения способна естественным образом одновременно разрешить проблему горизонта (однородность Вселенной), проблему кривизны (близость значения плотности материи к критическому), проблему энтропии и проблему генерации первичных неоднородностей во Вселенной. Предсказываемые инфляционными сценариями  $\Omega_{\text{tot}} = 1$ , почти плоский спектр первичных возмущений, гауссова статистика последних замечательно согласуются с наблюдениями. Безусловным доказательством справедливости инфляционной космологии было бы наблюдение реликтовых гравитационных волн [31,45].

Окончание инфляции сопровождалось разогревом Вселенной, т. е. распадом инфлатона и рождением большого количества элементарных частиц [46–54]. За этим последовал бариосинтез, т. е. возникновение барионной асимметрии (ненулевого барионного заряда) Вселенной.

Вследствие огромных концентраций частиц на ранних стадиях существования Вселенной число взаимодействий в единицу времени было настолько выше темпа расширения, что Вселенная с очень хорошей точностью находилась в состоянии термодинамического равновесия.

Адиабатическое охлаждение Вселенной сопровождалось фазовыми переходами. Считается, что по мере понижения температуры была такая последовательность фазовых переходов:

- 1) фазовый переход в рамках гипотезы Великого объединения при температуре  $T \sim 10^{16}$  ГэВ, если столь высокие температуры достигались на ранней космологической стадии;
- 2) фазовый переход электрослабого сектора при  $T \sim 200$  ГэВ, реализовавший спонтанное нарушение электрослабой симметрии;
- 3) фазовый переход в квантовой хромодинамике при рекомбинации кварк-глюонной плазмы в адроны ( $T \sim 200$  МэВ).

Последующие этапы космологической эволюции известны практически достоверно. Перечислим их в порядке следования.

1. Отщепление нейтрино от электромагнитной компоненты плазмы при температуре  $T \sim 1$  МэВ.

2. Нуклеосинтез при  $T \sim 1-0,07$  МэВ.

3. Начало образования структур при наступлении эпохи доминантности нерелятивистской материи над релятивистской. Зная их вклады в общую плотность энергии, можно оценить, что переход от релятивистского режима расширения к нерелятивистскому произошел при красном смещении  $z_{\text{eq}} \sim 10^4$ , т. е. при температуре  $T \sim 1$  эВ.

4. Рекомбинация водорода:  $z \sim 0,3 \cdot 10^3$ ,  $T \approx 10^3$  К.

5. Реионизация ( $z \sim 10$ ,  $T \sim 50-15$  К) и образование космических структур ( $T \sim 15-3$  К).

5. Переход от замедляющейся Вселенной к ускоряющейся:  $z = 0,6-0,7$ ,  $T \approx 4$  К.

7. Современный этап, возраст Вселенной  $t_U \approx 13,8$  млрд лет.

Стандартная космологическая модель успешно объясняет огромное количество наблюдательных данных, включающих, в числе самых замечательных, закон Хаббла, первичные обилия легких элементов и свойства космического микроволнового фона. Однако, будучи основанной на Стандартной модели физики частиц и общей теории относительности, Стандартная космологическая модель встречается с рядом проблем. Некоторые из них могут быть решены с помощью механизма инфляции, физика которой не укладывается в рамки Стандартной модели физики частиц и ОТО. Более того, несмотря на то, что инфляционный сценарий обычно считают наилучшим кандидатом для решения проблем космологической модели, он не является единственным и все еще находится на уровне предположения, поскольку пока нет наблюдательных данных, которые твердо исключали бы альтернативные сценарии.

И это еще не все. Стандартная модель физики частиц и ОТО не могут объяснить множество фактов, что, в свою очередь, настоятельно требует поисков новой физики. В окрестности нашей Галактики, очевидно, преобладает материя: антивещества вокруг нас очень немного. Когда и как была создана асимметрия между материей и антиматерией? Минимальная стандартная модель физики частиц не дает ответа на этот вопрос, но разумные расширения Стандартной модели могли бы успешно решить проблему.

Другой фундаментальный открытый вопрос связан с происхождением и природой темной материи. Гипотеза о наличии космологической темной материи была выдвинута Цвикки в тридцатые годы прошлого столетия [55, 56], и вскоре были получены указания на существование невидимого вещества в Туманности Андромеды [57]. На многие годы эта проблема была забыта, и к ней вернулись после работ 1974 г. [58–60], в которых были приведены новые астрономические данные в пользу существования темной материи. Современное состояние физики и поиска темной материи содержится в недавних обзорах [61–65].

Из данных по первичному нуклеосинтезу и угловым флуктуациям микроволнового фона известно, что только около 5% от общего количества

энергии во Вселенной составляет обычная материя, в основном, протоны и нейтроны (последние связаны в атомных ядрах). Кроме того, ряд прямых астрономических наблюдений, например, ротационных кривых близлежащих галактик также позволяет заключить, что полное количество гравитирующей материи значительно выше этих 5% и составляет около 30% общей плотности энергии во Вселенной. Анализ космического микроволнового фона приводит к такому же результату.

В настоящее время неизвестно, что представляют собой 25% гравитирующей материи, которую называют темной материей. В Минимальной стандартной модели физики частиц нет подходящих кандидатов на эту роль. Таким образом, необходима новая физика, и, действительно, в теориях вне рамок Минимальной стандартной модели имеются потенциально интересные варианты, например, некие слабо взаимодействующие частицы или первичные черные дыры.

Наконец, из изучения темпа космологического расширения можно заключить, что сейчас Вселенная находится на стадии ускоренного расширения. Если основываться на уравнениях Фридмана, это явление можно объяснить тем, что около 70% энергии во Вселенной находится в довольно экзотическом состоянии. Эта компонента называется темной энергией, но в действительности мы не знаем, происходит ли она из сектора материи, т.е. из физики вне Стандартной модели элементарных частиц или из гравитации, а именно, из нарушения общей теории относительности Эйнштейна на больших масштабах. Ускоренное расширение Вселенной, подтвержденное астрономическими наблюдениями, является сегодня одной из главных мотиваций для поисков новой физики вне стандартных теоретических рамок.

**В.3. ОТО и уравнения Эйнштейна.** Общая теория относительности используется для описания гравитационного взаимодействия. Она является одной из составляющих Стандартной космологической модели. ОТО успешно выдержала многочисленные проверки, главным образом в гравитационном поле Земли, Солнечной системе и при изучении орбитального движения двойных пульсаров [66]. Наблюдаемое сегодня ускоренное расширение Вселенной ставит под сомнение справедливость ОТО на очень больших масштабах, впрочем, в настоящее время это явление можно объяснить и в рамках ОТО с помощью малой положительной космологической постоянной. Недавняя регистрация гравитационных волн на детекторах LIGO и Virgo позволила проверить общую теорию относительности впервые для сильных полей [67, 68].

Основная идея общей теории относительности состоит в том, что гравитация может быть интерпретирована как деформация геометрии пространства-времени, которое больше не является плоским. Кинематика, т.е. то, как частицы движутся в пространстве-времени, определяется уравнениями геодезической линии, решение которых является относительно простой задачей. Динамика, т.е. то, как энергия искривляет пространство-время, описывается



уравнениями Эйнштейна, представляющими собой нелинейные дифференциальные уравнения второго порядка в частных производных для метрических коэффициентов. Решение таких уравнений, как правило, является весьма нетривиальной проблемой. Аналитические решения можно найти только в специальных случаях, когда пространство-время обладает некоторыми «хорошими» симметриями.

Представление о том, что геометрия является физической величиной, свойства которой должны определяться экспериментально, имеет долгую историю и, вероятно, впервые было четко сформулировано Иоганном Карлом Фридрихом Гауссом. В своем письме к Ольберсу он писал: «... но теперь геометрия должна стоять не рядом с арифметикой, которая чисто априорна, но с механикой» («... but for now geometry must stand, not with arithmetic which is pure a priori, but with mechanics», Gauss to Olbers. V. VIII. P. 177 [69]).

Релятивистское геометрическое описание гравитационного взаимодействия было предложено Альбертом Эйнштейном, который опубликовал свою статью «Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie» об основах общей теории относительности в 1916 г. [70], а ранее, в ноябре 1915 г., представил несколько докладов на эту тему на заседаниях Королевской академии наук Пруссии [71, 72]. В том же 1915 г. Давид Гильберт нашел действие, из которого уравнения Эйнштейна могут быть выведены с помощью принципа наименьшего действия [73]:

$$S_{\text{EH}} = -\frac{1}{16\pi G_N} \int d^4x \sqrt{-g} R + S_m = -\frac{M_{\text{Pl}}^2}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} R + S_m, \quad (\text{B.1})$$

где  $S_m$  — действие материи в гравитационном поле;  $g$  — определитель метрического тензора  $g_{\mu\nu}$  при выборе сигнатуры метрики  $(+, -, -, -)$ . В дальнейшем мы будем использовать естественную систему единиц, в которой скорость света, приведенная постоянная Планка и постоянная Больцмана равны единице:  $c = \hbar = k_B = 1$ . В этой системе единиц гравитационная постоянная  $G_N = 1/M_{\text{Pl}}^2$ , где постоянная  $M_{\text{Pl}} = 1,22 \cdot 10^{19}$  ГэВ носит название массы Планка.

Пространственно-временной интервал записывается обычным образом:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (\text{B.2})$$

В ОТО метрический тензор  $g_{\mu\nu}(x, t)$  является основной динамической величиной, описывающей гравитационное поле (см., например, [74]).

Действие для вещества в гравитационном поле,  $S_m$ , получается из действия в плоском пространстве-времени путем замены обычных производных, применяемых к полям материи, на ковариантные:  $\partial_\mu \rightarrow D_\mu$ . Причина возникновения ковариантных производных чисто геометрическая. Вариация скалярной функции есть просто изменение значения функции при переходе от

точки к точке. Для векторных или тензорных функций к этому добавляется еще изменение проекций компонент функции на криволинейные координатные оси. Очевидно, что для скалярного поля ковариантная производная равна обычной. Для векторного поля ковариантная производная выражается через символы Кристоффеля  $\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}$  как

$$D_{\mu}V_{\nu} = \partial_{\mu}V_{\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}V_{\alpha}, \quad (\text{B.3})$$

где

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}(g_{\mu\beta,\nu} + g_{\nu\beta,\mu} - g_{\mu\nu,\beta}). \quad (\text{B.4})$$

Тензор кривизны  $R_{\mu\nu}$ , называемый также тензором Риччи, записывается в виде

$$R_{\mu\nu} = \partial_{\alpha}\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} - \partial_{\mu}\Gamma_{\nu\alpha}^{\alpha} + \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}\Gamma_{\beta\alpha}^{\beta} - \Gamma_{\mu\beta}^{\alpha}\Gamma_{\nu\alpha}^{\beta}, \quad (\text{B.5})$$

а скаляр кривизны  $R$  получается из выражения (B.5) в результате свертки по индексам  $\mu$  и  $\nu$ :

$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}, \quad (\text{B.6})$$

где  $g^{\mu\nu}$  есть обратный метрический тензор,  $g^{\mu\alpha}g_{\nu\alpha} = \delta_{\nu}^{\mu}$ , где  $\delta_{\nu}^{\mu}$  есть символ Кронекера.

Как видно из уравнений (B.5) и (B.6), тензор Риччи и скаляр кривизны являются функциями метрики,  $g_{\mu\nu}$ , а также ее первой и второй производных. Поэтому естественно ожидать, что уравнения движения, полученные из принципа наименьшего действия, будут иметь третий порядок, что может привести к патологической теории. К счастью, это не так, поскольку действие линейно по  $R$ , и члены с высшими производными, проинтегрированные по частям, не будут влиять на уравнения движения.

Вычисляя функциональную производную действия (B.1) и используя принцип наименьшего действия, мы приходим к уравнениям Эйнштейна:

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi}{M_{\text{Pl}}^2}T_{\mu\nu}. \quad (\text{B.7})$$

Здесь  $T_{\mu\nu}$  — тензор энергии-импульса материи, а тензор  $G_{\mu\nu}$  носит название тензора Эйнштейна. Тензор Эйнштейна ковариантно сохраняется:

$$D_{\mu}G_{\nu}^{\mu} \equiv 0. \quad (\text{B.8})$$

Этот закон сохранения является тождеством (называемым тождеством Бьянки) и автоматически выполняется в метрической теории. Закон сохранения (B.8) требует ковариантного сохранения тензора энергии-импульса материи:

$$D_{\mu}T_{\nu}^{\mu} = 0, \quad (\text{B.9})$$

иначе теория не будет самосогласованной. Если действие материи инвариантно по отношению к преобразованиям координат, то сохранение  $T_{\mu\nu}$  обеспечивается теоремой Нётер.

В модифицированной гравитации линейное по  $R$  действие ОТО заменяется на более сложное:  $R \rightarrow R + F(R)$ . В зависимости от формы функции  $F(R)$  модификация может быть существенной при больших или малых значениях кривизны. В первом случае это изменило бы космологию ранней Вселенной, в то время как во втором случае функция  $F(R)$  вводится для создания наблюдаемого ускоренного космологического расширения в современную эпоху. Вместо уравнений Эйнштейна в модифицированных теориях гравитации возникают дифференциальные уравнения более высоких порядков. Такие гравитационные уравнения могут приводить к различным интересным явлениям, исследованию которых и посвящен данный обзор.

#### В.4. Основные уравнения космологии и космологические параметры.

Космологическая эволюция полностью определяется масштабным фактором  $a(t)$ , в терминах которого квадрат четырехмерного интервала в однородном и изотропном пространстве записывается в виде

$$ds_{\text{FLRW}}^2 = dt^2 - a^2(t) \left( \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right), \quad (\text{B.10})$$

где радиальная координата нормируется так, что постоянная  $k$  принимает значения  $\pm 1$  или  $0$ .  $k = 0$  соответствует плоской Вселенной,  $k = +1$  отвечает замкнутой Вселенной, и, наконец, открытая Вселенная описывается отрицательным  $k = -1$ . Метрика, соответствующая интервалу (B.10), называется метрикой Фридмана–Леметра–Робертсона–Уокера (FLRW) [75–80].

Темп расширения Вселенной характеризуется параметром Хаббла  $H(t)$ :

$$H(t) = \frac{\dot{a}}{a}. \quad (\text{B.11})$$

Космология однородной и изотропной Вселенной полностью определяется уравнениями Фридмана [75] и уравнением состояния вещества. Первое уравнение Фридмана имеет вид

$$H^2 = \frac{8\pi\rho G_N}{3} - \frac{k}{a^2}, \quad (\text{B.12})$$

где  $\rho = \rho(t)$  — плотность энергии материи, а  $G_N$  — гравитационная постоянная.

Космологическое ускорение определяется вторым уравнением Фридмана:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G_N}{3} (\rho + 3P), \quad (\text{B.13})$$

где  $P$  — давление вещества.

Из уравнений (B.12) и (B.13) следует закон эволюции плотности энергии:

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + P) = 0. \quad (\text{B.14})$$

Чтобы получить замкнутую систему уравнений для трех неизвестных функций  $a(t)$ ,  $\rho(t)$  и  $P(t)$ , уравнения Фридмана нужно дополнить уравнением состояния вещества  $P = P(\rho)$ . Во многих практически интересных случаях предполагается линейная зависимость

$$P = w\rho. \quad (\text{B.15})$$

Параметр  $w$  принимает различные значения для разных форм материи. Для релятивистского вещества  $w = 1/3$ , для нерелятивистского  $w = 0$ , для вакуумоподобного состояния материи  $w = -1$ . Однако для других форм вещества  $w$  может не являться постоянной и, более того, зависимость между плотностью энергии и давлением может стать нелинейной.

Полагая, что уравнение состояния имеет вид (B.15), закон эволюции плотности энергии (B.14) запишем как

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -3(1+w)\frac{\dot{a}}{a}, \quad (\text{B.16})$$

и, следовательно,

$$\rho \sim a^{-3(1+w)}. \quad (\text{B.17})$$

Плотность энергии, таким образом, падает как  $1/a^3$  для нерелятивистского вещества, как  $1/a^4$  для релятивистского и остается постоянной в случае вакуумной энергии. Если пренебречь фактором  $k/a^2$  в первом уравнении Фридмана, то получим (при  $w \neq -1$ ):

$$a(t) \sim t^\alpha, \quad \text{где } \alpha = \frac{2}{3(1+w)}. \quad (\text{B.18})$$

Отсюда следуют законы расширения Вселенной для разных форм материи. На нерелятивистской стадии, или на стадии доминантности вещества:

$$a_{\text{nonrel}}(t) \sim t^{2/3}, \quad (\text{B.19})$$

на релятивистской, или на радиационно-доминированной стадии:

$$a_{\text{rel}}(t) \sim t^{1/2}. \quad (\text{B.20})$$

Третий тип режима расширения, который, как принято считать, был реализован в ранней Вселенной, а также наблюдается сейчас, называется вакуумоподобным режимом, при котором  $P \approx -\rho$ . В этом случае плотность

энергии остается постоянной или медленно изменяется со временем, что соответствует почти постоянному параметру Хаббла, и эволюция масштабного фактора происходит экспоненциально:

$$a_{\text{vac}} \sim \exp(H_{\text{vac}} t). \quad (\text{B.21})$$

Обычно при описании космологической истории используют не время, а красное смещение, а именно, отношение современного значения масштабного фактора к масштабному фактору, взятому в произвольный момент времени, обычно в прошлом:

$$z = \frac{a(t_0)}{a(t)} - 1. \quad (\text{B.22})$$

При этом  $z = 0$  отвечает настоящему времени, а более ранние моменты соответствуют все большим значениям  $z$ .

Плотности энергии нерелятивистского и релятивистского вещества, выраженные через красное смещение, будут, соответственно, пропорциональны

$$\rho_{\text{nonrel}} \sim (z + 1)^3, \quad \rho_{\text{rel}} \sim (z + 1)^4. \quad (\text{B.23})$$

Плотность вакуумоподобной (темной) энергии остается приблизительно постоянной:

$$\rho_{\text{DE}} \approx \text{const}. \quad (\text{B.24})$$

В пространственно-плоской Вселенной, т. е. при  $k = 0$  в уравнении (B.12), плотность энергии равна так называемой критической плотности:

$$\rho_c = \frac{3H^2 M_{\text{Pl}}^2}{8\pi}. \quad (\text{B.25})$$

Плотности энергии различных форм материи  $\rho_j$  обычно описываются безразмерным параметром

$$\Omega_j = \rho_j / \rho_c. \quad (\text{B.26})$$

Для плоской Вселенной  $\Omega_{\text{tot}} = \sum_j \Omega_j = 1$ .

Современное значение параметра Хаббла называется постоянной Хаббла и обычно обозначается  $H_0$ . Для постоянной Хаббла принято использовать выражение

$$H_0 = 100h_0 \text{ км}/(\text{с} \cdot \text{Мпк}), \quad (\text{B.27})$$

где  $h_0$  — безразмерный параметр. Согласно современным данным  $h_0 \approx 0,7$  (см., например, [13, 81–83]). Однако существует небольшое, но статистически значимое различие между результатами измерения параметра Хаббла

различными способами. Анализ флуктуаций микроволнового фона, проведенный на аппаратах WMAP [12] и Planck [13], дает  $h_0 = 0,674 \pm 0,005$ . С другой стороны, определение  $h_0$  традиционными астрономическими способами [82, 84, 85] приводит к  $h_0 = 0,73-0,74$ . Возможным объяснением этого разногласия было бы существование неустойчивых, но долгоживущих частиц темной материи [86].

Современное значение критической плотности энергии равно

$$\rho_c^0 = \frac{3H_0^2 M_{\text{Pl}}^2}{8\pi} = 1,878 \cdot 10^{-29} h_0^2 \text{ г/см}^3 = 1,054 \cdot 10^{-5} h_0^2 \text{ ГэВ/см}^3. \quad (\text{B.28})$$

Относительная плотность энергии обычного барионного вещества  $\Omega_B \approx 0,05$ . Плотность энергии невидимой материи (темной материи), проявляющейся лишь своим гравитационным притяжением, составляет  $\Omega_{\text{DM}} \approx 0,25$ . Темная материя состоит, по-видимому, из слабо взаимодействующих массивных элементарных частиц, либо из черных дыр или слабо светящихся звезд. Оставшийся вклад приписывают антигравитирующей темной энергии,  $\Omega_{\text{DE}} \approx 0,7$ , выглядящей как равномерно распределенная субстанция с необычным уравнением состояния  $P = w\rho$ , где  $w \approx -1$ . Эта компонента может быть ответственна за современное ускоренное расширение Вселенной, однако к эквивалентным эффектам приводит и модификация гравитации.

## **В.5. Механизмы возникновения космологического ускорения.**

**В.5.1. Темная энергия.** Одним из наиболее популярных механизмов, объясняющих возникновение космологического ускорения, является гипотеза о существовании антигравитирующей субстанции, называемой темной энергией и имеющей отрицательное давление.

Отметим, что антигравитирующее расширение не противоречит общей теории относительности. Из второго уравнения Фридмана (B.13)

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G_N}{3}(\rho + 3P)$$

следует, что гравитирует не только плотность энергии, но и давление. В случае отрицательного давления космологическое ускорение станет положительным, если  $P < -\rho/3$ . Очевидно, что при отрицательной плотности энергии антигравитация, вызывающая ускоренное расширение, также возникнет, но теории с  $\rho < 0$  являются патологическими и обычно не рассматриваются.

Следует подчеркнуть, что антигравитация в ОТО возможна только для бесконечно больших объектов. Любой объект конечного размера с положительной плотностью энергии может создавать только гравитационное притяжение, что, по существу, является хорошо известной в ОТО теоремой Джебсена–Биркгофа [87–89]. Однако, как будет показано в разд.3, в инфракрасно модифицированной гравитации эта теорема несправедлива, и конечные объекты могут вызывать гравитационное отталкивание.

Как было отмечено выше, одной из форм темной энергии может являться вакуумная энергия (или, что то же самое, космологическая постоянная или  $\Lambda$ -член) с  $P = -\rho$ . Гипотеза о вакуумной энергии не исключена, но выглядит крайне неестественной. Дело в том, что разумные оценки вакуумной энергии приводят к ее величине на 50–100 порядков выше наблюдаемого значения  $\rho_{\text{vac}} \sim 10^{-47} \text{ ГэВ}^4$ . Вакуумные энергии квантовых полей имеют бесконечно большую величину, причем разного знака для бозонов и фермионов. Это обстоятельство, впервые отмеченное Паули [90] (см. также [91]) и независимо Зельдовичем [92], позволяет компенсировать бесконечный вклад вакуумных флуктуаций в теории с равным числом бозонных и фермионных полей с одинаковыми массами. Кроме того, при расширении и охлаждении Вселенной происходил ряд фазовых переходов, при которых скачки вакуумной энергии составляли от  $10^{60} \text{ ГэВ}^4$  (теории Великого объединения) до  $0,1 \text{ ГэВ}^4$  (квантовая хромодинамика). Обзор этих проблем содержится в [93]. Наиболее впечатляющим является тот факт, что вакуумная энергия конденсатов глюонных и кварковых полей отлична от нуля и почти на 50 порядков превышает допустимое в космологии значение [94].

Другая форма темной энергии может быть представлена скалярным полем  $\phi$  с каноническим кинетическим членом и очень маленькой массой или, более точно, с очень медленно меняющимся потенциалом  $U(\phi)$  [95–98]. В простейшем случае квазиэкспоненциальное космологическое расширение может вызываться вещественным скалярным полем с действием

$$S[\phi] = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - U(\phi) \right]. \quad (\text{B.29})$$

В однородном пределе, когда поле  $\phi$  не зависит от пространственных координат,  $\phi = \phi(t)$ , его уравнение движения в фоновой FLRW-метрике (B.10) сводится к виду

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + U'(\phi) = 0. \quad (\text{B.30})$$

Это уравнение эквивалентно уравнению движения точечного тела в ньютоновской механике с потенциалом  $U(\phi)$  и слагаемым  $3H\dot{\phi}$ , описывающим жидкое трение. Если параметр Хаббла велик, то ньютоновским «ускорением»  $\ddot{\phi}$  можно пренебречь, и уравнение (B.30) сводится к уравнению первого порядка

$$\dot{\phi} = -\frac{U'(\phi)}{3H}. \quad (\text{B.31})$$

Это так называемый режим медленного скатывания. Если вклад медленно меняющегося поля  $\phi$  доминирует в космологической плотности энергии, то  $\rho_\phi \approx U(\phi)/2$  и, в соответствии с уравнением (B.12), параметр Хаббла  $H^2 =$

$4\pi U/3M_{\text{Pl}}^2$ . Отметим, что для медленно меняющегося  $\phi$  вакуумоподобное условие  $P = -\rho$  приближенно выполняется, что ведет к ускоренному квазиэкспоненциальному расширению.

**В.5.2. Модифицированная гравитация.** Альтернативным механизмом для создания и описания ускоренного расширения Вселенной служит модификация гравитации на больших масштабах. В обычное действие общей теории относительности, линейное по скаляру кривизны  $R$ , вводится дополнительный нелинейный член, так что лагранжиан принимает вид  $\mathcal{L} \rightarrow R + F(R)$ . В принципе возможно рассмотрение сложных скаляров, таких как квадраты тензоров Риччи или Римана,  $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$ ,  $R_{\mu\nu\alpha\beta}R^{\mu\nu\alpha\beta}$ , или даже более сложных инвариантов [99–102]. Однако возникающие в таких теориях уравнения движения, вследствие нелинейности лагранжиана, имеют порядок выше второго, что может приводить к решениям, содержащим тахионы или духи, или к неустойчивым и сингулярным решениям. Теории, действие которых зависит только от функции скаляра кривизны,  $F(R)$ , могут быть свободны от подобных патологий, поскольку они эквивалентны добавлению скалярной степени свободы в обычную ОТО со скалярным полем, удовлетворяющим уравнению второго порядка. По этой причине модификация гравитации на больших масштабах, в основном, ограничивается  $F(R)$ -версиями, хотя условия стабильности и/или отсутствия сингулярностей накладывают определенные ограничения на вид функции  $F(R)$ .

Радиационные поправки к ОТО приводят к появлению высоких степеней  $R$  в эффективном действии,  $R^n$ , а также инвариантных комбинаций тензоров кривизны, например, степеней  $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$ . Это справедливо в пределе малой кривизны  $R \ll m$ , где  $m$  — масса виртуальных частиц в петлевых диаграммах. В противоположном пределе эффективное действие можно разложить по обратным степеням  $R$ , детали можно найти в книге [103]. В работе [104] была рассмотрена модель со степенными поправками к действию Эйнштейна вида  $F(R) = c_1 R^2 + R^3/m_3^2$ . Если параметр  $m_3$  порядка массы нейтрино,  $m_3 \sim m_\nu$ , такая модель описывает темную энергию с плотностью энергии порядка  $m_\nu^4$ , что довольно близко к наблюдаемой величине. Наблюдательные ограничения на  $R^n$ -теории были представлены в работе [105].

Вскоре после открытия ускоренного расширения Вселенной  $F(R)$ -теории приобрели заметную популярность. В таких моделях в обычное действие Эйнштейна–Гильберта добавляют нелинейную функцию скаляра кривизны,  $F(R)$ :

$$S = \frac{M_{\text{Pl}}^2}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} [R + F(R)] + S_m, \quad (\text{B.32})$$

где  $S_m$  — действие материи. Функция  $F(R)$  выбирается таким образом, что модифицированные гравитационные уравнения движения, заменяющие обычные уравнения Эйнштейна, имеют ускоренное деситтеровское решение с по-



стоянной кривизной  $R$  даже в отсутствие вещества. Выбор  $F(R)$  неединствен, и в литературе рассматриваются различные возможности.

Уравнения движения в теории (В.32) имеют вид

$$(1 + F'_R) R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} (R + F) g_{\mu\nu} + (g_{\mu\nu} D_\alpha D^\alpha - D_\mu D_\nu) F'_R = \frac{8\pi T_{\mu\nu}^{(m)}}{M_{\text{Pl}}^2}, \quad (\text{В.33})$$

где  $F'_R = dF/dR$ ,  $D_\mu$  — ковариантная производная и  $T_{\mu\nu}^{(m)}$  — тензор энергии-импульса вещества. Взятие следа по индексам  $\mu$  и  $\nu$  в (В.33) приводит к уравнению, содержащему только скаляр кривизны  $R$  и след тензора энергии-импульса вещества:

$$3D^2 F'_R - R + R F'_R - 2F = \frac{8\pi}{M_{\text{Pl}}^2} T_\mu^{\mu(m)}, \quad (\text{В.34})$$

где  $D^2 = D_\alpha D^\alpha$  — ковариантный оператор Д'Аламбера. Нередко бывает достаточным рассмотрение лишь уравнения (В.34).

Уравнения второго порядка для метрики возникают только в классической теории Эйнштейна, где действие линейно по  $R$ . Нелинейная функция  $F(R)$  приводит к уравнениям движения более высокого порядка. Такие уравнения могут вызывать последствия, нежелательные для теории: появление духов, тахионов, сингулярное поведение решений, неустойчивость и т. д., поэтому при формулировке теории нужно учитывать опасность возникновения таких проблем.

В пионерских работах С. Капоззиелло и др. [106–108], Ш. Кэррола и др. [109, 110], где модификации гравитации были предложены для описания ускоренного расширения Вселенной, функция  $F(R)$  была выбрана в сингулярном по  $R$  виде:

$$F(R) = -\frac{\mu^4}{R}. \quad (\text{В.35})$$

Постоянный параметр  $\mu$  с размерностью массы был введен для описания наблюдаемого космологического ускорения:  $\mu^2 \sim R_c \sim 1/t_U^2$ , где  $R_c$  — средняя кривизна Вселенной в настоящее время,  $t_U = 4 \cdot 10^{17}$  с — возраст Вселенной.

Однако, как было показано А. Д. Долговым и М. Кавасаки [111], такой выбор  $F(R)$  приводит к экспоненциальной неустойчивости в присутствии вещества и обычное гравитационное взаимодействие оказывается при этом сильно искаженным. Модифицированные уравнения движения содержат малый коэффициент  $\mu^4$  при члене с высшей производной, что приводит к экспоненциальному росту малых флуктуаций с характерным временем развития неустойчивости

$$\tau = \frac{\sqrt{6}\mu^2}{T^{3/2}} \sim 10^{-26} \text{ с } (\rho_m / [\text{г}/\text{см}^3])^{-3/2}, \quad (\text{В.36})$$

где  $T = 8\pi T_{\mu}^{\mu}/M_{\text{Pl}}^2 \sim (10^3 \text{ с})^{-2}(\rho_m/[\text{г/см}^3])$ ,  $\rho_m$  — плотность массы небесного тела.

Для решения проблемы подобной неустойчивости были предложены дальнейшие модификации гравитации, анализ которых можно найти в обзоре [112], где приведены условия, которым должна удовлетворять функция  $F(R)$ , чтобы избежать патологий и обеспечить устойчивость космологических решений в будущем, а также классическую и квантовую устойчивость (гравитационное притяжение и отсутствие духов). Определенный класс моделей, приводящих к ускоренному космологическому расширению и свободных от перечисленных выше проблем, рассмотрен в работах [113–115], некоторые другие формы модификации гравитации можно найти в обзоре [116]. Различные функции, представленные в работах [113–115], имеют вид

$$F_{HS}(R) = -\frac{R_{\text{vac}}}{2} \frac{c \left( \frac{R}{R_{\text{vac}}} \right)^{2n}}{1 + c \left( \frac{R}{R_{\text{vac}}} \right)^{2n}}, \quad (\text{B.37})$$

$$F_{AB}(R) = \frac{\epsilon}{2} \log \left[ \frac{\cosh \left( \frac{R}{\epsilon} - b \right)}{\cosh b} \right] - \frac{R}{2}, \quad (\text{B.38})$$

$$F_S(R) = \lambda R_0 \left[ \left( 1 + \frac{R^2}{R_0^2} \right)^{-n} - 1 \right]. \quad (\text{B.39})$$

Эти функции, хотя и записаны в разных формах, имеют общие свойства и приводят к схожим последствиям. Однако, несмотря на значительное улучшение, все еще остаются серьезные проблемы. Прежде всего, все эти модели обладают так называемой сингулярностью в прошлом: на космологическом фоне с падающей плотностью энергии система эволюционирует из сингулярного состояния с бесконечным скаляром кривизны  $R$  [117]. Иными словами, если мы движемся из нормального космологического состояния вспять по времени, мы попадаем в сингулярное состояние с бесконечной кривизной, в то время как плотность энергии остается конечной. Более того, как показано в работах [118–122], если плотность массы/энергии растет, система приходит в сингулярное состояние в будущем.

От этих сингулярностей можно избавиться, если добавить в действие  $R^2$ -член. Такой вклад естественным образом возникает как результат квантовых поправок от петель материи в искривленном пространстве-времени [31–33].  $R^2$ -член мог также доминировать в ранней Вселенной, где приводил бы к сильному рождению частиц. Этот процесс изучался много лет назад в работах [33, 123–125]. На эту проблему было вновь обращено недавно [126–128]

внимание, стимулированное интересом к возможным эффектам дополнительных ультрафиолетовых членов,  $\sim R^2$ , в инфракрасно модифицированных  $F(R)$ -теориях гравитации. Недавние обзоры по  $F(R)$ -теориям представлены в работах [129, 130].

В обзоре исследуется модель, предложенная А. А. Старобинским [115]:

$$F(R) = \lambda R_0 \left[ \left( 1 + \frac{R^2}{R_0^2} \right)^{-n} - 1 \right] - \frac{R^2}{6m^2}, \quad (\text{B.40})$$

в которой последний член добавлен для предотвращения космологической сингулярности в прошлом, а также будущей сингулярности в системах с растущей плотностью массы/энергии. В работах [121, 131–134] было показано, что в системах с растущей плотностью массы/энергии возникают высокочастотные осцилляции кривизны с большой амплитудой. Эти осцилляции приводят к рождению элементарных частиц, которые могут наблюдаться в спектре космических лучей высоких энергий. На фоне этих осциллирующих решений становится возможным гравитационное отталкивание между объектами конечного размера [135]. Такое отталкивание могло бы являться источником возникновения наблюдаемых космических пустот.

В модифицированных теориях гравитации формирование крупномасштабной структуры Вселенной может заметно отличаться от того, что происходит в рамках ОТО. Эти вопросы, в частности, рассматривались в наших работах [136–139].

**В.6. Барионная асимметрия Вселенной.** Очевидно, что вокруг нас во Вселенной преобладает материя. Небольшое количество антиматерии возникает в результате рождения античастиц космическими лучами высоких энергий. Наличие больших областей со значительным содержанием антиматерии в нашей окрестности Вселенной порождало бы электромагнитное излучение, возникающее при аннигиляции материи и антиматерии, которое не наблюдается. Поиск электромагнитного излучения с энергией порядка 100 МэВ от  $p\bar{p}$ -аннигиляции и линии 0,511 МэВ от  $e^+e^-$ -аннигиляции позволяет заключить, что доля антиматерии в галактиках составляет не более чем  $10^{-6}$  от полного количества вещества в них. Отсутствие интенсивного гамма-излучения приводит к выводу, что ближайшая антигалактика не может быть ближе, чем на расстоянии в 10 Мпк [140]. Массовая доля антивещества в двух сталкивающихся галактиках в скоплении Пуля (Bullet cluster) не может быть больше чем  $10^{-6}$  [141]. Что касается нашей Галактики, то доля антизвезд в радиусе 150 пк от Солнца не превышает  $4 \cdot 10^{-5}$  [142]. Однако, как показано в работах [143–145], эти ограничения справедливы, если антизвезды тождественны по своим свойствам обычным звездам. Доля компактных антизвезд может быть существенно выше, на уровне нескольких процентов.

С другой стороны, материя и антиматерия имеют схожие свойства, и, таким образом, было бы естественно ожидать Вселенную, симметричную относительно содержащихся в ней материи и антиматерии. Если мы верим в предположение об инфляции, начальная асимметрия не может помочь, поскольку при сохранении барионного числа плотность энергии, ассоциированная с барионным числом, не позволила бы инфляции продолжаться более чем 5–6 хаббловских времен,  $t_H = 1/H_I$ , где  $H_I$  — параметр Хаббла во время инфляции [146], в то время как для успешной инфляции необходимо не менее 60–70 хаббловских времен. Удовлетворительная модель нашей Вселенной должна объяснять происхождение асимметрии между материей и антиматерией.

Термин «бариосинтез» используется для обозначения генерации асимметрии между барионами (в основном, протонами и нейтронами) и антибарионами (антипротонами и антинейтронами). В 1967 г. А. Д. Сахаров указал на три условия, сегодня известные как принципы Сахарова [147], нужные для создания асимметрии между материей и антиматерией из начально симметричной Вселенной, а именно:

- 1) несохранение барионного числа;
- 2) нарушение  $C$ - и  $CP$ -инвариантности;
- 3) отклонение от теплового равновесия.

Фактически ни одно из этих условий не является строго необходимым, но модели бариосинтеза без них требуют некоторых громоздких или экзотических механизмов. Минимальная стандартная модель физики частиц потенциально содержит все эти ингредиенты. Однако оказывается, что невозможно создать наблюдаемую асимметрию между материей и антиматерией в рамках этой модели, так как значения параметров Стандартной модели приводят к слишком низкой величине барионной асимметрии Вселенной. Это является явным указанием на физику вне Минимальной стандартной модели. К сожалению, нет однозначных указаний на энергетическую шкалу этой новой физики. На сегодняшний день предложены различные сценарии, способные объяснить асимметрию между материей и антиматерией вокруг нас. Однако обычно эти сценарии требуют слишком высоких энергий, недоступных современным ускорителям.

Перечислим основные модели бариосинтеза.

1. Бариосинтез за счет распадов тяжелых частиц (Сахаров [147], 1967).
2. Бариосинтез при испарении черных дыр (Хокинг [148], 1974; Зельдович [149], 1976; Долгов [150, 151], 1980).
3. Электрослабый бариосинтез (Кузьмин и др. [152], 1985).
4. Бариосинтез при распаде суперсимметричного конденсата скалярных барионов (Аффлек и Дайн [153], 1985).
5. Бариогенезис, индуцированный лептогенезисом (Фукугита и Янагита [154], 1986).

6. Спонтанный бариосинтез (Коэн и Каплан [155, 156], 1987, 1988).
7. Гравитационный бариосинтез (Давудиасл и др. [157], 2004).
8. Бариосинтез вследствие нарушения СРТ (Долгов [158], 2010).

Во всех этих сценариях требуется введение физики вне рамок Стандартной модели физики частиц. Детальное рассмотрение перечисленных моделей можно найти в обзорах [146, 159–161].

В обзоре исследуются некоторые характерные черты и кинетика спонтанного бариосинтеза [162], в частности, связь между производной по времени (псевдо)голдстоуновского поля и химическим потенциалом. Нами показано, что это соотношение существенно зависит от представления, выбранного для фермионных полей с ненулевым барионным числом (кварков). Вычисление космологической барионной асимметрии проведено на основе кинетического уравнения, обобщенного на случай нестационарного фона, с учетом конечного интегрирования по времени. Показано, что все эти эффекты ведут к заметному отклонению величины барионной асимметрии от канонических результатов.

В моделях гравитационного бариогенезиса [157] сценарий спонтанного бариосинтеза модифицируется путем добавления в действие связи барионного тока с производной скаляра кривизны. Теории гравитационного бариосинтеза обладают теми же интересными и привлекательными свойствами, что и теория спонтанного бариосинтеза, в частности, генерация барионной асимметрии в этих теориях может протекать в тепловом равновесии без необходимости явного нарушения  $C$  и  $CP$  в физике частиц. Однако введение производной скаляра кривизны в лагранжиан теории приводит к гравитационным уравнениям высокого порядка, являющимся сильно неустойчивыми. Эффекты этой неустойчивости могут коренным образом изменить не только обычную космологическую историю, но также и стандартную ньютоновскую гравитационную динамику. Нами обнаружена такая неустойчивость для скалярных барионов [163], а также найден подобный эффект для более реалистичных барионов со спином  $1/2$  (кварков) [164].

**В.7. Структура обзора.** Установление механизма, вызывающего космологическое ускорение, является в настоящее время одной из центральных проблем современной космологии и фундаментальной физики. Исследования в этой области ведутся по двум основным направлениям. Одним из них является построение модели так называемой темной энергии, вызывающей гравитационное отталкивание. Альтернативой гипотезе о существовании темной энергии является модификация гравитации на космологически больших масштабах, приводящая к ускоренному расширению Вселенной. В обзоре изучаются возможные наблюдаемые следствия ряда теорий модифицированной гравитации. Представленные в обзоре результаты позволяют найти ограничения на параметры моделей и, соответственно, подтвердить или опровергнуть справедливость подхода.

Другим актуальным направлением исследований в современной космологии является решение проблемы преобладания вещества над антивеществом во Вселенной. В литературе описано большое количество механизмов генерации барионной асимметрии, однако остается неизвестным, какой из них действительно реализуется во Вселенной. В обзоре исследована модификация гравитации при гравитационном бариогенезисе и показано, что возникающие поправки к гравитационному взаимодействию приводят к нереалистичной космологии, что исключает этот сценарий.

Рассмотренные в обзоре проблемы принадлежат к центральным проблемам мировых исследований по фундаментальной физике. Особый интерес к ним связан с тем, что их решение наверняка требует выхода за рамки известных физических представлений и потому может привести к новым научным открытиям, важность которых на современном этапе развития трудно переоценить. Работа в этих направлениях, активно ведущаяся во всех мировых научных центрах, позволяет надеяться на заметный прогресс в обозримое время.

Основной целью обзора является развитие и последующее применение методов исследования устойчивости решений дифференциальных уравнений высших порядков, возникающих в различных моделях модифицированной гравитации и бариосинтеза. Основное внимание уделяется  $F(R)$ -модифицированным теориям, предложенным для описания ускоренного расширения Вселенной, а также генерации барионной асимметрии в рамках спонтанного и гравитационного бариогенезиса.

Методологической основой исследования является системный подход к изучению проблем устойчивости, возникающих при модификациях гравитации в теориях, предложенных для объяснения космологического ускорения, а также генерации барионной асимметрии Вселенной.

Основными методами, применяемыми в обзоре, являются методы исследования устойчивости решений дифференциальных уравнений высших порядков с малыми коэффициентами при старших производных. Помимо этого, при проведении теоретических построений и последующем их применении к анализу космологических процессов и феноменологии взаимодействий частиц использовались стандартные хорошо известные методы классической и квантовой теории поля. Для проведения численных расчетов применялся стандартный пакет «Mathematica».

Обзор состоит из введения, четырех разделов, заключения и списка литературы.

Во введении дана краткая история открытия и наблюдаемые проявления ускоренного расширения Вселенной, излагаются основные положения Стандартной космологической модели и общей теории относительности, рассматриваются возможные механизмы возникновения космологического ускорения и барионной асимметрии Вселенной. Представлены история вопросов и обзор литературы в данной области исследований.

В разд. 1 рассматриваются возможные наблюдаемые проявления некоторых моделей модифицированной гравитации, предложенных для объяснения ускоренного расширения Вселенной, в системах с зависящей от времени плотностью массы/энергии. В  $F(R)$ -модифицированных моделях с  $R^2$ -членом, добавленным для предотвращения космологической сингулярности, вычисляется вероятность рождения элементарных частиц за счет высокочастотных осцилляций кривизны с большой амплитудой, возникающих в сжимающихся системах.

В разд. 2 исследуется отклонение космологической эволюции Вселенной в  $(R + R^2)$ -теории от стандартной космологии, начиная от эпохи инфляции до настоящего времени, с учетом гравитационного рождения частиц осциллирующей кривизной. Выводится интегродифференциальное уравнение, описывающее эффекты рождения частиц для случая произвольной функции  $R(t)$ .

Разд. 3 обзора посвящен получению и анализу сферически-симметричных решений в  $F(R)$ -теориях в астрономических системах с растущей плотностью энергии. Для таких систем проводится расчет гравитационной неустойчивости в классической теории Джинса и общей теории относительности, а также изучается эволюция возмущений метрики и плотности в  $F(R)$ -модифицированной гравитации. Описываются новые типы гравитационной неустойчивости на фоне быстро осциллирующей кривизны, связанные с высоким порядком дифференциальных уравнений, определяющих эволюцию возмущений [135–139].

В разд. 4 обзора проводится анализ кинетики спонтанного бариосинтеза и вычисление космологической барионной асимметрии на основе кинетического уравнения, обобщенного на случай нестационарного фона, с учетом конечных пределов интегрирования по времени. Исследуется устойчивость модифицированных уравнений движения в моделях гравитационного бариосинтеза, в которых генерация барионной асимметрии происходит за счет взаимодействия барионного тока с производной скаляра кривизны.

В заключении изложены основные итоги исследования, приведены рекомендации и перспективы дальнейшей разработки темы.

## 1. НЕУСТОЙЧИВОСТЬ И ОСЦИЛЛЯЦИИ КРИВИЗНЫ В $F(R)$ -МОДЕЛЯХ

**1.1. Неустойчивость кривизны в системах с растущей плотностью энергии.** В данном подразделе рассматриваются возможные наблюдаемые проявления некоторых моделей модифицированной гравитации, предложенных для объяснения ускоренного расширения Вселенной, в системах с зависящей от времени плотностью массы/энергии. Нами показано [121], что при возрастании плотности массы/энергии со временем система эволюционирует в син-

гулярное состояние с бесконечной кривизной. При этом характерное время развития неустойчивости оказывается значительно меньше космологического времени.

Рассмотрим модель с действием из п. В.5.2:

$$S = \frac{M_{\text{Pl}}^2}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} [R + F(R)] + S_m, \quad (1.1)$$

в котором нелинейная функция  $F(R)$  выбрана в виде, предложенном А. А. Старобинским [115]:

$$F(R) = \lambda R_c \left[ \left( 1 + \frac{R^2}{R_c^2} \right)^{-n} - 1 \right]. \quad (1.2)$$

Здесь  $n$  — целое положительное число;  $R_c$  — постоянная с размерностью скаляра кривизны. Для создания ускоренного расширения Вселенной постоянная  $\lambda$  должна быть положительной. Предполагается, что  $|R_c|$  является величиной порядка  $8\pi\rho_c/M_{\text{Pl}}^2$ , где  $\rho_c$  — значение полной космологической плотности энергии в настоящее время, т. е.  $R_c \simeq 1/t_U^2$ , а  $t_U \approx 4 \cdot 10^{17}$  с — возраст Вселенной.

Космология с гравитационным действием (1.2), а также некоторые другие космологические сценарии с модифицированной гравитацией критически проанализированы в работе [112]. Там было показано, что взятые буквально эти модели сталкиваются с некоторыми серьезными проблемами. Хотя неустойчивость Долгова–Кавасаки [111] была ликвидирована, все еще остались другие типы сингулярного поведения. В частности, существует сингулярность в прошлом, при которой скаляр кривизны  $R$  обращается в бесконечность в некоторый конечный момент времени в прошлом. Эта проблема может быть устранена добавлением к действию  $R^2$ -члена с достаточно малым коэффициентом, разрешенным современными наблюдательными данными.

Неустойчивость, аналогичная той, которая рассмотрена в нашей работе [121], была впервые отмечена в статье [117] в случае космологической эволюции назад в прошлое. В некотором смысле сингулярность в будущем может быть получена из сингулярности в прошлом обращением времени. Математически обе эти особенности очень похожи, несмотря на некоторую разницу, обусловленную эффектами сжатия Вселенной при движении назад во времени. Хаббловское антифриение благоприятствует развитию неустойчивости в сжимающейся Вселенной. Однако, несмотря на математическую схожесть, между этими двумя системами имеется существенное различие. Согласно работе [117], сингулярности можно избежать, выбирая определенный диапазон начальных условий. В рассмотренных нами системах с растущей плотностью энергии сингулярность возникает в будущем при любых начальных условиях.



В работах [118–120] утверждалось, что неустойчивость с бесконечным скаляром кривизны,  $R$ , может возникнуть в будущем, если начальные условия для  $R$  не будут подобраны специальным образом. Это похоже на космологическую ситуацию, описанную в [117]. Системы, рассмотренные в цитируемых работах, отличаются от той, что обсуждается в обзоре, и сингулярности в них можно избежать определенным выбором начальных условий, в то время как в нашем случае сингулярность возникает для любого начального состояния. Все отмеченные неустойчивости можно исключить, добавляя в действие слагаемое, пропорциональное  $R^2$ , и далее мы рассмотрим эффекты влияния такого дополнительного члена.

В данном подразделе рассмотрена физическая ситуация, отличающаяся от тех, что исследовались в отмеченных выше работах. А именно, мы изучили поведение астрономических объектов с растущей со временем плотностью массы и показали, что скаляр кривизны,  $R$ , достигает бесконечно больших значений в течение времени, являющегося малым по сравнению с космологическим масштабом времени. Эту неустойчивость не удастся исключить специальным подбором начальных условий.

Мы изучаем объекты с плотностью массы, значительно превосходящей космологическую,  $\rho_m \gg \rho_c$ . Современная космологическая плотность энергии  $\rho_c \approx 10^{-29}$  г/см<sup>3</sup>, в то время как плотность массы, скажем, пылевого облака в галактике может быть порядка  $\rho_m \sim 10^{-24}$  г/см<sup>3</sup>. Так как для нерелятивистской системы величина скаляра кривизны пропорциональна плотности массы, получаем  $R \gg R_c$ . В этом пределе справедливо приближение

$$F(R) \approx -\lambda R_c \left[ 1 - \left( \frac{R_c}{R} \right)^{2n} \right]. \quad (1.3)$$

Уравнение движения для скаляра кривизны имеет вид (B.34)

$$3D^2 F'_R - R + R F'_R - 2F = \tilde{T}, \quad (1.4)$$

где  $\tilde{T} = 8\pi T_\mu^{\mu(m)}/M_{\text{Pl}}^2$ , а  $T_\mu^{\mu(m)}$  — след тензора энергии-импульса материи.

В качестве начального рассмотрим состояние, в котором модифицированная гравитация вокруг или внутри некоторых массивных объектов не сильно отличается от обычной эйнштейновской (ньютоновской) гравитации и, соответственно,  $R \approx -\tilde{T}$ , как следует из обычных уравнений Эйнштейна.

Проанализируем временную эволюцию решений уравнения (1.4) для гравитационного поля массивного объекта, плотность которого меняется со временем. Предположим, что гравитационное поле такого объекта мало, как это обычно бывает. Соответственно, фоновую метрику можно считать приближенно плоской, и ковариантные производные можно заменить на обычные производные в плоском пространстве. Следовательно:

$$D^2 F' = (\partial_t^2 - \Delta) F' = F'''(\partial_t^2 - \Delta) R + F''''[(\dot{R})^2 - (\nabla R)^2], \quad (1.5)$$

где штрих подразумевает производную по  $R$ ,  $\Delta$  — обычный лапласиан, а  $\nabla$  — градиент.

Подставляя выражение (1.3) для  $F(R)$  при больших  $R$  в уравнение (1.4), получим

$$(\partial_t^2 - \Delta)R - (2n + 2) \frac{\dot{R}^2 - (\nabla R)^2}{R} + \frac{R^2}{3n(2n + 1)} \left( \frac{R^{2n}}{R_c^{2n}} - (n + 1) \right) - \frac{R^{2n+2}}{6n(2n + 1)\lambda R_c^{2n+1}} (R + \tilde{T}) = 0. \quad (1.6)$$

Из-за наличия нелинейных членов, содержащих производные, данное уравнение трудно анализировать, поэтому вместо него рассмотрим уравнение для  $F'(R)$  и выразим  $R$  через  $F'$ , используя соотношение

$$F' = -2n\lambda \left( \frac{R_c}{R} \right)^{2n+1}. \quad (1.7)$$

Отметим, что бесконечному  $R$  соответствует  $F' = 0$ , и если производная  $F'$  обращается в нуль, это означает, что скаляр кривизны  $R$  становится бесконечно большим.

Введем новую функцию  $w = -F'$ . Уравнение (1.6) в терминах  $w$  имеет простой вид и описывает негармонический осциллятор:

$$(\partial_t^2 - \Delta)w + U'(w) = 0. \quad (1.8)$$

Потенциал  $U(w)$  равен:

$$U(w) = \frac{1}{3} (\tilde{T} - 2\lambda R_c) w + \frac{R_c}{3} \left[ \frac{q^\nu}{2n\nu} w^{2n\nu} + \left( q^\nu + \frac{2\lambda}{q^{2n\nu}} \right) \frac{w^{1+2n\nu}}{1 + 2n\nu} \right], \quad (1.9)$$

где  $\nu = 1/(2n + 1)$ ,  $q = 2n\lambda$ , и в уравнении (1.8)  $U'(w) = dU/dw$ . Напомним, что  $\tilde{T} \gg R_c$ . Их отношение порядка  $\tilde{T}/R_c \sim \rho_m/\rho_c \gg 1$  и, следовательно,  $w \ll 1$ . Таким образом, в квадратных скобках в уравнении (1.9) доминирует первое слагаемое. Потенциал  $U$  будет зависеть от времени, если плотность массы рассматриваемого объекта меняется со временем,  $\tilde{T} = \tilde{T}(t)$ .

Если в уравнениях (1.8), (1.9) оставить только доминирующие слагаемые и пренебречь пространственными производными, уравнение (1.8) сведется к простому виду

$$\ddot{w} + \frac{\dot{\tilde{T}}}{3} - \frac{q^\nu(-R_c)}{3w^\nu} = 0. \quad (1.10)$$

Удобно ввести безразмерные величины

$$t = \gamma\tau, \quad w = \beta\zeta, \quad (1.11)$$

где  $\beta$  и  $\gamma$  выбраны таким образом (см. ниже), что уравнение для  $\zeta$  становится особенно простым:

$$\zeta'' - \zeta^{-\nu} + (1 + \kappa\tau) = 0. \quad (1.12)$$

Здесь штрих обозначает дифференцирование по  $\tau$  и след тензора энергии-импульса параметризован следующим образом:

$$\tilde{T}(\tau) = \tilde{T}_0(1 + \kappa\tau). \quad (1.13)$$

Постоянные  $\gamma$  и  $\beta$  даются выражениями

$$\gamma^2 = \frac{3q}{(-R_c)} \left( -\frac{R_c}{\tilde{T}_0} \right)^{2(n+1)}, \quad (1.14)$$

$$\beta = \frac{\gamma^2 \tilde{T}_0}{3} = q \left( -\frac{R_c}{\tilde{T}_0} \right)^{2n+1}. \quad (1.15)$$

Таким образом,  $\beta$  является малым безразмерным параметром, а  $\gamma$  имеет размерность времени. Существенно, что  $\gamma$ , определяющее характерный масштаб времени, может быть значительно меньше, чем возраст Вселенной,  $t_U$ , благодаря наличию малого фактора  $(R_c/\tilde{T}_0)^{n+1}$ . Полагая, что  $3q \sim 1$  и  $R_c \sim 1/t_U^2$ , найдем для  $n = 2$  и  $\rho_m = 10^{-24}$  г/см<sup>3</sup>:  $\gamma \approx 400$  с. Чем больше будет  $n$  или  $\rho_m$ , тем меньше значение  $\gamma$ . Например, если  $n = 3$ , для той же плотности  $\rho_m$  находим  $\gamma = 0,004$  с.

В случае постоянного  $\tilde{T}$  ( $\kappa = 0$ ) или медленно меняющегося  $\tilde{T}$  ( $\kappa \ll 1$ ) решение уравнения (1.12) очевидно. Если начальные значения  $\zeta(0)$  и  $\zeta'(0)$  достаточно малы,  $\zeta(\tau)$  осциллирует вокруг минимума потенциала, расположенного в точке

$$\zeta_{\min} = (1 + \kappa\tau)^{-1/\nu}. \quad (1.16)$$

Если по какой-то причине величина  $\zeta(0)$  примет достаточно большое значение,  $\zeta > (1 - \nu)^{1/\nu}$ , такое, что потенциал

$$U(\zeta) = \zeta - \zeta^{1-\nu}/(1-\nu) \quad (1.17)$$

станет положительным, то, очевидно, в какой-то момент  $\zeta(\tau)$  «перепрыгнет» потенциал, равный нулю при  $\zeta = 0$  («волны с перехлестом»). Другими словами,  $\zeta(\tau)$  достигнет нуля, что соответствует бесконечному скаляру кривизны  $R$ , и неустойчивость может развиться за конечное время. Аналогичная ситуация может реализоваться, если начальная скорость  $\zeta'(0)$  окажется достаточно большой.

Сингулярность также достижима за конечное время, даже если первоначально  $\zeta$  находилась в минимуме потенциала и начальная скорость была

равна нулю. Это будет иметь место при положительных  $\kappa$ , т.е. если плотность энергии растет со временем. Движение минимума потенциала,  $\zeta_{\min}$ , к нулю и одновременное уменьшение глубины потенциальной ямы облегчают приближение к нулю функции  $\zeta(\tau)$ .

Мы решили уравнение (1.12) численно и обнаружили, что, действительно, для растущего  $\tilde{T}(\tau)$  сингулярность  $R \rightarrow \infty$  достигается за конечное время при достаточно общих условиях. Решение для  $n = 3$ ,  $\kappa = 0,01$ , и  $\rho_m/\rho_c = 10^5$  представлено на рис. 1, где на рис. *a* приведено отношение  $\zeta/\zeta_{\min}$ , а на рис. *б* показаны функции  $\zeta$  и  $\zeta_{\min}$  по отдельности.

На рис. 2 изображен график для безразмерного скаляра кривизны  $R/R_{\text{in}}$ , отвечающего функции  $\zeta(\tau)$ , при тех же условиях, что и на рис. 1. Точка, в которой функция  $\zeta(\tau)$  обращается в нуль, соответствует сингулярности с бесконечным  $R$ . Графики, приведенные на рис. 1 и 2, получены при начальных условиях  $\zeta_0 = \zeta(0) = 1$  (т.е.  $R = R_{\text{GR}}$ , где  $R_{\text{GR}}$  — значение скаляра кривизны в ОТО) и  $\zeta'_0 = \zeta'(0) = 0$ . Однако развитие неустойчивости происходит независимо от начальных условий. Строгий выбор начальных условий обсуждается в нашей работе [134].

В терминах физического времени,  $t$ , эволюцию плотности энергии можно представить как  $T(t) = T_0(1 + t/t_{\text{ch}})$ , где  $t_{\text{ch}}$  есть характерное время сжатия.

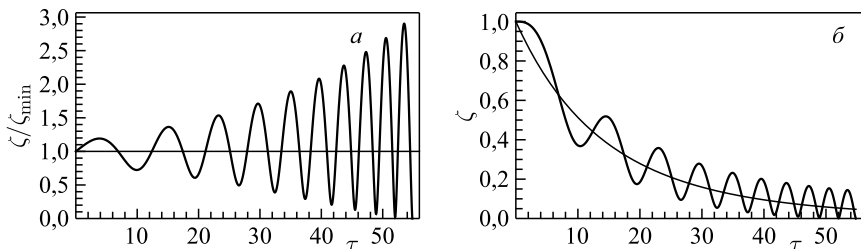


Рис. 1. *a*) Отношение  $\zeta/\zeta_{\min}$ ; *б*) функции  $\zeta$  (осциллирующая) и  $\zeta_{\min}$  (гладкая) в зависимости от времени  $\tau$  при  $n = 3$ ,  $\kappa = 0,01$ ,  $\rho_m/\rho_c = 10^5$

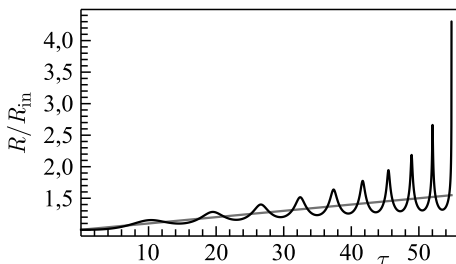


Рис. 2. Безразмерный скаляр кривизны  $R/R_{\text{in}}$  при  $n = 3$ ,  $\kappa = 0,01$ ,  $\rho_m/\rho_c = 10^5$

Коэффициент  $\kappa$  в уравнении (1.13) выражается через  $t_{\text{ch}}$  как

$$\kappa = \frac{\gamma}{t_{\text{ch}}}. \quad (1.18)$$

Для  $\kappa = 0,01$ ,  $n = 2$ ,  $\rho_m/\rho_c = 10^5$  находим  $t_{\text{ch}} = 4 \cdot 10^4$  с, в то время как представленному на рис. 1 и 2 случаю с  $n = 3$  соответствует  $t_{\text{ch}} = 0,4$  с.

Характерное время вариации плотности можно оценить как  $t_{\text{ch}} \sim d/v$ , где  $d$  — это размер системы, а  $v$  — скорость составляющих частиц в процессе коллапса облака или при столкновении облаков. В первом случае скорость будет довольно низкой и ожидаемое характерное время окажется близким к ньютоновскому времени свободного падения, но в случае сталкивающихся облаков скорости обычно галактические, около 300 км/с. Скорость может быть еще больше при столкновении выброса сверхновой с галактическими или межгалактическими облаками.

Можно действовать и по-другому, а именно, оценить  $\kappa$ , зная размер  $d$  объекта с изменяющейся массой или размеры сталкивающихся объектов:

$$\kappa = \frac{\gamma v}{d}. \quad (1.19)$$

При  $n > 2$  и астрономически больших облаках следует ожидать  $\kappa \ll 1$ . Для очень малых  $\kappa$  наши численные расчеты с быстро осциллирующими функциями ненадежны, но естественно ожидать, что система достигнет сингулярности за конечное время согласно представленному выше анализу.

Как следует из численных расчетов, сингулярность достигается при  $t \sim t_{\text{ch}}$ . Это время намного меньше космологического времени для облаков плотной материи в галактиках или коллапсирующих облаков, образующих звезду или иное космическое тело.

При анализе уравнения (1.8) мы пренебрегли пространственными производными. На первый взгляд учет этих слагаемых может препятствовать образованию неустойчивости, что, например, происходит в процессе формирования структуры вследствие гравитационной (джинсовской) неустойчивости. Однако рассматриваемая нами ситуация является противоположной, и неоднородности стимулируют возникновение сингулярности. Действительно, влияние неоднородностей можно описать добавлением слагаемого  $w/d^2$  в уравнение (1.8) с положительным коэффициентом. Такое слагаемое эквивалентно появлению дополнительной силы притяжения, толкающей  $w$  или  $\zeta$  к нулю, т. е. к  $R \rightarrow \infty$ .

Существуют различные ситуации, при которых условия, приводящие к сингулярности, могут быть реализованы: коллапс газового облака, приводящий к образованию звезды; столкновение двух газовых облаков в галактике; звездные выбросы, сталкивающиеся с межзвездным или межгалактическим веществом, и многие другие явления. С вычислительной точки зрения такие

процессы могут быть либо адиабатическими, когда плотность массы меняется медленно (это и есть случай, проанализированный выше), либо быстрыми, когда плотность массы изменяется мгновенно в виде взрыва. Последнее, по видимому, приведет к еще более быстрому приближению к сингулярности.

**1.2. Осцилляции кривизны в  $F(R)$ -моделях модифицированной гравитации.** Сингулярностей в прошлом и будущем, рассмотренных во введении и п. 1.1, можно избежать, если модифицировать функцию  $F(R)$ , добавляя к ней квадратичное по кривизне слагаемое вида  $R^2/(6m^2)$  [31,32]. В последующем мы будем рассматривать модель (1.2) с включенным в нее  $R^2$ -членом:

$$F(R) = -\lambda R_c \left[ 1 - \left( 1 + \frac{R^2}{R_c^2} \right)^{-n} \right] - \frac{R^2}{6m^2}, \quad (1.20)$$

который устраняет космологическую неустойчивость в прошлом [117], а также предохраняет от неустойчивости кривизны в будущем в сжимающихся системах [118–122].  $R^2$ -член, отсутствующий в первоначальной формулировке [115], существен только при очень больших значениях кривизны, поскольку параметр  $m$  должен быть больше или порядка  $10^5$  ГэВ [126] для сохранения успешных предсказаний стандартного первичного нуклеосинтеза.

В наших работах [131–134] мы использовали модель, основанную на уравнении (1.20). Большая величина  $m$  подразумевает, что стабилизация будет наступать при очень высоких  $R$ . Хотя скаляр кривизны  $R$  не становится бесконечным, он может достигать огромных значений в системах с растущей плотностью массы. Этот рост обычно возникает после начала формирования структур при красном смещении  $z \sim 10^4$  или в более поздние моменты времени.

Особый интерес представляет режим  $|R_c| \ll |R| \ll m^2$ , в котором функцию  $F(R)$  можно аппроксимировать как

$$F(R) \simeq -R_c \left[ 1 - \left( \frac{R_c}{R} \right)^{2n} \right] - \frac{R^2}{6m^2}. \quad (1.21)$$

Мы рассматриваем почти однородное распределение вещества без давления, с плотностью энергии/массы, растущей со временем, но все еще относительно низкой (например, газовое облако в процессе формирования галактики или звезды). В этом случае пространственными производными можно пренебречь и, если объект далек от формирования черной дыры, пространственно-временная метрика приближенно является метрикой Минковского. Тогда уравнение (1.4) принимает вид

$$3\partial_t^2 F'_R - R - \tilde{T} = 0. \quad (1.22)$$

Введем безразмерные величины \*

$$z \equiv \frac{T(t)}{T(t_{in})} \equiv \frac{T(t)}{T_0} = \frac{\rho_m(t)}{\rho_{m0}}, \quad y \equiv -\frac{R}{\tilde{T}_0}, \quad (1.23)$$

$$g \equiv \frac{\tilde{T}_0^{2n+2}}{6n(-R_c)^{2n+1}m^2} = \frac{1}{6n(mt_U)^2} \left( \frac{\rho_{m0}}{\rho_c} \right)^{2n+2}, \quad \tau \equiv m\sqrt{g}t,$$

где  $\rho_c \approx 10^{-29}$  г/см<sup>3</sup> — космологическая плотность энергии в настоящее время,  $\rho_{m0}$  — начальное значение плотности массы/энергии рассматриваемой системы,  $\tilde{T}_0 = 8\pi\rho_{m0}/M_{Pl}^2$ . Далее введем новое скалярное поле:

$$\xi \equiv \frac{1}{2n} \left( \frac{\tilde{T}_0}{R_c} \right)^{2n+1} F'_R = \frac{1}{y^{2n+1}} - gy. \quad (1.24)$$

В терминах этого поля уравнение (1.22) можно записать в простой осцилляторной форме:

$$\xi'' + z - y = 0, \quad (1.25)$$

где штрих означает производную по  $\tau$ . Потенциал осциллятора определяется как

$$\frac{\partial U}{\partial \xi} = z - y(\xi). \quad (1.26)$$

Замена (1.24) аналогична той, что была сделана в [121], но теперь  $y$  не может быть выражено аналитически через  $\xi$ , и нужно использовать разные приближенные выражения для положительных и отрицательных  $\xi$ . В пределе малых  $g$  имеем:  $y = \xi^{-1/(2n+1)}$ , если  $\xi > 0$ , и  $\xi = -gy$ , если  $\xi < 0$ , поэтому в двух областях имеем следующие два уравнения:

$$\xi'' + \frac{\rho_m}{\rho_0} - \xi^{-1/(2n+1)} = 0, \quad \xi > 0, \quad (1.27a)$$

$$\xi'' + \frac{\rho_m}{\rho_0} + \frac{\xi}{g} = 0, \quad \xi < 0. \quad (1.27b)$$

Очевидно, что (1.25) описывает осцилляции вокруг  $y = z$  («дна» потенциала), что соответствует обычному решению  $R + \tilde{T} = 0$  в ОТО. Таким образом, можно представить решение в виде суммы медленно меняющейся

---

\*Параметр  $g$  здесь не следует путать с  $\det g_{\mu\nu}$ .

(усредненной) и осциллирующей частей. Для малых отклонений от минимума потенциала решение имеет вид

$$\xi(\tau) = \left[ \frac{1}{z(\tau)^{2n+1}} - gz(\tau) \right] + \alpha(\tau) \sin F(\tau) \equiv \xi_{\min}(\tau) + \xi_1(\tau), \quad (1.28)$$

где слагаемое в квадратных скобках, обозначенное  $\xi_{\min}(\tau)$ , отвечает минимуму потенциала, а  $\xi_1(\tau)$  описывает осцилляции вокруг этого минимума. Частота осцилляций равна

$$F(\tau) \equiv \int_{\tau_0}^{\tau} d\tau' \Omega(\tau'), \quad (1.29)$$

а безразмерная частота  $\Omega$  определяется как

$$\Omega^2 = \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}, \quad (1.30)$$

взятая при  $y = z$ . Из (1.25) следует

$$\Omega^2 = - \left. \frac{\partial y}{\partial \xi} \right|_{y=z} = - \left. \frac{1}{\partial \xi / \partial y} \right|_{y=z} = \left( \frac{2n+1}{z^{2n+2}} + g \right)^{-1}. \quad (1.31)$$

Переход к физической частоте  $\omega$  дается выражением

$$\omega = \Omega m \sqrt{g}. \quad (1.32)$$

Предполагается, что в начальный момент  $\tau = \tau_0$  функция  $\xi(\tau)$  находится в минимуме потенциала.

Уравнение (1.24) невозможно обратить аналитически для того, чтобы найти точное выражение для потенциала  $U(\xi)$ . Однако можно написать приближенные выражения для  $gy^{2n+2} \ll 1$  ( $\xi > 0$ ) и  $gy^{2n+2} \gg 1$  ( $\xi < 0$ ). Значение  $\xi = 0$  разделяет два различных режима, в каждом из которых  $\Omega$  имеет очень простое выражение (см. (1.31)), а в правой части уравнения (1.24) для  $\xi$  доминирует либо первое, либо второе слагаемое. Для каждой аппроксимации соотношение  $\xi = \xi(y)$  удастся обратить и найти явное выражение для  $y = y(\xi)$  и, соответственно, представить потенциал в виде

$$U(\xi) = U_+(\xi)\Theta(\xi) + U_-(\xi)\Theta(-\xi), \quad (1.33a)$$

где

$$U_+(\xi) = z\xi - \frac{2n+1}{2n} \left[ \left( \xi + g^{(2n+1)/(2n+2)} \right)^{2n/(2n+1)} - g^{2n/(2n+2)} \right], \quad (1.33b)$$

$$U_-(\xi) = \left( z - g^{-1/(2n+2)} \right) \xi + \frac{\xi^2}{2}.$$



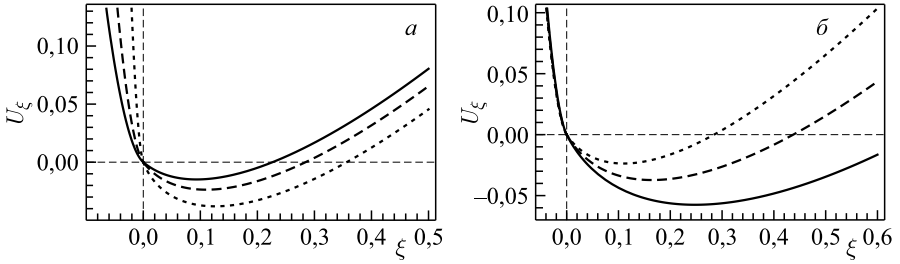


Рис. 3. Примеры изменения потенциала (1.33) как функции  $\xi$  для разных значений параметров. а)  $n = 2, z = 1,5$ :  $g = 0,02$  — сплошная линия,  $g = 0,01$  — штриховая,  $g = 0,002$  — пунктирная; часть потенциала при  $\xi < \xi_{\min}$  ( $\xi_{\min}$  определено в (1.28)) становится более крутой с уменьшением  $g$ ; дно потенциала смещается к нулю. б)  $n = 2, g = 0,01$ :  $z = 1,3$  — сплошная линия,  $z = 1,4$  — штриховая,  $z = 1,5$  — пунктирная линия; при возрастании  $z$  дно потенциала движется к большим значениям  $U$  и меньшим значениям  $\xi$

По построению  $U$  и  $\partial U/\partial \xi$  непрерывны при  $\xi = 0$ . Форма такого потенциала показана на рис. 3.

Минимум потенциала  $y(\xi) = z$  (см. (1.26)) соответствует решению  $R = -\tilde{T}$  в ОТО, а его глубина для  $gz^{2n+2} < 1$  равна

$$U_0(\tau) \simeq -\frac{1}{2n z(\tau)^{2n}}. \tag{1.34}$$

Мы будем использовать простую линейную форму зависимости плотности энергии материи от времени, а именно

$$z(\tau) = 1 + \kappa(\tau - \tau_0), \quad \rho(t) = \rho_0 \left( 1 + \frac{t - t_0}{t_{\text{contr}}} \right), \quad \kappa^{-1} \equiv m\sqrt{g}t_{\text{contr}}. \tag{1.35}$$

Здесь  $\kappa^{-1}$  и  $t_{\text{contr}}$  являются, соответственно, безразмерным и физическим масштабами времени сжатия системы; аналогично  $\tau_0$  и  $t_0$  — безразмерное и физическое начальные времена, которые для простоты и без потери общности будут приняты равными 0.

Также полезно записать физические параметры, такие как  $m$ , начальная плотность энергии  $\rho_{m0}$  и т. д., в терминах их соответствующих «типичных» величин. Определим

$$\rho_{29} \equiv \frac{\rho_{m0}}{\rho_c}, \quad m_5 \equiv \frac{m}{10^5 \text{ ГэВ}}, \quad t_{10} \equiv \frac{t_{\text{contr}}}{10^{10} \text{ лет}}. \tag{1.36}$$

При этом параметры  $g$  и  $\kappa$  примут вид

$$g \simeq 1,2 \cdot 10^{-94} \frac{\rho_{29}^{2n+2}}{n m_5^2}, \quad \kappa \simeq 1,9 \frac{\sqrt{n}}{\rho_{29}^{n+1} t_{10}}. \tag{1.37}$$

Уравнение движения (1.25) для малых осцилляций  $\xi_1$ , определенных в (1.28), можно переписать как

$$\xi_1'' + \Omega^2 \xi_1 = -\xi_{\min}'' \quad (1.38)$$

Слагаемое  $\xi_{\min}''$  пропорционально  $\kappa^2$ , которое обычно считается малым, так что в первом приближении им можно пренебречь, хотя аналитическое решение при постоянной  $\Omega$  или в пределе большой  $\Omega$  также может быть получено и с учетом этого члена. Используя разложение (1.28) и пренебрегая  $\alpha''$ , найдем

$$\alpha \simeq \alpha_0 \sqrt{\frac{\Omega_0}{\Omega}} = \alpha_0 \left( \frac{1}{z^{2n+2}} + \frac{g}{2n+1} \right)^{1/4} \left( 1 + \frac{g}{2n+1} \right)^{-1/4}. \quad (1.39)$$

Здесь и далее нижний индекс 0 означает, что соответствующие величины берутся в начальный момент  $\tau = \tau_0$ . Мы накладываем следующие начальные условия:

$$\begin{cases} y(\tau = \tau_0) = z(\tau = \tau_0) = 1, \\ y'(\tau = \tau_0) = y'_0, \end{cases} \quad (1.40)$$

первое из которых соответствует решению ОТО в начальный момент. Начальное значение амплитуды колебаний скаляра кривизны  $\alpha_0$  можно выразить через производную  $y'_0$ , которую мы считаем свободным параметром:

$$\alpha_0 = (\kappa - y'_0)(g + 2n + 1)^{3/2}. \quad (1.41)$$

В наших работах [131, 132] были выбраны начальные условия  $|y'_0| \lesssim \kappa$  и  $|\kappa - y'_0| \sim \kappa$ . Поскольку, как мы знаем, развившееся коллапсирующее облако материи постепенно отклоняется от ОТО, близость производной  $y'_0$  к ОТО в момент, когда осциллирующая  $y(\tau)$  пересекает значение ОТО, совершенно неестественна. Поэтому мы не рассматривали случай  $|\kappa - y'_0| \ll \kappa$ . При таких предположениях  $\xi_1$  остается малым,  $\xi_1 \ll 1$ , но не является пренебрежимым. В этом случае результаты численных расчетов, приведенные на рис. 4, находятся в замечательном согласии с уравнением (1.28).

На первый взгляд, из уравнения (1.41) следует, что при  $y'_0 = \kappa$  колебания не будут возбуждаться вообще. Однако это верно только в первом порядке по  $|y'_0 - \kappa|$ , и поэтому амплитуда колебаний будет порядка  $\kappa^2$ .

Нашей основной целью является нахождение амплитуды и формы осцилляций  $y$ . Раскладывая  $y$  как

$$y(\tau) = z(\tau) + \beta(\tau) \sin \left( \int_{\tau_0}^{\tau} d\tau' \Omega(\tau') \right), \quad (1.42)$$

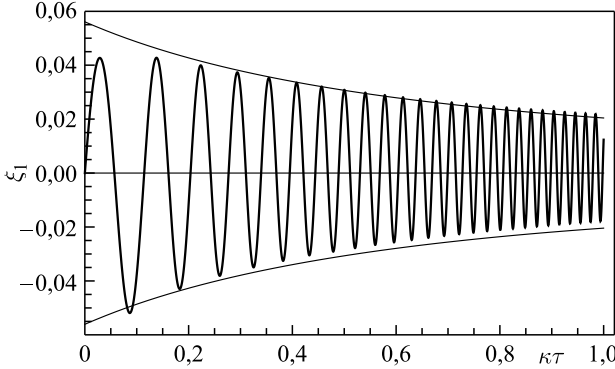


Рис. 4. Осцилляции  $\xi_1(\tau)$  в случае  $n = 2, \kappa = 0,01, g = 0,01$  при начальных условиях  $y_0 = 1, y'_0 = \kappa/2$ . Амплитуда осцилляций находится в очень хорошем согласии с аналитической оценкой (1.28)

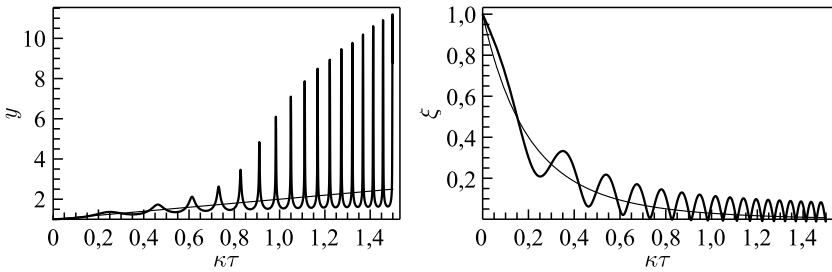


Рис. 5. «Пики» в решениях. Результаты представлены для  $n = 2, g = 0,001, \kappa = 0,04$  и  $y'_0 = \kappa/2$ . Отметим асимметрию осцилляций  $y$  вокруг  $y = z$  и их негармоничность

легко найти (см. [132]), что во время начальной фазы колебаний, когда  $|\beta| < z$ , будет справедливо

$$|\beta(\tau)| \simeq |\alpha(\tau)|\Omega^2(\tau) \simeq |y'_0 - \kappa| (2n + 1 + g)^{5/4} \left( \frac{2n + 1}{z^{2n+2}} + g \right)^{-3/4}. \quad (1.43)$$

Подчеркнем, что, в отличие от  $\xi$ , осцилляции  $y$  быстро становятся сильно негармоническими и даже при малом отрицательном  $\xi$  амплитуда  $y$  может быть очень большой, поскольку  $y \approx -\xi/g$ , согласно уравнению (1.24). Эта особенность хорошо иллюстрируется результатами численных расчетов, приведенных на рис. 5.

Можно оценить амплитуду пиков аналитически, используя закон эволюции энергии

$$\frac{1}{2} \xi'^2 + U(\xi) - \int_{\tau_1}^{\tau} d\tau' \frac{\partial z}{\partial \tau'} \xi(\tau') = \text{const}, \quad (1.44)$$

где  $\tau_1$  — произвольный фиксированный момент времени. Последний член возник из-за того, что потенциал  $U$  явно зависит от времени через  $z$ . Если производная  $\partial z/\partial \tau$  положительна, что имеет место для сжимающегося тела, то значение  $U(\xi)$  будет в целом расти со временем. Согласно предположению, сделанному выше,  $z$  линейно растет со временем как  $z(\tau) = 1 + \kappa\tau$ , где  $\kappa$  задается уравнением (1.35). Этот простой закон может быть неточным при  $t/t_{\text{contr}} > 1$ , но полученные результаты не будут слишком отличаться от реалистического случая.

Применим этот закон, когда минимальное значение  $\xi$  достигает нуля. Очевидно, в минимуме  $\xi' = 0$ . Так как  $U(0) = 0$ , постоянная в правой части (1.44) обращается в нуль. Теперь проследуем дальше по времени и пренебрежем осциллирующей частью  $\xi$  под интегралом. Минимальное значение  $\xi$  (максимум абсолютной величины),  $\xi_{\min}$ , отрицательного  $\xi$  определяется уравнением

$$\begin{aligned} U_-(\xi_{\min}) &= \kappa \int_{\tau_1}^{\tau} d\tau' \left[ z^{-(2n+1)} - gz \right] = \\ &= \frac{1}{2n} \left[ \left( \frac{1}{z(\tau_1)} \right)^{2n} - \left( \frac{1}{z(\tau)} \right)^{2n} \right] + \frac{1}{2}g \left[ z^2(\tau_1) - z^2(\tau) \right]. \end{aligned} \quad (1.45)$$

Значение  $z(\tau_1) \equiv z_1$  находится из условия  $\alpha = \xi_{\max}$ , т. е.

$$z_1^{-(2n+1)} - gz_1 = |\kappa - y'_0| (g + 2n + 1)^{5/4} \left( \frac{2n + 1}{z_1^{2n+2}} + g \right)^{1/4}. \quad (1.46)$$

В пределе малых  $g$ ,  $g < 1/z_1^{2n+2}$ , асимптотически  $|\xi_{\max}| = (g/n)^{1/2} z(\tau_1)^{-n}$ . В том же самом пределе уравнение (1.46) дает

$$z_1 = \left[ (\kappa - y'_0)^2 (2n + 1)^3 \right]^{-1/(3n+1)}. \quad (1.47)$$

Это, наконец, определяет

$$y_{\max} = (ng)^{-1/2} z_1^{-n}. \quad (1.48)$$

Таким образом, нами найдены простые аналитические решения для  $\xi$  и  $y$  в двух различных пределах:  $gz^{2n+2} \ll 1$  и  $gz^{2n+2} \gg 1$ . Однако в промежуточном случае численные расчеты демонстрируют интересные особенности, которые стоит обсудить. Как показано на рис. 5, если  $\xi$  приближается к нулю (или даже пересекает его), а  $\xi_{\min}$  нет, т. е. когда  $gy^{2n+2} \simeq 1$ , но  $gz^{2n+2} < 1$ , имеются наибольшие отклонения от гармонических, симметричных колебаний вокруг  $y = z$ . Это особенно заметно, если  $g$  очень мало, а  $\kappa$  является не

слишком малым. Причина такого поведения качественно объясняется следующим. Из уравнения (1.33) и/или рис. 3 видно, что при  $\xi < \xi_{\min}$  потенциал становится все более крутым при сокращении времени нахождения в этой области. Более того, малой вариации  $\delta\xi$  в такой области соответствует большое изменение  $y$ . Таким образом, возникают высокие узкие «пики» в осцилляциях  $y$ . С другой стороны, при  $\xi > \xi_{\min}$  потенциал является более пологим и осцилляции в этой области делятся дольше, что приводит к большим промежуткам между пиками  $y$ .

**1.3. Рождение частиц осциллирующей кривизной.** В данном подразделе будет рассмотрено гравитационное рождение частиц осциллирующей кривизной в современной Вселенной. Как было показано выше, в астрономических системах с растущей плотностью массы/энергии скаляр кривизны может осциллировать с очень высокой частотой и большой амплитудой. Такие осцилляции ведут к заметному рождению частиц и могут быть источниками высокоэнергетических космических лучей в феноменологически интересном диапазоне параметров модели.

Как было показано в работах [123, 125, 126], гармонические осцилляции кривизны с (физической) частотой  $\omega$  и амплитудой  $R_{\max}$  передают энергию безмассовым частицам со скоростью (в единицу времени и объема):

$$\dot{\rho}_{\text{PP}} \simeq \frac{R_{\max}^2 \omega}{1152\pi}. \quad (1.49)$$

В нашем случае  $R_{\max} \equiv \beta T_0$ , где  $\beta$  дается (1.43). Время жизни таких осцилляций есть

$$\tau_R = \frac{48 M_{\text{Pl}}^2}{\omega^3}. \quad (1.50)$$

Строго говоря, этот результат справедлив, если колебания  $R$  являются чисто гармоническими или, по меньшей мере, могут быть разделены на две части: медленно меняющуюся и осциллирующую с постоянной (или почти постоянной) частотой. В п. 1.2 было получено, что решения уравнения (1.25) содержат пики, которые далеки от гармонических. Таким образом, нашей задачей является обобщение результата (1.49).

Рассмотрим гравитационное рождение пары безмассовых скалярных частиц  $\varphi$ , квантованных обычным образом:

$$\hat{\varphi}(x) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2E_k} \left[ \hat{a}_k e^{-ik \cdot x} + \hat{a}_k^\dagger e^{ik \cdot x} \right] \quad (x \cdot k \equiv \omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}), \quad (1.51)$$

$$\left[ \hat{a}_k, \hat{a}_{k'}^\dagger \right] = (2\pi)^3 2E_k \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}').$$

В первом порядке теории возмущения амплитуда рождения двух частиц с 4-импульсами  $p_1$  и  $p_2$  равна [126]

$$\begin{aligned} A(p_1, p_2) &\simeq \frac{1}{6} \int dt d^3x R(t) \langle p_1, p_2 | \hat{\varphi}^2 | 0 \rangle = \\ &= \frac{(2\pi)^3}{3\sqrt{2}} \delta^{(3)}(p_1 + p_2) \int dt R(t) e^{i(E_1 + E_2)t}. \end{aligned} \quad (1.52)$$

Проводя фурье-преобразование  $R$ , определенное как

$$R(t) \equiv \frac{1}{2\pi} \int d\omega \tilde{\mathcal{R}}(\omega) e^{-i\omega t}, \quad (1.53)$$

представим амплитуду (1.52) в виде

$$A(p_1, p_2) \simeq \frac{(2\pi)^3}{3\sqrt{2}} \delta^{(3)}(p_1 + p_2) \tilde{\mathcal{R}}(E_1 + E_2). \quad (1.54)$$

Для вычисления числа частиц, родившихся за единицу времени в единице объема, нужно проинтегрировать  $|A(p_1, p_2)|^2$  по всему фазовому пространству и разделить на 3-мерный объем и на время длительности процесса  $\Delta t$ . Это дает

$$\dot{n}_{\text{FP}} \simeq \frac{1}{288\pi^2 \Delta t} \int d\omega |\tilde{\mathcal{R}}(\omega)|^2, \quad (1.55)$$

и, соответственно, поскольку каждая частица рождается с энергией  $E = \omega/2$ :

$$\dot{\rho} \simeq \frac{1}{576\pi^2 \Delta t} \int d\omega \omega |\tilde{\mathcal{R}}(\omega)|^2. \quad (1.56)$$

Длительность процесса  $\Delta t$  можно считать бесконечно большой, если характеристическая частота удовлетворяет условию  $\omega_{\text{ch}} \Delta t \gg 1$ . Соответственно, квадрат дельта-функции в  $\tilde{\mathcal{R}}$  будет пропорционален  $\delta(0) \sim \Delta t$ . Например, если  $R$  есть чистый синус или косинус с частотой  $\omega$ , имеем

$$\tilde{\mathcal{R}}(\varepsilon) \sim \delta(\varepsilon - \omega) + \delta(\varepsilon + \omega) \quad (1.57)$$

и

$$|\delta(\varepsilon \pm \omega)|^2 = \frac{\Delta t}{2\pi} \delta(\varepsilon \pm \omega). \quad (1.58)$$

Таким образом,  $\Delta t$  не входит в вероятность рождения частиц в единицу времени. Физическое обрезание  $\Delta t$  в рассматриваемом случае приближенно равно параметру  $\tau_R$  в (1.50), поэтому для  $\omega \gg 1/\tau_R$  используемая здесь аппроксимация является достаточно точной. Более того, поскольку частоты должны быть положительными, только первая дельта-функция в (1.57) дает ненулевой вклад.

**1.3.1. Регулярная область.** Рассмотрим сначала рождение частиц осциллирующей кривизной в случае, когда колебания приближенно можно считать гармоническими. Подставляя  $R_{\max} \equiv \beta \tilde{T}_0$  в (1.49), используя (1.32) и полагая для простоты  $y'_0 \simeq 0$ , получаем

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{\text{PP, reg}} &= \frac{\pi\sqrt{6n}}{18} \frac{t_U \rho_c^{n+1}}{M_{\text{Pl}}^4 t_{\text{contr}}^2 \rho_{m0}^{n-1}} \frac{(2n+1+g)^{5/2}}{\left(\frac{2n+1}{z^{2n+2}} + g\right)^2} = \\ &= C \left(\frac{t_U}{t_{\text{contr}}}\right)^2 \frac{\rho_c^2}{M_{\text{Pl}}^4 t_U}, \end{aligned} \quad (1.59)$$

где коэффициент  $C$  имеет следующий вид в двух пределах:

1)  $gz^{2n+2} \ll 1$ :

$$C = \frac{\pi\sqrt{6n(2n+1)}}{18} \left(\frac{\rho_c}{\rho_{m0}}\right)^{n-1} z^{4n+4}, \quad (1.60)$$

2)  $gz^{2n+2} \gg 1$ :

$$C = \frac{\pi[6n(2n+1+g)]^{5/2}}{18} \left(\frac{\rho_c}{\rho_{m0}}\right)^{5n+3} (mt_U)^4. \quad (1.61)$$

Последний множитель в уравнении (1.59) является очень малым. Так как  $\rho_c^2 \sim M_{\text{Pl}}^4/t_U^4$ , то этот множитель имеет порядок  $1/t_U^5$ . Если  $C$  не очень велико, рождение частиц в регулярной области будет пренебрежимо мало. Наиболее благоприятной возможностью является малое  $g$  и большое  $z$ , но нужно иметь в виду, что  $g \sim \rho_{m0}^{2n+2}$ .

Оценка потока в условных единицах (1.36) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\dot{\rho}_{\text{PP, reg}}}{\Gamma_{\text{ЭВ}} \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{М}^{-3}} &\simeq 3,6 \cdot 10^{-141} \frac{C_1(n, g, z) z^{4n+4}}{\rho_{29}^{n-1} t_{10}^2} \simeq \\ &\simeq 2,5 \cdot 10^{47} \frac{C_2(n, g, z) m_5^4}{\rho_{29}^{5n+3} t_{10}^2}. \end{aligned} \quad (1.62)$$

Коэффициенты  $C_1$  и  $C_2$  удобно использовать в предельных случаях  $gz^{2n+2} \ll 1$  и  $gz^{2n+2} \gg 1$  соответственно. Они даются выражениями

$$C_1 = \sqrt{n(2n+1+g)} \left(\frac{2n+1+g}{2n+1+gz^{2n+2}}\right)^2 \approx \sqrt{n(2n+1)}, \quad (1.63a)$$

$$C_2 = n^{5/2} \sqrt{2n+1+g} g^2 \left(\frac{2n+1+g}{2n+1+gz^{2n+2}}\right)^2 z^{4n+4} \approx [n(2n+1)]^{5/2}. \quad (1.63b)$$

**1.3.2. Область пиков.** В области пиков рождение частиц будет заметно усилено за счет большой амплитуды осцилляций кривизны  $R$ . Решение в этой области можно представить как сумму гауссовых кривых с медленно меняющейся амплитудой  $B(t)$ , наложенную на гладкий фон  $A(t)$ :

$$R(t) = A(t) + B(t) \sum_{j=1}^N \exp \left[ -\frac{(t - jt_1)^2}{2\sigma^2} \right]. \quad (1.64)$$

Здесь  $t_1$  есть расстояние между пиками, а  $\sigma$  — ширина пиков. Мы считаем, что  $\sigma \ll t_1$ , т. е. расстояние между пиками значительно больше их ширины. Фурье-преобразование выражения (1.64) является простым, но довольно громоздким (детали приведены в нашей работе [132]). Окончательно имеем

$$|\tilde{\mathcal{R}}(\omega)|^2 \simeq \frac{4\pi^2 B^2 \sigma^2 e^{-\omega^2 \sigma^2 \Delta t}}{t_1^2} \sum_j \delta \left( \omega - \frac{2\pi j}{t_1} \right). \quad (1.65)$$

Каждая частица, рожденная компонентой, осциллирующей с частотой  $\omega$ , имеет энергию  $\omega/2$ , таким образом, скорость гравитационного рождения частиц равна

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{\text{PP}} &= \frac{1}{288\pi^2 \Delta t} \int d\omega \frac{\omega}{2} |\tilde{\mathcal{R}}(\omega)|^2 = \\ &= \frac{\pi B^2 \sigma^2}{72 t_1^3} \sum_j j \exp \left[ -\left( \frac{2\pi j \sigma}{t_1} \right)^2 \right] \simeq \frac{B^2}{576\pi t_1}. \end{aligned} \quad (1.66)$$

Отождествляя  $B$  с  $R_{\text{max}} = y_{\text{max}} \tilde{T}_0$ , получаем

$$\dot{\rho}_{\text{PP}} \simeq \frac{y_{\text{max}}^2 \tilde{T}_0^2}{576\pi t_1}. \quad (1.67)$$

Интервал времени  $t_1$  приближенно равен  $2\pi/\omega = 2\pi/(\Omega m\sqrt{g})$ , где  $\Omega$  дается уравнением (1.30). Амплитуда  $y_{\text{max}}$  определяется уравнением (1.48); параметр  $\kappa$  определен в (1.35), а «константа связи»  $g$  — в (1.23). Собирая все факторы вместе, имеем

$$\dot{\rho}_{\text{PP}} = C_n \frac{\rho_0^2 (mt_U)^2 z^{n+1}}{M_{\text{Pl}}^4 t_{\text{contr}}} \left( \frac{t_U}{t_{\text{contr}}} \right)^{\frac{n-1}{3n+1}} \left( \frac{\rho_c}{\rho_0} \right)^{\frac{(n+1)(7n+1)}{3n+1}}, \quad (1.68)$$

где

$$C_n = (2n+1)^{\frac{9n-1}{2(3n+1)}} (6\lambda n)^{\frac{7n+1}{2(3n+1)}} / (18n). \quad (1.69)$$



Приведем численные значения:  $\rho_c/M_{\text{Pl}}^4 \approx 2 \cdot 10^{-123}$  и  $(mt_U)^2 \approx 3,6 \cdot 10^{93} m_5^2$ , где  $\rho_c \approx 10^{-29}$  г/см<sup>3</sup> и  $m_5 = m/10^5$  ГэВ. Полагая, что рождение частиц длится в течение времени  $t \approx t_{\text{contr}}$  и считая  $\rho_0 = \rho_c$ , находим поток энергии космических лучей, рожденных осциллирующей кривизной:

$$\rho_{\text{CR}} \approx 10^{-24} m_5^2 z^{n+1} \text{ ГэВ} \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{см}^{-2}. \quad (1.70)$$

Данный результат представляет собой нижнюю оценку потока образующихся частиц. С ростом  $z$ , когда минимум потенциала далеко сдвигается в отрицательную область  $\xi$ , вероятность рождения значительно возрастает. Аналитическая оценка в этом случае затруднена, но на это указывают простые качественные аргументы, а численные расчеты подтверждают это утверждение.

При  $m = 10^{10}$  ГэВ предсказанный поток космических лучей с энергией около  $10^{19}$  эВ может быть близок к наблюдаемому потоку или даже превосходить его.

Отметим в заключение, что представленные выше результаты критиковались в работах [167, 168]. Ответ на критику был дан в нашей статье [134], где было показано, что аргументы, приведенные в [167, 168], неприменимы к рассматриваемому нами механизму.

## 2. КОСМОЛОГИЧЕСКАЯ ЭВОЛЮЦИЯ В $R^2$ -ТЕОРИИ

В этом разделе изучается космологическая история Вселенной в теории  $R + R^2$  гравитации от «самого начала» до настоящего времени. В нашей работе [128] рассматривалось первоначальное инфляционное расширение Вселенной и было показано, что гравитационное рождение частиц осциллирующей кривизной  $R(t)$  приводит к непротиворечивому переходу к фридмановской космологии, но космологическая эволюция в ранней Вселенной сильно отличается от стандартной. В более ранней работе [126] нами был рассмотрен последующий этап космологической эволюции в предположении, что Вселенная уже находится на стадии, описываемой общей теорией относительности, и вычислены поправки к классической космологии за счет  $R^2$ -члена. Показано, что эффекты рождения частиц осциллирующей кривизной [126, 128] оказывают существенное влияние на эволюцию Вселенной.

**2.1. Эволюция Вселенной от инфляционной космологии до космологии Фридмана.** Мы изучаем космологическую эволюцию Вселенной в теории, в действие которой добавлен только  $R^2$ -член, пренебрегая другими модификациями гравитации, которые вводятся для генерации ускоренного расширения современной Вселенной. Действие такой теории запишем в виде

$$S_{\text{tot}} = -\frac{M_{\text{Pl}}^2}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} \left( R - \frac{R^2}{6m^2} \right) + S_m, \quad (2.1)$$

где  $m$  — постоянный параметр с размерностью массы, а  $S_m$  — действие полей материи.

В 1979 г. В. Ц. Гурович и А. А. Старобинский [32] предложили использовать  $R^2$ -член для устранения космологической сингулярности. В последующей статье Старобинского [33] было найдено, что добавление такого слагаемого приводит к инфляционной космологии. Как и в любом космологическом сценарии, проблема мягкого выхода из инфляции и проблема разогрева Вселенной имеют первостепенное значение. Они изучались в работах [33, 124–126, 169–172] (для обзора см. [173]).

В данном подразделе, следуя нашей работе [128], мы обобщаем и расширяем анализ, проведенный в нашей более ранней работе [126], начиная с инфляционной стадии и следуя до асимптотически больших времен, таких что  $mt \gg 1$ . Сначала мы изучаем случай большого, но не слишком большого времени, такого что  $\Gamma t < 1$ , где  $\Gamma$  — ширина распада скалярона (см. ниже (2.14)). В этом временном интервале можно найти очень простые аналитические выражения для  $H(t)$  и  $R(t)$ , дающиеся уравнениями (2.40) и (2.41). Эти решения приведены в обзоре [173], но они просто следуют из выражения для космологического масштабного фактора, ранее полученного Старобинским в работе [33]. Согласно этой работе, космологический масштабный фактор в  $R^2$ -теории эволюционирует как

$$a(t) \sim t^{3/2} \left[ 1 + \frac{2}{3mt} \sin(mt + \theta) \right], \quad (2.2)$$

а параметр Хаббла, приведенный в статье [124], совпадает с полученным позже другими методами в обзоре [173] и нашей статье [128].

Ниже мы воспроизводим первоначальный результат работы [33], используя другой аналитический подход. В статье [33] система космологических уравнений (в отсутствие обычной материи) сводится к одному нелинейному уравнению первого порядка. В нашем случае мы решаем систему, состоящую из уравнения второго порядка для  $R$  (2.12), ковариантного закона сохранения энергии материи (2.9) и «кинематической» связи между скаляром кривизны и параметром Хаббла (2.8) в пространственно-плоской Вселенной. Эту систему легче обрабатывать численно, и мы можем удерживать эффекты материи с самого начала, хотя изначально они довольно слабы. Мы нашли численно, что простое асимптотическое поведение (2.40) и (2.41) наступает почти сразу после окончания инфляции. Мы также вычислили плотность энергии обычной материи, которая падает как  $1/t$  с некоторыми слабыми наложенными колебаниями. В интервале времени, в котором  $\Gamma t < 1$ , обычное вещество оказывает очень слабое влияние на космологическое расширение, определяемое осциллирующей кривизной. В течение этого временного интервала эволюция Вселенной сильно отличается от получаемой в ОТО.

Хотя скаляр кривизны во многих отношениях напоминает обычное скалярное поле и режим расширения довольно похож на эпоху доминантности материи, имеется значительное различие между космологической эволюцией в  $R^2$ -модифицированной гравитации и той, что индуцируется однородным массивным скалярным полем  $\phi$  с массой  $m_\phi$ . Изучение последней было впервые проведено Старобинским в работе [174]. Там было показано, что плотность энергии скаляра падает, в основном, как  $1/t^2$  с некоторыми осциллирующими слагаемыми, распадающимися как  $1/t^2$  по отношению к доминантному слагаемому, т. е. осциллирующая часть убывает как  $1/t^4$ . Масштабный фактор меняется как

$$a(t) \sim t^{2/3} [1 + C \cos(2m_\phi t + \theta)/t^2], \quad (2.3)$$

что несколько отличается от того, что имеет место в  $R^2$ -теории (2.2).

Плотность энергии поля материи (или скаляра  $\phi$ ) падает как  $1/t^2$  по сравнению с медленным убыванием как  $1/t$  полей материи в  $R^2$ -теории. Скаляр кривизны в этой модели пропорционален следу тензора энергии-импульса поля  $\phi$  и монотонно убывает как  $1/t^2$ , в то время как в  $R^2$ -теории кривизна ведет себя как  $\cos(mt + \theta)/t$  и не связана с плотностью энергии нормального вещества.

Достаточно длинный режим, в течение которого космологическая эволюция отличается от стандартной FLRW-космологии, может привести, в частности, к модификации сценариев высокотемпературного бариогенезиса, к изменению асимптотической концентрации массивных частиц темной материи и необходимости пересмотра формирования первичных черных дыр.

Далее мы рассматриваем значительно большие времена, когда  $\Gamma t \gg 1$ , и изучаем приближение к обычной космологии общей теории относительности. Стандартная космология ОТО восстанавливается, когда плотность энергии вещества становится больше, чем плотность экспоненциально распадающегося скалярона. Однако мы утверждаем, что это приближение несколько задержано. Оно происходит не при  $\Gamma t \sim 1$ , как можно наивно ожидать, но при  $\Gamma t \sim \ln(m/\Gamma)$ .

Модифицированные уравнения Эйнштейна для теории (2.1) имеют следующий вид:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R - \frac{1}{3m^2} \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{4}Rg_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}D^2 - D_\mu D_\nu \right) R = \frac{8\pi}{M_{\text{Pl}}^2} T_{\mu\nu}, \quad (2.4)$$

где  $D^2 \equiv g^{\mu\nu} D_\mu D_\nu$  — ковариантный оператор Д'Аламбера. Предполагается, что тензор энергии-импульса материи  $T_{\mu\nu}$  имеет диагональную форму:

$$T_\nu^\mu = \text{diag}(\rho, -P, -P, -P), \quad (2.5)$$

где  $\rho$  — плотность энергии, а  $P$  — давление материи.

Мы рассматриваем однородное и изотропное распределение материи с уравнением состояния

$$P = w\rho, \quad (2.6)$$

где  $w$  обычно считается постоянным параметром. Для нерелятивистской материи  $w = 0$ , для релятивистской  $w = 1/3$ , а для вакуумоподобного состояния  $w = -1$ .

Космологическая метрика берется в стандартной форме Фридмана–Робертсона–Уокера (FRW) с интервалом

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2 \vartheta d\varphi^2 \right]. \quad (2.7)$$

В дальнейшем мы считаем, что трехмерное пространство является плоским и полагаем  $k = 0$ . В этом случае скаляр кривизны  $R$  связан с параметром Хаббла  $H = \dot{a}/a$  соотношением

$$R = -6\dot{H} - 12H^2. \quad (2.8)$$

Если нет дополнительных источников энергии, порождаемых самой гравитацией, тензор энергии-импульса удовлетворяет условию ковариантного сохранения  $D_\mu T_\nu^\mu = 0$ , которое в FRW-метрике (2.7) имеет вид

$$\dot{\rho} = -3H(\rho + P) = -3H(1 + w)\rho. \quad (2.9)$$

Вычисляя след уравнения (2.4), получаем

$$D^2 R + m^2 R = -\frac{8\pi m^2}{M_{\text{Pl}}^2} T_\mu^\mu. \quad (2.10)$$

Переход к ОТО должен происходить при  $m \rightarrow \infty$ . В этом случае мы ожидаем получить обычное алгебраическое соотношение между скаляром кривизны и следом тензора энергии-импульса материи:

$$M_{\text{Pl}}^2 R_{\text{GR}} = -8\pi T_\mu^\mu. \quad (2.11)$$

Для однородного поля  $R = R(t)$  при справедливости уравнения состояния вещества (2.6) уравнение (2.10) дает

$$\ddot{R} + 3H\dot{R} + m^2 R = -\frac{8\pi m^2}{M_{\text{Pl}}^2} (1 - 3w)\rho. \quad (2.12)$$

Это соотношение имеет вид уравнения Клейна–Гордона (КГ) для массивного скалярного поля  $R$ , называемого иногда «скаляроном». Оно отличается от

обычного уравнения КГ слагаемым жидкого трения  $3H\dot{R}$  с коэффициентом трения  $3H$ , связанным с  $R$  выражением (2.8).

Уравнение (2.12) не учитывает влияние рождения частиц скаляром кривизны. Это хорошее приближение в эпоху инфляции, когда рождение частиц кривизной  $R(t)$  практически отсутствует, поскольку  $R$  велико и трение велико, так что  $R$  медленно спадает до нуля. На некотором этапе, когда  $H$  становится меньше, чем  $m$ ,  $R$  начинает осциллировать, продуктивно рождая частицы. Это знаменует окончание инфляции, разогрев Вселенной, которая исходно не содержала материи, и переход от ускоренного расширения (инфляции) к расширению замедленному. Последнее напоминает обычный режим расширения Фридмана, но, как мы увидим ниже, отличается от него многими существенными чертами.

Для гармонического потенциала рождение частиц можно приближенно описать дополнительным слагаемым, учитывающим трение,  $\Gamma\dot{R}$ . Рождение частиц произвольным потенциалом в уравнении Клейна–Гордона вычислено в работах [175, 176] в однопетлевом приближении. Результаты этой работы были модифицированы для случая рождения частиц скаляром кривизны в нашей статье [126]. Обычно однопетлевые эффекты в рождении частиц приводят к нелокальному по времени интегродифференциальному уравнению, но в случае строго гармонических колебаний уравнение можно свести к простому дифференциальному уравнению с членом жидкого трения  $\Gamma\dot{R}$ . В рассматриваемом нами случае потенциал является гармоническим, и можно использовать приближение жидкого трения. Скорость рождения частиц, вычисленная в нашей работе [126] (см. также предшествующие работы [123–125]), равна

$$\Gamma = \frac{m^3}{48M_{\text{Pl}}^2}. \quad (2.13)$$

Соответственно, уравнение (2.12) приобретает дополнительное слагаемое, описывающее жидкое трение, и превращается в

$$\ddot{R} + (3H + \Gamma)\dot{R} + m^2R = -\frac{8\pi m^2}{M_{\text{Pl}}^2}(1 - 3w)\rho. \quad (2.14)$$

Рождение частиц приводит также к появлению источника в уравнении (2.9):

$$\dot{\rho} = -3H(1 + w)\rho + \frac{mR_{\text{ampl}}^2}{1152\pi}, \quad (2.15)$$

где  $R_{\text{ampl}}$  — амплитуда  $R(t)$ -осцилляций (см. [125, 126]). Для простоты мы считаем, что рожденные частицы являются безмассовыми скалярами, хотя это не обязательно так. Если рожденные частицы строго безмассовые или очень

легкие, то Вселенная будет заполнена релятивистской материей. Однако если масса частицы сравнима с  $m/2$  (но немного меньше ее), то для ширины распада скалярона применимо практически то же выражение (2.13) с небольшим подавлением за счет фазового объема, пропорционального  $\sqrt{1 - 4m_0^2/m^2}$ , где  $m_0$  — масса частицы, рожденной в процессе распада. Например, для  $m_0 = 0,4m$  подавление составляет 0,6. Частицы более высокой массы могут рождаться непертурбативно, как описано в статьях, процитированных перед уравнением (2.13).

Состояние космологической материи зависит не только от спектра продуктов распада, но также от тепловой истории рожденных частиц. В зависимости от этого параметр  $w$  может не быть точно равным 0 или  $1/3$ , а уравнение состояния может не быть таким простым. Может даже оказаться, что оно не описывается постоянным  $w$ . Мы берем два предельных значения  $w = 0$  и  $1/3$  как простые возможные примеры. Другие значения  $w$  не изменят представленные результаты значительно. Так как спектр элементарных частиц очень высоких масс неизвестен, нет смысла проводить детальный количественный анализ состояния космологической материи, но, конечно, оно находилось бы где-то между  $w = 1/3$  и  $w = 0$ .

Удобно ввести безразмерное «время» и безразмерные функции:

$$\tau = tm, \quad H = mh, \quad R = m^2r, \quad \rho = m^4y, \quad \Gamma = m\gamma. \quad (2.16)$$

Уравнения (2.8), (2.14) и (2.15) теперь принимают вид

$$h' + 2h^2 = -r/6, \quad (2.17)$$

$$r'' + (3h + \gamma)r' + r = -8\pi\mu^2(1 - 3w)y, \quad (2.18)$$

$$y' + 3(1 + w)hy = S[r], \quad (2.19)$$

где штрих означает производную по  $\tau$ ,  $\mu = m/M_{\text{Pl}}$ ,  $\gamma = \mu^2/48$ , и источник  $S[r]$  берется в виде

$$S[r] = \frac{\langle r^2 \rangle}{1152\pi}. \quad (2.20)$$

Влияние этого члена на эволюцию скаляра кривизны не учитывалось должным образом в предыдущих работах. Здесь  $\langle r^2 \rangle$  означает квадрат амплитуды гармонических осцилляций,  $r_{\text{amp}}^2$ , безразмерной кривизны  $r(\tau)$  (см. (2.15)). Однако  $r(\tau)$  не всегда осциллирует гармонически. В этом случае мы аппроксимируем  $\langle r^2 \rangle$  как  $2\langle r' \rangle^2$  или  $(-2r''r)$ . Для гармонических осцилляций эти выражения, усредненные по периоду колебаний, совпадают с  $r_{\text{amp}}^2$ .

Функция  $\langle r^2 \rangle$  медленно меняется со временем. Строго говоря, такой способ описания рождения частиц применим только на стадии, когда  $r(\tau)$  является гармонически осциллирующей функцией с медленно меняющейся амплитудой. Очевидно, это несправедливо во время инфляции. В принципе, такой

источник может быть включен после завершения инфляции. Однако окончательный результат для  $y$  (или  $\rho$ ) не зависит от истории рождения частиц. Причина этого следующая: во время инфляции плотность энергии обычной материи очень быстро падает из-за быстрого расширения Вселенной, и мы приходим к моменту начала разогрева Вселенной с примерно тем же, ничтожно малым, значением  $y$  (или  $\rho$ ). Ниже мы продемонстрируем численно, что это действительно так с очень хорошей точностью.

Мы проверим совместность уравнений (2.13) и (2.20) в п. 2.1.1, где покажем, что рождение частиц за счет распада скалярона дает необходимый приток энергии,  $S[r]$ , в космическую плазму.

В дальнейшем мы решаем систему уравнений (2.17)–(2.19) численно и сравниваем численные решения с аналитическим асимптотическим разложением при  $\tau \gg 1$ . Согласно получается идеальное. Это позволяет использовать аналитические асимптотические выражения в тех случаях, когда численные расчеты становятся ненадежными.

**2.1.1. Решение ab ovo до  $\gamma\tau \lesssim 1$ . Решение в эпоху инфляции.** Представим численные и аналитические решения уравнений (2.17)–(2.19), стартуя «с самого начала», т. е. с инфляционной стадии вплоть до высоких  $\tau$  ( $\tau \gg 1$ ), но малых  $\gamma\tau \lesssim 1$ . Начальные условия следует выбрать таким образом, чтобы показатель инфляционной экспоненты был не меньше 70:

$$N_e = \int_0^{\tau_{\text{inf}}} h d\tau \geq 70, \quad (2.21)$$

где  $\tau_{\text{inf}}$  — время окончания инфляции. Это может быть достигнуто, если начальное значение  $r$  достаточно велико, практически независимо от начальных значений  $h$  и  $y$ .

Следуя работам [33, 173] (см. также последующую статью [177]), мы можем грубо оценить продолжительность инфляции, пренебрегая высшими производными в уравнениях (2.17) и (2.18) и считая, что плотность энергии обычной материи равна нулю ( $y = 0$ ), а  $\gamma$  пренебрежимо мало. Последнее выполняется естественным образом, если  $m < M_{\text{Pl}}$ . Тогда мы приходим к упрощенной системе уравнений:

$$h^2 = -r/12, \quad (2.22)$$

$$3hr' = -r. \quad (2.23)$$

Эти уравнения имеют решение

$$\sqrt{-r(\tau)} = \sqrt{-r_0} - \tau/\sqrt{3}, \quad (2.24)$$

где  $r_0$  — начальное значение  $r$  при  $\tau = 0$ . Согласно (2.22), параметр Хаббла меняется как  $h(\tau) = (\sqrt{-3r_0} - \tau)/6$ . Длительность инфляции грубо определяется условием  $h = 0$ , т. е.  $\tau_{\text{inf}} = \sqrt{-3r_0}$ . Показатель инфляционной

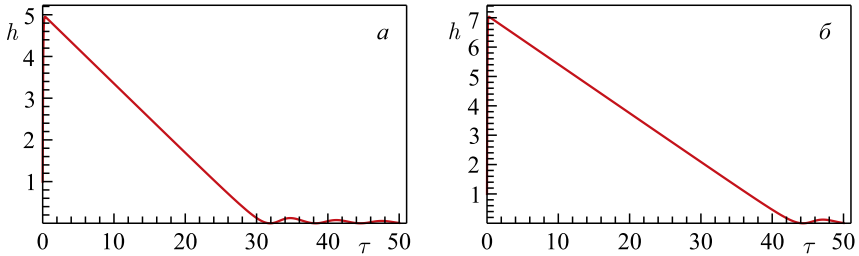


Рис. 6. Эволюция  $h(\tau)$  на инфляционной стадии с начальными значениями безразмерной кривизны  $r = 300$  (а) и  $600$  (б). Исходно  $h$  берется равным нулю,  $h_{in} = 0$ , но быстро достигает значения, определяемого уравнением (2.22),  $h(0) = \sqrt{-r_0/12}$ . Показатели экспоненты, согласно (2.21), равны 75 и 150 соответственно

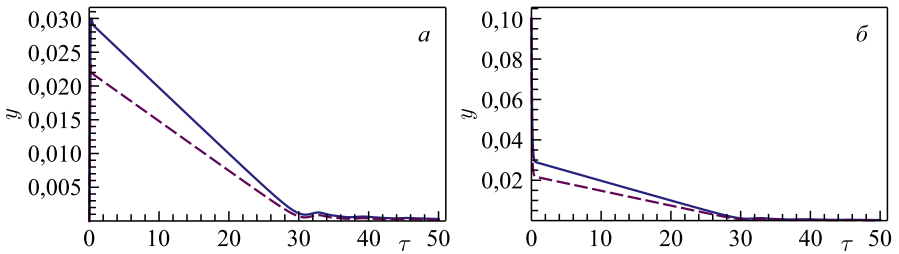


Рис. 7. Эволюция безразмерной плотности энергии материи во время инфляции для  $w = 0$  (сплошная линия) и  $w = 1/3$  (штриховая). а)  $y_{in} = 0$ ; б)  $y_{in} = 0,1$ . Результаты нечувствительны к виду  $S[r]$ , поскольку при инфляции  $y(\tau)$  быстро стремится к нулю

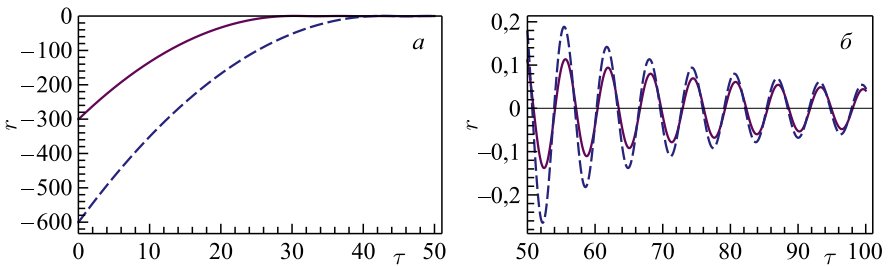


Рис. 8. Эволюция безразмерного скаляра кривизны для  $r_{in} = -300$  (сплошная кривая) и  $r_{in} = -600$  (штриховая). а) Эволюция во время инфляции; б) эволюция после окончания инфляции, скаляр кривизны осциллирует

экспоненты равен площади треугольника под прямой  $h(\tau)$ , откуда  $N_e \approx r_0/4$ . Превосходное согласие с численными решениями уравнений (2.17)–(2.19), проиллюстрированное на рис. 6, демонстрирует высокую точность при-



ближения «медленного скатывания» и слабое влияние рождения частиц на (квази)инфляционной стадии.

Численные результаты не чувствительны ни к начальным значениям параметра Хаббла и плотности энергии обычной материи, ни к параметру  $w$ , поскольку при инфляции плотность энергии любой формы материи быстро стремится к нулю для любых начальных значений. Это утверждение проиллюстрировано на рис. 7.

Эволюция безразмерного скаляра кривизны  $r$  в течение инфляции и после ее окончания представлена на рис. 8.

*Численные решения в постинфляционную эпоху.* Поведение  $R$ ,  $H$  и  $\rho$  или безразмерных величин  $r$ ,  $h$  и  $y$  сильно различается на стадии доминирования вакуумоподобной материи (инфляции) и на стадии доминирования нерелятивистского вещества, наступающей позже. Найдем теперь законы эволюции  $r(\tau)$ ,  $h(\tau)$  и  $y(\tau)$  после инфляции до времен, удовлетворяющих условию  $\gamma\tau \sim 1$ . Численные решения будут представлены с момента окончания инфляции до больших  $\tau \gg 1$ , но не слишком больших, поскольку численная процедура для огромных  $\tau \sim 1/\gamma$  становится неустойчивой. Однако можно найти достаточно точные аналитические решения, асимптотически верные при любых  $\tau$ , вплоть до  $\tau \sim 1/\gamma$ . Очень хорошее согласие между численными и аналитическими решениями при больших, но не огромных  $\tau$  позволяет доверять асимптотическому аналитическому решению при очень больших  $\tau$ .

Численные решения системы уравнений (2.17)–(2.19) приведены на рис. 9–11 для больших  $\mu = m/M_{\text{Pl}} = 0,1$ . На рис. 9 безразмерная кривизна представлена для разных начальных значений  $r_{\text{in}} = -300$  и  $r_{\text{in}} = -600$  и различных уравнений состояния  $w = 1/3$  (релятивистская материя) и  $w = 0$  (нерелятивистская материя). Безразмерное время берется большим,  $\tau \gg 1$ , но все еще  $\gamma\tau < 1$ . Вклад рождения частиц в  $\rho$  (или в  $y$ ) аппроксимирован

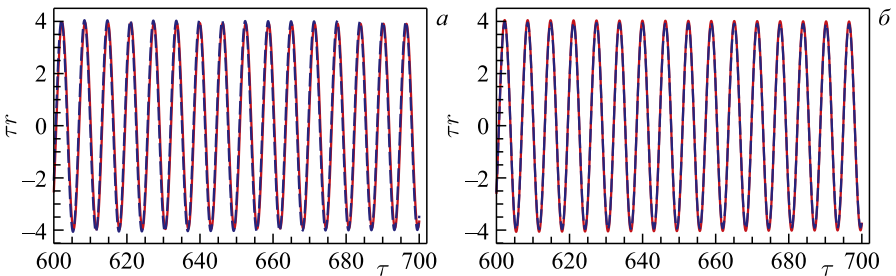


Рис. 9. Эволюция безразмерного скаляра кривизны  $\tau r(\tau)$  в постинфляционную эпоху. а)  $w = 1/3$ :  $r_{\text{in}} = -300$  (сплошная кривая),  $r_{\text{in}} = -600$  (штриховая). Не видно никакой разницы между кривыми. б)  $r_{\text{in}} = -300$ :  $w = 1/3$  (сплошная кривая) и  $w = 0$  (штриховая). Разница между кривыми ничтожно мала

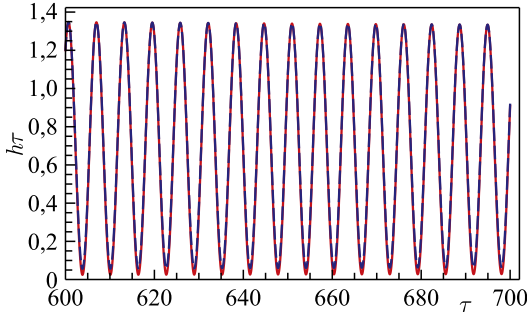


Рис. 10. Эволюция безразмерного параметра Хаббла  $h\tau$  в постинфляционную эпоху для  $w = 1/3$  (сплошная кривая) и  $w = 0$  (штриховая)

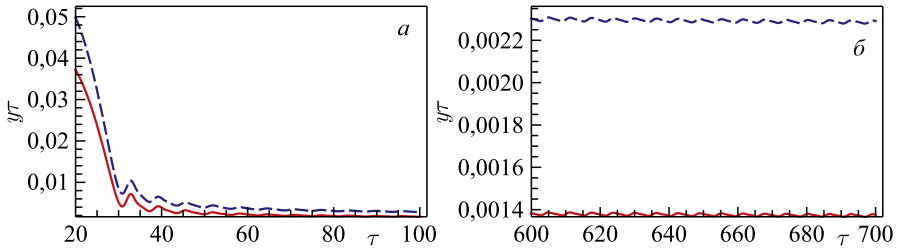


Рис. 11. Эволюция безразмерной плотности энергии материи  $y\tau$  при малых  $\tau$  (а) и при больших  $\tau$  (б) для  $w = 1/3$  (сплошная кривая) и  $w = 0$  (штриховая)

как  $(r')^2/(576\pi)$ , см. (2.19), (2.20). Здесь мы учли фактор 2, возникший, поскольку среднее значение  $\sin^2 \tau$  равно  $1/2$ . Интересно, что амплитуда  $r_{\text{amp}}\tau \rightarrow \text{const}$ . Видно, что для больших  $\tau$  результат не зависит от начального значения  $r$  и очень слабо зависит от  $w$ .

На рис. 10 эволюция безразмерного параметра Хаббла изображена для  $w = 1/3$  (сплошная линия) и  $w = 0$  (штриховая). Зависимость от  $w$  почти не видна, за исключением значений  $h$ , близких к нулю.

На рис. 11 представлена безразмерная плотность энергии материи  $y$  как функция времени для  $w = 1/3$  (сплошная линия) и  $w = 0$  (штриховая). Поведение  $y$  (или  $\rho$ ) для этих двух значений  $w$  сильно различается, в отличие от других рассмотренных величин,  $r$  и  $h$ , которые слабо зависят от  $w$ . Интересно, что произведение  $y\tau$  стремится к постоянной величине при увеличении  $\tau$ , пока  $\gamma\tau$  остается малым. Справедливость этого утверждения нами проверена до  $\tau = 5000$  при  $\mu = 0,01$ . Такое поведение сильно отличается от эволюции плотности вещества в стандартной космологии, когда  $\rho \sim 1/t^2$ .

Видно, что численные решения имеют очень простой вид для больших  $\tau$ , а именно:  $r$  осциллирует вокруг нуля с амплитудой, падающей как  $1/\tau$ , в то

время как  $h$  осциллирует, почти касаясь нуля, вокруг постоянного значения, близкого к  $2/3$ , с амплитудой, также падающей как  $1/\tau$ . Такое простое поведение указывает на то, что должны существовать простые аналитические выражения для решений при больших  $\tau$ . Эти решения будут получены ниже.

*Аналитическое поведение решений при  $\tau \gg 1$  и  $w = 1/3$ .* Начнем с более простого случая  $w = 1/3$ . При этом система уравнений (2.17)–(2.19) принимает вид

$$h' + 2h^2 = -r/6, \quad (2.25)$$

$$r'' + 3hr' + r = 0, \quad (2.26)$$

$$y' + 4hy = \frac{\langle r^2 \rangle}{1152\pi}, \quad (2.27)$$

так что система эффективно сводится к двум уравнениям для  $h$  и  $r$ , а  $y$  можно найти, если  $h$  и  $r$  известны. Уравнение для  $y$  можно решить либо численно, либо представить решение в квадратурах. В (2.26) мы пренебрегли  $\gamma$  по сравнению с  $h$ , так как, по предположению, мы ограничиваемся пределом  $\gamma\tau \lesssim 1$ . Случай  $\gamma\tau \gtrsim 1$  будет рассмотрен в п. 2.1.1.

Основываясь на численном решении, мы ищем асимптотическое разложение  $h$  и  $r$  при  $\tau \gg 1$  в виде

$$r = \frac{r_1 \cos(\tau + \theta_r)}{\tau} + \frac{r_2}{\tau^2}, \quad (2.28)$$

$$h = \frac{h_0 + h_1 \sin(\tau + \theta_h)}{\tau}. \quad (2.29)$$

Здесь  $r_j$  и  $h_j$  — некоторые постоянные коэффициенты, которые вычисляются из уравнений (2.25) и (2.26), а постоянные фазы  $\theta_j$  определяются начальными условиями и корректируются сравнением асимптотического решения с численным.

Подставляя выражения (2.28) и (2.29) в правую часть уравнения (2.25), получаем

$$h' = -\frac{2[h_0 + h_1 \sin(\tau + \theta_h)]^2}{\tau^2} - \frac{1}{6} \left( \frac{r_1 \cos(\tau + \theta_r)}{\tau} + \frac{r_2}{\tau^2} \right), \quad (2.30)$$

где  $h'$  находим дифференцированием уравнения (2.29):

$$h' = \frac{h_1 \cos(\tau + \theta_h)}{\tau} - \left[ \frac{h_0 + h_1 \sin(\tau + \theta_h)}{\tau^2} \right]. \quad (2.31)$$

Приравнивая коэффициенты при  $1/\tau$  и  $1/\tau^2$ , получим, соответственно, уравнения

$$h_1 = -\frac{r_1}{6}, \quad \theta_h = \theta_r \equiv \theta, \quad (2.32)$$

$$h_0 + h_1 \sin(\tau + \theta_h) = 2[h_0 + h_1 \sin(\tau + \theta_h)]^2 + \frac{r_2}{6}. \quad (2.33)$$

Пренебрегая осциллирующими слагаемыми с синусом, которые обращаются в нуль при усреднении, и считая, что среднее от  $\sin^2(\tau + \theta)$  равно  $1/2$ , находим

$$h_0 = 2h_0^2 + h_1^2 + r_2/6. \quad (2.34)$$

Аналогичным образом используем уравнение (2.26) для  $r$ . Для этой цели вычислим производные от выражения (2.28), чтобы определить  $r'$  и  $r''$ :

$$r' = -\frac{r_1 \sin(\tau + \theta_r)}{\tau} - \frac{r_1 \cos(\tau + \theta_r)}{\tau^2} - \frac{2r_2}{\tau^3}, \quad (2.35)$$

$$r'' = -\frac{r_1 \cos(\tau + \theta_r)}{\tau} + \frac{2r_1 \sin(\tau + \theta_r)}{\tau^2} + \frac{2r_1 \cos(\tau + \theta_r)}{\tau^3} + \frac{6r_2}{\tau^4}. \quad (2.36)$$

Подставляя теперь выражения для  $r$ ,  $r'$ ,  $r''$  и  $h$  в уравнение (2.26), приходим к

$$\begin{aligned} & -\frac{r_1 \cos(\tau + \theta)}{\tau} + \frac{2r_1 \sin(\tau + \theta)}{\tau^2} + \frac{2r_1 \cos(\tau + \theta)}{\tau^3} + \frac{6r_2}{\tau^4} - \\ & - 3 \left[ \frac{r_1 \sin(\tau + \theta)}{\tau} + \frac{r_1 \cos(\tau + \theta)}{\tau^2} + \frac{2r_2}{\tau^3} \right] \left( \frac{h_0 + h_1 \sin(\tau + \theta)}{\tau} \right) + \\ & + \frac{r_1 \cos(\tau + \theta)}{\tau} + \frac{r_2}{\tau^2} = 0. \quad (2.37) \end{aligned}$$

Ведущие члены, пропорциональные  $\tau^{-1}$ , сокращаются. Члены порядка  $\tau^{-2}$  дают

$$h_0 = 2/3 \quad \text{и} \quad r_2 = 3h_1 r_1/2. \quad (2.38)$$

Здесь, как и выше, мы берем  $\sin^2(\tau + \theta) = 1/2$ . Используя (2.32) и (2.34), находим

$$h_1 = 2/3 \quad \text{и} \quad r_1 = r_2 = -4, \quad (2.39)$$

так что окончательно

$$h = \frac{2}{3\tau} [1 + \sin(\tau + \theta)], \quad (2.40)$$

$$r = -\frac{4 \cos(\tau + \theta)}{\tau} - \frac{4}{\tau^2}. \quad (2.41)$$

Как уже отмечалось выше, эти решения следуют из выведенного в статье [33] выражения (2.2) для эволюции космологического масштабного фактора при больших  $mt$ . Влияние рождения частиц, справедливо опущенное в [33], на данном этапе оказывается незначительным.

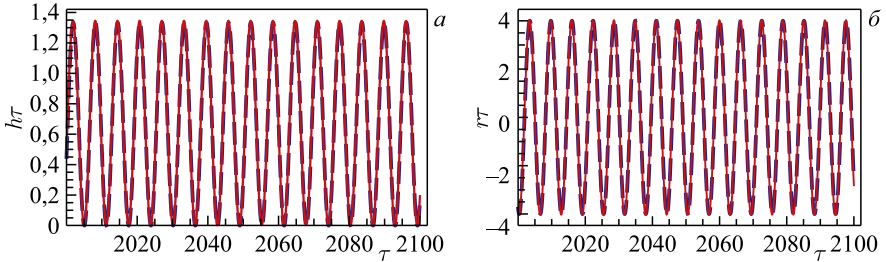


Рис. 12. а) Сравнение численного решения  $h\tau$  (сплошная кривая) с аналитической оценкой (2.40) (штриховая). б) То же для численно полученного  $r\tau$  и аналитического результата (2.41). Не видно никакой разницы между сплошными и штриховыми кривыми

На рис. 12 численные решения для  $h$  и  $r$  сравниваются с аналитическими оценками (2.40) и (2.41) соответственно. Для совпадения численных и аналитических кривых полагаем фазу  $\theta$  равной  $\theta = -2,9\pi/4$ , одинаково для  $h$  и  $r$ . Значение фазы зависит от начальных условий для  $h$  и  $r$  до инфляции и эквивалентно выбору начального момента времени.

Вернемся теперь к решению уравнения (2.27), полагая, что  $h$  и  $r$  имеют асимптотическую форму (2.40) и (2.41). Заметим, что в правой части (2.27)  $\langle r^2 \rangle$  можно понимать как квадрат амплитуды гармонических осцилляций  $r$ , т. е.  $\langle r^2 \rangle = 16/\tau^2$ . Уравнение (2.27) можно проинтегрировать аналитически, получая

$$y(\tau) = \frac{1}{72\pi} \int_{\tau_0}^{\tau} \frac{d\tau_2}{\tau_2^2} \exp \left[ -4 \int_{\tau_2}^{\tau} d\tau_1 h(\tau_1) \right], \quad (2.42)$$

где  $\tau_0 \ll \tau$  есть некоторое начальное значение безразмерного времени. Асимптотический результат слабо зависит от  $\tau_0$ .

Подставляя  $h(\tau)$  из (2.40), можно частично провести интегрирование по  $d\tau_1$ :

$$\int_{\tau_2}^{\tau} d\tau_1 h(\tau_1) = \frac{2}{3} \ln \frac{\tau}{\tau_2} + \int_{\tau_2}^{\tau} \frac{d\tau_1}{\tau_1} \sin(\tau_1 + \theta). \quad (2.43)$$

Удобно ввести новые переменные интегрирования:

$$\eta_1 = \tau_1/\tau, \quad \eta_2 = \tau_2/\tau. \quad (2.44)$$

В терминах этих переменных получаем

$$y(\tau) = \frac{1}{72\pi\tau} \int_{\eta_0}^1 d\eta_2 \eta_2^{2/3} \exp \left[ -\frac{8}{3} \int_{\eta_2}^1 \frac{d\eta_1}{\eta_1} \sin(\tau\eta_1 + \theta) \right]. \quad (2.45)$$

Как будет видно ниже, интеграл в показателе экспоненты является малым, поэтому экспоненциальный фактор в (2.45) близок к единице, и, таким образом, доминантной асимптотикой является  $y(\tau) \sim 1/(120\pi\tau)$ . Осциллирующие поправки более высокого порядка оценим следующим образом. Для вычисления асимптотики интеграла

$$I = \int_{\eta_2}^1 \frac{d\eta_1}{\eta_1} \sin(\tau\eta_1 + \theta) \quad (2.46)$$

при больших  $\tau$  представим осциллирующий фактор в виде

$$\sin(\tau\eta_1 + \theta) = \frac{1}{2i} \left[ e^{i(\tau\eta_1 + \theta)} - e^{-i(\tau\eta_1 + \theta)} \right]. \quad (2.47)$$

Интеграл по  $\eta_1$  вдоль действительной оси от  $\eta_2$  до 1 может быть сведен к двум интегралам по  $\zeta$  от 0 до  $\infty$  вдоль  $\eta_1 = \eta_2 \pm i\zeta$  и  $\eta_1 = 1 \pm i\zeta$ . Знаки перед  $i\zeta$  выбираются таким образом, чтобы соответствующие экспоненты в уравнении (2.47) обращались в нуль на бесконечности. Окончательно получаем

$$I = \int_0^\infty d\zeta e^{-\tau\zeta} \left[ \frac{\eta_2 \cos(\tau\eta_2 + \theta) + \zeta \sin(\tau\eta_2 + \theta)}{\eta_2^2 + \zeta^2} - \frac{\cos(\tau + \theta) + \zeta \sin(\tau + \theta)}{1 + \zeta^2} \right]. \quad (2.48)$$

Эффективное значение  $\zeta$  в этом интеграле, очевидно,  $\sim 1/\tau$ , поэтому интеграл  $I$  обратно пропорционален  $\tau$  в ведущем порядке. При больших  $\tau$  он заметно меньше единицы, так что можно разложить экспоненциальный фактор  $e^{-8I/3}$  в (2.45) до первого порядка, получая

$$y_{1/3} = \frac{1}{120\pi\tau} + \frac{1}{45\pi} \frac{\cos(\tau + \theta)}{\tau^2} - \frac{1}{27\pi\tau^2} \int_\epsilon^1 \frac{d\eta_2}{\eta_2} \cos(\tau\eta_2 + \theta), \quad (2.49)$$

где нижний индекс  $1/3$  показывает, что  $w = 1/3$ , а  $\epsilon = \tau_0/\tau \ll 1$ . Последний интеграл пропорционален  $1/\tau^{2/3}$  и является малым по сравнению с остальными слагаемыми. В дальнейшем мы им пренебрегаем.

На рис. 13 безразмерная плотность энергии  $120\pi\tau y(\tau)$  представлена как результат численного расчета интеграла (2.45), эквивалентного интегралу (2.42) (сплошная линия), являющегося точным решением дифференциального уравнения (2.27). Это решение сравнивается с аналитическим асимптотическим разложением (2.49) того же интеграла (2.42) (штриховая линия). Видно, что согласие очень хорошее.

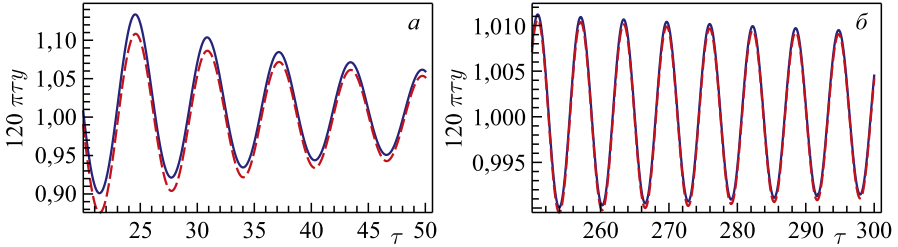


Рис. 13. Сравнение численного решения для безразмерной плотности энергии  $120\pi\tau y(\tau)$  (сплошная линия) для  $w = 1/3$  с асимптотическим выражением (2.49) (штриховая) для умеренно больших  $\tau$  (а) и для очень больших  $\tau$  (б)

Асимптотическое решение для  $\tau \gg 1$ ,  $\gamma\tau \lesssim 1$  и  $w = 0$ . Если  $w = 0$ , уравнения (2.17)–(2.19) принимают следующий вид:

$$h' + 2h^2 = -r/6, \tag{2.50}$$

$$r'' + 3hr' + r = -8\pi\mu^2y, \tag{2.51}$$

$$y' + 3hy = S[r]. \tag{2.52}$$

Так как  $\mu \ll 1$ , влияние правой части в (2.51) не является существенным, и можно использовать (2.40) и (2.41) для  $h$  и  $r$  из предыдущего подраздела. Более того, численные решения, представленные на рис.9 и 10, подтверждают это предположение. Единственное существенное отличие от случая  $w = 1/3$  возникает в уравнении (2.52), определяющем эволюцию плотности энергии. Поэтому для вычисления  $y(\tau)$  можно использовать слегка измененные результаты предыдущего подраздела. При решении (2.52) воспользуемся выражением (2.42), заменяя в экспоненте коэффициент  $(-4)$  на  $(-3)$ :

$$y(\tau) = \frac{1}{72\pi} \int_{\tau_0}^{\tau} \frac{d\tau_2}{\tau_2^2} \exp \left[ -3 \int_{\tau_2}^{\tau} d\tau_1 h(\tau_1) \right]. \tag{2.53}$$

Повторяя те же вычисления, что и в предыдущем подразделе, получим вместо (2.49)

$$y_0 = \frac{1}{72\pi\tau} + \frac{\cos(\tau + \theta)}{36\pi\tau^2}. \tag{2.54}$$

Полезно сравнить численные расчеты интеграла (2.53) с его асимптотическим выражением (2.54). Как видно на рис. 14, согласие очень хорошее.

*Приток энергии в космологическую плазму от распада скалярона.* Закон сохранения энергии требует, чтобы приток энергии в космологическую

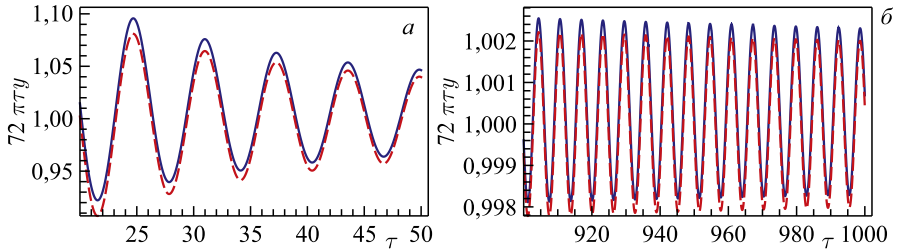


Рис. 14. Сравнение решений дифференциального уравнения (2.52) при  $w = 0$ : интегральное решение (2.53) (сплошная кривая) и асимптотическое решение (2.54) (штриховая). Безразмерная плотность энергии  $72\pi\tau y(\tau)$  представлена для умеренно больших  $\tau$  (а) и для очень больших  $\tau$  (б). Согласие очень хорошее

плазму, согласно уравнению (2.20), был обеспечен распадом скалярона с шириной  $\Gamma$  (2.13). Чтобы это проверить, рассмотрим упрощенную модель с действием скалярного поля  $R$  вида

$$A_R = \frac{M_{\text{Pl}}^2}{48\pi m^4} \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{(DR)^2}{2} - \frac{m^2 R^2}{2} - \frac{8\pi m^2}{M_{\text{Pl}}^2} T_\mu^\mu R \right], \quad (2.55)$$

приводящим к нужным уравнениям движения (2.10). Чтобы найти плотность энергии поля скалярона, нужно переопределить это поле таким образом, чтобы кинетический член нового поля входил в действие с коэффициентом  $1/2$ . Поэтому канонически нормированное скалярное поле будет

$$\Phi = \frac{M_{\text{Pl}}}{\sqrt{48\pi m^2}} R. \quad (2.56)$$

Соответственно, плотность энергии поля скалярона равна

$$\rho_R = \frac{\dot{\Phi}^2 + m^2 \Phi^2}{2} = \frac{M_{\text{Pl}}^2 (\dot{R}^2 + m^2 R^2)}{96\pi m^4}. \quad (2.57)$$

Скорость рождения частиц дается выражением

$$\dot{\rho}_R = 2\Gamma \rho_R = \frac{\dot{R}^2 + m^2 R^2}{2304\pi m} = \frac{m^3}{72\pi t^2}. \quad (2.58)$$

Коэффициент 2 перед  $\Gamma$  возникает из-за того, что при распаде скалярона рождается пара частиц. Мы берем  $\Gamma$  из (2.13), для  $R$  используем выражение (2.41) и дифференцируем только быстро осциллирующий фактор.

Сравним результат (2.58) с уравнением (2.20), полагая амплитуду гармонических осцилляций  $R$  равной  $R_{\text{ampl}} = 4m/t$  согласно (2.41). Соответственно, вклад рождения частиц в (2.15) будет точно таким же, как выше,



что и следовало ожидать:

$$\dot{\rho}_{\text{source}} = \frac{mR_{\text{ampl}}^2}{1152\pi} = \frac{m^3}{72\pi t^2}. \quad (2.59)$$

Здесь следует сделать одно замечание. Выше, при решении уравнений для эволюции  $R$  и  $\rho$ , мы пренебрегли влиянием рождения частиц на  $R$ , но учитывали это влияние в уравнении для  $\dot{\rho}$ , несмотря на то, что оба эти эффекта имеют сходные величины. Причиной такого приближения является то, что плотность энергии скалярных колебаний  $\rho_R$  (2.57) велика, и уменьшение  $\rho_R$  за счет рождения частиц действительно не является важным, в то время как космологическая плазма полностью создается источником (2.59).

*Обсуждение космологической эволюции при  $\tau \lesssim 1/\gamma$ .* Полученные выше результаты показывают, что космологическая эволюция в  $R^2$ -гравитации сильно отличается от обычной космологии Фридмана. Во-первых, плотность энергии материи в  $R^2$ -модифицированной гравитации на радиационно-доминированной стадии падает как (см. (2.49))

$$\rho_{R^2} = \frac{m^3}{120\pi t} \quad (2.60)$$

вместо классического поведения в общей теории относительности, где

$$\rho_{\text{GR}} = \frac{3H^2 M_{\text{Pl}}^2}{8\pi} = \frac{3M_{\text{Pl}}^2}{32\pi t^2}. \quad (2.61)$$

Во-вторых, параметр Хаббла быстро осциллирует со временем (2.40), почти достигая нуля, практически одинаково на релятивистской стадии (доминирования излучения) и на нерелятивистской (стадии доминирования вещества). И последнее, но не менее важное: скаляр кривизны падает как  $m/t$  и осциллирует с меняющимся знаком (2.41), не являясь пропорциональным следу тензора энергии-импульса вещества, тождественно равному нулю на релятивистской стадии и монотонно убывающему со временем как  $1/t^2$  на стадии доминирования вещества. Стоит отметить, что связь скаляра кривизны  $R$  с плотностью энергии вещества не такая, как в ОТО.

Из-за перечисленных различий между космологической эволюцией в  $R^2$ -теории и ОТО условия теплового равновесия в первичной плазме также очень сильно различаются. Предполагая, что установлено равновесие при температуре  $T$ , скорость реакции частиц оценим как

$$\Gamma_{\text{part}} \sim \alpha^2 T, \quad (2.62)$$

где  $\alpha$  — константа связи взаимодействия частиц, обычно  $\alpha \sim 10^{-2}$ . Равновесие поддерживается, если  $\Gamma_{\text{part}} > H$  или  $\alpha^2 T t > 1$ . Плотность энергии

релятивистского вещества в тепловом равновесии выражается через температуру следующим образом:

$$\rho_{\text{therm}} = \frac{\pi^2 g_*}{30} T^4, \quad (2.63)$$

где  $g_*$  — число типов релятивистских частиц в плазме. Мы берем  $g_* \sim 100$ .

Используя уравнения (2.60) и (2.63), находим, что условие равновесия для  $R^2$ -космологии имеет вид

$$(\alpha^2 t T)_{R^2} = \frac{30\alpha^2}{120\pi^3 g_*} \left(\frac{m}{T}\right)^3 = 8 \cdot 10^{-9} \left(\frac{m}{T}\right)^3 > 1. \quad (2.64)$$

Аналогично из (2.61) и (2.63) следует, что для ОТО-космологии

$$(\alpha^2 t T)_{\text{GR}} = \alpha^2 \left(\frac{90}{32\pi^3 g_*}\right)^{1/2} \frac{M_{\text{Pl}}}{T} = 3 \cdot 10^{-6} \frac{M_{\text{Pl}}}{T} > 1. \quad (2.65)$$

Соответственно, равновесие между легкими частицами в  $R^2$ -космологии устанавливается, когда  $T_{R^2} < 2 \cdot 10^{-3} m$ , тогда как в ОТО соответствующее условие есть  $T_{\text{GR}} < 3 \cdot 10^{-6} M_{\text{Pl}}$ .

Подчеркнем, что выражения (2.64) и (2.65) определяют температуру, ниже которой в первичной плазме устанавливается тепловое равновесие. Эта температура не совпадает с так называемой температурой нагрева  $T_h$ . Последняя определяется условием, что вся энергия скалярного поля передается в энергию плазмы. Это происходит приблизительно при  $t\Gamma = 1$ . Соответственно,

$$T_h \approx \frac{m}{(192\pi^3)^{1/4}} \sqrt{\frac{m}{M_{\text{Pl}}}}. \quad (2.66)$$

Для  $m = 3 \cdot 10^{13}$  ГэВ температура нагрева  $T_h \approx 6 \cdot 10^8$  ГэВ, что близко к другим оценкам, представленным в литературе. Если учесть возможную задержку распада скалярона на  $\ln(m/\Gamma)$ -фактор (см. самый конец п. 2.1.2),  $T_h$  будет немного ниже.

Заметим, что при инфляции кривизна  $R(t)$  не осциллировала. Рождение частиц началось после начала осцилляций при  $t \gg 1/m$ . Таким образом, плотность энергии космологической плазмы никогда не превышала  $m^4/(120\pi)$ , и, соответственно, ее температура ограничена условием  $T_{R^2} \lesssim 0,01m$ . Кроме того, энергия отдельных частиц, порождаемых осцилляциями скалярона, а также их массы должны быть меньше  $m/2$ . Этот факт, в частности, открывает возможность получить частицы темной материи из легчайших суперсимметричных частиц (LSP). Согласно данным Большого адронного коллайдера (см. разд. 110 «Supersymmetry», Part II «Experiment»

в [83]), масса LSP должна быть выше нескольких тераэлектронвольт. В таком случае космологическая энергия LSP будет намного выше, чем наблюдаемая плотность темной материи, если LSP рождены тепловым образом. В  $R^2$ -космологии рождение тяжелых LSP может быть достаточно сильно подавлено для  $m_{\text{LSP}} > m$ , поэтому плотность энергии LSP может быть достаточно низкой.

$R^2$ -космология может также заметно изменить вероятность образования первичных черных дыр и предсказания для высокотемпературного бариогенезиса, в частности для бариогенезиса, происходящего посредством лептогенезиса.

**2.1.2. Решение при  $\gamma\tau \gtrsim 1$ .** Рассмотрим систему уравнений (2.17)–(2.19). К сожалению, прямое численное решение этой системы быстро становится неустойчивым и неверным, поскольку стандартная программа «Mathematica» не может правильно учесть очень малый подавляющий экспоненциальный фактор  $\exp(-\gamma\tau/2)$  при  $\gamma\tau \gg 1$ . Поэтому нужно действовать иным образом. Сначала, как и в п. 2.1.1, рассмотрим случай релятивистской материи, т. е.  $w = 1/3$ . Исключим первую производную  $r'$  из уравнения (2.18), вводя новую функцию  $v$ :

$$r = \exp \left[ -\frac{\gamma(\tau - \tau_0)}{2} - \frac{3}{2} \int_{\tau_0}^{\tau} d\tau_1 h(\tau_1) \right] v. \quad (2.67)$$

Тогда приходим к уравнению

$$v'' + \left[ 1 - \frac{(\gamma + 3h)^2}{4} \right] v = 0. \quad (2.68)$$

Так как в реалистичном случае  $\gamma \ll 1$  и  $h \lesssim \gamma$ , поскольку  $h \sim 1/\tau$ , и, по предположению  $\gamma\tau \gtrsim 1$ , вторым слагаемым в квадратных скобках можно пренебречь. При этом уравнение (2.68) легко решается, что дает

$$v = v_0 \cos(\tau - \tau_0 + \theta_v), \quad (2.69)$$

где амплитуду  $v_0$  можно приближенно найти, требуя совпадения решения (2.67) с выражением (2.41) при  $\gamma\tau_0 \sim 1$ . Тогда получаем

$$v = -4\gamma \cos(\tau + \theta). \quad (2.70)$$

Как видно из (2.67), кривизна  $r$  экспоненциально спадает до нуля при больших  $\gamma\tau/2$ . При этом правая часть уравнения (2.17) стремится к нулю с той же скоростью, а параметр Хаббла приближается к значению  $1/(2\tau)$ , как это имеет место в стандартной космологии на радиационно-доминированной стадии. Плотность энергии в этом пределе удовлетворяет (2.19) с равной нулю

правой частью, поэтому  $y$  падает как  $1/a^4$ , как и ожидалось. Однако из этих уравнений неясно, будет ли выполняться обычное соотношение между  $H$  и  $\rho$ :

$$H^2 = \frac{8\pi}{3} \frac{\rho}{M_{\text{Pl}}^2}. \quad (2.71)$$

Чтобы это проверить, рассмотрим уравнение фридмановского типа для 00-компоненты  $R^2$ -модифицированного гравитационного уравнения (2.4) в пределе, когда рождением частиц можно пренебречь. Это уравнение можно записать в виде

$$H^2 + \frac{1}{m^2} [2\ddot{H}H - \dot{H}^2 + 6\dot{H}H^2] = \frac{8\pi\rho}{3M_{\text{Pl}}^2}. \quad (2.72)$$

Согласно нашей оценке, кривизна экспоненциально спадает до нуля при  $\gamma\tau > 1$ , и, соответственно,  $\dot{H} + 2H^2 = 0$ . В этом случае слагаемое в квадратных скобках в (2.72) обращается в нуль, что приводит к нормальной космологии.

Более интересным является случай доминантности нерелятивистской материи,  $w = 0$ , а также некоторые отклонения от строгого равенства  $w = 1/3$  из-за наличия массивных частиц в космологической плазме или из-за конформной аномалии. Теперь нужно исследовать уравнение (2.18) с ненулевой правой частью, которая может изменить асимптотическое экспоненциальное убывание  $r$ . Проводя преобразование (2.67) и пренебрегая малым слагаемым  $(\gamma + 3h)^2/4$  в (2.68), приходим к уравнению

$$v'' + v = -8\pi\mu^2(1 - 3w)y(\tau) \exp \left[ \frac{\gamma(\tau - \tau_0)}{2} + \frac{3}{2} \int_{\tau_0}^{\tau} d\tau_1 h(\tau_1) \right]. \quad (2.73)$$

Значение  $(1 - 3w)$  здесь не конкретизируется, мы только считаем, что оно отлично от нуля.

Решение этого уравнения имеет вид

$$v(\tau) = -8\pi\mu^2(1 - 3w) \int_{\tau_0}^{\tau} d\tau_1 \sin(\tau - \tau_1) y(\tau_1) \times \\ \times \exp \left[ \frac{\gamma(\tau_1 - \tau_0)}{2} + \frac{3}{2} \int_{\tau_0}^{\tau_1} d\tau_1 h(\tau_1) \right] \quad (2.74)$$

плюс решение (2.69) однородного уравнения (2.68), в чем легко убедиться непосредственной подстановкой.

Используя теперь соотношение (2.67), найдем скаляр кривизны

$$r = -8\pi\mu^2(1-3w) \int_{\tau_0}^{\tau} d\tau_1 \sin(\tau - \tau_1) y(\tau_1) \times \\ \times \exp \left[ -\frac{\gamma}{2}(\tau - \tau_1) - \frac{3}{2} \int_{\tau_1}^{\tau} d\tau_2 h(\tau_2) \right] + r_h, \quad (2.75)$$

где  $r_h$  — решение однородного уравнения:

$$r_h = r_0 \cos(\tau + \theta_\tau) \exp \left[ -\frac{\gamma}{2}(\tau - \tau_0) - \frac{3}{2} \int_{\tau_0}^{\tau} d\tau_2 h(\tau_2) \right]. \quad (2.76)$$

Следует подчеркнуть, что решение однородного уравнения падает экспоненциально как  $\exp(-\gamma\tau/2)$ , а неоднородная часть нет, поскольку интеграл (2.75) определяется  $\tau_1$ , близким к  $\tau$ .

Предположим, что за достаточно большое космологическое время система приходит в состояние, описываемое стандартной ОТО, и проверим, как это предположение согласуется с (2.75). Будем считать, в соответствии со стандартными космологическими законами при  $w > -1$ , что справедливы соотношения

$$a \sim t^{\frac{2}{3(1+w)}}, \quad H = \frac{2}{3(1+w)t}, \quad \rho = \frac{3H^2 M_{\text{Pl}}^2}{8\pi} = \frac{M_{\text{Pl}}^2}{6\pi(1+w)^2 t^2}. \quad (2.77)$$

Вводя новые переменные интегрирования  $x = \tau_1/\tau$ ,  $x_2 = \tau_2/\tau$  и вычисляя интеграл по  $dx_2$ , получим

$$r_{\text{inh}} = -\frac{4(1-3w)}{3(1+w)^2\tau} \int_{\epsilon}^1 dx \sin[\tau(1-x)] \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1+2w}{1+w}} \exp\left[-\frac{\gamma\tau}{2}(1-x)\right], \quad (2.78)$$

где  $r_{\text{inh}}$  есть вклад в  $r$  от неоднородной части в уравнении движения, а  $\epsilon = \tau_0/\tau \ll 1$ . Для больших  $\tau$  и  $\gamma\tau$  интеграл в (2.78) можно оценить таким же образом, что и интеграл (2.48). Сначала запишем

$$\sin[\tau(1-x)] = \frac{i}{2} \left[ e^{-i\tau(1-x)} - e^{i\tau(1-x)} \right]. \quad (2.79)$$

Интеграл (2.78) с первой экспонентой из (2.79) можно свести к разности двух интегралов вдоль контуров  $x = \epsilon + i\zeta$  и  $x = 1 + i\zeta$ , где  $\zeta$  пробегает значения от 0 до  $+\infty$ , в то время как интеграл (2.78) со второй экспонентой из (2.79)

выражается через аналогичные интегралы вдоль отрицательной  $\zeta$ -оси. Тогда получим

$$r_{\text{inh}} = \frac{2(1-3w)}{3(1+w)^2\tau} \int_0^{\infty} d\zeta e^{-\tau\zeta} \times \\ \times \left[ \left( \frac{1}{\epsilon + i\zeta} \right)^{\frac{1+2w}{1+w}} \exp \left( -i\tau(1-\epsilon) - \frac{\gamma\tau(1-\epsilon-i\zeta)}{2} \right) - \right. \\ \left. - \left( \frac{1}{1+i\zeta} \right)^{\frac{1+2w}{1+w}} \exp \left( i\frac{\gamma\tau\zeta}{2} \right) + \text{h. c.} \right]. \quad (2.80)$$

Здесь *h. c.* означает эрмитово-сопряженный.

Поскольку  $\tau \gg 1$ , интегралы эффективно «сидят» на  $\zeta \sim 1/\tau$  из-за множителя  $\exp(-\zeta\tau)$ . В главном порядке второе слагаемое в квадратных скобках равно  $(-1)$ , и вместе с эрмитово-сопряженным слагаемым после интегрирования они дают  $-2/\tau$ . Первое слагаемое экспоненциально подавлено при больших  $\gamma\tau/2$  как  $\sim \exp(-\gamma\tau/2)$ . Заметим, что перед экспонентой стоит большой множитель, пропорциональный  $\tau^{(1+2w)/(1+w)}$ , который замедляет приближение к значению ОТО, предположительно достигаемому асимптотически:

$$R = -\frac{8\pi}{M_{\text{Pl}}^2} (1-3w)\rho = \frac{4(1-3w)}{3(1+w)^2 t^2}. \quad (2.81)$$

Однако наши исходные функции не совпадают с найденными при больших  $\tau$ , но малых  $\gamma\tau \lesssim 1$ , дающихся уравнением (2.40). Сделаем более общий «анзац», полагая безразмерные параметр Хаббла и плотность энергии равными

$$h_{\text{test}}(\tau) = \frac{h_1 + h_2 \sin(\tau + \theta_h)}{\tau}, \quad y(\tau) = \frac{y_1}{\tau^\beta}, \quad (2.82)$$

и проверим, можно ли подобрать постоянные  $h_1$ ,  $h_2$ ,  $y_1$  и  $\beta$  так, чтобы восстановить ОТО. Соответственно, из (2.75) получаем

$$r_{\text{inh}} = -\frac{8\pi\mu^2 y_1 (1-3w)}{\tau^{\beta-1}} \int_{\epsilon}^1 dx_1 \sin[\tau(1-x_1)] \left( \frac{1}{x_1} \right)^{\beta-3h_1/2} \times \\ \times \exp \left[ \left( -\frac{\gamma\tau}{2} (1-x_1) \right) - \frac{3h_2}{2} \int_{x_1}^1 \frac{dx_2}{x_2} \sin(\tau x_2 + \theta_h) \right]. \quad (2.83)$$

Сначала оценим интеграл по  $dx_2$ :

$$I_2 \equiv \int_{x_1}^1 \frac{dx_2}{x_2} \sin(\tau x_2 + \theta_h). \quad (2.84)$$

Результат зависит от нижнего предела интегрирования  $x_2 = x_1$ . Оценим  $I_2$  так же, как это было сделано для (2.80), т. е. интегрируя по двум контурам  $x_2 = 1 \pm i\zeta_2$  и  $x_2 = x_1 \pm i\zeta_2$ . После простых вычислений получаем

$$I_2 = -\frac{\cos(\tau + \theta_h)}{\tau} + \int_0^\infty d\zeta_2 e^{-\tau\zeta_2} \left[ \frac{x_1 \cos(x_1\tau + \theta_h)}{x_1^2 + \zeta_2^2} + \frac{\zeta_2 \sin(x_1\tau + \theta_h)}{x_1^2 + \zeta_2^2} \right]. \quad (2.85)$$

Первое слагаемое возникает при интегрировании по контуру  $x_2 = 1 \pm i\zeta_2$ , в то время как интеграл по  $d\zeta_2$  появляется при  $x_2 = x_1 \pm i\zeta_2$ . Эффективное значение  $\zeta_2$  здесь мало,  $\zeta_2 \sim 1/\tau$ , из-за множителя  $\exp(-\zeta_2\tau)$ .

Интегрирование по  $dx_1$  в (2.83) проводится в пределах  $\epsilon < x_1 < 1$ . Поэтому в (2.85) можно считать, что  $x_1 \gg \zeta_2$ . Действительно, эффективное значение  $\zeta_2$  порядка  $1/\tau$ , в то время как  $\epsilon = \tau_0/\tau$ , где  $\tau_0 \gg 1$ . Тогда находим

$$I_2 \approx -\frac{\cos(\tau + \theta_h)}{\tau} + \frac{\cos(x_1\tau + \theta_h)}{x_1\tau} + \frac{\text{const}}{\tau^2}, \quad (2.86)$$

и можно заключить, что  $I_2 \ll 1$  и  $\exp(-3h_1 I_2/2) \approx 1$ . Таким образом,

$$r_{\text{inh}} \approx -\frac{8\pi\mu^2 y_1(1-3w)}{\tau^{\beta-1}} \times \int_\epsilon^1 dx_1 \sin[\tau(1-x_1)] \left(\frac{1}{x_1}\right)^{\beta-3h_1/2} \exp\left[-\frac{\gamma\tau}{2}(1-x_1)\right]. \quad (2.87)$$

Интегрирование по  $dx_1$  в (2.87) можно свести, как и выше, к интегралам по двум контурам  $x_1 = \epsilon \pm i\zeta$  и  $x_1 = 1 \pm i\zeta$ . Результат похож на уравнение (2.80), но параметры  $\beta$  и  $h_1$  не выражаются через  $w$ , а на этой стадии остаются свободными:

$$r_{\text{inh}} \approx \frac{8\pi\mu^2 y_1(1-3w)}{\tau^{\beta-1}} \int_0^\infty d\zeta e^{-\tau\zeta} \times \left[ \left(\frac{1}{\epsilon + i\zeta}\right)^{\beta-3h_1/2} \exp\left(-i\tau(1-\epsilon) - \frac{\gamma\tau(1-\epsilon-i\zeta)}{2}\right) - \left(\frac{1}{1+i\zeta}\right)^{\beta-3h_1/2} \exp\left(i\frac{\gamma\tau\zeta}{2}\right) + \text{h. c.} \right]. \quad (2.88)$$

Имея в виду, что  $\zeta \sim 1/\tau$  и  $\epsilon = \tau_0/\tau \gg 1/\tau$ , упростим результат до вида

$$r_{\text{inh}} \approx \frac{16\pi\mu^2 y_1 (1 - 3w)}{\tau^\beta} \times \left[ \left( \frac{\tau}{\tau_0} \right)^{\beta - 3h_1/2} \exp\left(-\frac{\gamma(\tau - \tau_0)}{2}\right) \cos(\tau - \tau_0) - 1 \right]. \quad (2.89)$$

Это выражение является малой поправкой к однородному решению (2.41), для которого  $\beta = 1$ ,  $y_1 = 1/(72\pi)$  из (2.54) и  $h_1 = 2/3$ . Первое слагаемое в квадратных скобках при больших  $\tau$ , но малых  $\gamma\tau$  имеет ту же зависимость от  $\tau$ , что и в (2.41), но здесь коэффициент зависит от  $w$ . В конечном счете, при  $\gamma\tau > 1$  первое слагаемое исчезает и остается только последнее неосциллирующее слагаемое. В этом пределе рождение частиц кривизной  $R$  прекращается или сильно падает.

Согласно (2.19), в отсутствие рождения частиц безразмерная плотность энергии падает как  $y \sim 1/a^{3(1+w)}$ . Поскольку осцилляции экспоненциально подавлены, производными  $H$  в (2.72) можно пренебречь. При этом  $H$  удовлетворяет соотношению ОТО (2.71) с  $\rho = m^4 y$ , уменьшающемуся как  $1/\tau^2$ , независимо от значения  $w$ .

Переход от модифицированного  $R^2$ -режима к общей теории относительности обусловлен неоднородной частью решения для  $r$ , не убывающей экспоненциально, т. е. последним слагаемым в квадратных скобках в (2.89). Естественно ожидать, что режим ОТО наступает приблизительно при  $\tau \gtrsim 1/\gamma$ . Можно сделать простую оценку, используя (2.89) с  $w = 0$ . В этом случае нужно сравнить величину скаляра кривизны  $r = 2\mu^2/(9\tau)$  с однородным решением для кривизны (2.76):  $r \sim 4 \exp(-\gamma\tau/2)/\tau$ . Эти два выражения становятся сравнимыми при  $\gamma\tau \approx 2 \ln(1/\mu^2)$ , где  $\ln(1/\mu^2)$  может быть заметно больше единицы. К сожалению, подобные аргументы неприменимы при  $w = 1/3$ , поскольку при этом кривизна в ОТО тождественно равна нулю. В реалистичном случае  $w$  отличается от  $1/3$  либо из-за наличия массивных частиц в первичной плазме, либо вследствие конформной аномалии. Такая оценка момента перехода к ОТО выглядит очень неестественной. Повидимому, анализ всех уравнений движения может привести к такому же результату для времени перехода к ОТО:  $\gamma\tau \sim \ln(1/\gamma)$ .

**2.1.3. Обсуждение и выводы.** Космологическую историю в  $R^2$ -модифицированной гравитации можно разделить на четыре различных эпохи. Она начинается с экспоненциального (инфляционного) расширения. На этой стадии Вселенная была пустой и темной, с медленно падающим скаляром кривизны  $R(t)$ . Начальное значение  $R$  должно быть довольно большим,  $R > 300m^2$ , чтобы обеспечить достаточно длинную инфляцию, для чего необходимо, чтобы показатель инфляционной экспоненты был не меньше 70.



Следующая эпоха началась, когда кривизна  $R$  упала до нуля и начала осциллировать вокруг него:  $R \sim m \cos(mt)/t$ . Осцилляции кривизны привели к началу рождения частиц, и этот момент может быть назван Большим взрывом. Расширение Вселенной на этой стадии описывается очень простым, но необычным законом с параметром Хаббла, периодически почти достигающим нуля:  $H = (2/3t)[1 + \sin(mt)]$  (2.40). Такой режим мог быть асимптотически реализован при большом времени  $mt \gg 1$ , но при  $\Gamma t \lesssim 1$ .

Позже, когда время стало таким большим, что  $\Gamma t$  превысило единицу, осцилляции всех соответствующих величин экспоненциально затухли и рождение частиц кривизной прекратилось, став пренебрежимо малым. Это период перехода к общей теории относительности. Предположительно, он имел место, когда  $\Gamma t$  стало больше единицы, достигнув величины  $\ln(M_{\text{Pl}}/m)$ .

После полного распада скалярона эволюция Вселенной стала описываться обычной фридмановской космологией. Требуя, чтобы режим ОТО начался раньше нуклеосинтеза Большого взрыва, находим ограничение  $m > 10^5$  ГэВ [126]. Согласно работе [178], сравнение теоретического предсказания для возмущений плотности, сгенерированных во время  $R^2$ -инфляции [33], с данными флуктуаций космологического микроволнового фона и крупномасштабной структуры приводит к заключению, что  $m \approx 2 \cdot 10^{12}$  ГэВ. Анализ, проведенный в последующих работах [171, 172], дает слегка отличающийся результат  $m \approx 3 \cdot 10^{13}$  ГэВ. Более сложные модели инфляции, основанные на разных модификациях ОТО, могут приводить к значительному различию значений нормирующей массы  $m$ .

Необычная космологическая эволюция в течение времени  $t < 1/\Gamma$  привела бы к заметной модификации сценариев космологического бариогенезиса, к вариации вероятности образования первичных черных дыр и к изменению замерзания плотности частиц темной материи. В частности, она позволяет рассматривать легчайшие суперсимметричные частицы в качестве космологической темной материи.

**2.2. Поправки к классической космологии на стадии доминирования излучения.** Перейдем к более позднему этапу космологической эволюции, когда Вселенная приблизилась к состоянию, описываемому ОТО, и оценим отклонения от этого режима за счет  $R^2$ -добавки к действию. Используемое в предыдущем п. 2.1 приближение «жидкого трения» для описания рождения частиц применимо лишь для гармонических осцилляций поля  $R(t)$ . В работе [126] нами получено интегродифференциальное уравнение, описывающее эффекты рождения частиц для случая произвольной функции  $R(t)$ .

**2.2.1. Уравнения эволюции в безразмерной форме и их решение.** Уравнения (2.12) и (2.9) для случая релятивистской материи, описываемой урав-

нением состояния  $P = \rho/3$ , принимают вид

$$\ddot{R} + 3H\dot{R} + m^2 \left( R + \frac{8\pi}{M_{\text{Pl}}^2} T^\mu_\mu \right) = 0, \quad (2.90)$$

$$\dot{\rho} + 4H\rho = 0. \quad (2.91)$$

Выражая скаляр кривизны через параметр Хаббла с помощью (2.8)

$$R = -6\dot{H} - 12H^2$$

и рассматривая 00-компоненту модифицированных уравнений Эйнштейна (2.4), получим уравнение второго порядка для параметра Хаббла:

$$\ddot{H} + 3H\dot{H} - \frac{\dot{H}^2}{2H} + \frac{m^2 H}{2} = \frac{4\pi m^2}{3M_{\text{Pl}}^2 H} \rho. \quad (2.92)$$

Ниже, в качестве основных уравнений, мы будем использовать либо уравнения (2.92) и (2.91), либо (2.90) и (2.8). Конечно, эти системы являются эквивалентными, но их численные трактовки могут несколько различаться.

Гравитационное рождение частиц может нетривиально влиять на решение приведенных выше уравнений. Однако в первом приближении мы пренебрежем этим вкладом и вернемся к нему позже, в заключительной части этого раздела.

Перейдем к безразмерным обозначениям, отличающимся от используемых в п. 2.1, но являющимся более удобными для описания космологии на стадии доминирования излучения

$$\tau = H_0 t, \quad h = \frac{H}{H_0}, \quad r = \frac{R}{H_0^2}, \quad y = \frac{8\pi\rho}{3M_{\text{Pl}}^2 H_0^2}, \quad \omega = \frac{m}{H_0}, \quad (2.93)$$

где  $H_0$  — величина параметра Хаббла в некоторый начальный момент времени  $t_0$ . Таким образом, получаем следующие две эквивалентные системы уравнений:

$$\begin{cases} h'' + 3hh' - \frac{h'^2}{2h} + \frac{\omega^2 h^2 - y}{2h} = 0, \\ y' + 4hy = 0 \end{cases} \quad (2.94)$$

и

$$\begin{cases} r'' + 3hr' + \omega^2 r = 0, \\ r + 6h' + 12h^2 = 0. \end{cases} \quad (2.95)$$

Здесь штрих означает дифференцирование по безразмерному времени  $\tau$ .

Если мы наложим «естественные» релятивистские начальные условия

$$\tau_0 = 1/2, \quad h_0 = 1, \quad h'_0 = -2, \quad y_0 = 1, \quad (2.96)$$

то найдем, что существуют точные решения  $h = 1/(2\tau)$ ,  $y = 1/(4\tau^2)$  и  $r = 0$ , соответствующие общей теории относительности. Но эти решения могут отклоняться от ОТО из-за отклонений реального режима расширения от чисто релятивистского.

Любое незначительное отклонение от решения ОТО может привести к наблюдаемым эффектам и, следовательно, к наблюдательным ограничениям на  $m$ , единственный свободный параметр модели. Мы будем решать эти задачи ниже как аналитически, так и численно.

*Приближенные аналитические решения.* Вначале предположим, что отклонения от ОТО малы и разложим  $h = 1/(2\tau) + h_1$  и  $y = 1/(4\tau^2) + y_1$ , считая, что  $h_1/h \ll 1$ ,  $y_1/y \ll 1$ , и линеаризуем систему уравнений (2.94). Удобно ввести новую неизвестную функцию  $z_1 \equiv h'_1$  и таким образом получить три линейных дифференциальных уравнения первого порядка с зависящими от времени коэффициентами

$$\begin{cases} z'_1 = -\frac{5}{2\tau}z_1 + \left(\frac{1}{\tau^2} - \omega^2\right)h_1 + \tau\omega^2y_1, \\ h'_1 = z_1, \\ y'_1 = -\frac{1}{\tau^2}h_1 - \frac{2}{\tau}y_1. \end{cases} \quad (2.97)$$

Можно найти приближенное аналитическое решение этой системы в пределе больших времен или  $\omega\tau \gg 1$ . В этом пределе коэффициенты можно считать приближенно постоянными и найти собственные значения и собственные функции системы дифференциальных уравнений. По существу этот метод состоит в разделении «быстрых» и «медленных» переменных.

Характеристический многочлен имеет вид

$$P(\lambda) = \lambda^3 + \frac{9\lambda^2}{2\tau} + \lambda\left(\frac{4}{\tau^2} + \omega^2\right) + \frac{3\omega^2}{\tau} - \frac{2}{\tau^3}, \quad (2.98)$$

а собственные значения (для больших  $\omega\tau$ ) приближенно равны

$$\lambda_1 \approx -\frac{3}{\tau}, \quad \lambda_{2,3} \approx -\frac{3}{4\tau} \pm i\omega. \quad (2.99)$$

Общее решение системы (2.97) является линейной комбинацией собственных векторов  $V_j$ :

$$[h_1, z_1, y_1] = \sum C_j V_j \exp\left[\int^\tau d\tau' \lambda_j(\tau')\right], \quad (2.100)$$

где  $V_1 = [1, -3/\tau, 1/\tau]$ ,  $V_{2,3} = [1, -3/(4\tau) \pm i\omega, -1/(5\tau/4 \pm i\omega\tau^2)]$  и

$$\begin{aligned} \exp \left[ \int_{\tau}^{\tau} d\tau' \lambda_1(\tau') \right] &\sim \frac{1}{\tau^3}, \\ \exp \left[ \int_{\tau}^{\tau} d\tau' \lambda_{2,3}(\tau') \right] &\sim \frac{e^{\pm i\omega\tau}}{\tau^{3/4}}. \end{aligned} \quad (2.101)$$

Так как решение должно быть действительным, нужно рассматривать отдельно его реальную и мнимую части.

Отметим, что собственные векторы  $V_j$  нормированы на почти постоянные величины с точностью до членов порядка  $1/\tau^2$ . В принципе, коэффициенты  $C_j$  зависят от времени, но эта зависимость довольно слабая,  $C_j \sim C_{j0} + C_{j1}/\tau^2$ , и асимптотически пренебрежимая.

Поправка к решению ОТО, соответствующая первому собственному значению  $\lambda_1$ , быстро уменьшается, поскольку  $h_1^{(1)} \sim 1/\tau^3$  и  $y_1^{(1)} \sim 1/\tau^4$ , и асимптотически ею можно пренебречь. Решения для  $h_1$ , соответствующие  $\lambda_{2,3}$ , осциллируют и убывают медленнее, чем решение ОТО, фактически

$$h_1^{(2,3)} \sim \frac{\sin(\omega\tau + \varphi)}{\tau^{3/4}}, \quad (2.102)$$

в то время как решение для плотности энергии также осциллирует, но падает быстрее, чем в ОТО,  $y \sim \tau^{-11/4}$ . Полное асимптотическое решение для  $h$  имеет вид

$$h(\tau) \simeq \frac{1}{2\tau} + \frac{c_1 \sin(\omega\tau + \varphi)}{\tau^{3/4}}. \quad (2.103)$$

При достаточно больших  $\tau$  второе слагаемое начнет доминировать и линейная аппроксимация перестанет быть справедливой. Ниже мы получим приближенные аналитические решения даже в нелинейном режиме, в пределе высоких частот.

Однако до этого было бы полезно найти решение эквивалентной системы уравнений (2.95) в том же приближении малых отклонений от ОТО. Вводя новую функцию  $q_1 \equiv r'$ , получим систему трех линейных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{cases} q_1' = -\frac{3}{2\tau}q_1 - \omega^2 r, \\ r' = q_1, \\ h_1' = -\frac{1}{6}r - \frac{2}{t}h_1 \end{cases} \quad (2.104)$$

с характеристическим многочленом

$$P(\tilde{\lambda}) = \left( \tilde{\lambda} + \frac{2}{\tau} \right) \left( \tilde{\lambda}^2 + \frac{3\tilde{\lambda}}{2\tau} + \omega^2 \right)$$

и собственными значениями (при  $\omega\tau \gg 1$ ):

$$\tilde{\lambda}_1 = -\frac{2}{\tau}, \quad \tilde{\lambda}_{2,3} \approx -\frac{3}{4\tau} \pm i\omega. \quad (2.105)$$

Как и выше, решения системы (2.104) являются линейной комбинацией собственных векторов  $\tilde{V}_j$ :

$$[h_1, r, q_1] = \sum \tilde{C}_j \tilde{V}_j \exp \left[ \int_{\tau}^{\tau} d\tau' \tilde{\lambda}_j(\tau') \right], \quad (2.106)$$

где

$$\tilde{V}_1 = [1, 0, 0], \quad \tilde{V}_{2,3} = \left[ -\frac{1}{6(5/(4\tau) \pm i\omega)}, 1, -\frac{3}{4\tau} \pm i\omega \right]$$

и

$$\begin{aligned} \exp \left[ \int_{\tau}^{\tau} d\tau' \tilde{\lambda}_1(\tau') \right] &\sim \frac{1}{\tau^2}, \\ \exp \left[ \int_{\tau}^{\tau} d\tau' \tilde{\lambda}_{2,3}(\tau') \right] &\sim \frac{e^{\pm i\omega\tau}}{\tau^{3/4}}. \end{aligned} \quad (2.107)$$

Таким образом, осциллирующее решение для  $h_1$  такое же, что и в (2.102), в то время как медленно меняющееся (неосциллирующее) решение убывает медленнее, а именно, как  $1/\tau^2$  вместо  $1/\tau^3$ .

Это различие связано, по-видимому, со свободой в решении ОТО нулевого порядка по отношению к сдвигу времени:

$$h_0 = \frac{1}{2(\tau + \delta)} = \frac{1}{2\tau} - \frac{\delta}{2\tau^2}. \quad (2.108)$$

Такая свобода указывает на то, что слагаемые порядка  $1/\tau^2$  в поправках первого порядка являются в каком-то смысле произвольными. Поэтому решение  $h_1 \sim 1/\tau^2$  не представляет физического интереса и может быть опущено. В любом случае неосциллирующие решения для  $h_1$  быстро исчезают асимптотически и ими можно пренебречь.

Найденные выше решения описывают колебания параметра Хаббла вокруг его значения в ОТО, равного  $1/(2\tau)$ . Более того, амплитуда таких осцилляций падает медленнее, чем  $1/\tau$ , поэтому на некотором этапе осцилляции станут большими, а условие  $h_1 \ll h$  больше не будет выполняться. После достижения этой стадии линейная аппроксимация окажется недействительной, а используемый выше метод неприменимым.

Тем не менее можно найти асимптотики точных нелинейных уравнений (2.8) и (2.90) на больших временах, если искать решения в виде

$$h(\tau) = A(\tau) + B_s(\tau) \sin \nu\tau + B_c(\tau) \cos \nu\tau, \quad (2.109a)$$

$$r(\tau) = C(\tau) + D_s(\tau) \sin \nu\tau + D_c(\tau) \cos \nu\tau. \quad (2.109б)$$

Здесь коэффициенты  $A, B, C$  и  $D$  являются медленно меняющимися функциями времени, а  $\nu$ , предполагаемое большим, может в принципе отличаться от  $\omega$ . Как мы увидим ниже, это действительно так из-за радиационных поправок (перенормировки массы скалярона). В используемой здесь аппроксимации имеем  $\nu = \omega$ .

Получим приближенные уравнения для этих функций, приравнявая коэффициенты перед медленно меняющимися слагаемыми, а также перед  $\sin \omega\tau$  и  $\cos \omega\tau$ . Эти уравнения являются приближенными, поскольку мы не рассматриваем высокочастотные слагаемые, возникающие в результате нелинейности, но выбранная аппроксимация оказывается довольно точной. Действуя указанным образом, находим из уравнений (2.95):

$$A' + 2A^2 + B_s^2 + B_c^2 = -\frac{C}{6}, \quad (2.110a)$$

$$B_s' - B_c\nu + 4AB_s = -\frac{D_s}{6}, \quad (2.110б)$$

$$B_c' + B_s\nu + 4AB_c = -\frac{D_c}{6}, \quad (2.110в)$$

$$C''' + 3 \left( AC' + \frac{1}{2}B_sD_s' + \frac{1}{2}B_cD_c' - \frac{1}{2}\nu B_sD_c + \frac{1}{2}\nu B_cD_s \right) + \omega^2 C = 0, \quad (2.110г)$$

$$D_s'' - 2\nu D_c' - \nu^2 D_s + 3A(D_s' - \nu D_c) + 3C'B_s + \omega^2 D_s = 0, \quad (2.110д)$$

$$D_c'' + 2\nu D_s' - \nu^2 D_c + 3A(D_c' + \nu D_s) + 3C'B_c + \omega^2 D_c = 0. \quad (2.110е)$$

Предполагая, что

$$A = \frac{a}{\tau}, \quad B_s = \frac{b_s}{\tau}, \quad B_c = \frac{b_c}{\tau}, \quad C = \frac{c}{\tau^2}, \quad D_s = \frac{d_s}{\tau}, \quad D_c = \frac{d_c}{\tau}, \quad (2.111)$$

и удерживая только главные члены (низший порядок по  $1/\tau$ ), получим

решения

$$\nu^2 = \omega^2, \quad (2.112a)$$

$$d_s = 6\omega b_c, \quad (2.112б)$$

$$d_c = -6\omega b_s, \quad (2.112в)$$

$$b_s^2 + b_c^2 = 2a(2a - 1), \quad (2.112г)$$

$$c = 18a(1 - 2a). \quad (2.112д)$$

Интересно, что уравнение (2.112г) требует  $a > 1/2$  при наличии колебаний. Мы увидим из численного решения, что это действительно так.

Резюмируя, видим такую ситуацию: изначально мы предполагаем, что  $h_1/h \ll 1$  и решаем линеаризованные системы (2.97) и/или (2.104), получая, что параметр Хаббла колеблется вокруг значения  $1/(2\tau)$  с амплитудой, растущей со временем как  $h_1/h \sim \tau^{1/4}$ . В итоге такие колебания (и, следовательно, нелинейные слагаемые) станут доминирующими и линейная аппроксимация нарушится. Однако мы можем продолжить, используя своего рода усеченное разложение Фурье, которое позволяет учесть нелинейность системы в пределе  $\omega\tau \gg 1$ . В результате находим, что  $h_1/h \rightarrow \text{const}$ . Другими словами, амплитуда осциллирующей части  $h$  асимптотически ведет себя как  $1/\tau$ , т. е. таким же образом, как и медленно меняющаяся часть  $h$ .

Чтобы быть полностью уверенными в этих аналитических результатах, мы должны проверить, будет ли точное численное решение системы (2.94) демонстрировать такое же поведение. Тем не менее приведенные выше аналитические оценки представляют большой интерес для расчета эволюции  $R$  и  $H$  с учетом эффектов рождения частиц.

*Численные решения.* Мы интегрируем систему уравнений (2.94), начиная со времени  $\tau_0 = 1/2$ , с начальными условиями

$$\begin{aligned} h_0 &= 1 + \delta h_0, & h'_0 &= -2 + \delta h'_0, \\ y_0 &= 1 + \delta y_0, \end{aligned} \quad (2.113)$$

где  $\delta h_0$ ,  $\delta h'_0$  и  $\delta y_0$  не обращаются в нуль одновременно. Как ожидалось, численное интегрирование с начальными условиями, приведенными в (2.96), дает обычное решение общей теории относительности,  $h = 1/(2\tau)$ , в пределах точности численных расчетов, поэтому нас интересует более общий случай, в котором начальные условия отклоняются от значений в ОТО.

Как отмечалось выше, системы (2.94) и (2.95) являются эквивалентными. Однако для численного интегрирования этих систем нужно задать начальные значения различных величин. Для интегрирования системы (2.94) нужно фиксировать  $h_0$ ,  $h'_0$  и  $y_0$ , а для интегрирования (2.95) нужно определить величины  $h_0$ ,  $r_0$  и  $r'_0$ . Связь одного набора начальных значений с эквивалентными значениями другого набора можно найти, используя рассматриваемые

уравнения. Действительно, если выбраны  $h_0$ ,  $h'_0$  и  $y_0$ , то  $h''_0$  однозначно определяется первым уравнением в (2.94), и следовательно, определены также  $r_0$  и  $r'_0$  через (2.95). В конечном счете обе системы эквивалентны одному и тому же дифференциальному уравнению третьего порядка, решение которого определяется тремя начальными условиями.

Нами установлено, что численные решения системы уравнений (2.94) с начальными условиями (2.113) находятся в очень хорошем согласии с пре-

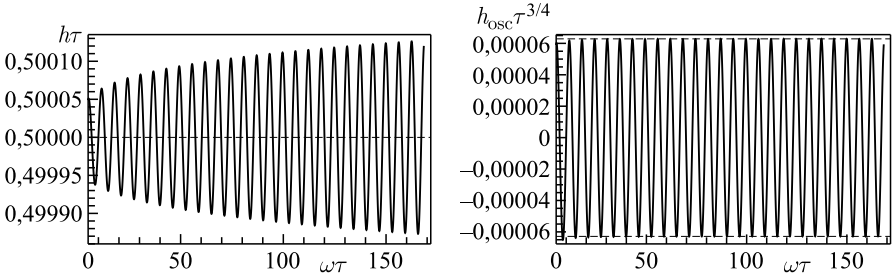


Рис. 15. Численное решение системы (2.94) при  $\delta h_0 = 10^{-4}$ ,  $\delta h'_0 = 0$ ,  $y_0 = 1$  и  $\omega = 10$ . Для функциональной формы (2.115) лучше всего подходит  $\alpha \simeq 1$ ,  $\beta \simeq 6,29 \cdot 10^{-5}$

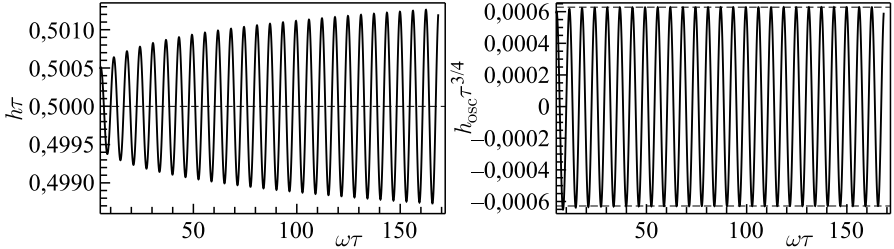


Рис. 16. Численное решение системы (2.94) при  $\delta h_0 = 10^{-3}$ ,  $\delta h'_0 = 0$ ,  $y_0 = 1$ ,  $\omega = 10$ . Лучше всего подходит  $\alpha \simeq 1$ ,  $\beta \simeq 6,28 \cdot 10^{-4}$

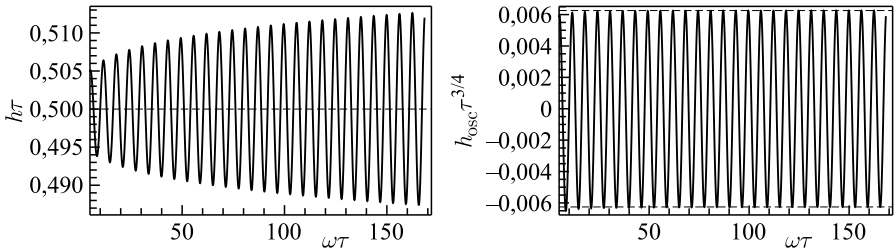


Рис. 17. Численное решение системы (2.94) при  $\delta h_0 = 10^{-2}$ ,  $\delta h'_0 = 0$ ,  $y_0 = 1$ ,  $\omega = 10$ . Лучше всего подходит  $\alpha \simeq 1$ ,  $\beta \simeq 6,26 \cdot 10^{-3}$



дыдущими аналитическими оценками в линейном режиме, т. е. для начальных условий, удовлетворяющих требованиям  $\delta h_0/h_0 \ll 1$ ,  $\delta y_0/y_0 \ll 1$  и  $\omega\tau \gg 1$ . На рис. 15, 16 и 17 представлены численные результаты для безразмерного параметра Хаббла  $h$ , полученные из системы уравнений (2.94) с  $\omega = 10$  и начальными условиями

$$\delta h_0 = 10^{-4}, \quad \delta h'_0 = 0, \quad \delta y_0 = 0 \quad (\text{рис. 15}), \quad (2.114a)$$

$$\delta h_0 = 10^{-3}, \quad \delta h'_0 = 0, \quad \delta y_0 = 0 \quad (\text{рис. 16}), \quad (2.114б)$$

$$\delta h_0 = 10^{-2}, \quad \delta h'_0 = 0, \quad \delta y_0 = 0 \quad (\text{рис. 17}). \quad (2.114в)$$

Найденная функция  $h\tau$  осциллирует вокруг центрального значения  $h = 1/2$  с амплитудой  $h_1 \sim \tau^{-3/4}$ . По мере увеличения отклонения от идеального поведения ОТО среднее значение  $h\tau$  также меняется, и в общем случае оно больше не равно  $1/2$ . Очень хорошей функциональной формой для подбора решений является

$$h(\tau) \simeq \frac{\alpha + \beta\tau^{1/4} \sin(\omega\tau + \varphi)}{2\tau} \equiv \frac{\alpha}{2\tau} + h_{\text{osc}}, \quad (2.115)$$

где безразмерные параметры  $\alpha$  и  $\beta$  — очень медленно меняющиеся функции времени. Эта подгонка показана, например, на рис. 18 и 19, где приведены численные решения для  $\delta h_0 = 0,5$ . Отклонения от аналитических оценок линеаризованных уравнений следует ожидать в этой ситуации, так как условие  $\delta h_0/h_0 \ll 1$  не выполняется, и важны нелинейные члены в уравнениях (2.94).

На рис. 20 и 21 представлены численные результаты для начальных условий

$$\delta h_0 = 1,5, \quad \delta h'_0 = 0, \quad \delta y_0 = 0, \quad \omega = 100. \quad (2.116)$$

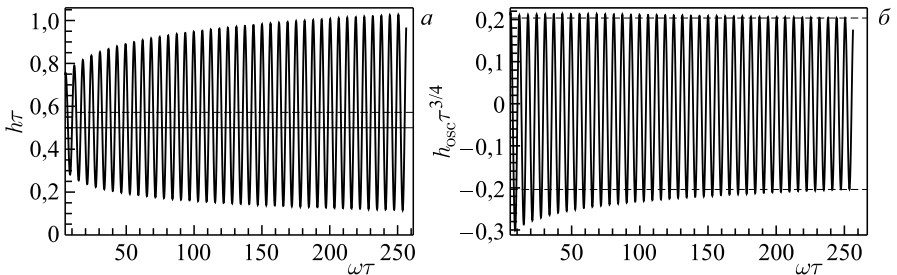


Рис. 18. Численное решение системы (2.94) при  $\delta h_0 = 0,5$ ,  $\delta h'_0 = 0$ ,  $y_0 = 1$ ,  $\omega = 10$ . На больших временах лучше всего подходит  $\alpha \simeq 1,14$  (показано пунктирной линией на рис. а  $\beta \simeq 0,20$ ). Отметим, что на рис. б осциллирующая часть  $h$  не убывает *точно* как  $\tau^{-3/4}$ . Очевидная асимметрия верхней и нижней частей в  $h_{\text{osc}}$  обусловлена тем, что  $\alpha$  является функцией времени, и мы центрировали осцилляции вокруг ее значения в поздние времена

Рис. 19. Эволюция  $\alpha$  со временем. Начальные условия те же, что и на рис. 18

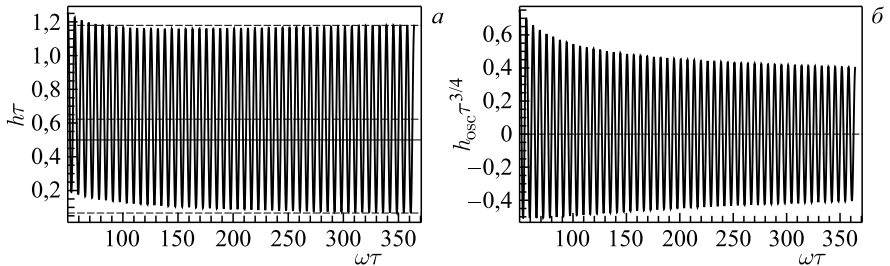
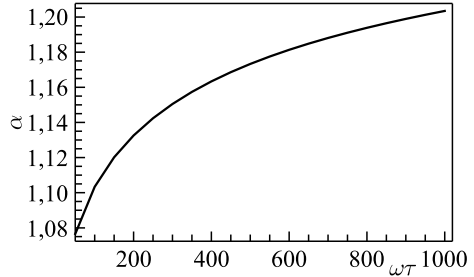


Рис. 20. Численное решение для безразмерного параметра Хаббла  $h$  с начальными условиями (2.116). На рис. *a* колебания имеют почти постоянную амплитуду, в то время как на рис. *b* амплитуда явно уменьшается

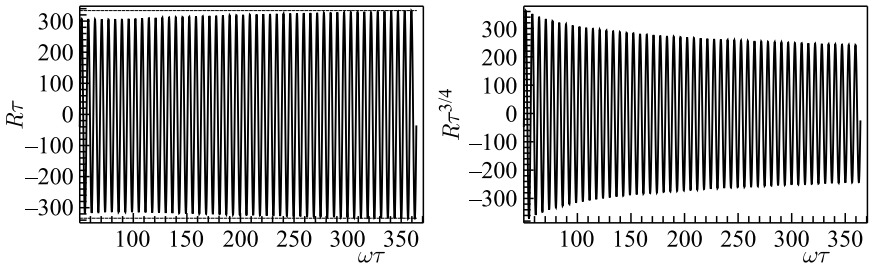


Рис. 21. Численное решение для безразмерного скаляра кривизны  $r$  с начальными условиями (2.116)

Результаты, по крайней мере качественно, согласуются с аналитическими оценками, выполненными в нелинейном режиме для  $\omega\tau \gg 1$ . Очевидно, что амплитуды осциллирующих слагаемых в  $h$  и  $r$  убывают быстрее, чем  $\tau^{-3/4}$  (линейный режим), и довольно близки к  $\tau^{-1}$ . Более того, параметр Хаббла осциллирует не вокруг значения  $h\tau = 1/2$ , соответствующего ОТО, а вокруг большего значения, как и ожидалось из уравнения (2.112г). Фактически для этих начальных условий наилучшее соответствие при рассматриваемом конечном времени интегрирования дается  $\alpha \simeq 1,246$ .

**2.2.2. Обратная реакция рождения частиц на эволюцию скаляра кривизны.** Скорость рождения частиц осциллирующим гравитационным полем в  $R^2$ -гравитации рассматривалась в работах [33, 123, 125], где она была оценена как  $\Gamma \sim m^3/M_{\text{Pl}}^2$ . Здесь, следуя нашей работе [126], мы приводим более строгие расчеты, которые по существу согласуются со статьей [125]. Ниже мы получим замкнутое уравнение движения для космологической эволюции скаляра кривизны  $R$  с учетом обратной реакции рождения частиц. Для этого рассмотрим безмассовое скалярное поле  $\phi$ , минимально связанное с гравитацией. Его действие можно записать в виде

$$S_\phi = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi, \quad (2.117)$$

откуда в пространственно-плоской фоновой FRW-метрике (2.7) следует уравнение движения

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} - \frac{1}{a^2} \Delta \phi = 0. \quad (2.118)$$

Поле  $\phi$  входит в уравнение движения для  $R$  (2.90) через след тензора энергии-импульса:

$$T_\mu^\mu(\phi) = -g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi \equiv -(\partial\phi)^2.$$

Удобно ввести конформно перемасштабированное поле  $\chi \equiv a(t)\phi$  и конформное время  $\eta$  такое, что  $a d\eta = dt$ . В терминах этих величин можно переписать уравнения движения как

$$\begin{aligned} R'' + 2\frac{a'}{a}R' + m^2 a^2 R &= \\ &= 8\pi \frac{m^2}{M_{\text{Pl}}^2} \frac{1}{a^2} \left[ \chi'^2 - (\vec{\nabla}\chi)^2 + \frac{a'^2}{a^2} \chi^2 - \frac{a'}{a} (\chi\chi' + \chi'\chi) \right], \end{aligned} \quad (2.119)$$

$$R = -\frac{6a''}{a^3}, \quad (2.120)$$

$$\chi'' - \Delta\chi + \frac{1}{6} a^2 R \chi = 0, \quad (2.121)$$

а действие (2.117) примет вид

$$S_\chi = \frac{1}{2} \int d\eta d^3x \left( \chi'^2 - (\vec{\nabla}\chi)^2 - \frac{a^2 R}{6} \chi^2 \right). \quad (2.122)$$

Здесь и выше штрих означает производную по конформному времени.

Нашей целью является вывод замкнутого уравнения для  $R$ , для чего требуется вычислить вакуумные средние зависящих от  $\chi$  квантовых операторов в правой части уравнения (2.119) в присутствии внешнего классического

гравитационного поля  $R$ . Наши аргументы по существу повторяют те, что приведены в работе [175], где уравнение было получено в однопетлевом приближении.

Свободное поле  $\chi^{(0)}$  квантуется как обычно:

$$\chi^{(0)}(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E_k} \left[ \hat{a}_k e^{-ik \cdot x} + \hat{a}_k^\dagger e^{ik \cdot x} \right], \quad (2.123)$$

где  $x^\mu = (\eta, \mathbf{x})$ ,  $k^\mu = (E_k, \mathbf{k})$  и  $k_\mu k^\mu = 0$ . Операторы рождения-уничтожения удовлетворяют обычным коммутационным соотношениям Бозе:

$$\left[ \hat{a}_k, \hat{a}_{k'}^\dagger \right] = (2\pi)^3 2E_k \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}'). \quad (2.124)$$

Уравнение (2.121) имеет формальное решение

$$\chi(x) = \chi^{(0)}(x) - \frac{1}{6} \int d^4y G(x, y) a^2(y) R(y) \chi(y) \equiv \chi^{(0)}(x) + \delta\chi(x), \quad (2.125)$$

где безмассовая функция Грина равна

$$G(x, y) = \frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \delta((x_0 - y_0) - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|) \equiv \frac{1}{4\pi r} \delta(\Delta\eta - r). \quad (2.126)$$

Мы предполагаем, что эффекты рождения частиц незначительно возмущают свободное решение, так что  $\delta\chi$  можно считать малым, а дайсоноподобный ряд можно оборвать на первом порядке, получая

$$\chi(x) \simeq \chi^{(0)}(x) - \frac{1}{6} \int d^4y G(x, y) a^2(y) R(y) \chi^{(0)}(y) \equiv \chi^{(0)}(x) + \chi^{(1)}(x). \quad (2.127)$$

Теперь можно вычислить вакуумные средние различных слагаемых в правой части уравнения (2.119), удерживая в  $\chi^{(1)}$  только члены первого порядка. Все слагаемые, содержащие только  $\chi^{(0)}$  и его производные, не имеют отношения к рождению частиц и могут быть включены с помощью процедуры перенормировки в параметры теории, поэтому они малоинтересны. Оставшиеся слагаемые вычисляются с использованием формул вида

$$\begin{aligned} \partial_x \int d^4y G(x, y) a^2(y) R(y) \chi(y) &= \int d^4y G(x, y) [a^2 R \partial_y \chi + \partial_y (a^2 R) \chi], \\ \int_0^\infty dk e^{iak} &= \pi \delta(\alpha) + i\mathcal{P} \left( \frac{\infty}{\alpha} \right). \end{aligned} \quad (2.128)$$

Собирая все слагаемые, получим выражения

$$\langle \chi^2 \rangle \simeq -\frac{1}{48\pi^2} \int_{\eta_0}^{\eta} d\eta' \frac{a^2(\eta')R(\eta')}{\eta - \eta'}, \quad (2.129a)$$

$$\langle \chi'^2 - (\vec{\nabla}\chi)^2 \rangle \simeq -\frac{1}{96\pi^2} \int_{\eta_0}^{\eta} d\eta' \frac{(a^2(\eta')R(\eta'))''}{\eta - \eta'}, \quad (2.129б)$$

$$\langle \chi\chi' + \chi'\chi \rangle \simeq -\frac{1}{48\pi^2} \int_{\eta_0}^{\eta} d\eta' \frac{(a^2(\eta')R(\eta'))'}{\eta - \eta'}. \quad (2.129в)$$

Подставляя найденные величины в (2.119), приходим к замкнутому интегро-дифференциальному уравнению для  $R$ , для которого будем искать приближенное аналитическое решение.

Прежде всего, следует отметить, что, несмотря на имеющиеся осцилляции  $H$  и  $R$ , масштабный фактор  $a$  в целом подчиняется степенному закону расширения, поэтому он очень мало меняется за время нескольких осцилляций. Таким образом, мы ожидаем, что  $d\eta/\eta \sim dt/t$  и что доминирующая часть интегралов в (2.127) дается производными  $R$ , так как  $R' \sim \omega R + t^{-1}R \simeq \omega R$ , а  $\omega t \gg 1$ . Следовательно, главный вклад рождения частиц определяется уравнением (2.129б) и равен

$$\begin{aligned} \ddot{R} + 3H\dot{R} + m^2R &\simeq -\frac{1}{12\pi} \frac{m^2}{M_{\text{Pl}}^2} \frac{1}{a^4} \int_{\eta_0}^{\eta} d\eta' \frac{(a^2(\eta')R(\eta'))''}{\eta - \eta'} \simeq \\ &\simeq -\frac{1}{12\pi} \frac{m^2}{M_{\text{Pl}}^2} \int_{t_0}^t dt' \frac{\ddot{R}(t')}{t - t'}. \end{aligned} \quad (2.130)$$

Это уравнение нелокально по времени, так как влияние рождения частиц зависит от всей истории эволюции системы. Уравнение линейно по  $R$ , в отличие от работы [169], где правая часть уравнения квадратична по  $R$ , что является физически сомнительным, поскольку если знак  $R$  изменится, то рождение частиц будет не ослаблять колебания, а усиливать их.

*Аналитические вычисления.* Повторим вычисления п.2.2.1, используя разложение (2.109) и учитывая эффекты обратной реакции в виде уравне-

ния (2.130). Правую часть этого уравнения можно записать в виде

$$\begin{aligned}
 g \int_{t_0}^t dt' \frac{\ddot{R}(t')}{t-t'} &= g \int_0^{t-t_0} d\tau \frac{\ddot{R}(t-\tau)}{\tau} = \\
 &= g \int_{\epsilon}^{t-t_0} d\tau \frac{\ddot{R}(t-\tau)}{\tau} + g \int_0^{\epsilon} d\tau \frac{\ddot{R}(t-\tau)}{\tau} = g \int_{\epsilon}^{t-t_0} d\tau \frac{\ddot{C}}{\tau} + \\
 &+ g \cos(m_1 t) \int_{\epsilon}^{t-t_0} d\tau \frac{1}{\tau} [F_c \cos(m_1 \tau) - F_s \sin(m_1 \tau)] + \\
 &+ g \sin(m_1 t) \int_{\epsilon}^{t-t_0} d\tau \frac{1}{\tau} [F_c \sin(m_1 \tau) + F_s \cos(m_1 \tau)], \quad (2.131)
 \end{aligned}$$

где

$$g \equiv -\frac{1}{12\pi} \frac{m_1^2}{M_{\text{Pl}}^2}, \quad (2.132a)$$

$$F_c \equiv \ddot{D}_c + 2m_1 \dot{D}_s - m_1^2 D_c, \quad (2.132b)$$

$$F_s \equiv \ddot{D}_s - 2m_1 \dot{D}_c - m_1^2 D_s. \quad (2.132b)$$

Чтобы избежать пуганицы, заметим, что  $\tau$  здесь является просто переменной интегрирования и отличается от безразмерного времени  $\tau$  предыдущих пунктов.

Мы ввели новое обозначение  $m_1$ , которое равно  $m$  плюс радиационные поправки, уточненные ниже, и которое соответствует  $\nu$  в (2.109a), (2.109б). Разница между  $m$  и  $m_1$  не существенна под интегралом, но ее нужно учитывать в левой части уравнения (2.119), где нужно брать  $m_1$  вместо  $m$ .

Обратим внимание, что медленно меняющиеся функции  $C$ ,  $D_s$  и  $D_c$  под интегралами нужно оценивать при  $(t-\tau)$ , а точка означает производную по (физическому) времени  $t$ , а не  $\tau$ . Из-за множителя  $1/\tau$  интегралы расходятся логарифмически, но эту расходимость можно убрать перенормировкой массы  $m$  и константы связи  $g$ . Мы разделили интеграл на две части: одну, где  $\tau$  меняется от 0 до некоторого малого параметра  $\epsilon$ , определяющего точку перенормировки, в которой физическая масса и связь фиксированы, и другую, где интегрирование ведется от  $\epsilon$  до  $(t-t_0)$ , дающую поправки к массе и константе связи вследствие взаимодействия. Детали можно найти в работе [175].

Приравнивая коэффициенты при медленно меняющихся слагаемых,  $\sin m_1 t$  и  $\cos m_1 t$  так же, как это было сделано в п. 2.2.1, см. (2.110), получим такие же первые три уравнения (2.110a), (2.110б), (2.110в), где эффекты

рождения частиц непосредственно не проявляются, и оставшиеся три уравнения с дополнительными слагаемыми из (2.130) с учетом разложения (2.131). Последние уравнения становятся интегродифференциальными, но их можно свести к дифференциальным уравнениям в случае быстрых осцилляций. Таким образом, полная система уравнений с учетом рождения частиц имеет вид (для удобства мы также включили неизменные первые три уравнения из набора (2.110)):

$$\dot{A} + 2A^2 + B_s^2 + B_c^2 = -\frac{C}{6}, \quad (2.133a)$$

$$\dot{B}_s - B_c m_1 + 4AB_s = -\frac{D_s}{6}, \quad (2.133б)$$

$$\dot{B}_c + B_s m_1 + 4AB_c = -\frac{D_c}{6}, \quad (2.133в)$$

$$\begin{aligned} \ddot{C} + 3A\dot{C} + \frac{3}{2}B_s\dot{D}_s + \frac{3}{2}B_c\dot{D}_c - \frac{3}{2}m_1B_sD_c + \frac{3}{2}m_1B_cD_s + m^2C \simeq \\ \simeq g \int_{\epsilon}^{t-t_0} d\tau \frac{\ddot{C}}{\tau}, \end{aligned} \quad (2.133г)$$

$$\begin{aligned} \ddot{D}_s + (m^2 - m_1^2)D_s - 2m_1\dot{D}_c + 3A(\dot{D}_s - m_1D_c) + 3\dot{C}B_s \simeq \\ \simeq g \int_{\epsilon}^{t-t_0} d\tau \frac{F_s \cos(m\tau) + F_c \sin(m\tau)}{\tau}, \end{aligned} \quad (2.133д)$$

$$\begin{aligned} \ddot{D}_c + (m^2 - m_1^2)D_c + 2m_1\dot{D}_s + 3A(\dot{D}_c + m_1D_s) + 3\dot{C}B_c \simeq \\ \simeq g \int_{\epsilon}^{t-t_0} d\tau \frac{F_c \cos(m\tau) - F_s \sin(m\tau)}{\tau}. \end{aligned} \quad (2.133е)$$

В интегралах (2.133д) и (2.133е), содержащих быстро осциллирующие функции, эффективное значение  $\tau$  — порядка  $1/m$ . Тогда можно аппроксимировать  $F(t - \tau) \approx F(t)$  и вынести эти множители из-под интегралов. Проанализируем для примера уравнение (2.133д) шаг за шагом. Анализ (2.133е) аналогичен. Ниже мы пренебрегаем  $\ddot{D}$  по сравнению с  $m^2D$ .

Доминантное слагаемое в уравнении (2.133д), являющееся коэффициентом при  $D_s$ , определяет перенормировку  $m$ :

$$m_1^2 = m^2 + g m^2 \int_{\epsilon}^{t-t_0} \frac{d\tau}{\tau} \cos m\tau. \quad (2.134)$$

Следующее, субдоминантное слагаемое, служащее коэффициентом перед  $\dot{D}_c$ , определяет скорость распада  $D_c$ :

$$\dot{D}_c = \frac{gm}{2} D_c \int_{\epsilon}^{t-t_0} \frac{d\tau}{\tau} \sin m\tau \approx \frac{\pi gm}{4} D_c. \quad (2.135)$$

Мы опустили здесь слагаемое  $g\dot{D}_c$ , приводящее к поправкам более высокого порядка к скорости рождения. Таким образом, скорость распада равна

$$\Gamma_R = -\frac{\pi gm}{4} = \frac{m^3}{48M_{\text{Pl}}^2}. \quad (2.136)$$

Соответственно, осциллирующие части  $R$  и  $H$  ведут себя как

$$\cos m_1 t \rightarrow e^{-\Gamma_R t} \cos m_1 t. \quad (2.137)$$

Мы используем этот результат ниже при вычислении притока плотности энергии рожденных частиц в первичную плазму.

**2.2.3. Гравитационное рождение частиц.** Из (2.121) следует, что амплитуда гравитационного рождения двух одинаковых  $\chi$ -частиц с импульсами  $p_1$  и  $p_2$  в первом порядке теории возмущений дается выражением

$$A(p_1, p_2) \simeq \int d\eta d^3x \frac{a^2 R}{6} \langle p_1, p_2 | \chi\chi | 0 \rangle, \quad (2.138)$$

где конечное двухчастичное состояние определяется как

$$|p, q\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{a}_p^\dagger \hat{a}_q^\dagger |0\rangle.$$

Множитель  $1/\sqrt{2}$  нужен для корректной нормировки двухчастичного состояния из-за бозе-статистики. Используя (2.123), находим

$$\begin{aligned} \langle p_1, p_2 | \chi\chi | 0 \rangle &= \frac{\sqrt{2}}{8(2\pi)^6} \int \frac{d^3k d^3k'}{E_k E_{k'}} e^{i(E_k + E_{k'})\eta - i(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \cdot \mathbf{x}} \langle 0 | \hat{a}_{p_1} \hat{a}_{p_2} \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_{k'}^\dagger | 0 \rangle, \\ &= \sqrt{2} e^{i(E_{p_1} + E_{p_2})\eta - i(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) \cdot \mathbf{x}}. \end{aligned} \quad (2.139)$$

Здесь  $E_k^2 = \mathbf{k}^2$ , а функция  $a^2 R$  имеет вид

$$a^2(\eta)R(\eta) = D(\eta) \sin(\tilde{\omega}\eta),$$

где  $D(\eta)$  — медленно меняющаяся функция конформного времени;  $\tilde{\omega}$  — частота, относящаяся к конформному времени. В этом приближении амплитуда (2.138) становится равной

$$A(p_1, p_2) = \frac{i}{6\sqrt{2}} \int d\eta d^3x D(\eta) \left( e^{i\tilde{\omega}\eta} - e^{-i\tilde{\omega}\eta} \right) e^{i(E_{p_1} + E_{p_2})\eta} e^{-i(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) \cdot \mathbf{x}}. \quad (2.140)$$



Полагая  $E_{p_i} \geq 0$  и пренебрегая на этом этапе изменением  $D$  со временем, получаем

$$A(p_1, p_2) \simeq -\frac{i}{6\sqrt{2}} D(\eta)(2\pi)^4 \delta^{(3)}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) \delta(E_{p_1} + E_{p_2} - \tilde{\omega}). \quad (2.141)$$

Чтобы найти скорость рождения частиц на единицу сопутствующего объема в единицу конформного времени, нужно проинтегрировать квадрат модуля этой амплитуды по фазовому пространству, а именно:

$$n' = \int \frac{d^2 p_1 d^3 p_2}{(2\pi)^6 4E_{p_1} E_{p_2}} \frac{|A(p_1, p_2)|^2}{V \Delta\eta} \simeq \frac{1}{72} D^2(\eta) \int \frac{d^3 p_1 d^3 p_2}{(2\pi)^6 4E_{p_1} E_{p_2}} \times \\ \times (2\pi)^4 \delta^{(3)}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) \delta(E_{p_1} + E_{p_2} - \tilde{\omega}) \simeq \frac{D^2(\eta)}{576\pi}, \quad (2.142)$$

где  $V$  и  $\Delta\eta$  — полный объем и конформное время, которые, конечно, стремятся к бесконечности.  $n$  является плотностью числа рожденных частиц, а штрих обозначает производную по конформному времени. Так как энергия рожденных частиц равна  $\tilde{\omega}/2$ , находим скорость преобразования гравитационной энергии в элементарные частицы:

$$\rho' = \frac{n' \tilde{\omega}}{2} = \frac{D^2(\eta) \tilde{\omega}}{1152\pi}, \quad (2.143)$$

а скорость изменения физической плотности энергии рожденных  $\chi$ -частиц равна

$$\dot{\rho}_\chi = \frac{m \langle R^2 \rangle}{1152\pi}. \quad (2.144)$$

Здесь  $\langle R^2 \rangle$  является квадратом амплитуды осцилляций  $R$ , и мы подставили  $\tilde{\omega} = am$ . Чтобы получить полную скорость преобразования гравитационной энергии в элементарные частицы, нужно умножить выражение выше на число типов рожденных частиц  $N_{\text{eff}}$ , так что полная скорость рождения материи есть  $\dot{\rho}_{\text{PP}} = N_{\text{eff}} \dot{\rho}_\chi$ . Отметим, что результат (2.144) совпадает с результатом работы [125], хотя и получен в несколько другом космологическом режиме.

Теперь можно вычислить эволюцию космологической плотности энергии материи, определяемую уравнением

$$\dot{\rho} = -4H\rho + \dot{\rho}_{\text{PP}}. \quad (2.145)$$

Здесь мы предположили, что рожденная материя является релятивистской, поэтому первое слагаемое в правой части описывает обычное космологическое красное смещение, в то время как второе служит источником частиц из осцилляций  $R$ . Поскольку  $\rho$  неосциллирующая, а плавно меняющаяся

функция времени, ее красное смещение преимущественно определяется не-осциллирующей частью параметра Хаббла,  $H_c \simeq \alpha/2t$  (см. (2.115)).

Параметризуя осциллирующую часть параметра Хаббла как  $H_{osc} \simeq \beta \cos mt/t$ , находим для осциллирующей части кривизны

$$R \simeq -\frac{6\beta m \sin mt}{t} e^{-\Gamma_R t}. \quad (2.146)$$

Здесь мы учитываем экспоненциальное затухание  $R$ , опущенное для краткости в выражении выше для  $H$ .

Соответственно, плотность энергии материи подчиняется уравнению

$$\dot{\rho} = -\frac{2\alpha}{t}\rho + \frac{\beta^2 m^3 N_{\text{eff}}}{32\pi t^2} e^{-2\Gamma_R t}. \quad (2.147)$$

Это уравнение можно явно проинтегрировать в имеющемся виде, но для простой аналитической оценки будем использовать приближение мгновенного распада. А именно, пренебрежем экспоненциально затухающим слагаемым, когда  $2\Gamma_R t < 1$ , и возьмем  $\alpha = \alpha_1 = 1,25$ , согласно численной оценке из п. 2.2.1. Для  $2\Gamma_R t > 1$  полностью проигнорируем второе слагаемое (источник) в уравнении (2.147) и положим  $\alpha = \alpha_2 = 1$ . Этот выбор соответствует решению ОТО, и мы считаем, что оно реализуется, когда осцилляции исчезают, как следует из приведенных выше аналитических оценок. Таким образом, на малых временах, когда  $2\Gamma_R t < 1$ , плотность энергии материи будет равна

$$\rho = \rho_{\text{in}} \left(\frac{t_{\text{in}}}{t}\right)^{2\alpha_1} + \frac{\beta^2 m^3 N_{\text{eff}}}{32\pi(2\alpha_1 - 1)t} \left(1 - \frac{t_{\text{in}}^{2\alpha_1 - 1}}{t^{2\alpha_1 - 1}}\right). \quad (2.148)$$

Для больших времен, т.е. при  $2\Gamma_R t > 1$ , уравнение (2.147) становится однородным и его решение есть просто релятивистски смещенная плотность энергии с начальным значением, определенным из уравнения (2.148) при  $t = 1/(2\Gamma_R)$ :

$$\rho = \frac{m^6}{768\pi M_{\text{Pl}}^2 (2\Gamma_R t)^{2\alpha_2}} \times \left[ \frac{\kappa}{8} (2t_{\text{in}}\Gamma_R)^{2\alpha_1 - 2} + \frac{\beta^2 N_{\text{eff}}}{2\alpha_1 - 1} (1 - (2\Gamma_R t_{\text{in}})^{2\alpha_1 - 1}) \right], \quad (2.149)$$

где мы параметризовали плотность энергии материи в начальный момент времени  $t_{\text{in}}$  как

$$\rho_{\text{in}} = \frac{3M_{\text{Pl}}^2 \kappa}{32\pi t_{\text{in}}^2}. \quad (2.150)$$

Параметр  $\kappa$  произволен и зависит от тепловой истории Вселенной до времени  $t_{\text{in}}$ . В частности, значение  $\kappa = 0$  возможно и не противоречит нашей картине, поскольку уравнения движения имеют ненулевые осциллирующие решения, даже если  $\rho = 0$ .

Первое слагаемое в уравнении (2.149) является вкладом обычной тепловой релятивистской материи, в то время как второе слагаемое также описывает релятивистскую материю, но эта материя может не быть тепловой, по крайней мере в течение того же космологического периода. В зависимости от параметров относительная величина нетепловой материи может варьироваться от пренебрежимо малой до доминирующей.

**2.2.4. Обсуждение и значимость.** Характерное время распада осциллирующей кривизны равно

$$\tau_R = \frac{1}{2\Gamma_R} = \frac{24M_{\text{Pl}}^2}{m^3} \simeq 2 \left( \frac{10^5 \text{ ГэВ}}{m} \right)^3 \text{ с.} \quad (2.151)$$

Вклад рожденных частиц в полную космологическую плотность энергии достигает своего максимального значения приблизительно за это время. Отношение плотности энергии родившихся частиц высоких энергий к плотности энергии частиц, уже существующих в плазме, согласно (2.149), равно

$$\frac{\rho_{\text{high}}}{\rho_{\text{therm}}} = \frac{8\beta^2 N_{\text{eff}}}{\kappa(2\alpha_1 - 1)} \frac{1 - (2\Gamma_R t_{\text{in}})^{2\alpha_1 - 1}}{(2\Gamma_R t_{\text{in}})^{2\alpha_1 - 2}}. \quad (2.152)$$

Если взять  $t_{\text{in}} \simeq 1/m$ , то  $t_{\text{in}}\Gamma_R \simeq m^2/M_{\text{Pl}}^2 \ll 1$  и эффектами нетепловой материи можно пренебречь. Однако для достаточно больших  $\beta$  и возможно малых  $\kappa$  нетепловые частицы могут играть значительную роль в космологической истории. Приток протонов и антипротонов высоких энергий мог бы оказать влияние на первичный нуклеосинтез. Тем самым это либо позволило бы получить ограничения на  $m$ , либо даже улучшить согласие между теоретическими предсказаниями для первичного нуклеосинтеза и измерениями первичных обилий легких ядер.

### 3. ДЖИНСОВСКАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ И АНТИГРАВИТАЦИЯ В $F(R)$ -ТЕОРИЯХ

В данном разделе рассматриваются сферически-симметричные решения в  $F(R)$ -теориях в системах с растущей плотностью энергии. Для решений, в которых скаляр кривизны осциллирует с большой амплитудой и высокой частотой, найденных в наших работах [121, 126, 131–133], показано, что развитие неустойчивости Джинса сильно модифицируется [135–139]. Обнаружено,

что для больших астрономических объектов модифицированная гравитация может становиться отталкивающей, поэтому такие объекты сжимаются, образуя относительно тонкие оболочки вместо квазигомогенных тел. Это могло бы объяснить образование космических пустот.

**3.1. Сферически-симметричные решения в  $F(R)$ -гравитации и гравитационное отталкивание.** Детальное исследование решений уравнений модифицированной гравитации в современной Вселенной для астрономических объектов конечного размера было проведено в работах [131, 132] (см. также разд. 1, п. 1.2). Там было показано, что в системах с растущей со временем плотностью энергии возникают быстрые осцилляции скаляра кривизны с амплитудой, возможно, намного большей, чем обычное значение  $R = -\tilde{T}$  в общей теории относительности. Такое решение можно представить в виде

$$R = R_{\text{GR}}(r)y(t), \quad (3.1)$$

где  $R_{\text{GR}} = -\tilde{T}(r)$  является предполагаемым решением в пределе ОТО, в то время как быстро осциллирующая функция  $y(t)$  может быть значительно больше единицы. Согласно нашей работе [135] максимальное значение  $y(t)$  в области пиков определяется формулой

$$y(t) \sim 6n(2n+1)mt_U \left( \frac{t_U}{t_{\text{contr}}} \right) \left[ \frac{\rho_m(t)}{\rho_{m0}} \right]^{(n+1)/2} \left( \frac{\rho_c}{\rho_{m0}} \right)^{2n+2}, \quad (3.2)$$

где  $t_U$  есть возраст Вселенной,  $t_{\text{contr}}$  является характерным временем сжатия. Плотность энергии считается растущей как  $\rho_m(t) = \rho_{m0}(1 + t/t_{\text{contr}})$ , где  $\rho_{m0}$  — начальная плотность энергии облака, а  $\rho_c = 10^{-29}$  г/см<sup>3</sup> — космологическая плотность энергии в настоящее время. Так как массовый параметр  $m$ , входящий в функцию  $F(R)$  в модели (1.20), должен быть больше чем  $10^5$  ГэВ [126], чтобы избежать конфликта с предсказаниями первичного нуклеосинтеза, фактор  $mt_U$  является огромным:  $mt_U \geq 10^{47}$ . При этом  $y$  может достигать очень больших значений, если не будет подавляться малым отношением  $(\rho_c/\rho_{m0})^{2n+2}$  при больших  $n$ .

Как показано в работах [132, 135], пики с такой большой амплитудой будут формироваться, если

$$6n^2(2n+1)^2 \left( \frac{t_u}{t_{\text{contr}}} \right)^2 \left[ \frac{\rho_m(t)}{\rho_{m0}} \right]^{3n+1} \left( \frac{\rho_c}{\rho_{m0}} \right)^{2n+2} > 1. \quad (3.3)$$

Значения плотностей  $\rho_{m0}$  и  $\rho_m(t)$  зависят от рассматриваемого объекта. Если мы говорим об образовании галактик или их кластеров, можно ожидать следующих соотношений:  $\rho_{m0}/\rho_c = 1-10^3$ , а  $\rho_m(t)/\rho_{m0}$  варьируется в области  $1-10^5$ . Действительно, осцилляции кривизны возбуждаются в таких системах, если их плотность энергии растет со временем. Для крупномасштабных структур этот процесс начался, когда они отделились от общего потока

Хаббла, что, в основном, происходило при красных смещениях в интервале  $z = 10-0$  и могло приводить к созданию галактик с плотностью энергии на 5 порядков выше современной космологической плотности. Если мы рассмотрим формирование звездных или планетарных объектов из межгалактического газа с начальной плотностью  $10^{-24}$  г/см<sup>3</sup>, то увидим, что  $\rho_{m0}/\rho_c = 10^5$  и  $\rho_m(t)/\rho_{m0}$  может меняться в области  $1-10^{24}$  или даже больше.

Даже если условие (3.3) не выполняется и решения с пиками большой амплитуды не возбуждаются, амплитуда  $y(t)$ , как показывают аналитические и численные расчеты, приведенные в работах [131–133], будет больше единицы, что является существенным для представленного ниже результата о гравитационном отталкивании внутри систем с растущей плотностью энергии.

Анализ, проведенный в статьях [131–133], был сделан в предположении, что фоновое пространство-время близко к плоскому, а фоновую метрику можно считать метрикой Минковского. Однако большие отклонения кривизны от ее значения в ОТО, найденные в цитируемых работах, могут нарушать предположение о приближенно плоском фоне и требуют его проверки. В дальнейшем мы будем рассматривать сферически-симметричный «пузырь» материи, например, газовое облако или какой-либо другой астрономический объект, занимающий конечную область пространства радиуса  $r_m$ , и будем изучать сферически-симметричное решение уравнений движения (B.33) и (B.34) в теории с функцией  $F(R)$  в модели (1.20), предполагая, что метрика имеет форму Шварцшильда:

$$ds^2 = A(r, t) dt^2 - B(r, t) dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (3.4)$$

Метрика такого типа в  $F(R)$ -теориях анализировалась в работах [179, 180], но осцилляции кривизны, существенные в нашей работе [135], в них не учитывались. Без учета таких осцилляций наши результаты согласуются с цитируемыми статьями.

Предположим, что метрические коэффициенты  $A$  и  $B$  мало отличаются от единицы, и проверим, при каких условиях это предположение справедливо. Ненулевые компоненты тензора Риччи в метрике (3.4) имеют вид

$$R_{00} = \frac{A'' - \ddot{B}}{2B} + \frac{(\dot{B})^2 - A'B'}{4B^2} + \frac{\dot{A}\dot{B} - (A')^2}{4AB} + \frac{A'}{rB}, \quad (3.5)$$

$$R_{rr} = \frac{\ddot{B} - A''}{2A} + \frac{(A')^2 - \dot{A}\dot{B}}{4A^2} + \frac{A'B' - (\dot{B})^2}{4AB} + \frac{B'}{rB}, \quad (3.6)$$

$$R_{\theta\theta} = -\frac{1}{B} + \frac{rB'}{2B^2} - \frac{rA'}{2AB} + 1, \quad (3.7)$$

$$R_{\varphi\varphi} = \left( -\frac{1}{B} + \frac{rB'}{2B^2} - \frac{rA'}{2AB} + 1 \right) \sin^2 \theta = R_{\theta\theta} \sin^2 \theta, \quad (3.8)$$

$$R_{0r} = \frac{\dot{B}}{rB}. \quad (3.9)$$

Здесь штрих и точка означают дифференцирование по  $r$  и  $t$  соответственно. Скаляр Риччи в данном случае определяется как

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{A}R_{00} - \frac{1}{B}R_{rr} - \frac{1}{r^2}R_{\theta\theta} - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta}R_{\varphi\varphi} = \\ &= \frac{A'' - \ddot{B}}{AB} + \frac{(\dot{B})^2 - A'B'}{2AB^2} + \frac{\dot{A}\dot{B} - (A')^2}{2A^2B} + \frac{2A'}{rAB} - \frac{2B'}{rB^2} + \frac{2}{r^2B} - \frac{2}{r^2} = \\ &= \frac{2}{A}R_{00} - \frac{2B'}{rB^2} + \frac{2}{r^2B} - \frac{2}{r^2}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Будем считать, что метрика близка к плоской, т.е.

$$A_1 = A - 1 \ll 1 \text{ и } B_1 = B - 1 \ll 1, \quad (3.11)$$

и проверим, останется ли это предположение верным для решений с очень большими значениями  $R$ , найденными в наших предыдущих работах [131–133] (см. введение).

Гравитационные уравнения движения (В.33) и (В.34) удобно представить в следующем виде:

$$R_{00} - \frac{R}{2} = \frac{\tilde{T}_{00} + \Delta F_{,R} + F/2 - RF_{,R}/2}{1 + F_{,R}}, \quad (3.12)$$

$$R_{rr} + \frac{R}{2} = \frac{\tilde{T}_{rr} + (\partial_t^2 + \partial_r^2 - \Delta)F_{,R} - F/2 + RF_{,R}/2}{1 + F_{,R}}, \quad (3.13)$$

поскольку их левые части содержат только первые производные от метрических коэффициентов. В пределе слабого поля, в котором производные функций  $A(r, t)$  и  $B(r, t)$  достаточно малы, так что их квадратами можно пренебречь, получаем следующие выражения для компонент тензора Риччи  $R_{00}$  и  $R_{rr}$  и скаляра кривизны  $R$ :

$$R_{00} \approx \frac{A'' - \ddot{B}}{2} + \frac{A'}{r}, \quad (3.14)$$

$$R_{rr} \approx \frac{\ddot{B} - A''}{2} + \frac{B'}{r}, \quad (3.15)$$

$$R \approx A'' - \ddot{B} + \frac{2A'}{r} - \frac{2B'}{r} + \frac{2(1 - B)}{r^2}. \quad (3.16)$$

Если плотность энергии вещества внутри облака, т.е. при  $r < r_m$ , значительно больше, чем космологическая плотность энергии, выполняются следующие ограничения:

$$F_{,R} \ll 1 \text{ и } F \ll R. \quad (3.17)$$

Для стационарных решений эффекты модификаций гравитации в этом пределе слабы и, как мы увидим в дальнейшем, решение оказывается достаточно близким к стандартному решению Шварцшильда в согласии с другими работами на эту тему. Предположим, что пространственные производные  $F'_R$  малы по сравнению с производными по времени. Это предположение будет обосновано *a posteriori*, так как ниже мы используем решение с быстро осциллирующим  $R$ , найденным в работах [131, 132]. Характерное время изменения этого решения микроскопически мало, в то время как масштаб пространственных изменений макроскопически велик.

Таким образом, из уравнения (B.34) (или, что то же самое, (2.10)) следует, что

$$(\partial_t^2 - \Delta)F_{,R} = (\tilde{T} + R)/3. \quad (3.18)$$

Тогда получаем

$$B'_1 + \frac{B_1}{r} = r\tilde{T}_{00}, \quad (3.19)$$

$$A''_1 - \frac{A'_1}{r} = -\frac{3B_1}{r^2} + \ddot{B}_1 + \tilde{T}_{00} - 2\tilde{T}_{rr} + \frac{\tilde{T}_{\theta\theta}}{r^2} + \frac{\tilde{T}_{\varphi\varphi}}{r^2 \sin^2 \theta} \equiv S_A. \quad (3.20)$$

Поскольку мы считаем, что отклонения от метрики Минковского малы, мы пренебрегаем соответствующими поправками в тензоре энергии-импульса  $T_{\mu\nu}$ . Справедливость такого предположения — именно то, что нужно проверить.

Уравнение (3.19) имеет решение

$$B_1(r, t) = \frac{C_B(t)}{r} + \frac{1}{r} \int_0^r dr' r'^2 \tilde{T}_{00}(r', t). \quad (3.21)$$

Чтобы избежать сингулярности при  $r = 0$ , нужно положить  $C_B(t) \equiv 0$ . При этом выражение для  $B_1$  формально совпадет с обычным решением Шварцшильда, в то время как уравнение, определяющее метрический коэффициент  $A_1$ , допускает дополнительную свободу:

$$A_1(r, t) = C_{1A}(t)r^2 + C_{2A}(t) + \int_r^{r_m} dr_1 r_1 \int_{r_1}^{r_m} \frac{dr_2}{r_2} S_A(r_2, t). \quad (3.22)$$

Пределы интегрирования выбраны таким образом, что сингулярность при  $r_2 = 0$  исключена. Используя уравнение (3.21) с  $C_B = 0$ , можно записать  $S_A$  как

$$S_A = -\frac{3}{r^3} \int_0^r dr' r'^2 \tilde{T}_{00}(r', t) + \frac{1}{r} \int_0^r dr' r'^2 \ddot{\tilde{T}}_{00}(r', t) + \tilde{T}_{00} - 2\tilde{T}_{rr} + \frac{\tilde{T}_{\theta\theta}}{r^2} + \frac{\tilde{T}_{\varphi\varphi}}{r^2 \sin^2 \theta}. \quad (3.23)$$

Соответственно, получаем следующее выражения для  $A_1(r, t)$ :

$$\begin{aligned}
 A_1(r, t) = & C_{1A}(t)r^2 + C_{2A}(t) + \\
 & + \int_r^{r_m} dr_1 r_1 \int_{r_1}^{r_m} \frac{dr_2}{r_2} \left( \tilde{T}_{00}(r_2, t) - 2\tilde{T}_{rr}(r_2, t) + \frac{\tilde{T}_{\theta\theta}(r_2, t)}{r^2} + \frac{\tilde{T}_{\varphi\varphi}(r_2, t)}{r^2 \sin^2 \theta} \right) - \\
 & - \int_r^{r_m} dr_1 r_1 \int_{r_1}^{r_m} \frac{dr_2}{r_2} \left( \frac{3}{r_2^3} \int_0^{r_2} dr' r'^2 \tilde{T}_{00}(r', t) - \frac{1}{r_2} \int_0^{r_2} dr' r'^2 \ddot{\tilde{T}}_{00}(r', t) \right). \quad (3.24)
 \end{aligned}$$

**3.1.1. Шварцшильдовский случай.** Полезно проверить, как решения (3.21) и (3.24) сводятся к вакуумному решению Шварцшильда в ОТО. Масса вещества внутри шара радиуса  $r$  определяется обычным образом:

$$M(r, t) = \int_0^r d^3r T_{00}(r, t) = 4\pi \int_0^r dr r^2 T_{00}(r, t). \quad (3.25)$$

Если все вещество заключено внутри радиуса  $r_m$ , полная масса  $M \equiv M(r_m)$  и, вследствие закона сохранения массы, не зависит от времени. Так как  $\tilde{T}_{00} = 8\pi T_{00}/M_{\text{Pl}}^2$ , получаем для  $r > r_m$ , как и ожидалось,  $B_1 = r_g/r$ , где  $r_g = 2M/M_{\text{Pl}}^2$  — обычный шварцшильдовский радиус.

Перейдем к вычислению  $A_1$  (3.24). Очевидно, для  $r > r_m$  первое слагаемое с интегралом исчезает, так как  $r_2$  больше, чем  $r_m$ , и фактически в этой области  $T_{\mu\nu} = 0$ . Интеграл, содержащий  $\ddot{\tilde{T}}_{00}$ , также обращается в нуль вследствие сохранения полной массы. Оставшийся интеграл легко берется:

$$\int_r^{r_m} dr_1 r_1 \int_{r_1}^{r_m} \frac{dr_2}{r_2} \frac{3}{r_2^3} \int_0^{r_2} dr' r'^2 \tilde{T}_{00}(r', t) = \frac{r_g}{r} + \frac{r_g r^2}{2r_m^3} - \frac{3r_g}{2r_m}. \quad (3.26)$$

Таким образом, метрический коэффициент вне источника равен

$$A_1 = -\frac{r_g}{r} + \left[ C_{1A}(t) - \frac{r_g}{2r_m^3} \right] r^2 + \left[ C_{2A}(t) + \frac{3r_g}{2r_m} \right]. \quad (3.27)$$

Выбирая  $C_{1A} = r_g/(2r_m^3)$ , чтобы избавиться от  $r^2$ -члена на бесконечности, и считая  $C_{2A} = -3r_g/(2r_m)$ , получаем обычное решение Шварцшильда.

**3.1.2. Решения в модифицированной гравитации.** В модифицированной теории внутреннее решение остается того же вида (3.21) и (3.24), но коэффициент  $C_{1A}$  может теперь нетривиально зависеть от времени. Этот коэффициент можно найти из (3.16), если известен скаляр кривизны. Как отмечалось выше, в наших работах [131–133] (см. введение) было показано, что



в системах с растущей плотностью энергии величина скаляра кривизны может быть значительно больше, чем его значение в ОТО. Используя уравнения (3.21) и (3.24) и сравнивая их с (3.16), можно заключить, что главный вклад в такую форму кривизны дают слагаемые  $A'' + 2A'/r$ , т. е.  $C_{1A}(t) = R(t)/6$ , где  $R(t)$  определяется уравнениями (3.1), (3.2).

Существует заметное различие между модифицированным и стандартным решениями в вакууме. В стандартном случае член, пропорциональный  $r^2$ , появляется как при  $r < r_m$ , так и при  $r > r_m$  с одним и тем же коэффициентом и, следовательно, должен исчезнуть. С другой стороны, для модифицированной гравитации такое условие неприменимо, и слагаемое  $C_{1A}r^2$  может присутствовать при  $r < r_m$ , но отсутствовать при  $r \gg r_m$ . Вакуумное решение для  $R$ , предположительно, имеет порядок космологической кривизны,  $R \sim R_c$ , плюс возможные осциллирующие члены.

Таким образом, метрические функции внутри облака равны

$$B(r, t) = 1 + \frac{2M(r, t)}{M_{\text{Pl}}^2 r} \equiv 1 + B_1^{\text{Sch}}, \quad (3.28)$$

$$A(r, t) = 1 + \frac{R(t)r^2}{6} + A_1^{\text{Sch}}(r, t). \quad (3.29)$$

Другими словами, мы строим внутреннее решение, полагая, что оно состоит из двух частей: решения Шварцшильда и осциллирующей части, индуцированной растущей плотностью. Выражение для  $A_1^{\text{Sch}}(r, t)$  можно найти из (3.24) с константами  $C_{A1} = r_g/2r_m^3$  и  $C_{A2} = -3r_g/r_m$ , как следует из формулы (3.27). Что касается интегралов в (3.24), то они вычисляются в предположении, что материя является нерелятивистской, т. е. пространственные компоненты  $T_{\mu\nu}$  пренебрежимо малы по сравнению с временной компонентой  $T_{00}$ , а плотность материи/энергии  $T_{00} \equiv \rho_m(t)$  является пространственно постоянной, но может зависеть от времени. Первые два интеграла в (3.24) исчезают, и сохраняется только интеграл, содержащий вторую производную по времени от плотности массы. Таким образом, для шварцшильдовской части решения находим

$$A_1^{\text{Sch}}(r, t) = \frac{r_g r^2}{2r_m^3} - \frac{3r_g}{2r_m} + \frac{\pi \dot{\rho}_m}{3M_{\text{Pl}}^2} (r_m^2 - r^2)^2. \quad (3.30)$$

Как отмечалось выше,  $R(t)$  обычно больше, чем значение скаляра кривизны  $|R_{\text{GR}}| = 8\pi\rho_m/M_{\text{Pl}}^2$  в ОТО, поэтому второе слагаемое в (3.29),  $R(t)r^2/6$ , дает доминирующий вклад в  $A_1 = A - 1$  при достаточно больших  $r$ . Действительно,  $r^2 R(t) \sim r^2 y R_{\text{GR}}$  с  $y > 1$ , а канонические члены решения Шварцшильда имеют порядок  $r_g/r_m \sim \rho_m r_m^2/M_{\text{Pl}}^2 \sim r_m^2 R_{\text{GR}}$ .

Уже упоминалось, что решение с большим осциллирующим  $R(t)$  было получено в работах [131–134] в предположении, что фоновая метрика мало

отличается от плоской метрики Минковского. Это определенно справедливо для шварцшильдовской части решения (3.30), но может быть поставлено под сомнение для  $r^2 R(t)/6$ -члена. Очевидно, что плоская фоновая метрика не будет заметно искажена, если  $r^2 < 6/R(t)$ . Если же начальная плотность энергии облака имеет порядок космологической плотности энергии, т.е.  $R \sim R_{\text{GR}} \sim 1/t_U^2$ , то метрика будет отклоняться от метрики Минковского для облаков с радиусом  $r_m > t_U/\sqrt{y}$ , где максимальное значение  $y$  задается уравнением (3.2). Для систем, в которых достигаются очень большие значения  $y$ , приближение плоского пространства может быть нарушено уже при неинтересно малых  $r$ . Однако на стадии роста  $R(t)$ , когда значение  $y > 1$ , но не огромно, это приближение может быть справедливым для всего объема сжимающегося облака.

Для больших объектов или больших  $y$  таких, что  $Rr^2/6 \sim 1$ , приближение плоской фоновой метрики становится неприменимым и нужно решать точные нелинейные уравнения (3.5)–(3.9). Если функция  $A_1$  становится сравнимой с единицей, эволюция  $R(t)$  может существенно отличаться от найденной в работах [132–134], но кажется очевидным, что, как только кривизна достигнет больших значений ( $y > 1$ ),  $y$  будет оставаться большим единицы, несмотря на возможную обратную реакцию не плоской метрики.

В низшем порядке гравитационного взаимодействия движение нерелятивистской пробной частицы определяется уравнением (уравнение геодезической в метрике (3.4)):

$$\ddot{r} = -\frac{A'}{2} = -\frac{1}{2} \left[ \frac{R(t)r}{3} + \frac{r_g r}{r_m^3} \right], \quad (3.31)$$

где  $A$  дается уравнением (3.29). Так как  $R(t)$  всегда отрицательно и велико, рассмотренные здесь модификации ОТО ведут к антигравитации внутри облака с плотностью энергии, превосходящей космологическую плотность. Гравитационное отталкивание преобладает над обычным притяжением, если

$$\frac{|R|r_m^3}{3r_g} = \frac{|R|r_m^3 M_{\text{Pl}}^2}{6M} = \frac{|R|r_m^3 M_{\text{Pl}}^2}{8\pi\rho r_m^3} = \frac{|R|}{\widetilde{T}_{00}} \equiv y > 1, \quad (3.32)$$

т.е., по существу, это будет происходить всякий раз, когда колебания  $R$  начинают расти независимо от начального значения плотности  $\rho$  и, в какой-то степени, от специфики рассматриваемой  $F(R)$ -теории.

Следовательно, вывод о преобладании гравитационного отталкивания над обычным шварцшильдовским притяжением является более фундаментальным утверждением, применимым практически ко всем моделям  $F(R)$ , в которых возникают осцилляции кривизны с амплитудой большей, чем значение кривизны в ОТО. Эти колебания затухают вследствие гравитационного рождения частиц, но соответствующее время жизни может быть сравнимым или

даже большим, чем космологическое время. Таким образом, образование структуры в модифицированной гравитации будет отличаться от аналогичного процесса в общей теории относительности. Достаточно большие первичные облака не сжимались бы до меньших и меньших тел с более или менее однородной плотностью, но могли бы формировать тонкие оболочки, пустые (или почти пустые) внутри, за исключением, возможно, некоторой центральной массы. Следовательно, гравитационное отталкивание, найденное в нашей работе [135], может быть ответственно за образование космических пустот.

Для некоторых типов объектов этот результат модифицирует анализ формирования и устойчивости астрономических структур в  $F(R)$ -гравитации, приведенный в работах [181, 182]. Однако нужно подчеркнуть, что в цитируемых статьях не учитывались производные по времени, поэтому различие с нашими результатами, главным образом, связано с различными физическими явлениями.

Здесь следует сделать еще одно замечание. В стандартной ОТО справедлива теорема Джебсена–Биркгофа [87, 88] (см. также книгу [89]), которая гласит, что любое конечное тело с положительно определенной плотностью энергии может создавать только гравитационное притяжение. Наш результат находится в прямом противоречии с этим утверждением. Теорема Джебсена–Биркгофа в случае модифицированной гравитации детально обсуждалась в обзоре [129], см. также [183]. Там было показано, что в пространстве-времени с постоянным скаляром кривизны любой сферически-симметричный фон неизбежно является статическим, т. е. теорема Джебсена–Биркгофа справедлива для  $F(R)$ -гравитации с постоянной кривизной. Эта теорема нарушается, если кривизна не постоянна, как это происходит в рассматриваемом нами случае.

**3.2. Эволюция возмущений плотности в ньютоновской гравитации и в ОТО.** Развитие неустойчивостей в самогравитирующих системах было впервые исследовано в случае нерелятивистской ньютоновской гравитации Джинсом [184] в 1902 г. В 1946 г. Лифшиц расширил эти исследования на общую теорию относительности [185]. В настоящее время такая теория широко используется в космологии для изучения роста возмущений в нашей Вселенной [19–21, 186]. Сравнение теоретических расчетов и астрономических данных является очень мощным инструментом для проверки Стандартной космологической модели.

В данном подразделе ответственно нашей работе [136] джинсовская неустойчивость в системах с растущей плотностью энергии исследуется в классической и модифицированной гравитации в предположении, что фоновая метрика медленно меняется по сравнению с характерной частотой и комптоновской длиной волны поля скалярона. В работах [137–139] гравитационная неустойчивость рассматривалась на фоне быстро осциллирующей кривизны. Нами было показано, что временная эволюция возмущений определяется дифференциальным уравнением четвертого порядка вместо обычного уравнения

второго порядка, что приводит к возникновению новых типов неустойчивых решений.

**3.2.1. Джинсовская неустойчивость в ньютоновской теории с неоднородным и нестационарным фоном.** Оригинальный подход Джинса основан на хорошо известном уравнении Пуассона, связывающем ньютоновский потенциал  $\Phi$  с плотностью материи  $\rho$ :

$$\Delta\Phi = \frac{4\pi}{M_{\text{Pl}}^2}\rho. \quad (3.33)$$

Эволюция плотности материи  $\rho$ , давления  $P$  и скорости  $\mathbf{v}$  в собственном гравитационном поле описывается двумя гидродинамическими уравнениями, а именно, уравнением Эйлера и уравнением непрерывности:

$$\partial_t(\rho\mathbf{v}) + \rho(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} + \nabla P + \rho\nabla\Phi = 0, \quad (3.34)$$

$$\partial_t\rho + \nabla(\rho\mathbf{v}) = 0. \quad (3.35)$$

На этой стадии имеются три уравнения и четыре неизвестных:  $\rho$ ,  $P$ ,  $\mathbf{v}$  и  $\Phi$ . Чтобы получить еще одно необходимое уравнение, нужно добавить информацию о физических свойствах материи, которая будет введена ниже уравнением состояния.

Система уравнений (3.33)–(3.35) решается пертурбативно в предположении, что флуктуации над известными фоновыми величинами являются инфинитезимальными:

$$\rho = \rho_b + \delta\rho, \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_b + \delta\mathbf{v}, \quad P = P_b + \delta P, \quad \Phi = \Phi_b + \delta\Phi. \quad (3.36)$$

В результате возникает система трех линейных дифференциальных уравнений для возмущений  $\delta\rho$ ,  $\delta\mathbf{v}$ ,  $\delta P$  и  $\delta\Phi$ . Для замыкания этой системы обычно добавляют «акустическое» уравнение состояния

$$\delta P = c_s^2\delta\rho, \quad (3.37)$$

где  $c_s$  — скорость звука.

В теории Джинса предполагается, что фоновая плотность массы однородна и не зависит от времени, а фоновое давление и фоновая скорость равны нулю,  $P = 0$  и  $\mathbf{v} = 0$ . Можно легко увидеть, что эти предположения не являются самосогласованными. Из уравнения Эйлера (3.34) следует, что фоновый потенциал должен быть пространственно постоянен,  $\nabla\Phi_b = 0$ , но это противоречит уравнению Пуассона (3.33) в нулевом порядке, т. е. для фоновых величин.

Данная проблема обсуждалась в книге Зельдовича и Новикова [186], где утверждалось, что для зависящей от времени, но пространственно постоянной

фоновой плотности,  $\rho_b(t)$ , теорию можно сформулировать в самосогласованном виде. Физически такой случай реализуется в космологии.

С другой стороны, для устранения этого недостатка в плоском пространстве-времени Муханов [19] предложил ввести искусственную антигравитирующую субстанцию, как, например, вакуумноподобную энергию, которая будет уравновешивать гравитационное притяжение фона. Таким образом, уравнение (3.33) будет выполняться в нулевом порядке. Альтернативная возможность, используемая в статье [187], заключается в предположении, что фоновая плотность исчезает, так что (3.33) становится соотношением между величинами первого порядка.

Подчеркнем, что эта проблема отсутствует в релятивистской космологии, где фоновые уравнения удовлетворяются в нулевом порядке (см. книги [21, 186]). В отличие от случая возмущений в плоском пространстве-времени, фоновые величины в космологии должны быть решениями уравнений движения в приближении нулевого порядка.

В нашей работе [136] предложен более точный подход к решению проблемы, при котором уравнения для фона выполняются в нулевом порядке. В качестве примера рассмотрим сферически-симметричное облако частиц с начально исчезающими давлением и скоростями и изучим классическую нерелятивистскую задачу Джинса в ньютоновской гравитации. Мы не будем ограничиваться случаем независимого от времени фона. Вместо этого рассмотрим сценарий, зависящий от времени, выбирая в качестве начального условия однородное распределение плотности материи  $\rho_b(t=0) \equiv \rho_0 = \text{const}$  внутри сферы радиуса  $r_m$ , в то время как вне этой сферы  $\rho = 0$ . Начальные значения скоростей частиц и давления принимаются равными нулю, а начальный потенциал  $\Phi$  при  $t=0$  является решением уравнения Пуассона (3.33)

$$\begin{aligned}\Phi_b(t=0, r > r_m) &= -\frac{M}{rM_{\text{Pl}}^2}, \\ \Phi_0 \equiv \Phi_b(t=0, r < r_m) &= \frac{2\pi}{3M_{\text{Pl}}^2}\rho_0 r^2 + C_0,\end{aligned}\tag{3.38}$$

где полная масса гравитирующей сферы равна

$$M = \frac{4\pi}{3}\rho_0 r_m^3.\tag{3.39}$$

Постоянная  $C_0 = -2\pi\rho_0 r_m^2/M_{\text{Pl}}^2$  выбрана так, что потенциал является непрерывным при  $r = r_m$ .

В дальнейшем нас интересует внутреннее решение при  $r < r_m$ . Теперь мы можем определить, как фоновые величины  $\rho$ ,  $\mathbf{v}$  и  $P$  эволюционируют со временем при малых  $t$ . Из уравнения Эйлера (3.34) следует, что

$$\mathbf{v}_b(t, r) = -\nabla\Phi_0 t = -\frac{4\pi}{3M_{\text{Pl}}^2}\rho_0 t \mathbf{r}.\tag{3.40}$$

Из уравнения непрерывности (3.35) находим

$$\rho_b(t, r) = \rho_0 + \rho_1 = \rho_0 \left( 1 + \frac{2\pi}{3M_{\text{Pl}}^2} \rho_0 t^2 \right). \quad (3.41)$$

Интересно, что плотность  $\rho$  возрастает со временем таким образом, что остается постоянной в пространстве. Из-за однородности  $\rho$  давление остается равным нулю,  $P_1 = 0$ . Изменение фонового потенциала со временем находится с помощью уравнения Пуассона (3.33)

$$\Phi_b(r, t) = \Phi_0 + \Phi_1 = \frac{2\pi}{3M_{\text{Pl}}^2} r^2 \rho_0 \left( 1 + \frac{2\pi}{3M_{\text{Pl}}^2} \rho_0 t^2 \right). \quad (3.42)$$

Рассмотрим теперь эволюцию возмущений над этим зависящим от времени фоном. Продолжим, как обычно, представляя  $\rho = \rho_b(r, t) + \delta\rho$ ,  $\Phi = \Phi_b(r, t) + \delta\Phi$ ,  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1(r, t) + \delta\mathbf{v}$  и  $\delta P = c_s^2 \delta\rho$ , где  $c_s$  — скорость звука. Здесь все  $\delta$ -величины являются бесконечно малыми, и за пределами первого порядка ими можно пренебречь. Мы также пренебрегаем их произведениями, являющимися членами второго порядка, и получаем

$$\Delta(\delta\Phi) = \frac{4\pi}{M_{\text{Pl}}^2} \delta\rho, \quad (3.43)$$

$$\partial_t \delta\mathbf{v} + \nabla \delta\Phi + \frac{\delta\rho}{\rho_0} \nabla \Phi_b + \frac{\nabla \delta P}{\rho_0} = 0, \quad (3.44)$$

$$\partial_t \delta\rho + \rho_0 \nabla(\delta\mathbf{v}) = 0. \quad (3.45)$$

В наших приближениях зависимость коэффициентов от времени исчезла. Ниже мы добавим к фону поправки, зависящие от времени.

Уравнение (3.44) содержит слагаемое  $(\delta\rho/\rho_0)\nabla\Phi_b$ , явно зависящее от координаты  $r$  через фоновый потенциал  $|\nabla\Phi_b| = (4\pi/3)r\rho_0/M_{\text{Pl}}^2$ . Оценим это слагаемое, заменяя  $r$  на его максимальное значение  $r_m$ . Чтобы узнать, является этот член существенным или нет, сравним его с фурье-образом последнего слагаемого в (3.44)

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\nabla \delta P}{\rho_0} e^{-i\lambda t + i\mathbf{k}\mathbf{r}} \sim k c_s^2 \frac{\delta\rho(\lambda, \mathbf{k})}{\rho_0}. \quad (3.46)$$

Иными словами, нам нужно сравнить  $k c_s^2$  с  $(4\pi/3)\rho_0/M_{\text{Pl}}^2$ . Очевидно, что

$$\frac{4\pi}{3M_{\text{Pl}}^2} r_m \rho_0 = \frac{r_g}{2r_m^2}, \quad (3.47)$$

где  $r_g = 2M/M_{\text{Pl}}^2$  — гравитационный (шварцшильдовский) радиус, а  $M$  — полная масса рассматриваемого объекта (3.39). Если  $k$  имеет порядок джинсовского волнового числа

$$k \sim k_J = \frac{\sqrt{4\pi\rho_0}}{M_{\text{Pl}} c_s}, \quad (3.48)$$

то можно пренебречь зависящим от  $r$  слагаемым  $(\delta\rho/\rho_0)\nabla\Phi_b$  по сравнению с  $\nabla\delta P/\rho_0$  для  $c_s > \sqrt{2r_g/(3r_m)}$ . Это условие выполняется для широкого диапазона параметров.

Проводя фурье-преобразование уравнений (3.43)–(3.108) и пренебрегая  $r$ -зависимым членом, получим уравнение на собственные значения в виде

$$k^2 \left( \lambda^2 - c_s^2 k^2 + \frac{4\pi}{M_{\text{Pl}}^2} \rho_0 \right) = 0. \quad (3.49)$$

Для малых  $k$  находим обычную экспоненциальную джинсовскую неустойчивость:

$$\frac{\delta\rho_{J1}}{\rho_0} \sim \exp \left[ t \left( \frac{4\pi}{M_{\text{Pl}}^2} \rho_0 - c_s^2 k^2 \right)^{1/2} \right]. \quad (3.50)$$

Эти малые возмущения имеют такое же характерное время развития  $\sim M_{\text{Pl}}/(4\pi\rho_0)^{1/2}$ , что и классический рост  $\rho_1$ . Можно оценить влияние растущей фоновой плотности энергии на рост возмущений, используя адиабатическое приближение, т. е. заменяя экспоненту в (3.50) интегралом:

$$\frac{\delta\rho_{J2}}{\rho_0} \sim \exp \left\{ \int_0^t dt \left[ \frac{4\pi}{M_{\text{Pl}}^2} \rho_b(t, r) - k^2 c_s^2 \right]^{1/2} \right\}, \quad (3.51)$$

где  $\rho_b(t, r)$  дается уравнением (3.41).

Оценив интеграл (3.51) при малых  $k$ , находим, что коэффициент усиления  $\delta\rho_{J2}/\delta\rho_{J1}$  равен 1,027 для времени  $t = t_{\text{grav}}$ , где  $t_{\text{grav}} = 1/\sqrt{4\pi G\rho_0}$ , в то время как для  $t = 2t_{\text{grav}}$  он равен 1,23, для  $t = 3t_{\text{grav}}$  — 1,89, а для  $t = 5t_{\text{grav}}$  этот коэффициент равен 11,9. Заметим, что при выводе уравнений (3.50) и (3.51) мы считали, что  $t < t_{\text{grav}}$ , так что эти факторы не должны рассматриваться как численно точные. Тем не менее их можно интерпретировать как указание на то, что рост флуктуаций действительно происходит быстрее, чем в обычном сценарии Джинса.

**3.2.2. Эволюция возмущений плотности в общей теории относительности.** Изучение джинсовской неустойчивости в общей теории относительности начинается с уравнений Эйнштейна:

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi}{M_{\text{Pl}}^2} T_{\mu\nu} \equiv \tilde{T}_{\mu\nu}. \quad (3.52)$$

Эти уравнения автоматически включают в себя уравнения движения материи, а именно, уравнение Эйлера и уравнение непрерывности. С другой стороны, уравнения движения материи можно эквивалентно получить из условия ковариантного сохранения тензора энергии-импульса

$$D_\mu T_\nu^\mu = 0, \quad (3.53)$$

где  $D_\mu$  — ковариантная производная рассматриваемого гравитационного поля. Обычно технически более сложно вывести уравнения Эйлера и непрерывности из уравнений Эйнштейна (3.52), поскольку в этом случае в выражении для тензора Риччи нужно учитывать члены, пропорциональные квадратам символов Кристоффеля.

Мы исследуем эволюцию скалярных возмущений в ОТО в сферически-симметричном и асимптотически плоском пространстве-времени. В отличие от рассматриваемого обычно космологического случая фоновая метрика не только зависит от времени, но также является функцией пространственных координат. Это приводит к трудностям с наложением ньютоновского калибровочного условия. Проблема фиксации калибровки подробно изучена в нашей работе [136].

Как и выше, рассмотрим сферически-симметричное облако материи с начально постоянной плотностью энергии внутри ограничивающей сферы радиуса  $r = r_m$ . Выберем изотропные координаты, аналогичные шварцшильдовским координатам, в которых метрика принимает вид

$$ds^2 = A dt^2 - B \delta_{ij} dx^i dx^j, \quad (3.54)$$

где функции  $A$  и  $B$  могут зависеть от  $r$  и  $t$ . Соответствующие символы Кристоффеля равны

$$\begin{aligned} \Gamma_{tt}^t &= \frac{\dot{A}}{2A}, & \Gamma_{jt}^t &= \frac{\partial_j A}{2A}, & \Gamma_{tt}^j &= \frac{\delta^{jk} \partial_k A}{2B}, & \Gamma_{jk}^t &= \frac{\delta_{jk} \dot{B}}{2A}, \\ \Gamma_{jt}^k &= \frac{\delta_j^k \dot{B}}{2B}, & \Gamma_{lj}^k &= \frac{1}{2B} (\delta_l^k \partial_j B + \delta_j^k \partial_l B - \delta_{lj} \delta^{kn} \partial_n B), \end{aligned} \quad (3.55)$$

где точка сверху означает производную по времени.

Выражения для тензора Риччи с учетом квадратичных по  $\Gamma$  членов имеют вид

$$R_{tt} = \frac{\Delta A}{2B} - \frac{3\ddot{B}}{2B} + \frac{3\dot{B}^2}{4B^2} + \frac{3\dot{A}\dot{B}}{4AB} + \frac{\partial^j A \partial_j B}{4B^2} - \frac{\partial^j A \partial_j A}{4AB}, \quad (3.56)$$

$$R_{tj} = -\frac{\partial_j \dot{B}}{B} + \frac{\dot{B} \partial_j B}{B^2} + \frac{\dot{B} \partial_j A}{2AB}, \quad (3.57)$$

$$\begin{aligned} R_{ij} &= \delta_{ij} \left( \frac{\ddot{B}}{2A} - \frac{\Delta B}{2B} + \frac{\dot{B}^2}{4AB} - \frac{\dot{A}\dot{B}}{4A^2} - \frac{\partial^k A \partial_k B}{4AB} + \frac{\partial^k B \partial_k B}{4B^2} \right) - \\ &- \frac{\partial_i \partial_j A}{2A} - \frac{\partial_i \partial_j B}{2B} + \frac{\partial_i A \partial_j A}{4A^2} + \frac{3\partial_i B \partial_j B}{4B^2} + \frac{\partial_i A \partial_j B + \partial_j A \partial_i B}{4AB}. \end{aligned} \quad (3.58)$$

Здесь и далее нижние индексы поднимаются с помощью символа Кронекера,  $\partial^j A = \delta^{jk} \partial_k A$ .



Соответственно, находим скаляр кривизны:

$$R = \frac{\Delta A}{AB} - \frac{3\ddot{B}}{AB} + \frac{2\Delta B}{B^2} + \frac{3\dot{A}\dot{B}}{2A^2B} - \frac{\partial^j A \partial_j A}{2A^2B} - \frac{3\partial^j B \partial_j B}{2B^3} + \frac{\partial^j A \partial_j B}{2AB^2}. \quad (3.59)$$

Приведем выражения для тензора Эйнштейна  $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - 1/2 g_{\mu\nu}R$ :

$$G_{tt} = -\frac{A\Delta B}{B^2} + \frac{3\dot{B}^2}{4B^2} + \frac{3A\partial^j B \partial_j B}{4B^3}, \quad (3.60)$$

$$G_{tj} = R_{tj}, \quad (3.61)$$

$$G_{ij} = \delta_{ij} \left( \frac{\Delta A}{2A} + \frac{\Delta B}{2B} - \frac{\ddot{B}}{A} + \frac{\dot{B}^2}{4AB} + \frac{\dot{A}\dot{B}}{2A^2} - \frac{\partial^k A \partial_k A}{4A^2} - \frac{\partial^k B \partial_k B}{2B^2} \right) - \frac{\partial_i \partial_j A}{2A} - \frac{\partial_i \partial_j B}{2B} + \frac{\partial_i A \partial_j A}{4A^2} + \frac{3\partial_i B \partial_j B}{4B^2} + \frac{\partial_i A \partial_j B + \partial_j A \partial_i B}{4AB}. \quad (3.62)$$

Тензор энергии-импульса выбран в форме идеальной жидкости без диссипативных поправок:

$$T_{\mu\nu} = (\rho + P)U_\mu U_\nu - P g_{\mu\nu}, \quad (3.63)$$

где  $\rho$  и  $P$  — плотность энергии и давление жидкости соответственно, а 4-скорость равна

$$U^\mu = \frac{dx^\mu}{ds} \quad \text{и} \quad U_\mu = g_{\mu\alpha} U^\alpha. \quad (3.64)$$

Инфинитезимальное физическое (собственное) расстояние есть  $dl^2 = B dr^2$ . При этом вектор физической скорости определяется как  $\mathbf{v} = \sqrt{B} dr/dt$ . Мы считаем 3-скорость малой и пренебрегаем членами, квадратичным по  $\mathbf{v}$ . В результате получаем

$$U_j = -\frac{Bv_j}{\sqrt{A}\sqrt{1-\mathbf{v}^2/A}} \approx -\frac{Bv_j}{\sqrt{A}}, \quad (3.65)$$

где  $v_j = v^j$ . Из условия

$$1 = g^{\mu\nu} U_\mu U_\nu = \frac{1}{A} U_t^2 - \frac{1}{B} \delta^{kj} U_k U_j \approx \frac{1}{A} U_t^2 \quad (3.66)$$

находим  $U_t \approx 1/\sqrt{A}$ . Теперь можно записать компоненты тензора энергии-импульса:

$$T_{tt} = (\rho + P)U_t^2 - PA \approx \rho A, \quad (3.67)$$

$$T_{jt} = (\rho + P)U_t U_j \approx -(\rho + P)Bv_j, \quad (3.68)$$

$$T_{ij} = (\rho + P)U_i U_j - P g_{ij} \approx PB\delta_{ij}. \quad (3.69)$$

Уравнения общей теории относительности обычно пишутся в пределе слабого поля, поэтому в выражениях для тензора Риччи опущены члены, пропорциональные  $\Gamma^2$ . Дифференцируя (3.60) для  $G_{tt}$ -компоненты по времени, а (3.61) для компоненты  $G_{tj}$  по координате  $x^j$ , получим уравнение непрерывности. Взяв производную по времени от уравнения для  $G_{tj}$  и производную по  $x^i$  от уравнения для  $G_{ij}$ , получим уравнение Эйлера. Однако, если ограничиться членами первого порядка по  $\Gamma$  в тензоре Риччи, уравнения не будут самосогласованными. Поэтому при выводе уравнения непрерывности и уравнения Эйлера из уравнений Эйнштейна нужно учитывать члены, пропорциональные  $\Gamma^2$ , в выражениях для  $R_{\mu\nu}$ .

С другой стороны, можно выбрать более простой путь и получить уравнения Эйлера и непрерывности из условий  $D_\mu T_j^\mu = 0$  и  $D_\mu T_t^\mu = 0$ . Так как у нас четыре неизвестные функции, нам нужны еще два уравнения. Мы можем использовать уравнение для  $G_{tt}$  и  $\partial_i \partial_j$ -компоненту уравнения для  $G_{ij}$  в линейном порядке по  $\Gamma$ . Соответственно, мы удерживаем только члены, линейные по производным от  $A$  и  $B$ , полагая  $A = B = 1$  в других случаях.

Уравнения для  $G_{tt}$  и  $\partial_i \partial_j$ -компонента уравнения для  $G_{ij}$  имеют вид

$$-\Delta B = \tilde{\rho}, \quad (3.70a)$$

$$\partial_i \partial_j (A + B) = 0, \quad (3.70b)$$

где  $\tilde{\rho} = 8\pi\rho/M_{\text{Pl}}^2$ . Уравнения непрерывности и Эйлера даются, соответственно, выражениями

$$\dot{\rho} + \partial_j [(\rho + P)v^j] + \frac{3}{2}\rho\dot{B} = 0, \quad (3.70в)$$

$$\rho\dot{v}_j + \partial_j P + \frac{1}{2}\rho\partial_j A = 0. \quad (3.70г)$$

Мы считаем, что фоновая метрика медленно меняется как функция пространства и времени, и изучаем малые флуктуации вокруг фоновых величин:  $\rho = \rho_b + \delta\rho$ ,  $\delta P = c_s^2 \delta\rho$ ,  $\mathbf{v} = \delta\mathbf{v}$ ,  $A = A_b + \delta A$ ,  $B = B_b + \delta B$ .

Соответствующая система линейных уравнений для инфинитезимальных возмущений имеет вид

$$-\Delta\delta B = \delta\tilde{\rho}, \quad (3.71)$$

$$\partial_i \partial_j (\delta A + \delta B) = 0, \quad (3.72)$$

$$\delta\dot{\rho} + \rho_b \partial_j \delta v^j + \frac{3}{2}\rho_b \delta\dot{B} = 0, \quad (3.73)$$

$$\rho_b \delta\dot{v}_j + \partial_j \delta P + \frac{1}{2}\rho_b \partial_j \delta A = 0. \quad (3.74)$$

Уравнения (3.71)–(3.74) совпадают с соответствующими уравнениями в книгах [19–21] в случае статичной Вселенной, т. е. при  $a(t) = 1$  и  $H = 0$ .

Мы ищем решение в виде  $\sim \exp[-i\lambda t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}]$  и получаем следующие выражения для собственных значений частоты:

$$\lambda^2 = \frac{c_s^2 k^2 - \tilde{\rho}_b/2}{1 + 3\tilde{\rho}_b/(2k^2)}. \quad (3.75)$$

Этот результат почти совпадает с значением  $\lambda$  в ньютоновском случае (3.50). Дополнительное слагаемое в знаменателе индуцируется релятивистским изменением объема и является малым для  $k \sim k_J$  (3.48).

**3.3. Возмущения плотности в модифицированной гравитации.** В модифицированной теории гравитации, описываемой действием

$$S = \frac{M_{\text{Pl}}^2}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} [R + F(R)] + S_m,$$

лагранжиан является нелинейной функцией кривизны  $R$ , поэтому уравнения движения являются дифференциальными уравнениями высокого (четвертого) порядка, и эволюция возмущений плотности происходит иначе, чем в общей теории относительности. В космологии эта проблема рассматривалась для различных форм  $F(R)$  в работах [188–195]. Анализ джинсовской неустойчивости для звездноподобных объектов в модифицированной гравитации был проведен в работах [181, 182, 187]. В этих работах пертурбативное разложение  $F(R)$ -функции проводилось либо при  $R = 0$ , либо при  $R = R_c$ , где  $R_c$  — современное космологическое значение скаляра кривизны. Ниже, следуя нашим работам [136–139], мы раскладываем  $F(R)$  вокруг кривизны фоновой метрики  $R_b$ , которая обычно значительно превышает  $R_c$ . Это приводит к некоторым количественным различиям. Кроме того, мы изучаем развитие неустойчивости не только на квазистационарном фоне, как это обычно делается, но и на фоне быстро осциллирующей кривизны. Как обсуждалось в п. 1.2, такие высокочастотные колебания возбуждаются в сжимающихся системах с растущей плотностью энергии. В этом случае возникает не только обычное решение Джинса со слегка измененным (уменьшенным) масштабом длины, но и параметрическое резонансное усиление возмущений плотности, а также новый эффект усиления возмущений за счет «антитрения», связанного с отрицательными значениями коэффициентов при нечетных производных в уравнении движения.

**3.3.1. Уравнение эволюции.** Будем считать, что фоновая метрика мало отклоняется от метрики Минковского, в то время как производные метрики могут сильно отличаться от их значений в ОТО. В частности, скаляр кривизны  $R$  может быть далек от  $R_{\text{GR}} = -\tilde{T}$ . Мы рассматриваем астрономические системы, для которых  $|R| \gg |R_c|$ , но  $R \ll m^2$ , где  $m$  — масса скалярона. Оба ограничения являются естественными для относительно плотных систем, в которых плотность превышает средний космологический фон,

но остается меньше, чем  $M_{\text{Pl}}^2 m^2$ . При этом естественно ожидать, что

$$|F(R)| \ll |R|, \quad |F'(R)| \ll 1. \quad (3.76)$$

Это безусловно выполняется для модели (1.20), для которой при  $R \gg R_c$  имеем

$$F(R) \approx -\lambda R_c \left[ 1 - \left( \frac{R_c}{R} \right)^{2n} \right] - \frac{R^2}{6m^2}. \quad (3.77)$$

Уравнения движения (B.33) в этом случае можно аппроксимировать как

$$G_{\mu\nu} + \frac{1}{3\omega^2} (\nabla_\mu \nabla_\nu - g_{\mu\nu} \nabla^2) R = \frac{8\pi}{M_{\text{Pl}}^2} T_{\mu\nu} \equiv \tilde{T}_{\mu\nu}, \quad (3.78)$$

где  $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - g_{\mu\nu} R/2$  — обычный тензор Эйнштейна, а

$$\omega^{-2} = -3F''_{RR}. \quad (3.79)$$

Как обычно, метрика и кривизна раскладываются вокруг их фоновых значений в первом порядке по малым возмущениям:

$$A = A_b + \delta A, \quad B = B_b + \delta B, \quad R = R_b + \delta R. \quad (3.80)$$

Фоновая метрика для сферически-симметричного распределения вещества изучалась многими авторами. Здесь для решения во внутренней области мы используем форму (3.28), (3.29), найденную в нашей работе [135]:

$$B_b(r, t) = 1 + \frac{2M(r, t)}{M_{\text{Pl}}^2 r} \equiv 1 + B_1, \quad (3.81)$$

$$A_b(r, t) = 1 + \frac{R_b(t) r^2}{6} + A_1(r, t), \quad (3.82)$$

где  $M$  — полная масса рассматриваемого объекта (3.25), а функция  $A_1(r, t)$  дается уравнением (3.30). Метрические функции  $A_1$  и  $B_1$  здесь такие же, как и в общей теории относительности, а единственное отличие от ОТО содержится во втором слагаемом уравнения (3.82).

Эволюция возмущений изучается в приближении постоянной  $\omega$ . Это хорошая аппроксимация, если  $R_b \approx R_{\text{GR}} = -\tilde{T}$  является медленно меняющейся функцией времени. В модели (3.77)

$$\omega^2 = \left[ \frac{1}{m^2} + \frac{6\lambda n(2n+1)}{|R_c|} \left( \frac{R_c}{R} \right)^{2n+2} \right]^{-1}. \quad (3.83)$$

Космологические возмущения начинают расти в начале нерелятивистской стадии, соответствующей красному смещению  $z_{\text{eq}} = 10^4$ , когда  $R_c/R_{\text{eq}} \sim 10^{-12}$ . Так, для  $m = 10^5$  ГэВ, что является нижней границей массы из первичного нуклеосинтеза [126],  $\omega$  может считаться постоянной, если  $n \geq 3$ . Для

систем с плотностью энергии порядка  $1 \text{ г/см}^3$  частота  $\omega$  будет оставаться постоянной для  $n \geq 1$ . Если  $\omega$  растет со временем, рост возмущений будет происходить даже быстрее, чем в случае постоянной  $\omega$ . Если в уравнении (3.83) доминирует второе слагаемое, то

$$\omega^2 = \frac{|R_c|}{6\lambda n(2n+1)} \left( \frac{R}{R_c} \right)^{2n+2}, \quad (3.84)$$

и частота может сильно зависеть от времени, нарушая приближение  $\omega = \text{const}$ . Это будет так для высокочастотных осциллирующих решений, найденных в наших работах [131, 132], где скаляр кривизны  $R$  сильно отклоняется от  $R_{\text{GR}}$ , хотя условие  $R \gg R_{\text{GR}}$  уменьшает второе слагаемое в (3.83). Тем не менее в дальнейшем мы полагаем  $\omega = \text{const}$  и изучаем развитие неустойчивостей в дифференциальном уравнении четвертого порядка, описывающем рост возмущений в такой модели. В этом случае эволюция неустойчивостей сильно отличается от стандартной ситуации, описываемой уравнением второго порядка в общей теории относительности. Мы не будем ограничивать себя конкретным выбором  $F(R)$ -функции, но будем считать, что высокочастотные колебания кривизны являются общим явлением в таких моделях. Действительно, все известные  $F(R)$ -сценарии приводят к сингулярности с  $R \rightarrow +\infty$ , если  $R^2/m^2$ -член не добавлен для предотвращения этого. Это слагаемое создает отталкивающий эффективный потенциал для эволюции  $R$  и вызывает осцилляции.

Как и в п. 3.2.2, мы описываем эволюцию возмущений, используя уравнение для  $G_{tt}$ -компоненты тензора Эйнштейна,  $\partial_i \partial_j$ -компоненту уравнения для  $G_{ij}$ , а также уравнения Эйлера и непрерывности, полученные из условий ковариантного сохранения  $D_\mu T_j^\mu = 0$  и  $D_\mu T_t^\mu = 0$ . Однако теперь мы не будем ограничиваться случаем медленно меняющейся фоновой метрики, а, следуя работе [137], учтем изменение метрики со временем, что приводит к нескольким новым эффектам.

Компонента « $tt$ » уравнения (3.78) имеет вид

$$-\frac{\Delta B}{B^2} + \frac{1}{3\omega^2 B} \left( \Delta R - \frac{3\dot{B}\dot{R}}{2A} + \frac{\partial^i B \partial_i R}{2B} \right) = \tilde{\rho}, \quad (3.85)$$

поскольку, в соответствии с (3.60) и (3.67),  $G_{tt} = -A\Delta B/B^2$ , а  $\tilde{T}_{tt} = \tilde{\rho}A$ . Будем считать, что фоновая метрика слабо зависит от пространственных координат, но быстро осциллирует со временем, поэтому последним слагаемым в круглых скобках в (3.85) можно пренебречь.

Так как фоновые величины  $R_b$  и, согласно (3.29),  $A_b$  являются быстро осциллирующими функциями времени с возможно большой амплитудой («пики», найденными в работах [131, 132]), их производные по времени велики, и мы будем удерживать члены второго порядка по  $\partial_t$ , такие как  $\partial_t^2 A$ ,  $\partial_t A \partial_t R$ ,

и т. д. Соответственно, уравнение для флуктуаций принимает вид

$$-\Delta\delta B - 2\tilde{\rho}_b\delta B + \frac{1}{3\omega^2}\left(\Delta\delta R - \frac{3}{2}\delta\dot{B}\dot{R}_b\right) = \delta\tilde{\rho}, \quad (3.86)$$

где флуктуация кривизны  $\delta R$ , найденная из (3.59), равна

$$\delta R = \Delta\delta A - 3\delta\ddot{B} + 2\Delta\delta B + \frac{3}{2}\dot{A}_b\delta\dot{B}. \quad (3.87)$$

Мы считаем, что производная  $\dot{B}_b$  мала по сравнению с  $\dot{A}_b$  и  $\dot{R}_b$  (см. (3.81) и (3.82)), и полагаем  $A_b = B_b = 1$  в знаменателях дробей в (3.86).

Аналогично находим  $\partial_i\partial_j$ -компоненту уравнения для  $G_{ij}$ :

$$\partial_i\partial_j\left(\delta A + \delta B - \frac{2\delta R}{3\omega^2}\right) = 0. \quad (3.88)$$

Уравнение непрерывности, полученное из  $\nabla_\mu T_t^\mu = 0$ , запишется как

$$\delta\dot{\rho} + \rho_b\partial_j U^j + \frac{3}{2}\rho_b\delta\dot{B} = 0, \quad (3.89)$$

в то время как уравнение Эйлера,  $\nabla_\mu T_j^\mu = 0$ , будет иметь вид

$$\rho_b\delta\dot{U}_j + \partial_j P + \frac{1}{2}\rho_b\partial_j\delta A + \frac{1}{2}\dot{A}_b\rho_b U_j = 0. \quad (3.90)$$

Вводя  $U^j = -U_j = -\partial_j\sigma$ ,  $P = c_s^2\delta\rho$  и представляя решение в виде  $\sim \exp[-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}]$ , получим следующую систему уравнений для пяти неизвестных функций времени,  $\delta A$ ,  $\delta B$ ,  $\delta R$ ,  $\delta\tilde{\rho}$  и  $\sigma$ :

$$3\omega^2(k^2 - 2\tilde{\rho}_b)\delta B - \frac{3}{2}\delta\dot{B}\dot{R}_b - k^2\delta R - 3\omega^2\delta\tilde{\rho} = 0, \quad (3.91)$$

$$\delta R = \frac{3}{2}\omega^2(\delta A + \delta B), \quad (3.92)$$

$$\delta R = -k^2\delta A - 3\delta\ddot{B} - 2k^2\delta B + \frac{3}{2}\dot{A}_b\delta\dot{B}, \quad (3.93)$$

$$\delta\dot{\tilde{\rho}} + \tilde{\rho}_b k^2\sigma + \frac{3}{2}\tilde{\rho}_b\delta\dot{B} = 0, \quad (3.94)$$

$$\tilde{\rho}_b\dot{\sigma} - c_s^2\delta\tilde{\rho} + \frac{1}{2}\tilde{\rho}_b(\dot{A}_b\sigma - \delta A) = 0. \quad (3.95)$$

На данном этапе нужно обосновать использование преобразований Фурье при выводе уравнений (3.91)–(3.95). Преобразование Фурье над пространственными переменными может быть проведено, только если коэффициенты в уравнениях не зависят от координат. Это может быть так в некоторых физически интересных случаях, однако в нашем примере метрическая функция  $A_b$  явно зависит от пространственных координат, фактически (см. (3.82)):

$$A_b = 1 + \frac{R_b r^2}{6}. \quad (3.96)$$

Очевидно, при достаточно малых  $r$  таких, что  $R_b r^2/6 \ll 1$ , можно полностью пренебречь этим членом и сделать преобразование Фурье. Однако, отбросив слагаемое  $R_b r^2/6$ , мы исключим влияние зависящего от времени фона, приводящего к новым формам неустойчивости.

Тем не менее мы можем учесть эффекты  $r$ -зависимых членов и обосновать применимость преобразования Фурье в пределе как больших, так и малых  $r$ .

При больших  $r$  фурье-преобразование применимо в адиабатическом случае, когда фоновые величины мало меняются на одной длине волны возмущений,  $\lambda = 2\pi/k$ . Действительно, преобразование Фурье уравнений существенным образом состоит в их умножении на  $\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$  и интегрировании по  $d^3r$ . Если коэффициенты линейных уравнений для бесконечно малых возмущений не зависят от пространственных координат, мы приходим, как обычно, к алгебраической системе линейных уравнений для фурье-мод флуктуаций. Если, как в нашем случае, некоторые коэффициенты в исходных дифференциальных уравнениях зависят от  $r$ , то мы все равно можем преобразовать наши уравнения, вычисляя интеграл  $d^3r \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$  не по всему пространству, а в некоторой окрестности фиксированного значения  $r = r_0$  с радиусом  $\Delta r$ , выбранным так, что пространственно-зависимые коэффициенты практически постоянны в пределах данной окрестности. Для этого необходимо, чтобы область интегрирования содержала много длин волн, т. е.  $k\Delta r \gg 1$ , и в то же время  $\Delta r$  должно быть достаточно малым, чтобы  $r$ -зависимые коэффициенты могли рассматриваться как приблизительно постоянные. Из-за большой величины  $k\Delta r$  такой интеграл будет близок к реальному преобразованию Фурье с бесконечными пределами интегрирования.

Это, по существу, позволяет нам рассматривать  $r$  как постоянный параметр. Конечные результаты, несомненно, будут зависеть от радиуса  $r$ , в действительности мы представим результаты, полученные в двух разных пределах  $kr \gg 1$  и  $kr \ll 1$ . Первое условие является более естественным, так как адиабатическое приближение подразумевает  $kr_m \gg 1$ , а большинство значений  $r$  меньше, но примерно того же порядка величины, что и ограничивающий радиус  $r_m$ . Второе условие выполняется только вблизи центра облака, т. е. при относительно малых значениях  $r$ ; однако это может быть пренебрежимая часть всей системы.

Исследуем эти условия более количественно. Потребуем, чтобы возмущения быстро менялись по сравнению с фоном, т. е.

$$\left| \frac{\partial_r A_b}{A_b} \right|, \left| \frac{\partial_r^2 A_b}{\partial_r A_b} \right| \ll k, \quad (3.97)$$

что с использованием уравнения (3.96) подразумевает

$$|R_b| r^2 \ll 1, \quad kr \gg 1. \quad (3.98)$$

Рассматривая волновые числа  $k \gg r_m^{-1}$  и считая, что  $|R_b|r_m^2 \ll 1$ , как это имеет место для достаточно разреженных систем, получаем, что условия выше хорошо выполняются, а преобразование Фурье надежно. Масса рассматриваемого объекта равна  $M_{\text{tot}} = 4\pi\rho_b r_m^3/3$ . Представим плотность  $\tilde{\rho}_b$  как

$$\tilde{\rho}_b \equiv \frac{8\pi\rho_b}{M_{\text{Pl}}^2} = \frac{3r_g}{r_m^3}, \quad (3.99)$$

где  $r_g = 2M_{\text{tot}}/M_{\text{Pl}}^2$  — гравитационный (шварцшильдовский) радиус системы. Соответственно, условие (3.98) принимает вид

$$\frac{|R_b|}{\tilde{\rho}_b} \ll \frac{r_m}{3r_g}, \quad (3.100)$$

устанавливая верхнее значение амплитуды колебаний кривизны, при котором наши аппроксимации нарушаются. Это ограничение оставляет подходящей для анализа большую область решений. Например, для облака солнечной массы с плотностью массы  $10^{-24}$  г/см<sup>3</sup> отношение  $r_m/r_g \sim 10^{13}$ .

На основании сделанных выше комментариев получим из системы (3.91)–(3.95), состоящей из пяти уравнений низких порядков для пяти неизвестных функций, дифференциальное уравнение четвертого порядка для одной функции  $\delta B$ :

$$\begin{aligned} & \delta \overset{\dots}{B} - \delta \overset{\dots}{B} \left( 1 + \frac{2k^2}{3\omega^2} \right) \frac{\dot{R}_b}{2k^2} + \\ & + \delta \ddot{B} \left[ \omega^2 - \frac{\tilde{\rho}_b \omega^2}{2k^2} \left( 1 + \frac{8k^2}{3\omega^2} \right) + k^2(1 + c_s^2) - \ddot{A}_b - \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{k^2} \left( 1 + \frac{2k^2}{3\omega^2} \right) \left( \ddot{R}_b + \frac{\dot{A}_b \dot{R}_b}{4} \right) - \frac{\dot{A}_b^2}{4} \right] + \\ & + \delta \dot{B} \left[ -\frac{\ddot{A}_b}{2} - \frac{1}{4k^2} \left( 1 + \frac{2k^2}{3\omega^2} \right) \left( 2\ddot{R}_b + \dot{A}_b \ddot{R}_b + 2\dot{R}_b c_s^2 k^2 \right) - \frac{\ddot{A}_b \dot{A}_b}{4} + \right. \\ & \quad \left. + \frac{\dot{A}_b}{2} \left( \omega^2 + k^2(1 - c_s^2) + \frac{2\tilde{\rho}_b}{3} - \frac{\tilde{\rho}_b \omega^2}{2k^2} \right) \right] + \\ & + \delta B \left[ c_s^2 k^2 (k^2 + \omega^2) - 2c_s^2 \tilde{\rho}_b \omega^2 \left( 1 + \frac{2k^2}{3\omega^2} \right) - \frac{\tilde{\rho}_b \omega^2}{2} \left( 1 + \frac{4k^2}{3\omega^2} \right) \right] = 0. \end{aligned} \quad (3.101)$$

В большом диапазоне параметров, при которых выполняется условие (3.98), справедливы неравенства  $\dot{A}_b^2 \ll \ddot{A}_b$ ,  $\dot{A}_b \dot{R}_b \ll \ddot{R}_b$ ,  $\dot{A}_b \ddot{A}_b \ll \ddot{\ddot{A}}_b$



и  $\dot{A}_b \ddot{R}_b \ll \ddot{R}_b$ , так что соответствующими слагаемыми в (3.101) можно пренебречь. В соответствии с (3.82) положим  $A_b = 1 + R_b r^2/6$ . Тогда получаем

$$\begin{aligned}
 & \delta \overset{\cdot\cdot\cdot}{B} - \delta \overset{\cdot\cdot}{B} \left( 1 + \frac{2k^2}{3\omega^2} \right) \frac{\dot{R}_b}{2k^2} + \\
 & + \delta \ddot{B} \left[ \omega^2 - \frac{\tilde{\rho}_b \omega^2}{2k^2} \left( 1 + \frac{8k^2}{3\omega^2} \right) + k^2(1 + c_s^2) - \frac{\ddot{R}_b}{k^2} \left( 1 + \frac{2k^2}{3\omega^2} \right) \right] + \\
 & + \delta \dot{B} \left[ -\frac{\ddot{R}_b}{2k^2} \left( 1 + \frac{2k^2}{3\omega^2} \right) + \frac{\dot{R}_b r^2}{12} \left( \omega^2 + k^2(1 - c_s^2) + \frac{2\tilde{\rho}_b}{3} - \frac{\tilde{\rho}_b \omega^2}{2k^2} \right) - \right. \\
 & \quad \left. - \frac{\dot{R}_b c_s^2}{2} \left( 1 + \frac{2k^2}{3\omega^2} \right) \right] + \\
 & + \delta B \left[ c_s^2 k^2 (k^2 + \omega^2) - 2c_s^2 \tilde{\rho}_b \omega^2 \left( 1 + \frac{2k^2}{3\omega^2} \right) - \frac{\tilde{\rho}_b \omega^2}{2} \left( 1 + \frac{4k^2}{3\omega^2} \right) \right] = 0.
 \end{aligned} \tag{3.102}$$

Оценим теперь фактор  $(kr)^2$  вблизи его джинсовского значения  $k = k_J = \sqrt{\tilde{\rho}/(2c_s^2)}$ . С учетом (3.99) имеем

$$(rk_J)^2 = \frac{3}{2c_s^2} \frac{r_g r^2}{r_m^3} \ll 1 \Rightarrow c_s^2 \gg \frac{r_g}{r_m}. \tag{3.103}$$

Даже для очень холодного газа при температуре  $T = 10$  К скорость звука составляет около  $c_s^2 \sim T/m_p \sim 10^{-12}$ , где  $m_p$  — масса протона, поэтому приведенное выше условие (3.103) будет выполняться для разумных плотностей. С другой стороны, для очень плотных систем таких, как, например, нейтронные звезды, скорость звука близка к единице (в единицах скорости света), и отношение  $r_g/r_m$  также приближается к единице. Однако в таких системах фоновое давление отлично от нуля, а здесь мы изучаем нерелятивистские системы с  $P_b \approx 0$ , поэтому последний случай выходит за пределы допустимости наших предположений.

Введем теперь безразмерное время  $\tau = \omega t$ , безразмерные параметры

$$a \equiv \frac{\tilde{\rho}_b}{k^2}, \quad b \equiv \frac{k^2}{\omega^2}, \quad c \equiv c_s^2, \quad \chi = kr \tag{3.104}$$

и безразмерные функции  $\delta B \equiv z$ ,  $R_b = -\tilde{\rho}_b y$ .

В терминах этих величин можно записать (3.102) в безразмерном виде:

$$\begin{aligned}
 z'''' + \frac{a}{2} \left(1 + \frac{2b}{3}\right) y' z'''' + \\
 + z'' \left[1 - \frac{a}{2} \left(1 + \frac{8b}{3}\right) + b(1+c) + a \left(1 + \frac{2b}{3} + \frac{\chi^2}{6}\right) y''\right] + \\
 + z' \left[\frac{a}{2} \left(1 + \frac{2b}{3} + \frac{\chi^2}{6}\right) y''' - \frac{a\chi^2}{12} \left(1 - \frac{a}{2} \left(1 - \frac{4b}{3}\right) + b(1-c)\right) y' + \right. \\
 \left. + \frac{a}{2} \left(1 + \frac{2b}{3}\right) bc y'\right] + \\
 + z \left[bc(1+b) - \frac{ab}{2} \left(1 + \frac{4b}{3}\right) - 2abc \left(1 + \frac{2b}{3}\right)\right] z = 0, \quad (3.105)
 \end{aligned}$$

где штрих означает дифференцирование по  $\tau$ .

Можно записать (3.105) в более компактной форме, вводя следующие параметры:

$$\alpha = \frac{a}{2} \left(1 + \frac{2b}{3}\right), \quad (3.106a)$$

$$\Omega^2 = 1 - \frac{a}{2} \left(1 + \frac{8b}{3}\right) + b(1+c), \quad (3.106b)$$

$$\mu = b \left[c(1+b) - \frac{a}{2} \left(1 + \frac{4b}{3}\right) - 2ac \left(1 + \frac{2b}{3}\right)\right]. \quad (3.106b)$$

Тогда получим уравнение в виде, удобном для качественного и количественного анализа:

$$\begin{aligned}
 z'''' + \alpha y' z'''' + \left[\Omega^2 + \left(2\alpha + \frac{a\chi^2}{6}\right) y''\right] z'' + \\
 + \left[\left(\alpha + \frac{a\chi^2}{12}\right) y''' - \frac{a\chi^2}{12} (1+b)y'\right] z' + \mu z = 0. \quad (3.107)
 \end{aligned}$$

Мы не будем делать никаких предположений о максимальном значении  $k$  и, соответственно, о максимальном значении  $b$ , которое может быть порядка единицы или даже больше, но мы будем считать  $k \gtrsim \tilde{\rho}/c_s^2$  и  $c_s^2 \ll 1$ , что соответствует нерелятивистской скорости звука и волновым числам, по крайней мере, порядка шкалы Джинса, для которых ОТО не предсказывает экспоненциального роста. Это приводит к  $a \ll 1$ ,  $c \ll 1$ , поэтому в численных расчетах мы удерживаем только члены первого порядка по этим параметрам. На данный момент мы не будем накладывать ограничений на  $b$  и  $\chi$ .

Поскольку физически интересной величиной является значение возмущений плотности, представим отношение  $\delta\rho/\rho_b$ , выраженное через  $z \equiv \delta B$ , например, в пределе малых  $\chi$ :

$$\frac{\delta\rho}{\rho_b} = z \left[ \frac{1+b}{a(1+2b/3)} - 2 \right] + \frac{1}{2} z' y' + \frac{z''}{a(1+2b/3)}. \quad (3.108)$$

Когда  $k$  близко к своему джинсовскому значению,  $k_J = \sqrt{\tilde{\rho}/(2c_s^2)}$ , то, в соответствии с (3.104),  $a = \tilde{\rho}_b/k^2 \sim c_s^2$ , и первое слагаемое в квадратных скобках доминирует, если  $c_s^2 < 1/2$ , что, безусловно, имеет место для нерелятивистских систем.

**3.3.2. Модифицированная джинсовская неустойчивость.** Прежде всего, сравним уравнение (3.107) с обычным уравнением Джинса (напомним, что  $\tilde{\rho} = 8\pi G\rho$ )

$$\delta\ddot{\rho} + \left( c_s^2 k^2 - \frac{\tilde{\rho}_b}{2} \right) \delta\rho = 0. \quad (3.109)$$

Как хорошо известно, знак выражения  $c_s^2 k^2 - \tilde{\rho}_b/2$  определяет устойчивость решений, которые являются звуковыми волнами при  $c_s^2 k^2 > \tilde{\rho}_b/2$  и неустойчивыми модами в противоположном режиме. Такие неустойчивые моды возникают на джинсовском масштабе

$$k^2 \leq (k_J^{\text{GR}})^2 \equiv \frac{\tilde{\rho}_b}{2c_s^2}. \quad (3.110)$$

В модифицированной гравитации условие устойчивости определяется знаком  $\mu$  ((4.113)). В пределе малых амплитуд осцилляций кривизны или очень низких частот можно пренебречь  $y(\tau)$  в уравнении (3.107), так что оно сведется к линейному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами, которое можно решить подстановкой  $z = \exp(\gamma\tau)$ . Собственные значения  $\gamma$ , таким образом, определяются из алгебраического уравнения

$$\gamma^4 + \Omega^2 \gamma^2 + \mu = 0, \quad (3.111)$$

которое дает

$$\gamma^2 = -\frac{\Omega^2}{2} \pm \sqrt{\frac{\Omega^4}{4} - \mu}, \quad (3.112)$$

где  $\Omega^2$  представлено выражением (3.106б).

Если  $\mu < 0$ , то один из корней  $\gamma^2 > 0$ , поэтому одно из собственных значений положительно. Это соответствует обычной экспоненциальной неустойчивости Джинса, хотя значения джинсовского волнового вектора

в модифицированной гравитации и в ОТО различны. Величина волнового числа Джинса определяется из условия  $\mu = 0$ , которое в случае малой скорости звука ( $c_s^2 \ll 1$ ) дает

$$a = \frac{2c(1+b)}{1+4b/3}, \quad (3.113)$$

где  $a$  и  $b$  зависят от  $k$  в соответствии с определениями (3.104). Это квадратное уравнение относительно квадрата волнового числа Джинса в модифицированной гравитации,  $k_J^{\text{MG}}$ . Приведем его явное решение при больших  $\omega^2 \gg k^2$ ,  $\tilde{\rho}$ :

$$(k_J^{\text{MG}})^2 = (k_J^{\text{GR}})^2 \left[ 1 + \frac{(k_J^{\text{GR}})^2}{3\omega^2} \right], \quad (3.114)$$

которое переходит в результат общей теории относительности в пределе  $\omega \rightarrow +\infty$ .

При больших  $\omega$  физические собственные значения, соответствующие (3.112), будут такими:

$$\Gamma_{\text{MG}}^2 = \omega^2 \gamma^2 \simeq \begin{cases} \frac{\tilde{\rho}_b}{2} - c_s^2 k^2 + \frac{\tilde{\rho}_b}{2} \left( \frac{\tilde{\rho}_b}{2k^2} - c_s^2 + \frac{k^2}{6\omega^2} \right), \\ -\omega^2 - k^2 + \frac{\tilde{\rho}_b \omega^2}{2k^2}. \end{cases} \quad (3.115)$$

Первое значение дает обычный джинсовский рост с точностью до небольшой поправки (слагаемое в скобках), тогда как второе соответствует осцилляциям скалярона с частотой, приблизительно равной  $\omega$ , как и ожидалось, поскольку теория обладает дополнительной массивной скалярной модой.

Уравнение (3.114) показывает, что в модифицированной гравитации волновое число Джинса больше, чем в ОТО. Это соответствует уменьшенному минимальному масштабу длины, связанному с формированием структуры. Поправка обычно довольно мала, но для моделей, в которых  $k_J^{\text{GR}}/\omega$  не является пренебрежимым, это может привести к значительным отклонениям от общей теории относительности.

Если  $\mu$  положительно, но  $\mu < \Omega^4/4$ , оба возможных значения  $\gamma^2$  действительны и отрицательны, так что  $\gamma$  будет чисто мнимым, что соответствует акустическим колебаниям с постоянной амплитудой. Таким образом, эти два случая (отрицательных и положительных, но не слишком больших  $\mu$ ) находятся в полном соответствии с обычным анализом Джинса. Эти результаты обобщают те, что были получены в нашей работе [136], где гравитационная неустойчивость рассматривалась в модифицированной гравитации на стационарном фоне.

Для очень больших  $\mu$  таких, что  $\mu \geq \Omega^4/4$ , может существовать новый тип неустойчивого осциллирующего решения с экспоненциально растущей амплитудой. Действительно,  $\gamma^2$  становится комплексным числом и два из четырех решений (3.111) для  $\gamma$  имеют положительные вещественные части. Это новое явление, представленное только в модифицированной гравитации. Однако в модели, основанной на  $F(R)$ -функции, заданной уравнением (1.20), параметр  $\mu$  не может превысить  $\Omega^4/4$  (детали приведены в нашей работе [137]). Неясно, является ли это ограничение общим свойством всех разумных моделей модифицированной гравитации, и потому этот новый тип гравитационной неустойчивости всегда отсутствует, или же могут быть найдены модели, обладающие таким интересным свойством.

Существует еще одна необычная возможность для развития неустойчивости в модифицированной гравитации, которая появляется, если  $\Omega^2 < 0$ . В рамках выбранной модели (1.20) допустимые значения параметров не позволяют реализовать такую необычную ситуацию, но остается открытым вопрос, будет ли это возможным при дальнейших модификациях гравитации.

**3.3.3. Параметрический резонанс.** В этом подразделе мы покажем, следуя нашей работе [137], что даже для  $\mu > 0$ , соответствующего классически стабильному режиму звуковых волн, уравнение (3.107) допускает неустойчивые решения благодаря механизму, аналогичному параметрическому резонансу.

Обычным учебным примером параметрического резонанса является уравнение Матье (см., например, «Механику» Ландау–Лифшица [196])

$$\ddot{f}(\tau) + \Omega_0^2 [1 + h \cos(\Omega_1 + \epsilon)\tau] f(\tau) = 0, \quad (3.116)$$

где предполагается, что  $h \ll 1$ . Если  $\Omega_1/\Omega_0 = 2$ , решение растет экспоненциально, и его можно аппроксимировать как

$$f(\tau) \sim \sin(\Omega_0\tau + \varphi) \exp(\lambda\tau), \quad (3.117)$$

где

$$\lambda = \frac{h\Omega_0}{4}. \quad (3.118)$$

Параметрический резонанс возникает при

$$|\epsilon| < \frac{h\Omega_0}{2}. \quad (3.119)$$

Существуют и другие резонансные моды, которые генерируются на частотах  $\Omega_1/\Omega_0 = 2/n$ , где  $n$  — целое число, но они обычно заметно слабее.

В модифицированной гравитации мы получили уравнение 4-го порядка (3.107), определяющее эволюцию скалярных возмущений на осциллирующем фоне, который входит через функцию  $y(\tau)$ . Эффект, аналогичный

параметрическому резонансу, проявляется и в этой ситуации. Сходство параметрических резонансов в уравнении четвертого порядка и в классическом уравнении Матве можно увидеть в пределе как высоких, так и низких частот. В первом случае можно пренебречь производными низших порядков в (3.107), удерживая только  $z''''$ ,  $z'''$  и  $z''$  и эффективно сводя это уравнение к уравнению второго порядка для переменной  $z''$ . В случае низких частот, с другой стороны, можно пренебречь  $z''''$  и  $z'''$ , и мы снова приходим к уравнению Матве. В дальнейшем мы исследуем полное уравнение четвертого порядка как аналитически, так и численно и рассмотрим резонансное усиление.

Предположим, что  $y(\tau)$  является периодической функцией, описывающей осцилляции кривизны, и рассмотрим следующие две возможные формы таких осцилляций, полученные в п. 1.2.

### 1. Чисто гармонические колебания

$$y_{\text{harm}}(t) = y_{\text{eq}}(t) + y_0 \cos(\omega_1 t + \theta), \quad (3.120)$$

где  $y_{\text{eq}}$  является точкой равновесия потенциала, вокруг которой осциллирует кривизна, т. е. внешняя плотность энергии в единицах начальной плотности  $y_{\text{eq}} = \rho(t)/\rho_0$ . Гармоническое решение  $y_{\text{harm}}$  реализуется при малых амплитудах колебаний кривизны. В этом случае  $\omega_1 = \omega$  и  $y_0 < y_{\text{eq}}$ . Изменение  $y_{\text{eq}}$  и  $y_0$  со временем происходит гораздо медленнее, чем осцилляции, т. е.  $y_{\text{eq}}/y_{\text{eq}} \ll \omega_1$ , и то же самое верно для  $y_0$ .

2. Решения с «пиками», которые, с точностью до медленно меняющихся членов, можно аппроксимировать как

$$y_{\text{sp}}(t) = \frac{y_0 d^2}{d^2 + \sin^2(\omega_2 t + \theta)}. \quad (3.121)$$

Если  $d \ll 1$ , действительно получаем «пиковые» решения, т. е. узкие пики с большими промежутками между ними.

В соответствии с [131, 132] имеем  $\omega_2 = \omega/2$ , где  $\omega$  дается уравнениями (3.79) и (3.83). Фурье-образ  $y_{\text{sp}}(t)$  содержит моды с частотами заметно большими, чем  $\omega_2$ . Доминантная мода, т. е. мода с самой большой амплитудой, возбуждается на частоте  $2\omega_2$ .

При рассмотрении решений с пиками, а также любого негармонического поведения фоновой кривизны будет возникать несколько мод с частотой, равной  $\omega$  или, возможно, намного больше. Общий эффект можно рассматривать как комбинацию отдельных вкладов от разных мод, поэтому удобно удерживать  $\omega_1$  или  $\omega_2$  в качестве свободного параметра. Если резонанс возбуждается при некотором значении  $\omega_{1,2}$  и какое-то негармоническое решение для  $R$  содержит такую частоту, то можно ожидать резонансного поведения и в полном негармоническом случае, хотя, возможно, слегка подавленное.

*Гармонические колебания.* Начнем с гармонических колебаний, заданных уравнением (3.120). Будем считать, что кривизна осциллирует с фиксированной частотой. Это, действительно, довольно общее свойство  $F(R)$ -теорий, по крайней мере, при выполнении условий (3.76) и  $\dot{\omega}/\omega^2 \ll 1^*$ . В терминах безразмерного времени,  $\tau = \omega t$ , функция  $y_{\text{harm}}(\tau)$  имеет вид

$$y_{\text{harm}}(\tau) = y_{\text{eq}}(\tau) + y_0 \cos(\Omega_1 \tau + \theta), \quad (3.122)$$

где  $\Omega_1 = \omega_1/\omega$ ,  $y_0$  — амплитуда колебаний и  $\theta$  — постоянная фаза. Такая форма  $y$  соответствует физическим осцилляциям скаляра кривизны (см. (3.104)):

$$R_b(t) = -\tilde{\rho}_b [y_{\text{eq}}(t) + y_0 \cos(\omega_1 t + \theta)] = R_{\text{GR}} [y_{\text{eq}} + y_0 \cos(\omega_1 t + \theta)]. \quad (3.123)$$

Уравнение (3.107) при  $\mu \ll 1$  сводится к уравнению Матье (3.116), если в (3.107) можно пренебречь слагаемыми, содержащими нечетные производные. Это будет так, если  $\alpha$ ,  $a$ ,  $b$  и  $c$  много меньше единицы, что соответствует  $k \ll \omega$ ,  $c_s^2 \ll 1$  и  $k^2 \gg \tilde{\rho}_b$ . В этом случае замена  $z'' = x$  дает

$$x'' + [\Omega^2 + 2\alpha \cos(\Omega_1 \tau)] x = 0. \quad (3.124)$$

Если  $\Omega_1/\Omega = 2$ , то будет возбуждаться параметрический резонанс. Сравнивая (3.124) с (3.116), видим, что параметр  $h$  выражается через  $\alpha$  как

$$h = 2\alpha\Omega^{-2}. \quad (3.125)$$

Рассмотрим  $\Omega_1 = 1$ , как это имеет место для гармонических колебаний с малой амплитудой, в которых кривизна осциллирует с частотой, точно заданной (3.79). Тогда условие параметрического резонанса будет

$$\frac{1}{4} = \Omega^2 \equiv 1 - \frac{a}{2} + b - \frac{4ab}{3} = 1 - \frac{\tilde{\rho}_b}{2k^2} + \frac{k^2}{\omega^2} - \frac{4\tilde{\rho}_b}{3\omega^2}, \quad (3.126)$$

где мы выразили  $\Omega$  через физические величины в соответствии с (3.104), (3.106а) и (3.106б), полагая  $c \ll 1$ .

Используя сходство со стандартным уравнением Матье, можно понять, как ведет себя полное уравнение (3.107) при выполнении условия (3.126). Решение для  $k$  дает

$$k^2 = \frac{1}{24} \left( 16\tilde{\rho}_b - 9\omega^2 \pm \sqrt{81\omega^4 + 256\tilde{\rho}_b^2} \right) \simeq \begin{cases} -\frac{3\omega^2}{4}, \\ \frac{2\tilde{\rho}_b}{3}. \end{cases} \quad (3.127)$$

---

\*Если частота меняется со временем, резонансный эффект также может сохраниться, но с изменяющейся частотой сигнала.

Первое решение является нефизическим, поскольку оно приводит к мнимому  $k^*$ . Второе решение

$$k^2 \simeq k_{\text{res}}^2 \equiv \frac{2\tilde{\rho}_b}{3} \quad (3.128)$$

физически разумно, но лежит вне джинсовского радиуса, где имеются неустойчивые моды даже в ОТО. Однако при условии  $k_{\text{res}} r_m \geq 1$ , так что мы все еще находимся внутри рассматриваемого облака, это может привести к усилению формирования структуры, начиная с определенного масштаба (3.128).

Как отмечалось выше, если кривизна не ведет себя точно, как (3.122), из-за ангармонических особенностей, то будет существовать несколько мод с более высокими частотами, дающих вклад в общий эффект. Поэтому будем теперь рассматривать  $\Omega_1$  как свободный параметр и обсудим параметрический резонанс в этом случае.

Как и в стандартном случае, будем считать, что  $y(\tau)$  является гармонической функцией и описывается уравнением (3.122), а решение (3.107) будем искать в виде

$$z(\tau) \sim (A \cos \Omega\tau + B \sin \Omega\tau) \exp(\gamma\tau). \quad (3.129)$$

Опуская детали вычислений, которые подробно описаны в нашей работе [137], получим, в пределе больших  $\omega$ , следующий результат для физического роста в резонансном случае:

$$\Gamma_{\text{res}}^2 = \omega^2 \gamma^2 \simeq \frac{y_0^2 \tilde{\rho}_b^2 (6 + \chi^2)}{576 k^4} [(6 + \chi^2) \omega^2 + (14 + \chi^2) k^2] \simeq \begin{cases} \frac{y_0^2 \tilde{\rho}_b^2 \omega^2}{16 k^4} & (\chi \ll 1), \\ \frac{y_0^2 \tilde{\rho}_b^2 \omega^2 \chi^4}{576 k^4} & (\chi \gg 1). \end{cases} \quad (3.130)$$

Напомним, что  $\chi = kr$  (см. (3.104)).

Обычное собственное значение в ОТО (3.109), совпадающее с нерезонансным решением в модифицированной гравитации (3.115), взятым в низшем порядке, есть

$$\Gamma_{\text{GR}}^2 \simeq \Gamma_{\text{MG}}^2 \simeq \frac{\tilde{\rho}_b}{2} - c_s^2 k^2. \quad (3.131)$$

---

\*В неоднородных системах конечного размера  $k$  может быть мнимым, например, при распространении в волноводах.



Резонансное поведение, таким образом, доминирует при выполнении условия

$$\frac{\Gamma_{GR}}{\Gamma_{res}} < 1 \Rightarrow y_0^2 > \begin{cases} \frac{8k^4(\tilde{\rho}_b - 2c_s^2k^2)}{\tilde{\rho}_b^2\omega^2} & (\chi \ll 1), \\ \frac{288(\tilde{\rho}_b - 2c_s^2k^2)}{\tilde{\rho}_b^2\omega^2\chi^4} & (\chi \gg 1). \end{cases} \quad (3.132)$$

При рассмотрении диапазона масштабов, соответствующего росту структуры в ОТО ( $k \leq k_J$ ), выражение  $(\tilde{\rho}_b - 2c_s^2k^2)$  положительно. В противоположном случае резонансное поведение, очевидно, является доминирующим, поскольку ОТО просто предсказывает звуковые волны.

Уравнение (3.132) показывает, что существует нижняя граница для  $y_0$ , при которой возникает параметрический резонанс, как это происходит в обычном случае. Тем не менее имеется большая область в пространстве параметров, при которых это условие выполняется.

Условие  $\chi = kr \ll 1$  соответствует внутренней части облака, на расстояниях от центра меньше, чем  $k^{-1}$ . Хотя это, вероятно, небольшая область, она не является пренебрежимой, особенно при изучении роста структуры на относительно больших масштабах (т. е. при относительно малых  $k$ ).

Уравнение (3.107) было решено численно для различных значений  $y_0$  и  $\Omega_1$ . Возбуждение параметрического резонанса наблюдается на ожидаемой частоте  $\Omega_1/\Omega = 2$  (рис. 22). Мы приводим численные решения для  $z(\tau)$  и сравниваем их с аналитической оценкой амплитуды  $z$ , а именно

$$z \sim \exp(\Gamma_{res}t), \quad (3.133)$$

где  $\Gamma_{res}$  дается (3.130) при  $\chi \ll 1$ .

Параметры, характеризующие среду и волновой вектор, были выбраны равными

$$a = b = \chi = 0,01, \quad c = 0,02, \quad (3.134)$$

при изменяющихся  $y_0$  и  $\Omega_1$ . Эти значения выбраны лишь для получения фигур, иллюстрирующих резонансное поведение, которое, однако, проявляется для очень широкого диапазона параметров. С другой стороны, параметрический резонанс довольно чувствителен к вариациям  $y_0$  и, конечно,  $\Omega_1$ . Фактически экспоненциальный рост замедляется при переходе от  $\Omega_1/\Omega = 2$  к  $\Omega_1/\Omega = 2,015$ , как видно из сравнения верхнего и нижнего графиков на рис. 22. Такая резкая частотная зависимость явно демонстрирует резонансное поведение с полушириной резонанса порядка  $\sim 0,1\Omega$ . Зависимость от частоты помогает различать параметрическую резонансную неустойчивость и неустойчивость за счет антитрения, рассмотренную ниже в п. 3.3.4. для которой частотная зависимость очень слабая.

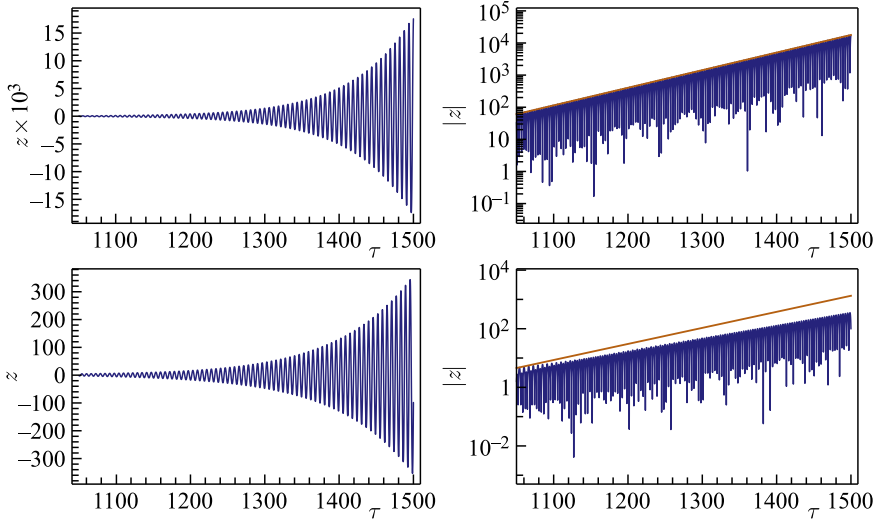


Рис. 22. Решения для параметров (3.134). Слева: осцилляции  $z$  как функция безразмерного времени  $\tau$ . Справа:  $|z(\tau)|$  (в логарифмическом масштабе) и сплошная линия — амплитуда осцилляций (3.133) с темпом роста, определяемым (3.130). Сверху: возбуждение параметрического резонанса  $z(\tau)$  для гармонических осцилляций кривизны с  $y_0 = 5$  и  $\Omega_1/\Omega = 2$  и сравнение с предсказанным экспоненциальным ростом. Относительная разность между точным и оценочным темпами роста около  $5 \cdot 10^{-5}$ . Снизу: результаты для  $\Omega_1/\Omega = 2,015$ , другие параметры неизменны. Резонансное поведение намного слабее, но согласие между численным значением  $\Gamma$  и аналитической оценкой (сплошная линия) удовлетворительное:  $|\Gamma_{\text{res}}/\Gamma_{\text{num}} - 1| \sim 0,24$ . Заметим, что, хотя решения показаны при относительно больших временах, эволюция системы начинается при  $\tau = 0$

В обоих случаях, представленных на рис. 22, согласие численных расчетов с аналитической оценкой (3.130) является замечательным, не хуже, чем  $|\Gamma_{\text{MG}}/\Gamma_{\text{num}} - 1| \sim 5 \cdot 10^{-5}$  для  $\Omega_1/\Omega = 2$ , и уменьшается примерно до 24% для  $\Omega_1/\Omega = 2,015$ , что близко к порогу резонанса.

Случай больших  $\chi$  или  $r \gg k^{-1}$  соответствует большому объему коллапсирующего облака. Согласно нашим предположениям, возмущения обычно меняются на масштабах, значительно меньших общего размера объекта  $r_m$ , поэтому  $kr_m \gg 1$ . Если мы возьмем, например,  $0,5r_m \leq r \leq r_m$ , эта область будет занимать около 0,9 объема облака, а если  $0,1r_m \leq r \leq r_m$ , то соответствующий объем составит 0,999 от общего объема облака.

Мы решили уравнение (3.107) численно и приводим результаты для следующих значений параметров

$$a = b = c = 0,01, \quad \chi = 10, \quad y_0 = 1 \quad (3.135)$$

и изменяющейся  $\Omega_1$ .

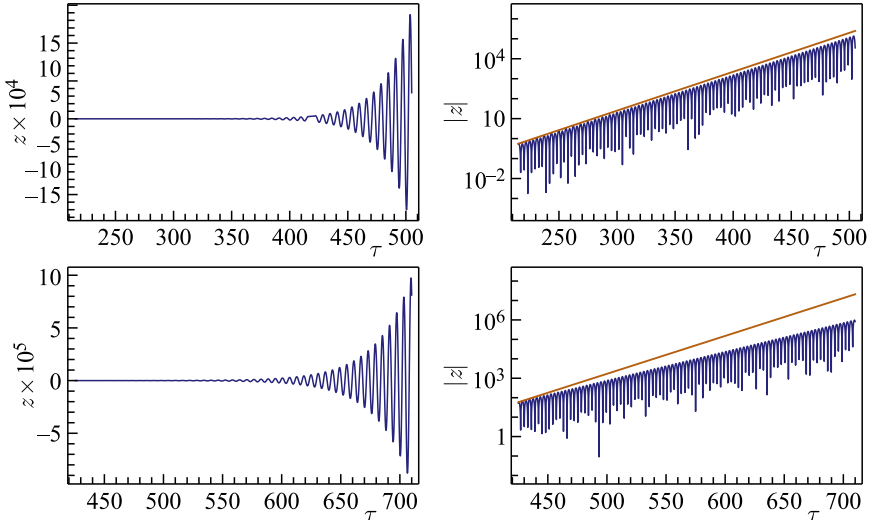


Рис. 23. Решения для параметров (3.135). Слева и справа показаны те же величины, что и на рис. 22. Сверху: решение для  $y_0 = 1$  и  $\Omega_1/\Omega = 2$  и сравнение с предсказанным поведением (сплошная линия). Относительная разница между точным и оценочным темпами роста  $\sim 3 \cdot 10^{-2}$ . Снизу: результаты для  $\Omega_1/\Omega = 2,075$ , другие параметры неизменны. Резонансное поведение слабее, но все еще достаточно сильное, однако согласие между численным значением  $\Gamma$  и аналитической оценкой (сплошная линия) уменьшается:  $|\Gamma_{\text{res}}/\Gamma_{\text{num}} - 1| \sim 0,32$ . Тем не менее наши аналитические оценки находятся в пределах одного порядка от численных результатов

На рис. 23 показаны результаты для  $\Omega_1/\Omega = 2$  и  $\Omega_1/\Omega = 2,075$ . При удалении от резонансного значения частоты согласие с аналитической оценкой (3.130) уменьшается, но остается удовлетворительным, причем относительное расхождение много меньше, чем на порядок. Ширина резонансной области для  $\Omega_1$  примерно равна  $\delta\Omega_1/\Omega_1 \simeq 0,05$ . Однако она сильно зависит от значения  $y_0$ : например, для  $y_0 = 4$  ширина огромна, около  $\delta\Omega_1/\Omega_1 \simeq 1,2$ . В случае больших радиусов резонанс вызывает заметно более быстрый рост осцилляций, чем при малых  $\chi$ .

Отметим, что огромные значения амплитуды колебаний, которые легко достижимы численно, не имеют большого смысла, поскольку приближение первого порядка, используемое при выводе уравнений (3.91)–(3.95), справедливо только в случае, когда возмущения много меньше единицы. С начальной амплитудой флуктуаций порядка  $10^{-4}$ – $10^{-5}$  (следующей из данных по микроволновому фону) результатам можно доверять до усилений, не превышающих примерно пяти порядков.

*Осцилляции с пиками.* Как было найдено в наших предыдущих работах [126, 131], гармонические осцилляции не исчерпывают всех возможных

решений для фона  $R(t)$ . Мы показали, что возможно образование узких «пиков» большой амплитуды,  $|R| \gg |R_{\text{GR}}|$ , см. (3.121). Эти пики отделены друг от друга интервалом  $2\pi[\omega(R = R_{\text{GR}})]^{-1}$ , значительно превосходящим их ширину. Например, для рассматриваемой модели  $F(R)$ -функции (1.20) ширина пиков может быть мала, как  $m^{-1} \leq (10^5 \text{ ГэВ})^{-1}$ .

Мы численно решаем уравнение (3.107), используя  $y_{\text{сп}}$  как функцию безразмерного времени в виде

$$y_{\text{сп}}(\tau) = \frac{y_0 d^2}{d^2 + \sin^2(\Omega_2 \tau + \theta)} \quad (3.136)$$

с  $\Omega_2 \simeq 1/2$  в соответствии с решением из работы [126]. Эта функция и ее фурье-образ представлены на рис. 24. Отметим, что амплитуды четных гармоник значительно больше амплитуд нечетных. Более того, амплитуды нечетных гармоник могут становиться отрицательными, несмотря на то, что кривизна  $y(\tau)$  остается, как это и должно быть, положительной.

На рис. 25, *a* явно виден параметрический резонанс при  $\Omega_2 = \Omega/2 \simeq 0,5013$ , что соответствует второй резонансной моде, см. (3.106б), при выборе параметров:  $a = b = 0,01$  и  $c = 0,02$ . Для этих величин  $\mu$  из уравнения (4.113) положительно и равно  $1,47 \cdot 10^{-4}$ . На рис. 25, *б* функция  $z(\tau)$  представлена

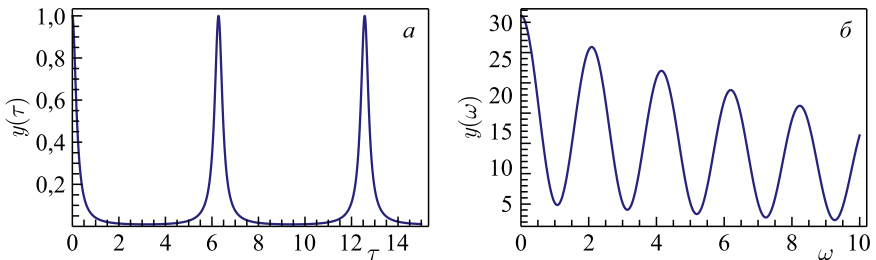


Рис. 24. *a*)  $y(\tau)$  из уравнения (3.136) с  $y_0 = 1$ ,  $\Omega_2 = 0,5$  и  $d = 0,1$ . *б*) Фурье-образ  $y(\tau)$

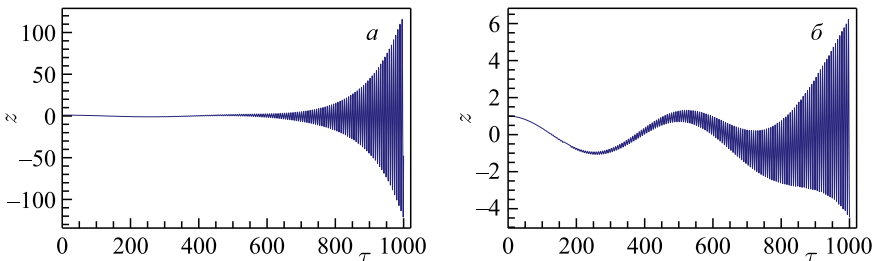


Рис. 25. Возбуждение параметрического резонанса  $z(\tau)$  для осцилляций кривизны с пиками при  $y_0 = 30$  и  $\Omega_2/\Omega = 1/2$  (*a*) и  $\Omega_2/\Omega = 0,496$  (*б*)

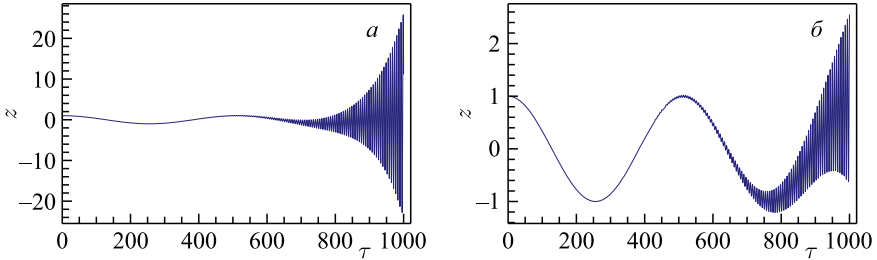


Рис. 26. Возбуждение параметрического резонанса  $z(\tau)$  для осцилляций кривизны с пиками при  $y_0 = 30$  и  $\Omega_2/\Omega = 1$  (а) и  $\Omega_2/\Omega = 0,992$  (б)

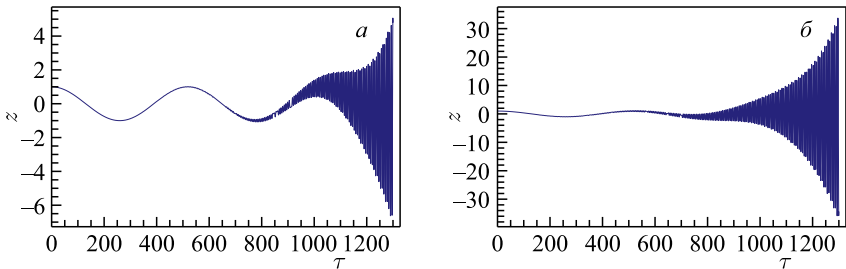


Рис. 27. Возбуждение параметрического резонанса  $z(\tau)$  для осцилляций кривизны с пиками при  $y_0 = 30$  и  $\Omega_2/\Omega = 1/3$  (а) и  $\Omega_2/\Omega = 1/4$  (б)

для более низкой частоты  $\Omega_2/\Omega = 0,496$ . Видно, что резонанс все еще возбуждается, но гораздо слабее. Форма резонансной кривой симметрична по отношению к положению резонансной частоты. Резкое убывание амплитуды осцилляций показывает, что резонанс довольно узкий, с шириной  $\delta\Omega/\Omega \ll 1$ .

Главная мода параметрического резонанса должна проявляться при частоте  $\Omega_2/\Omega = 1$ ; это показано на рис. 26, а. Однако она оказывается подавленной по сравнению с модой  $\Omega_2/\Omega = 1/2$  вследствие подавления нечетных фурье-амплитуд  $y(\tau)$  (см. рис. 24).

На рис. 27 эволюция  $z(\tau)$  изображена для  $\Omega_2/\Omega = 1/3$  (рис. а) и  $\Omega_2/\Omega = 1/4$  (рис. б). Как и ожидалось, эти более высокие моды являются более слабыми, и, как было отмечено выше, фурье-амплитуды слабее для нечетных мод. Видно, что уравнение 4-го порядка демонстрирует параметрические резонансные эффекты, весьма похожие на классический случай (3.116), хотя влияние нечетных производных в уравнении (3.107) может быть существенным, что приводит к количественным изменениям результатов.

**3.3.4. Усиление антитрением.** Усиление возмущений за счет антитренинга индуцируется изменением знаков коэффициентов перед нечетными производными в уравнении 4-го порядка. Когда эти коэффициенты становятся

отрицательными, вместо подавления колебаний они приводят к их усилению. Подобное явление легко увидеть, решая простое осцилляторное уравнение 2-го порядка

$$\ddot{z} + \Gamma \dot{z} + \omega^2 z = 0 \quad (3.137)$$

с  $\Gamma < 0$ . Ниже мы покажем, что для достаточно больших  $\alpha$  (3.106а) и/или  $\chi$  (3.104) уравнение 4-го порядка (3.107) (или (3.105)) действительно имеет сильно растущие решения.

*Гармонические осцилляции кривизны.* В п. 3.3.2 мы рассмотрели случай малой амплитуды колебаний фона и показали, что уравнение (3.107) можно решить аналитически. Интересно, что это уравнение также может быть решено аналитически в противоположном пределе большой амплитуды осцилляций, но малых  $c$  и  $\chi$ . В этом случае (3.107) принимает вид

$$z'''' + \alpha y' z'''' + 2\alpha z'' y'' + \alpha z' y''' = z'''' + \alpha(z' y')'' = 0. \quad (3.138)$$

Это уравнение легко интегрируется:

$$z'' + \alpha z' y' = C_1 + C_2 \tau, \quad (3.139)$$

приводя к решению

$$z' = C_0 e^{-\alpha y(\tau)} + C_1 e^{-\alpha y(\tau)} \int_0^\tau d\tau_1 e^{\alpha y(\tau_1)} + C_2 e^{-\alpha y(\tau)} \int_0^\tau d\tau_1 \tau_1 e^{\alpha y(\tau_1)} \quad (3.140)$$

или, эквивалентно,

$$z = z_0 + \int d\tau_1 \left[ C_0 e^{-\alpha y(\tau_1)} + e^{\alpha y(\tau_1)} \int^{\tau_1} d\tau_2 (C_1 + C_2 \tau_2) e^{\alpha y(\tau_2)} \right]. \quad (3.141)$$

Возьмем для определенности  $y(\tau) = y_0 \cos(\Omega_1 \tau)$ . Из (3.140) видно, что производная  $z'$  мала при  $\alpha y < 0$ , в то время как  $z'$  положительна и велика при  $\alpha y > 0$ , при этом функция  $z$  остается постоянной в первом случае и растет во втором.

Это поведение проиллюстрировано на рис. 28 и 29. Усиление  $z(\tau)$  имеет место независимо от частоты колебаний фоновой кривизны  $\omega_1$ . Это можно объяснить изменением знака коэффициентов перед нечетными производными функции  $z$  в (3.107) и (3.138) для больших  $y_0$ . Когда эти коэффициенты положительны, они действуют как сила трения, но когда они отрицательны, то действуют как антитрение. Ниже такой эффект продемонстрирован численно для полного уравнения (3.107).

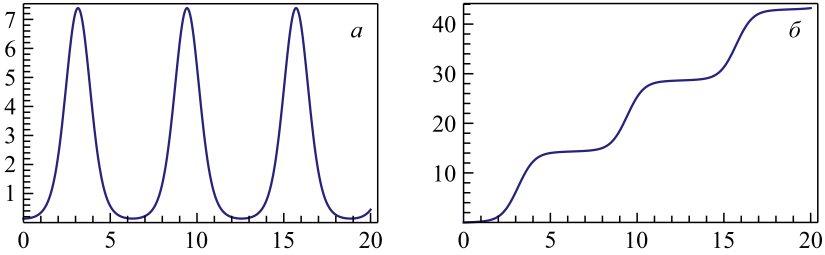


Рис. 28. Функция  $z(\tau)$  (а) и ее производная  $z'(\tau)$  (б) из (3.140) при  $C_0 = 1$ ,  $C_1 = C_2 = 0$ ,  $y(\tau) = y_0 \cos(\tau)$  и  $\alpha y_0 = 2$

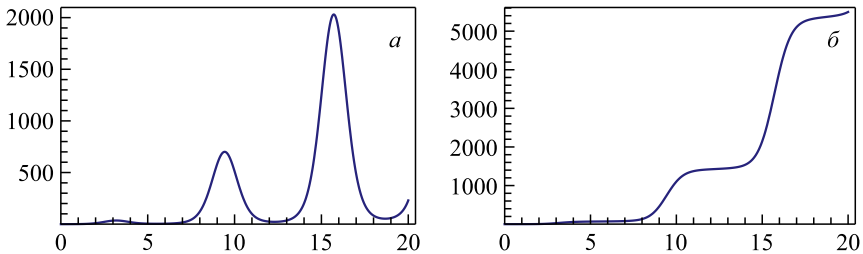


Рис. 29. Функция  $z(\tau)$  (б) и ее производная  $z'(\tau)$  (а) из (3.140) при  $C_2 = 1$ ,  $C_0 = C_1 = 0$ ,  $y(\tau) = y_0 \cos(\tau)$ , и  $\alpha y_0 = 2$

Рассмотрим вначале случай малых радиусов,  $\chi \ll 1$ . Мы решаем уравнение (3.107) численно для выбранных *ad-hoc* параметров  $a = 0,01$ ,  $b = 0,01$ ,  $c = 0,02$ ,  $\chi = 0,01$  при различных значениях  $y_0$  и  $\Omega_1$ . Усиление антитрением наблюдается на частотах, далеких от резонансных значений, если  $y_0$  превышает пороговое значение  $y_{th}$ . Чем дальше частота от резонанса, тем выше порог. Например, для  $\omega_1 = 3,2$  пороговое значение равно  $y_{th} = 169$ , тогда как для  $\omega_1 = 4,4$  порог  $y_{th} = 267$ . Эволюция  $z(\tau)$  в этих двух случаях изображена на рис. 30.

Большое  $\chi$  приводит к неустойчивости за счет антитрения более эффективно, так как член, пропорциональный  $\chi^2$ , входит только в коэффициенты перед первой производной  $z'$ , и нет никакой разрушительной интерференции между членами с первой и третьей производными, которые в общем случае могут иметь противоположные знаки и действовать в противоположных направлениях.

На рис. 31 представлен пример поведения с антитрением в системах с гармоническими осцилляциями кривизны для тех же значений параметров  $a = 0,01$ ,  $b = 0,01$ ,  $c = 0,02$  и частотами, что и в случае малых радиусов, за исключением значения  $\chi$ . Мы берем  $\chi = 10$  и снова наблюдаем пороговый эффект, но теперь для частоты  $\Omega_1 = 3,2$  пороговая амплитуда  $y_{th} = 10$ , в то время как для  $\Omega_1 = 4,4$  порог равен  $y_{th} = 11$ .

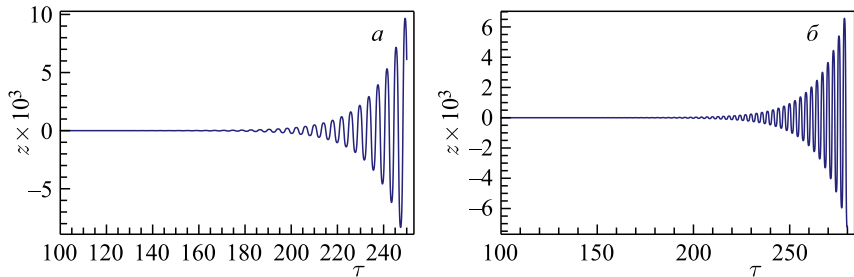


Рис. 30. Эффект антитрения в эволюции  $z(\tau)$  для гармонических осцилляций кривизны с  $y_0 = 169$ ,  $\Omega_1/\Omega = 3,2$  (а) и  $y_0 = 267$ ,  $\Omega_2/\Omega = 4,4$  (б). Малые радиусы:  $\chi = 0,01$

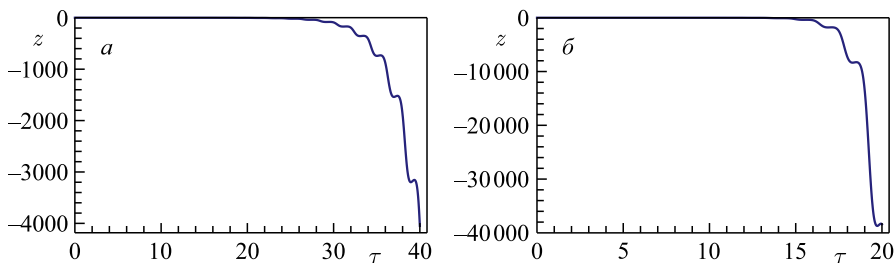


Рис. 31. Эффект антитрения в эволюции  $z(\tau)$  для гармонических осцилляций кривизны с  $y_0 = 10$ ,  $\Omega_1/\Omega = 3,2$  (а) и  $y_0 = 11$ ,  $\Omega_2/\Omega = 4,4$  (б). Большие радиусы:  $\chi = 10$

*Осцилляции кривизны с пиками: численные решения.* Мы приводим здесь численное решение уравнения (3.107) для осцилляций кривизны с пиками (3.121) при разных частотах  $\Omega_2$  и амплитудах  $y_0$ . Видно, что решения неустойчивы не только для резонансных частот, но и для любых других частот при условии, что  $y_0$  превосходит некоторое пороговое значение, зависящее от частоты. Мы приписываем это явление изменению знака коэффициентов перед нечетными производными в (3.107). В некотором смысле этот результат аналогичен приведенному выше для гармонического  $y(\tau)$ , хотя и отличается количественно как по величине, так и по форме сигнала. Последнее можно объяснить различной формой  $y(\tau)$ , различными начальными условиями или другими эффектами, вызванными ненулевым  $\mu$ , пренебрегаемым в (3.138).

Как и ранее, начнем со случая малых радиусов,  $\chi = 0,01$ . На рис. 32 представлена эволюция  $z(\tau)$  для нерезонансных частот  $\Omega_2/\Omega = 0,6, 0,7$ . Чем дальше частота от резонансной, примерно равной  $0,5$ , тем больше пороговое значение  $y_0$ , необходимое для возникновения неустойчивого решения.



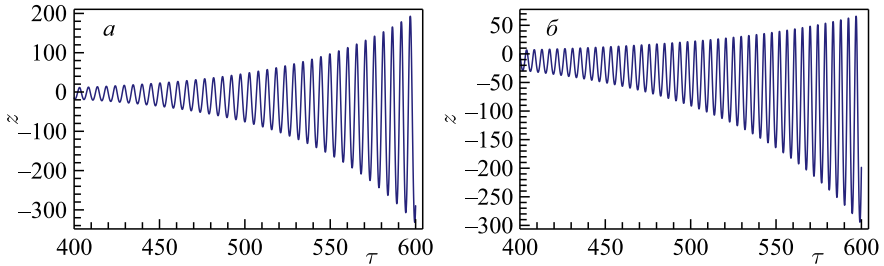


Рис. 32. Эффект антитрения в эволюции  $z(\tau)$  для осцилляций кривизны с пиками при  $y_0 = 400$ ,  $\Omega_2/\Omega = 0,6$  (а) и  $y_0 = 702$ ,  $\Omega_2/\Omega = 0,7$  (б)

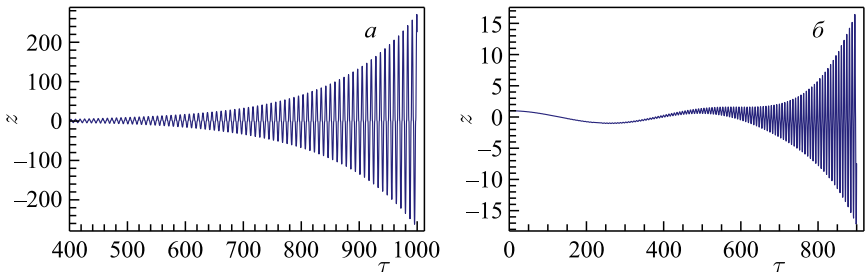


Рис. 33. Эффект антитрения в эволюции  $z(\tau)$  для осцилляций кривизны с пиками при  $y_0 = 1280$ ,  $\Omega_2/\Omega = 0,8$  (а) и  $y_0 = 372$ ,  $\Omega_2/\Omega = 0,9$  (б)

Величины  $y_0$ , выбранные для этих рисунков, довольно близки к пороговым значениям,  $y_0 = 400$  для  $\Omega_2/\Omega = 0,6$  и  $y_0 = 702$  для  $\Omega_2/\Omega = 0,7$ . Заметим, что пороговое значение  $y_0$  при резонансе с  $\Omega_2/\Omega \approx 0,5$  равно примерно 15. Этот пороговый эффект также присутствует в явлении стандартного параметрического резонанса при непренебрежимом трении [196].

На рис. 33 эволюция  $z(\tau)$  показана для более высоких частот  $\Omega_2/\Omega = 0,8$  (а) и  $\Omega_2/\Omega = 0,9$  (б) при  $y_0 = 1280$  и  $y_0 = 372$  соответственно. Частота  $\Omega_2/\Omega = 0,9$  ближе к резонансной  $\Omega_2 \approx \Omega$ , поэтому пороговое значение  $y_0$  заметно ниже.

Результаты численных решений при больших радиусах,  $\chi \gg 1$ , приведены на рис. 34. Неустойчивость проявляется очень ярко, но характер двух видов неустойчивости при разных значениях параметров, изображенных на рис. а и б, очень сильно различается. В первом случае мы наблюдаем колебания с быстро растущей амплитудой, а во втором — взрывчатый, практически монотонный рост.

В заключение этого раздела следует отметить, что высокочастотные осцилляции кривизны и метрики в сжимающихся системах, таких как газовые облака межзвездного или межгалактического вещества в процессе обра-

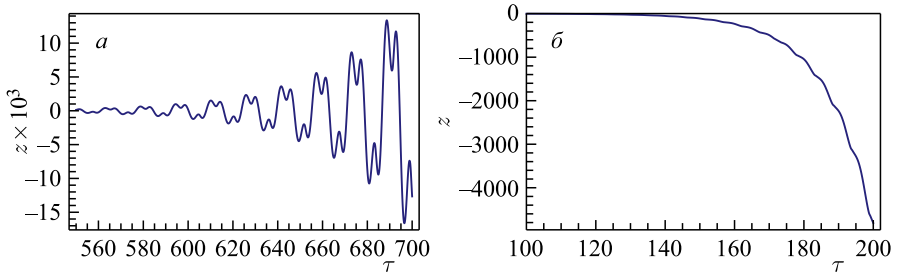


Рис. 34. Эффект антитрения в эволюции  $z(\tau)$  для осциллирующей кривизны с пиками при  $y_0 = 14$ ,  $\Omega_2/\Omega = 0,4$  (а) и  $y_0 = 9$ ,  $\Omega_2/\Omega = 0,6$  (б). Большие радиусы:  $\chi = 10$

зования звезды или галактики, являются общей характерной чертой  $F(R)$ -модифицированной гравитации. Подобный эффект может иметь место в процессе звездного коллапса, например, перед взрывом сверхновой и последующим образованием нейтронной звезды или черной дыры. Как мы показали в этом разделе, эволюция метрических и плотностных возмущений на осциллирующем гравитационном фоне обладает новыми и очень интересными особенностями в дополнение к обычной экспоненциальной неустойчивости Джинса, которая и сама возникает на ином масштабе, чем в общей теории относительности.

Осциллирующая фоновая метрика и кривизна системы индуцируют эффект, аналогичный стандартному параметрическому резонансу, что приводит к усилению флуктуаций. Существует количественное различие по сравнению со стандартным случаем, поскольку обычный параметрический резонанс описывается дифференциальным уравнением второго порядка, а в модифицированной гравитации уравнение (3.101), управляющее эволюцией флуктуаций, является уравнением 4-го порядка. Мы рассмотрели достаточно общее уравнение без ограничений, связанных с конкретным видом  $F(R)$ -функции. Тем не менее в качестве примера мы использовали теорию, описываемую действием (1.20), но не ограничивались конкретными значениями параметров, присущих именно этой модели. Аналогичный подход использовался в отношении формы осциллирующей метрики и фоновой кривизны, которые выбирались в виде как гармонических колебаний, так и решений с пиками, найденными в наших работах [131, 132] (см. также разд. 1). В обоих случаях эволюция возмущений определяется уравнением четвертого порядка, в котором нечетные производные могут играть решающую роль. Они описывают затухание вследствие трения, если коэффициенты при них положительны (это обычный случай в стандартной теории параметрического резонанса). Однако эти коэффициенты могут периодически менять знак, что приводит к периодической силе «антитрения» и к последующему усилению возмущений. Последний эффект возникает при довольно высокой амплитуде колебаний кривизны,

выше фонового значения ОТО. Системы, в которых возбуждаются колебания кривизны с большой амплитудой, рассмотрены во введении.

Уравнения четвертого порядка (3.105) или (3.107), определяющие эволюцию возмущений плотности, демонстрируют очень богатую картину различных типов неустойчивостей. Существует близкий аналог параметрического резонанса, который легко описать теоретически почти так же, как обычный параметрический резонанс. Однако, в дополнение к этому, нами обнаружен новый вид неустойчивости, названной нами неустойчивостью за счет антитренинга, индуцированной отрицательными знаками коэффициентов перед нечетными производными в уравнении 4-го порядка. Интересно, что эта неустойчивость вызывает совершенно различное поведение растущих возмущений в зависимости от значений параметров системы. Это могут быть колебания с быстро нарастающей амплитудой или квазивзрывное поведение с амплитудой, монотонно стремящейся к бесконечности. Конечно, эти результаты надежны только в том случае, если возмущения достаточно малы, не более единицы в безразмерной форме.

Уравнение (3.105) решалось аналитически и численно относительно возмущений  $z \equiv \delta B$  функции  $B(t, r)$  «пространственно-пространственной» части метрики (4.101). На основе этих решений можно рассчитать эволюцию относительного контраста плотности,  $\delta\rho/\rho_b$ , используя выражение (3.108). При этом экспоненциально растущие решения для  $z$  будут приводить к подобному поведению возмущений плотности  $\delta\rho$ , как показано на рис. 35 в случае параметрического резонанса, индуцированного фоновой кривизной с пиками умеренно большой амплитуды  $y_0 = 30$ .

Видно, что за относительно короткое время, около  $10^3\omega^{-1}$ , возмущения плотности достигнут единицы, если начальные возмущения метрики были на уровне  $10^{-3}$ . Эффективное время может быть намного меньше гравитацион-

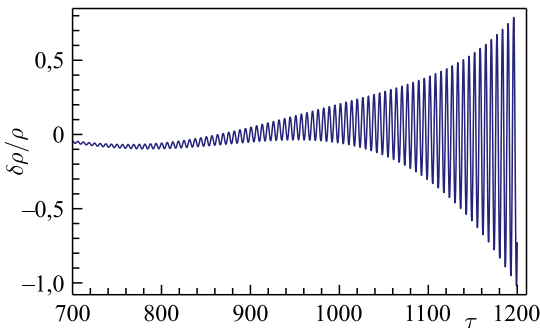


Рис. 35. Эволюция  $\delta\rho/\rho$  в области параметрического резонанса, индуцированного решениями с пиками при  $y_0 = 30$ ,  $\Omega_2/\Omega = 0,5$ . Начальное значение возмущений метрики  $\delta B(0) \equiv z(0) = 10^{-3}$

ного времени, характерного для роста возмущений плотности джинсовского типа, так как  $\omega$  обычно велико. Хотя контраст плотности является осциллирующей функцией времени, его влияние на формирование структуры может быть непренебрежимым, что будет приводить к ограничениям на параметры рассматриваемой  $F(R)$ -теории.

#### 4. ПРОБЛЕМЫ СПОНТАННОГО И ГРАВИТАЦИОННОГО БАРИОСИНТЕЗА

В первой части данного раздела, следуя нашей работе [162], мы рассмотрим общие особенности спонтанного бариосинтеза. Нами исследована связь между производной по времени (псевдо)голдстоуновского поля и химическим потенциалом барионов и показано, что это соотношение зависит от представления, выбранного для фермионных полей с ненулевым барионным числом (кварков). Расчеты космологической барионной асимметрии были проведены на основе кинетического уравнения, обобщенного на случай нестационарного фона. В рассмотрение также были включены эффекты, связанные с конечностью интервала интегрирования по времени. В совокупности все эти эффекты приводят к заметному отклонению величины барионной асимметрии от канонических результатов.

Далее будут рассмотрены сценарии гравитационного бариосинтеза, которые обладают теми же интересными и привлекательными свойствами, что и теория спонтанного бариосинтеза, а именно тем, что генерация космологической асимметрии может протекать в тепловом равновесии без необходимости нарушения  $C$  и  $CP$  в физике частиц. Однако нами показано [163, 164], что введение производной скаляра кривизны в лагранжиан теории приводит к гравитационным уравнениям высокого порядка, являющимся сильно неустойчивыми. Эффекты этой неустойчивости могут коренным образом изменить не только обычную космологическую историю, но также и стандартную ньютоновскую гравитационную динамику. Нами обнаружена такая неустойчивость для скалярных барионов [163] и найден подобный эффект для более реалистичных барионов со спином  $1/2$  (кварков) [164].

**4.1. Спонтанный бариосинтез.** Обычный подход к космологическому бариогенезису основан на трех хорошо известных условиях Сахарова [147], включающих в себя:

- 1) несохранение барионного числа;
- 2) нарушение  $C$ - и  $CP$ -инвариантности;
- 3) отклонение от теплового равновесия.

Однако есть несколько интересных сценариев бариосинтеза, для которых одно или несколько из вышеуказанных условий не выполняются. Очень популярным сценарием является так называемый спонтанный бариогенезис (СБГ),

предложенный в работах [155,156,197] (см., например, обзоры [146,159,161]). Термин «спонтанный» относится к спонтанному нарушению симметрии теории. Предполагается, что в ненарушенной фазе лагранжиан инвариантен относительно глобальной  $U(1)$ -симметрии, обеспечивающей сохранение полного барионного числа, в частности хиггсоподобного поля,  $\Phi$ , и полей материи (кварков). Предполагается, что эта симметрия спонтанно нарушается и в нарушенной фазе плотность функции Лагранжа приобретает слагаемое

$$\mathcal{L}_{SB} = (\partial_\mu \theta) J_B^\mu, \quad (4.1)$$

где  $\theta$  есть голдстоуновское поле или, другими словами, фаза поля  $\Phi$ , а  $J_B^\mu$  — барионный ток полей материи (кварков). В зависимости от формы взаимодействия  $\Phi$  с полями материи спонтанное нарушение симметрии может приводить к несохранению барионного тока вещества. Если это не так и  $J_B^\mu$  сохраняется, то, интегрируя уравнение (4.1) по частям, мы получим нулевое выражение, и, следовательно, взаимодействие (4.1) является ненаблюдаемым.

Следующий шаг в развитии сценария спонтанного бариосинтеза — предположение, что плотность функции Гамильтона, соответствующая  $\mathcal{L}_{SB}$ , есть просто лагранжева плотность, взятая с противоположным знаком:

$$\mathcal{H}_{SB} = -\mathcal{L}_{SB} = -(\partial_\mu \theta) J_B^\mu. \quad (4.2)$$

Однако, как будет показано ниже, такая идентификация является верной только в случае, когда плотность Лагранжа зависит лишь от полевых переменных, но не от их производных.

На некоторое время пренебрежем осложнениями, связанными с вызывающей вопросы идентификацией (4.2), и продолжим описание логики спонтанного бариосинтеза.

Для пространственно однородного поля  $\theta = \theta(t)$  гамильтониан (4.2) сводится к  $\mathcal{H}_{SB} = -\dot{\theta} n_B$ , где  $n_B \equiv J_B^t$  есть плотность барионного числа материи, так что хочется отождествить  $\dot{\theta}$  с химическим потенциалом  $\mu$  соответствующей системы (см., например, [198]). Если это так, то в тепловом равновесии по отношению к взаимодействиям, не сохраняющим барионное число, возникнет барионная асимметрия, равная

$$n_B = \frac{g_S B_Q}{6} \left( \mu T^2 + \frac{\mu^3}{\pi^2} \right) \rightarrow \frac{g_S B_Q}{6} \left( \dot{\theta} T^2 + \frac{\dot{\theta}^3}{\pi^2} \right), \quad (4.3)$$

где  $T$  — температура космологической плазмы,  $g_S$  и  $B_Q$  суть соответственно число спиновых состояний и барионное число кварков, которые, как предполагается, являются носителями барионного заряда.

Интересно, что для успешного спонтанного бариогенезиса два из трех условий Сахарова генерации космологической барионной асимметрии, а именно, нарушение теплового равновесия и нарушение  $C$ - и  $CP$ -симметрии, не являются необходимыми. Этот сценарий аналогичен бариосинтезу в отсутствие  $CPT$ -инвариантности, если массы частиц и античастиц различны. В последнем случае генерация космологической барионной асимметрии может также протекать в тепловом равновесии [26, 158]. В сценарии СБГ роль «нарушителя»  $CPT$  играет внешнее поле  $\theta(t)$ .

Однако, несмотря на общепринятую точку зрения, идентификация  $\dot{\theta} = \mu_B$  некорректна. Действительно, если  $\dot{\theta}(t)$  является постоянным или медленно меняющимся, то в соответствии с (4.2) оно сдвигает энергии барионов относительно антибарионов с таким же пространственным импульсом на  $\dot{\theta}$ . Таким образом, в плазме будут иметься барионы и антибарионы с различными плотностями барионных чисел, даже если соответствующий химический потенциал обращается в нуль. В этом случае барионная асимметрия определяется эффективным химическим потенциалом  $\mu_{\text{eff}} = \mu - \dot{\theta}$ , который нужно подставить в (4.3) вместо  $\mu$ . Детальные аргументы будут приведены ниже, в п. 4.1.3. Также будет показано, что барионный химический потенциал стремится к нулю, когда система приходит в состояние теплового равновесия. При этом в равновесии барионная асимметрия будет отлична от нуля даже с нулевым химическим потенциалом.

Картина меняется, если использовать другое представление для кварковых полей. Переопределяя поля кварков с помощью фазового преобразования  $Q \rightarrow \exp(i\theta/3)Q$ , можно исключить слагаемое (4.1) из лагранжиана, но тогда оно возникнет в члене взаимодействия, нарушающем сохранение барионного числа, см. (4.9). Ясно, что в этом случае  $\theta$  не просто связано с химическим потенциалом. Однако, как показано в нашей работе [162], барионный химический потенциал в этой формулировке теории будет стремиться в равновесии к  $c\dot{\theta}$  с постоянным коэффициентом  $c$ . В любом случае, как будет видно из решения кинетического уравнения, представленного ниже, физически значимое выражение для барионной асимметрии,  $n_B$ , выраженной через  $\theta$ , одинаково в двух упомянутых выше формулировках теории, хотя значения химических потенциалов совершенно разные. Очевидно, это различие связано с неточным переходом от лагранжиана  $\mathcal{L}_{\text{SB}}$  к гамильтониану  $\mathcal{H}_{\text{SB}}$ , выполненному в соответствии с уравнением (4.2). Такая идентификация верна, если лагранжиан не зависит от производной по времени от соответствующего поля,  $\theta(t)$  в рассматриваемом случае. Связанная с этим критика спонтанного бариосинтеза может быть найдена в работах [176, 199], а также в обзоре [200].

В данном подразделе мы исследуем классическую версию спонтанного бариогенезиса. Мы приводим точный вывод гамильтониана из лагранжиана, который зависит от производных поля. Для постоянного  $\dot{\theta}$  и достаточно большого интервала интегрирования по времени результаты существенно со-

падают с теми, что были получены в предыдущих рассмотрениях. С учетом влияния конечности временного интервала, которое эффективно нарушает сохранение энергии, результат СБГ становится заметно иным. Мы также изучили влияние нелинейной временной эволюции голдстоуновского поля

$$\theta = \dot{\theta}_0 t + \ddot{\theta}_0 t^2/2 \quad (4.4)$$

и обнаружили, что могут быть значительные отклонения от стандартного сценария с  $\dot{\theta} \approx \text{const}$ .

Сильное отклонение от стандартных результатов также найдено для псевдоголдстоуновского поля, осциллирующего вблизи минимума потенциала  $U(\theta)$ .

#### 4.1.1. Спонтанное нарушение симметрии и голдстоуновская мода.

Начнем с теории с комплексным скалярным полем  $\Phi$ , взаимодействующим с фермионами  $Q$  и  $L$ , описываемой лагранжианом

$$\mathcal{L}(\Phi) = g^{\mu\nu} \partial_\mu \Phi^* \partial_\nu \Phi - V(\Phi^* \Phi) + \bar{Q}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m_Q) Q + \bar{L}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m_L) L + \mathcal{L}_{\text{int}}(\Phi, Q, L), \quad (4.5)$$

где предполагается, что  $Q$  и  $\Phi$  обладают ненулевыми барионными числами, а барионное число  $L$  равно нулю. Здесь  $V(\Phi^* \Phi)$  является потенциалом самодействия поля  $\Phi$ , определенным ниже в (4.8).

Лагранжиан взаимодействия  $\mathcal{L}_{\text{int}}$  описывает связь между  $\Phi$  и фермионными полями. В изучаемой нами «игрушечной» модели он имеет вид

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = \frac{\sqrt{2}}{m_X^2} \frac{\Phi}{f} (\bar{L}\gamma_\mu Q)(\bar{Q}^c \gamma_\mu Q) + \text{h. c.}, \quad (4.6)$$

где  $Q^c$  — зарядово-сопряженный кварковый спинор, а  $m_X$  и  $f$  — параметры размерности массы. Мы приписываем  $\Phi$  и  $Q$  барионные числа  $(-1)$  и  $1/3$  соответственно, так что взаимодействие (4.6) сохраняет барионное число. Взаимодействие такого типа может возникать, например, в  $SU(5)$ -теориях Великого объединения. Для простоты в нашей игрушечной модели мы не учитываем цвета кварков.

$Q$  и  $L$  могут быть любыми фермионами, не обязательно кварками и лептонами Стандартной модели. Это могут быть, например, новые тяжелые фермионы, обладающие аналогичными или теми же квантовыми числами, что и кварки и лептоны Стандартной модели. Они должны быть связаны с обычными кварками и лептонами таким образом, чтобы барионная асимметрия в  $Q$ -секторе могла быть преобразована в асимметрию наблюдаемых барионов.

Другие формы  $\mathcal{L}_{\text{int}}$  можно рассматривать как ведущие, например, к переходам  $3L \leftrightarrow Q$  или  $2Q \leftrightarrow 2\bar{Q}$ , которые запрещены для стандартных кварков. Однако для обычных кварков разрешен процесс  $3q \leftrightarrow 3\bar{q}$ . Заметим, что кинетика всех этих процессов является схожей. Будем обозначать через  $q$  обычные кварки или фермионное поле с теми же квантовыми числами.

Лагранжиан (4.5) инвариантен относительно следующих  $U(1)$ -преобразований с постоянным  $\alpha$ :

$$\Phi \rightarrow e^{i\alpha} \Phi, \quad Q \rightarrow e^{-i\alpha/3} Q, \quad L \rightarrow L. \quad (4.7)$$

В фазе ненарушенной симметрии такая инвариантность ведет к сохранению полного барионного числа поля  $\Phi$  и кварков. В реалистичной модели взаимодействие фермионов правой и левой киральности может различаться, но мы пренебрегаем этим возможным различием.

Предполагается, что глобальная  $U(1)$ -симметрия спонтанно нарушается на энергетическом масштабе  $f$  через потенциал вида

$$V(\Phi^* \Phi) = \lambda (\Phi^* \Phi - f^2/2)^2. \quad (4.8)$$

Этот потенциал имеет минимум, когда значение вакуумного ожидания  $\Phi$  равно  $\langle \Phi \rangle = f e^{i\phi_0/f} / \sqrt{2}$  с произвольной постоянной фазой  $\phi_0$ .

На масштабах, меньших  $f$ , можно пренебречь тяжелой радиальной модой  $\Phi$  с массой  $m_{\text{radial}} = \lambda^{1/2} f$ , так как, будучи очень массивной, она вымораживается, но это упрощение не является необходимым и несущественно для бариосинтеза. Оставшаяся легкая степень свободы — это переменное поле  $\phi$ , являющееся голдстоуновским бозоном спонтанно нарушенной  $U(1)$ . С точностью до постоянного фактора поле  $\phi$  представляет собой угол вращения вокруг дна потенциала «мексиканской шляпы», заданного уравнением (4.8). Соответственно, введем безразмерное угловое поле  $\theta \equiv \phi/f$ , тогда  $\Phi = \langle \Phi \rangle \exp(i\theta)$ .

Низкоэнергетический предел лагранжиана (4.5) в нарушенной фазе, который эффективно описывает динамику  $\theta$ -поля, имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1(\theta) = & \frac{f^2}{2} \partial_\mu \theta \partial^\mu \theta + \bar{Q}_1 (i\gamma^\mu \partial_\mu - m_Q) Q_1 + \bar{L} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m_L) L + \\ & + \left( \frac{e^{i\theta}}{m_X^2} (\bar{L} \gamma_\mu Q_1) (\bar{Q}_1^c \gamma_\mu Q_1) + \text{h. c.} \right) - U(\theta). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Здесь мы добавили потенциал  $U(\theta)$ , который может быть индуцирован явным нарушением симметрии и может приводить, в частности, к ненулевой массе  $\theta$ . Мы используем обозначение  $Q_1$  для кваркового поля, чтобы отличать его от поля  $Q_2$  с повернутой фазой, введенного ниже в (4.11). В реалистичной модели поля кварков должны быть (анти)симметризованы по отношению к цветовым индексам, опущенным здесь для простоты.

Если  $U(\theta) = 0$ , теория остается инвариантной по отношению к глобальным  $U(1)$ -преобразованиям (т. е. преобразованиям с постоянной фазой  $\alpha$ ):

$$Q \rightarrow e^{-i\alpha/3} Q, \quad L \rightarrow L, \quad \theta \rightarrow \theta + \alpha. \quad (4.10)$$



Фазовое преобразование кваркового поля с фазой  $\alpha = \theta(t, \mathbf{x})$ , зависящей от координат, вводит новое поле  $Q_1 = e^{-i\theta/3}Q_2$ . В терминах этого поля лагранжиан (4.9) дается выражением

$$\mathcal{L}_2(\theta) = \frac{f^2}{2} \partial_\mu \theta \partial^\mu \theta + \bar{Q}_2 (i\gamma^\mu \partial_\mu - m_Q) Q_2 + \bar{L} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m_L) L + \\ + \left( \frac{1}{m_X^2} (\bar{Q}_2 \gamma_\mu L) (\bar{Q}_2 \gamma_\mu Q_2^c) + \text{h. c.} \right) + (\partial_\mu \theta) J^\mu - U(\theta), \quad (4.11)$$

где кварковый барионный ток  $J_\mu = (1/3)\bar{Q}\gamma_\mu Q$ . Отметим, что форма этого тока одна и та же в терминах  $Q_1$  и  $Q_2$ .

Уравнение движения для кваркового поля  $Q_1$ , которое следует из лагранжиана (4.9), имеет вид

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m_Q) Q_1 + \frac{e^{-i\theta}}{m_X^2} [\gamma_\mu L (\bar{Q}_1 \gamma_\mu Q_1^c) + 2\gamma_\mu Q_1^c (\bar{Q}_1 \gamma_\mu L)] = 0. \quad (4.12)$$

Аналогично, уравнение движения для поля с повернутой фазой,  $Q_2$ , выведенное из лагранжиана (4.11), есть

$$\left( i\gamma^\mu \partial_\mu - m_Q + \frac{1}{3} \gamma^\mu \partial_\mu \theta \right) Q_2 + \\ + \frac{1}{m_X^2} [\gamma_\mu L (\bar{Q}_2 \gamma_\mu Q_2^c) + 2\gamma_\mu Q_2^c (\bar{Q}_2 \gamma_\mu L)] = 0. \quad (4.13)$$

Уравнения для  $\theta$ -поля, полученные из этих двух лагранжианов в плоском пространстве-времени, записываются, соответственно, как

$$f^2 (\partial_t^2 - \Delta) \theta + U'(\theta) + \left[ \frac{i e^{-i\theta}}{m_X^2} (\bar{Q}_1 \gamma_\mu L) (\bar{Q}_1 \gamma_\mu Q_1^c) + \text{h. c.} \right] = 0 \quad (4.14)$$

и

$$f^2 (\partial_t^2 - \Delta) \theta + U'(\theta) + \partial_\mu J_B^\mu = 0, \quad (4.15)$$

где  $U'(\theta) = dU/d\theta$ .

Используя любое из уравнений движения (4.12) или (4.13), можно проверить, что барионный ток не сохраняется. Действительно, его дивергенция равна

$$\partial_\mu J_B^\mu = \frac{i e^{-i\theta}}{m_X^2} (\bar{Q}_1 \gamma_\mu Q_1^c) (\bar{Q}_1 \gamma^\mu L) + \text{h. c.} \quad (4.16)$$

Дивергенция тока в терминах повернутого поля  $Q_2$  имеет ту же форму, но без фактора  $\exp(-i\theta)$ . Таким образом, уравнения движения для  $\theta$  в обоих случаях (4.14) и (4.15) совпадают, как и ожидалось.

Уравнение (4.15) выражает закон сохранения полного барионного тока в фазе ненарушенной симметрии. Когда симметрия нарушается, несохранение физических барионов (в нашем случае «кварков») становится существенным и может приводить к наблюдаемой космологической барионной асимметрии. Такое взаимодействие с несохранением барионного числа может иметь много разных форм. То, что представлено выше, описывает переход трех фермионов кваркового типа в (анти)лептон. Возможно преобразование двух или трех кварков в равное количество антикварков. Такое взаимодействие описывает нейтрон-антинейтронные осцилляции, активные поиски которых сейчас ведутся [201]. Это даже может быть переход «кварка» в три «лептона». В зависимости от типа взаимодействия связь между  $\theta$  и эффективным химическим потенциалом будет иметь разные формы, т. е. различные значения коэффициента пропорциональности  $c$ , указанного в этом разделе.

Если рассматривать реалистичные моды, относящиеся только к известным кваркам и лептонам, то представляют интерес процессы распада нуклонов на лептоны или на лептоны и некоторые другие частицы с нулевыми полными лептонным и барионным числами, или процессы перехода трех кварков в три антикварка. В первую очередь, это распад протона или нейтрона. Эти процессы активно искали, и существующее ограничение на время жизни протона составляет  $\tau_p \geq 10^{33}$  лет [202]. Это означает, что масса  $m_X$  должна быть выше  $10^{14}$  ГэВ, что делает такие процессы не очень перспективными для бариогенезиса. Распад нейтрона с несохранением барионного числа (см. [203]), особенно в невидимые моды, например в  $3\nu$ , значительно слабее ограничен (примерно на 6 порядков). Такие процессы являются более подходящими для бариосинтеза. Кварк-антикварковые переходы, приводящие к нейтрон-антинейтронным осцилляциям, могут также представлять интерес для бариогенезиса [201].

В пространственно-однородном случае, когда  $\partial_\mu J_B^\mu = \dot{n}_B$  и  $\theta = \theta(t)$ , если  $U(\theta) = 0$ , (4.15) можно легко проинтегрировать, получая

$$f^2 \left[ \dot{\theta}(t) - \dot{\theta}(t_{\text{in}}) \right] = -n_B(t) + n_B(t_{\text{in}}). \quad (4.17)$$

Обычно предполагается, что начальная барионная асимметрия равна нулю,  $n(t_{\text{in}}) = 0$ .

Эволюция  $n_B(t)$  определяется кинетическим уравнением, обсуждаемым в п. 4.1.3. Это уравнение позволяет выразить  $n_B$  через  $\theta(t)$  и получить замкнутую систему, в общем случае, интегродифференциальных уравнений. В тепловом равновесии соотношение между  $\theta$  и  $n_B$  может стать алгебраическим, но это верно только в случае, когда интервал интегрирования по времени является достаточно большим и если  $\theta$  есть постоянная или медленно меняющаяся функция времени.

На космологическом фоне с метрикой Фрийдмана–Робертсона–Уокера уравнение движения для  $\theta$  (4.15) имеет вид

$$f^2(\partial_t + 3H)\dot{\theta} - a^{-2}(t)\Delta\theta + U'(\theta) = -(\partial_t + 3H)n_B, \quad (4.18)$$

где  $a(t)$  — космологический масштабный фактор и  $H = \dot{a}/a$  — параметр Хаббла. Для однородного  $\theta$ -поля,  $\theta = \theta(t)$ , это уравнение сводится к виду

$$f^2(\partial_t + 3H)\dot{\theta} + U'(\theta) = -(\partial_t + 3H)n_B. \quad (4.19)$$

Мы не включили эффекты кривизны в уравнения Дирака, поскольку они несущественны для дальнейшего, но мы учитываем влияние космологического расширения на дивергенцию тока, используя ковариантную производную в FRW-метрике:  $D_\mu J^\mu = \dot{n}_B + 3Hn_B$ .

**4.1.2. Гамильтонианы и лагранжианы.** Несмотря на то, что, как будет показано в пп. 4.1.3 и 4.1.6, барионная асимметрия, сгенерированная в рамках спонтанного бариосинтеза, пропорциональна  $\dot{\theta}$  во многих интересных случаях, как справедливо предсказывалось в работах [155, 156], идентификация  $\dot{\theta}$  с барионным химическим потенциалом,  $\dot{\theta} = \mu_B$ , является спорной.

В каноническом подходе гамильтонова плотность  $\mathcal{H}$  выводится из лагранжевой плотности  $\mathcal{L}$  следующим образом. Предполагается, что плотность функции Лагранжа зависит от некоторых переменных поля  $\phi_a$  и их производных  $\partial_\mu\phi_a$ . Сначала нужно определить канонический импульс, сопряженный с «координатой»  $\phi_a$ :

$$\pi_a = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}_a}. \quad (4.20)$$

Плотность функции Гамильтона выражается через канонические импульсы и координаты как

$$\mathcal{H} = \sum_a \pi_a \dot{\phi}_a - \mathcal{L}, \quad (4.21)$$

где производные по времени  $\dot{\phi}_a$  должны быть записаны в терминах канонических импульсов  $\pi_a$ .

Гамильтоновы уравнения движения

$$\dot{\phi} = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\pi} \quad \text{и} \quad \dot{\pi} = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\phi} \quad (4.22)$$

обычно эквивалентны уравнениям Лагранжа, полученным по принципу наименьшего действия из лагранжиана.

Например, для действительного скалярного поля с лагранжианом

$$\mathcal{L}(\chi) = \frac{(\partial\chi)^2}{2} - \frac{m_\chi^2\chi^2}{2} \quad (4.23)$$

канонический импульс есть  $\pi_\chi = \dot{\chi}$  и плотность функции Гамильтона равна

$$\mathcal{H}(\chi) = \frac{1}{2} [\pi_\chi^2 + (\nabla\chi)^2 + m_\chi^2\chi^2], \quad (4.24)$$

в то время как для комплексного скалярного поля с

$$\mathcal{L}(\phi) = |\partial\phi|^2 - m_\phi^2|\phi|^2 \quad (4.25)$$

канонические импульсы суть  $\pi_\phi = \dot{\phi}^*$  и  $\pi_{\phi^*} = \dot{\phi}$ , а гамильтонова плотность

$$\mathcal{H}(\phi) = \pi_\phi\pi_{\phi^*} + |\nabla\phi|^2 + m_\phi^2|\phi|^2. \quad (4.26)$$

Соответствующие уравнения Гамильтона приводят, как и ожидается, к обычным уравнениям Клейна–Гордона для  $\phi$  или  $\chi$ .

Для дираковского поля с

$$\mathcal{L}(\psi) = \bar{\psi}(i\partial\!\!\!/ - m_\psi)\psi \quad (4.27)$$

канонические импульсы равны  $\pi_\psi = i\psi^\dagger$  и  $\pi_{\psi^\dagger} = 0$ , так что мы приходим к хорошо известному выражению

$$\mathcal{H}(\psi) = \psi^\dagger(i\gamma_4\gamma_k\partial_k + \gamma_4m)\psi. \quad (4.28)$$

Прделаем то же самое с симметричным лагранжианом, который отличается от канонического на полную дивергенцию:

$$\mathcal{L}_{\text{sym}}(\psi) = \frac{\bar{\psi}(i\partial\!\!\!/ - 2m_\psi)\psi - i(\partial_\mu\bar{\psi})\gamma_\mu\psi}{2}. \quad (4.29)$$

Соответствующие канонические импульсы будут:  $\pi_\psi = i\psi^\dagger/2$  и  $\pi_{\psi^\dagger} = -i\psi/2$ , а гамильтонова плотность

$$\mathcal{H}_{\text{sym}}(\psi) = m_\psi\psi^\dagger\gamma_4\psi + \frac{i}{2}(\psi^\dagger\gamma_4\gamma_k\partial_k\psi - \partial_k\psi^\dagger\gamma_4\gamma_k\psi) \quad (4.30)$$

отличается от обычного выражения (4.28) на пространственную дивергенцию  $(i/2)\partial_k(\psi^\dagger\gamma_4\gamma_k\psi)$ . Полный гамильтониан, определенный как

$$H = \int d^3x \mathcal{H}, \quad (4.31)$$

одинаков в обоих случаях, (4.28) и (4.30), если поля исчезают на пространственной бесконечности. Ниже рассматривается поле  $\theta$ , зависящее только от времени, но можно предположить, что оно слабо зависит от пространственных координат и обращается в нуль на бесконечности. Локальная динамика в этом случае остается ненарушенной.

Рассмотрим теперь модель со связью

$$\mathcal{L}_{\text{SB}}(\Theta) = (\partial_\mu \Theta) J_B^\mu, \quad (4.32)$$

где  $\Theta$  есть некоторое скалярное поле, а  $J_B^\mu$  — вектор барионного тока. Он имеет вид

$$J_B^\mu = B \bar{\psi} \gamma^\mu \psi, \quad (4.33)$$

где  $\psi$  — некоторый фермионный барион (например, кварк) с барионным числом  $B$ . Такое взаимодействие постулируется в сценариях спонтанного бариосинтеза [146, 155, 156, 159, 161, 197] или в гравитационном бариогенезисе [157, 204, 205]. В первом случае  $\Theta = \theta$  является (псевдо)голдстоуновским полем, в то время как во втором  $\Theta = R/m_R^2$ , где  $R$  — скаляр кривизны, а  $m_R$  — постоянный параметр размерности массы.

Далее мы ограничимся рассмотрением голдстоуновского поля  $\theta$  и будем различать следующие две возможности:

1.  $\theta$  является динамическим полем со свободным лагранжианом в форме (4.23), где  $\chi = f\theta$ . Это в точности та ситуация, которая реализуется в случае спонтанного нарушения симметрии.

2.  $\theta$  есть внешнее «фиксированное» поле. Термин «фиксированное» используется в том смысле, что зависимость  $\theta$  от координат фиксируется некоторой динамикой, которая не входит в рассматриваемый лагранжиан. Это случай, который изучается как в спонтанном, так и в гравитационном бариосинтезе. Он будет рассмотрен ниже.

В каноническом случае 1 плотность гамильтониана, вычисленная в соответствии с указанными выше правилами, равна

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_1(\theta) = & \frac{f^2}{2}(\dot{\theta}^2 + (\nabla\theta)^2) + Q_1^\dagger \gamma_4 (i\gamma_k \partial_k + m_Q) Q_1 + L^\dagger \gamma_4 (i\gamma_k \partial_k + m_L) L - \\ & - \left( \frac{e^{-i\theta}}{m_X^2} (Q_1^\dagger \gamma_4 \gamma_\mu L) (Q_1^\dagger \gamma_4 \gamma_\mu Q_1^c) + \text{h. c.} \right) + U(\theta), \end{aligned} \quad (4.34)$$

где  $\theta$ -сопряженный канонический импульс  $\pi_{1\theta} = f^2 \dot{\theta}$ .

Аналогично для лагранжиана (4.11) плотность гамильтониана равна

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_2(\theta) = & \frac{f^2}{2}(\dot{\theta}^2 + (\nabla\theta)^2) + Q_2^\dagger \gamma_4 (i\gamma_k \partial_k + m_Q) Q_2 + L^\dagger \gamma_4 (i\gamma_k \partial_k + m_L) L - \\ & - \left( \frac{1}{m_X^2} (Q_2^\dagger \gamma_4 \gamma_\mu L) (Q_2^\dagger \gamma_4 \gamma_\mu Q_2^c) + \text{h. c.} \right) + U(\theta) - \frac{1}{3}(\partial_k \theta)(Q_2^\dagger \gamma_4 \gamma_k Q_2), \end{aligned} \quad (4.35)$$

где канонический импульс  $\pi_{2\theta} = f^2 \dot{\theta} + n_B$ . Соответственно  $\dot{\theta}$  должно выражаться через канонический импульс  $\pi_{2\theta}$  как

$$\dot{\theta} = \frac{\pi_{2\theta} - n_B}{f^2}. \quad (4.36)$$

Учитывая, что  $Q_1 = e^{-i\theta/3} Q_2$ , можно проверить, что гамильтонианы (4.34) и (4.35) переходят один в другой при этом преобразовании. Таким образом, мы видим, что вычисление гамильтонианов в соответствии с указанными правилами является самосогласованным.

Отметим, что оба гамильтониана в том виде, в котором они представлены уравнениями (4.34) и (4.35), не содержат «химического потенциала»  $\dot{\theta}$  в форме  $\dot{\theta} n_B$  и в этом смысле противоречат допущению (4.2). Однако дело является несколько более сложным. Записанная в терминах канонического импульса соответствующая часть гамильтониана (4.35) (первое слагаемое) имеет вид  $\delta\mathcal{H}_2(\theta) = (\pi_{2\theta} - n_B)^2 / (2f^2)$ . В пространственно-независимом случае и в отсутствие  $U(\theta)$  уравнения движения Гамильтона для  $\mathcal{H}_2$  имеют форму  $\dot{\pi}_{2\theta} = 0$ , так что их решение  $\pi_{2\theta} = \text{const}$ . Очевидно, это уравнение эквивалентно уравнению движения Лагранжа для  $\theta$ -поля (4.15), если пренебречь в нем космологическим расширением.

Наличие слагаемого  $(-\pi_{2\theta} n_B / f^2)$  в гамильтониане (4.35) подразумевает, что  $\pi_{2\theta} / f^2$  может трактоваться как барионный химический потенциал  $\mu_B$ . Так как обычно считается, что начальное  $n_B(t_{\text{in}}) = 0$ , то  $\pi_{2\theta} = f^2 \dot{\theta}(t_{\text{in}})$  и, таким образом,  $\mu_B = \dot{\theta}(t_{\text{in}})$ , а не  $\mu_B = \dot{\theta}(t)$ , взятое при более позднем времени  $t$ , когда имеет место тепловое равновесие.

Предписание (4.2) может быть в принципе справедливым, если  $\theta$  является внешним «фиксированным» полем с динамикой, определяемой «вручную», как было отмечено выше. В этом случае выражение (4.2) может быть формально верным, но, как мы покажем здесь, такая теория, возможно, обладает некоторыми внутренними несоответствиями.

Исследуем рассмотренные ранее теории с лагранжианами (4.9) и (4.11), в которых опущены кинетические и потенциальные члены для  $\theta$ . У нас есть два варианта построения гамильтонианов: либо следовать обычной процедуре, описанной выше, либо предположить справедливость рецепта  $\mathcal{H}_{\text{int}} = -\mathcal{L}_{\text{int}}$  для частей лагранжианов с взаимодействием. Для лагранжиана (4.9) не возникает неоднозначностей, так как его часть взаимодействия не содержит производных. Это не так для лагранжиана (4.11), поскольку он содержит слагаемое  $(\partial_\mu \theta) J_B^\mu$ , для которого предположение  $\mathcal{H}_{\text{int}} = -\mathcal{L}_{\text{int}}$  не является верным. Как было показано выше, стандартный подход приводит к гамильтониану (4.35), не содержащему слагаемого  $\dot{\theta}(t) n_B$ . Чтобы прийти к механизму спонтанного бариогенезиса, описанному в литературе, нужно постулировать  $\mathcal{H}_{\text{int}} = -\mathcal{L}_{\text{int}}$  независимо от наличия производных поля. Если этот постулат верен, лагранжиан (4.11) приведет к гамильтониану, содержащему нужный член  $\dot{\theta} n_B$ . С другой стороны, если мы применим стандартную процедуру вычисления гамильтониана из лагранжиана без кинетического члена, найдем  $\pi_\theta = n_B$  и получим поразительный результат:

$$\mathcal{H}(\theta) = \pi_\theta \dot{\theta} - \mathcal{L} = 0, \quad (4.37)$$

который наглядно демонстрирует несогласованность теории без кинетического члена.

Дополнительные проблемы возникают, если рассмотреть теорию с лагранжианом

$$\mathcal{L}_{\text{SB}}^{(1)} = -\theta \partial_\mu J_B^\mu, \quad (4.38)$$

который отличается от первоначального  $\mathcal{L}_{\text{SB}}$  (4.1) на полную дивергенцию и, таким образом, приводит к тем же самым лагранжевым уравнениям движения, так что эти лагранжианы физически эквивалентны. Однако это может быть не так для плотностей гамильтонианов. Лагранжиан (4.38) не содержит производную по времени от  $\theta$ -поля, но содержит временные производные динамических фермионных полей. При этом гамильтониан, полученный из  $\mathcal{L}_{\text{SB}}^{(1)}$  по указанным выше стандартным правилам, примененным к фермионам, имеет вид

$$\mathcal{H}_{\text{SB}}^{(1)} = (\partial_k \theta) J_k - \partial_k (\theta J_k) \rightarrow (\partial_k \theta) J_k, \quad (4.39)$$

где на последнем шаге мы опустили пространственную дивергенцию. Очевидно, гамильтониан  $\mathcal{H}_{\text{SB}}^{(1)}$  отличается от  $\mathcal{H}_{\text{SB}}$  (4.2), хотя они получены из эквивалентных лагранжианов. Это означает, что гамильтоновы уравнения движения, соответствующие  $\mathcal{H}_{\text{SB}}$  и  $\mathcal{H}_{\text{SB}}^{(1)}$ , будут различны. Можно проверить, что уравнения, полученные из гамильтониана (4.39), не согласуются с уравнениями, выведенными из лагранжиана. Однако эта проблема не является присущей спонтанному бариогенезису, а относится к определению плотности гамильтониана фермионных полей при наличии вырождения между координатой  $\psi$  и каноническим импульсом  $\psi^\dagger$ . Эти вопросы требуют отдельного рассмотрения, в то время как здесь мы концентрируемся на кинетике стандартного сценария спонтанного бариогенезиса, который во многих случаях приводит к обычным результатам, представленным в литературе. Однако это не всегда так.

**4.1.3. Кинетическое уравнение с амплитудой, не зависящей от времени.** Изучение кинетики фермионов на космологическом фоне сильно упрощается, если частицы находятся в равновесии по отношению к упругому рассеянию, к их возможной аннигиляции, например, в фотоны, и по отношению к другим взаимодействиям с сохранением барионного числа. Равновесие относительно упругого рассеяния подразумевает следующую форму функций распределения по фазовому пространству:

$$f_{\text{eq}} = \left[ 1 + \exp \left( \frac{E}{T} - \xi \right) \right]^{-1}, \quad (4.40)$$

где безразмерный химический потенциал  $\xi = \mu/T$  имеет одинаковую величину, но разные знаки для частиц и античастиц. Плотность барионного числа

для малых  $\xi$  обычно дается выражением

$$n_B = g_S B_Q \xi_B T^3 / 6 \quad (4.41)$$

(ср. с (4.3)). Это уравнение, связывающее плотность барионного числа с химическим потенциалом, справедливо только при нормальном соотношении между энергией и 3-импульсом,  $E = \sqrt{p^2 + m^2}$ , при равных массах частиц и античастиц.

Нулевая барионная асимметрия подразумевает  $\xi_B = 0$ , как это обычно бывает. Если барионное число кварков сохраняется,  $n_B$  остается постоянным в сопутствующем объеме, что означает, в свою очередь, что  $\xi = \text{const}$  для безмассовых частиц. Если начально  $n_B = 0$ , то  $\xi_B$  остается тождественно равным нулю. Если барионное число не сохраняется, то, как будет видно ниже из кинетического уравнения, равновесие по отношению к процессам с несохраняющимся барионным числом приводит к  $\xi_B = c \dot{\theta} / T$ , как предусматривается спонтанным бариогенезисом. Постоянная  $c$  зависит от конкретного типа реакции. Полное тепловое равновесие в стандартной теории требует  $n_B \rightarrow 0$ , но отклонение от теплового равновесия взаимодействия с несохранением барионного числа ведет к генерации ненулевого  $\xi_B$  и, соответственно, к ненулевому  $n_B$ .

Ситуация меняется, если кварки и антикварки подчиняются уравнению движения (4.13), для которого справедливо следующее дисперсионное соотношение:

$$E = \sqrt{p^2 + m^2} \mp \dot{\theta} / 3, \quad (4.42)$$

где знаки  $\mp$  относятся к частицам или античастицам соответственно. Таким образом, энергии кварков и антикварков с одинаковым 3-импульсом различны. Это похоже на разницу масс, которая может быть вызвана нарушением СРТ. Следует отметить, что приведенное выше дисперсионное соотношение выведено в предположении постоянного или медленно меняющегося  $\dot{\theta}$ . В противном случае полученное с помощью преобразования Фурье уравнение Дирака нельзя свести к алгебраическому, и энергия частицы не является хорошо определенной.

Плотность барионного числа, соответствующая дисперсионному соотношению (4.42), дается выражением

$$n_B \equiv g_S B_Q \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} [f(p) - \bar{f}(p)] = \frac{g_S B_Q}{6} \left( \xi_B + \frac{\dot{\theta}}{3T} \right) T^3, \quad (4.43)$$

где  $\bar{f}$  — функция распределения античастиц. Если барионное число сохраняется и равно нулю изначально, условие  $\xi_B + \dot{\theta} / (3T) = 0$  всегда выполняется.



Если  $B$  не сохраняется, то равновесие по отношению к процессам с несохранением барионного числа требует  $\xi_B = 0$ , как следует из кинетического уравнения, приведенного ниже. Очевидно,  $\xi_B \neq \dot{\theta}$ , но, несмотря на это, барионная асимметрия пропорциональна  $\dot{\theta}$ , как следует из (4.43).

Уравнение движения для  $\theta$ -поля на космологическом фоне (4.19) с  $U(\theta) = 0$  легко интегрируется, что приводит к связи барионной асимметрии  $n_B$  с  $\dot{\theta}$ . В случае, когда выполняется соотношение (4.41), получаем

$$f^2 \left[ \frac{\dot{\theta}(t)}{T^3(t)} - \frac{\dot{\theta}(t_{\text{in}})}{T_{\text{in}}^3} \right] = -\frac{g_S B_Q}{6} [\xi_B(t) - \xi_B(t_{\text{in}})], \quad (4.44)$$

в предположении, что температура падает по закону  $\dot{T} = -HT$ .

Поскольку начальное значение барионной асимметрии обычно берется равным нулю, то, согласно уравнению (4.41), нужно положить  $\xi_B(t_{\text{in}}) = 0$ . Напомним, что (4.41) справедливо в случае нормального дисперсионного соотношения  $E = p$  (в безмассовом случае) как для кварков, так и для антикварков.

В теории с лагранжианом (4.11) и уравнением Дирака (4.13) дисперсионное соотношение меняется на (4.42), и связь между  $n_B$  и  $\xi_B$  дается (4.43). Теперь уравнение (4.19) интегрируется как

$$f^2 \left[ \frac{\dot{\theta}(t)}{T^3(t)} - \frac{\dot{\theta}(t_{\text{in}})}{T_{\text{in}}^3} \right] = -\frac{g_S B_Q}{6} \left[ \xi_B(t) - \xi_B(t_{\text{in}}) + \frac{\dot{\theta}(t)}{3T} - \frac{\dot{\theta}(t_{\text{in}})}{3T_{\text{in}}} \right]. \quad (4.45)$$

Если изначально  $n_B = 0$ , то  $\xi_B(t_{\text{in}}) = -\dot{\theta}_{\text{in}}/(3T_{\text{in}})$ .

В псевдоголдстоуновском случае, когда  $U(\theta) \neq 0$ , уравнения движения (4.15) или (4.19) не могут быть так легко проинтегрированы, но в тепловом равновесии система уравнений, содержащая  $\theta(t)$  и  $\xi_B(t)$ , может быть сведена к обыкновенным дифференциальным уравнениям, которые легко решаются численно. Вне равновесия нужно решать значительно более сложную систему обыкновенных дифференциальных уравнений движения для  $\theta(t)$  и интегродифференциальное кинетическое уравнение.

Вероятность любой реакции между частицами в квантовой теории поля определяется амплитудой перехода из начального состояния  $|\text{in}\rangle$  в конечное состояние  $|\text{fin}\rangle$ . В низшем порядке теории возмущений амплитуда перехода дается интегралом от матричного элемента плотности лагранжиана между этими состояниями, проинтегрированного по 4-мерному пространству  $d^4x$ . Обычно квантовые полевые операторы раскладываются на операторы рождения-уничтожения с плосковолновыми коэффициентами как

$$\psi(t, \mathbf{x}) = \int \frac{d^3q}{2E(2\pi)^3} [a(\mathbf{q}) e^{-iqx} + b^\dagger(\mathbf{q}) e^{iqx}], \quad (4.46)$$

где  $a$ ,  $b$  и сопряженные к ним являются операторами уничтожения (рождения) спинорных частиц и античастиц, а  $qx = Et - \mathbf{q}\mathbf{x}$ .

Если амплитуда процесса является не зависящей от времени, то интегрирование по  $dt d^3x$  произведения экспонент с  $iqx$  в бесконечных пределах приводит к сохранению энергии импульса:

$$\int dt d^3x e^{-i(E_{\text{in}} - E_{\text{fin}})t + i(\mathbf{P}_{\text{in}} - \mathbf{P}_{\text{fin}})\mathbf{x}} = (2\pi)^4 \delta(E_{\text{in}} - E_{\text{fin}}) \delta((\mathbf{P}_{\text{in}} - \mathbf{P}_{\text{fin}})), \quad (4.47)$$

где  $E_{\text{in}}$ ,  $E_{\text{fin}}$ ,  $\mathbf{P}_{\text{in}}$ , и  $\mathbf{P}_{\text{fin}}$  — полные энергии и 3-импульсы начального и конечного состояний соответственно. Квадрат амплитуды содержит дельта-функции от нуля, которые интерпретируются как полное время длительности процесса  $t_{\text{max}}$  и как полный пространственный объем  $V$ . Вероятность процесса дается интегралом столкновений, нормированным на единицу времени и объема, поэтому ее нужно разделить на  $V$  и  $t_{\text{max}}$ .

Эволюция во времени функции распределения частицы  $i$ -го типа,  $f_i(t, p)$ , в произвольном процессе  $i + Y \leftrightarrow Z$  на космологическом FRW-фоне дается уравнением

$$\frac{df_i}{dt} = (\partial_t - H p_i \partial_{p_i}) f_i = I_i^{\text{coll}} \quad (4.48)$$

с интегралом столкновений

$$I_i^{\text{coll}} = \frac{(2\pi)^4}{2E_i} \sum_{Z,Y} \int d\nu_Z d\nu_Y \delta^4(p_i + p_Y - p_Z) \times \\ \times \left[ |A(Z \rightarrow i + Y)|^2 \prod_Z f \prod_{i+Y} (1 \pm f) - |A(i + Y \rightarrow Z)|^2 f_i \prod_Y f \prod_Z (1 \pm f) \right], \quad (4.49)$$

где  $Y$  и  $Z$  — произвольные, обычно многочастичные, состояния.  $A(a \rightarrow b)$  является амплитудой перехода из состояния  $a$  в состояние  $b$ ,  $\left(\prod_Y f\right)$  есть произведение функций распределения частиц в фазовом пространстве, образующих состояние  $Y$ , и

$$d\nu_Y = \prod_Y \overline{dp} \equiv \prod_Y \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E}. \quad (4.50)$$

Знаки  $+$  или  $-$  в  $\prod(1 \pm f)$  выбираются для бозонов и фермионов соответственно. Мы пренебрегаем эффектами кривизны пространства-времени в интеграле столкновений, что обычно является хорошим приближением.

Нас интересует эволюция плотности барионного числа, т.е. временной компоненты барионного тока  $J^\mu$ :  $n_B \equiv J^t$ . Вследствие кварк-лептонных переходов ток не сохраняется и его дивергенция дается уравнением (4.16). Аналогичное выражение будет справедливо и в терминах поля  $Q_2$ , но без фактора  $\exp(-i\theta)$ . Сначала рассмотрим последний случай, когда взаимодействие описывается лагранжианом (4.11), содержащим произведение операторов трех «кварков» и одного «лептона», и приведем в качестве примера процесс  $q_1 + q_2 \leftrightarrow \bar{q} + l$ .

Поскольку взаимодействие в этом представлении не зависит от времени, энергия сохраняется и интеграл столкновений имеет обычный вид с сохраняющимся 4-импульсом. Предполагается, что кварки находятся в кинетическом равновесии, но не в равновесии по отношению к взаимодействиям без сохранения барионного числа, так что их функции распределения имеют вид

$$f_q = \exp\left(-\frac{E}{T} + \xi_B\right) \quad \text{и} \quad f_{\bar{q}} = \exp\left(-\frac{E}{T} - \xi_B\right). \quad (4.51)$$

Здесь и далее используется бoльцмановская статистика. Согласно работе [206] поправки Ферми обычно находятся на уровне 10%. Так как дисперсионное соотношение для кварков и антикварков (4.42) зависит от  $\dot{\theta}$ , барионная асимметрия в этом случае дается уравнением (4.43) и кинетическое уравнение принимает вид

$$\frac{g_S B_Q}{6} \frac{d}{dt} \left( \xi_B + \frac{\dot{\theta}}{3T} \right) = -c_1 \Gamma \xi_B, \quad (4.52)$$

где  $c_1$  — численный фактор порядка единицы, а  $\Gamma$  — скорость реакций без сохранения барионов. Если амплитуда такой реакции имеет вид, определяемый лагранжианом (4.11), то  $\Gamma \sim T^5/m_X^4$ .

Для постоянной или медленно меняющейся температуры равновесное решение этого уравнения  $\xi_B = 0$  и плотность барионного числа (4.43) пропорциональна  $\dot{\theta}$ ,  $n_B = (g_S B_Q/18) \dot{\theta} T^2$ , с  $\dot{\theta}$ , эволюционирующим согласно (4.45), как

$$\dot{\theta} = \frac{f^2}{f^2 + g_S B_Q T^2/18} \left( \frac{T}{T_{\text{in}}} \right)^3 \dot{\theta}(t_{\text{in}}). \quad (4.53)$$

Видно, что равновесное значение  $n_B$  падает с понижением температуры как  $T^5$ . Однако при малых температурах процессы с несохранением барионного числа выключаются и  $n_B$  стремится к постоянной величине в сопутствующем объеме.

Проверим теперь, что будет происходить, если зависимость от  $\theta$  переместится из дисперсионного соотношения кварков в член взаимодействия

без сохранения  $B$  (4.14). Интеграл столкновений (4.133) содержит дельта-функции, означающие сохранение энергии и импульса, только при отсутствии внешнего поля, зависящего от координат. В нашем случае, когда кварки «живут» в  $\theta(t)$ -поле, интеграл столкновений нужно модифицировать следующим образом. Под интегралом (4.47) теперь имеется дополнительный фактор, а именно,  $\exp[\pm i\theta(t)]$ . В общем случае такой интеграл нельзя вычислить аналитически, но если можно аппроксимировать  $\theta(t)$  как  $\theta(t) \approx \dot{\theta}t$  с постоянным или медленно меняющимся  $\dot{\theta}$ , то интеграл легко берется. Для процесса перехода двух кварков в антикварк и лептон,  $q_1 + q_2 \leftrightarrow \bar{q} + l$ , условие баланса энергии, налагаемое дельта-функцией, примет вид  $\delta(E_{q_1} + E_{q_2} - E_{\bar{q}} - E_l - \dot{\theta})$ . Другими словами, энергия не сохраняется из-за действия внешнего поля  $\theta(t)$ . Приближение линейной эволюции  $\theta$  со временем может быть справедливым, если реакции являются быстрыми по сравнению со скоростью изменения  $\theta$ .

Попутно заметим, что при ненулевом  $\theta(t)$  несохранение тока (4.16) в принципе может вызывать бариогенезис, поскольку из-за сложности коэффициентов нарушается не только сохранение барионного числа, но и СР. Однако в этой частной модели барионная асимметрия не будет создана. Эта модель весьма похожа на модель генерации барионной асимметрии в распадах тяжелых частиц таких, как, например, бариосинтез теорий Великого объединения. Однако, как утверждается, например, в работах [26,28] для генерации асимметрии требуется не менее трех разных каналов барionesохраняющих реакций. Таким образом, для активации этого механизма в модель нужно добавить некоторые дополнительные поля.

Вернувшись к нашему случаю, можно увидеть, что интеграл столкновений берется по 3-импульсу рассматриваемой частицы (т. е. частицы  $i$  в уравнении (4.133)). Для реакции  $q_1 + q_2 \rightarrow l + \bar{q}$  получим

$$\begin{aligned} \dot{n}_B + 3Hn_B \sim \int d\tau_{l\bar{q}} d\tau_{q_1q_2} |A|^2 \delta(E_{q_1} + E_{q_2} - E_l - E_{\bar{q}} - \dot{\theta}) \times \\ \times \delta(\mathbf{P}_{\text{in}} - \mathbf{P}_{\text{fin}}) e^{-E_{\text{in}}/T} \left( e^{\xi_L - \xi_B + \dot{\theta}/T} - e^{2\xi_B} \right), \quad (4.54) \end{aligned}$$

где  $d\tau_{l\bar{q}} = d^3p_l d^3p_{\bar{q}}/[4E_l E_{\bar{q}}(2\pi)^6]$ . Мы считаем, что все участвующие частицы находятся в кинетическом равновесии, т. е. их функции распределения имеют форму (4.51). В выражении (4.54)  $\xi_B$  и  $\xi_L$  обозначают барионный и лептонный химический потенциалы соответственно. Предположение кинетического равновесия хорошо оправдано, поскольку оно обеспечивается эффективным упругим рассеянием. Другое неявное предположение — обычное равновесное соотношение между химическими потенциалами частиц и античастиц,  $\bar{\mu} = -\mu$ , налагаемое, например, быстрой аннигиляцией кварк-антикварковых или лептон-антилептонных пар в два и три фотона. В любом случае предположение кинетического равновесия является одним из краеугольных камней спонтанного бариогенезиса.

Сохранение  $(B+L)$  подразумевает следующее соотношение:  $\xi_L = -\xi_B/3$ . Имея его в виду, находим

$$\dot{n}_B + 3Hn_B \approx - \left(1 - e^{\dot{\theta}/T - 3\xi_B + \xi_L}\right) I \approx \left(\frac{\dot{\theta}}{T} - \frac{10}{3} \xi_B\right) I, \quad (4.55)$$

где предполагается, что  $\xi_B$  и  $\dot{\theta}/T$  малы. В релятивистской плазме с температурой  $T$  фактор  $I$ , возникающий из интеграла столкновений, оценивается как  $I = T^8/m^4$ , где  $m$  — числовая постоянная с размерностью массы. Она отличается от  $m_X$ , введенной в (4.9), на числовой коэффициент.

Для большого фактора  $I$  равновесное решение будет

$$\xi_B = \frac{3}{10} \frac{\dot{\theta}}{T}, \quad (4.56)$$

так что  $\dot{\theta}$  с точностью до числового фактора является барионным химическим потенциалом, как это обычно предполагается в сценарии спонтанного бариосинтеза. Значение коэффициента  $c = 3/10$  в (4.56) может отличаться для других типов реакций с несохранением барионного числа, например, для реакции  $3q \leftrightarrow 3\bar{q}$  можно найти, что  $c = 1/6$ . Напомним, что для дисперсионного соотношения (4.42) барионный химический потенциал не пропорционален  $\dot{\theta}(t)$ , но равен нулю (см. (4.52) и комментарии ниже).

**4.1.4. Неравновесная генерация барионной асимметрии в чисто гольдстоуновском случае.** Как было показано, равновесное значение барионной асимметрии в сопутствующем объеме падает как  $T^2$ . Поэтому для эффективной генерации асимметрии реакции с несохранением барионного числа должны выходить из равновесия при достаточно высоких температурах. Ниже мы оценим асимптотическое значение барионной асимметрии.

Рассмотрим сначала случай, когда космологическое расширение является очень медленным, а температуру можно считать постоянной или, лучше сказать, адиабатически уменьшающейся. Соответствующие уравнения в этом пределе могут быть решены аналитически и позволяют лучше понять проблему. При постоянном  $T$  равновесие будет в итоге достигнуто, если время достаточно велико и барионный химический потенциал асимптотически действительно пропорционален  $\dot{\theta}(t)$ . Однако следует помнить, что это верно в случае, когда  $\theta(t)$  входит в член взаимодействия, а не в дисперсионное соотношение кварков. Аналогичная ситуация реализуется в космологии с уменьшением температуры космической плазмы, но интересно, что величина полученной барионной асимметрии является немонотонной функцией интенсивности несохранения барионного числа. При очень сильном и очень слабом взаимодействии асимметрия стремится к нулю, и наилучшие условия для бариогенезиса реализуются в промежуточном случае.

Используя выражения (4.41), (4.44) и (4.55), получаем уравнение

$$\dot{\xi}_B = \gamma \left[ \frac{\dot{\theta}_{\text{in}}}{T} - \xi_B \left( \frac{10}{3} + \frac{C_B T^2}{f^2} \right) \right], \quad (4.57)$$

которое имеет решение

$$\xi_B(t) = \frac{\dot{\theta}_{\text{in}}}{T\kappa} \left[ 1 - e^{-\kappa\gamma(t-t_{\text{in}})} \right], \quad (4.58)$$

где  $C_B = g_S B_Q / 18$ ,  $\gamma = T^5 / (C_B m^4)$ ,  $\kappa = 10/3 + C_B T^2 / f^2$ . Здесь  $t_{\text{in}}$  — начальное значение времени, при котором  $\xi_B(t_{\text{in}}) = 0$ , и  $\dot{\theta}_{\text{in}} = \dot{\theta}(t_{\text{in}})$ .

Производная по времени от голдстоуновского поля эволюционирует как

$$\dot{\theta}(t) = \dot{\theta}_{\text{in}} \left[ 1 - \frac{C_B T^2}{f^2 \kappa} \left( 1 - e^{-\kappa\gamma(t-t_{\text{in}})} \right) \right]. \quad (4.59)$$

При асимптотически больших временах  $\dot{\theta}(t)$  падает по отношению к его начальному значению, а барионный химический потенциал экспоненциально стремится к  $\xi_B \rightarrow \dot{\theta}_{\text{in}} / (\kappa T)$ , как и ожидается в сценарии СБГ.

Как следует из уравнения (4.59),  $\dot{\theta}$  стремится к постоянному значению при больших  $t$ , однако на временах, близких к начальному, вторая производная по времени  $\ddot{\theta}$  может быть непренебрежимой:

$$\ddot{\theta} = -\frac{\dot{\theta}_{\text{in}} C_B T^2 \gamma}{f^2} e^{-\kappa\gamma(t-t_{\text{in}})}. \quad (4.60)$$

Изменение  $\dot{\theta}$  со временем будет рассмотрено ниже.

Вернемся теперь к более реалистичной космологии, когда температура падает согласно закону

$$\dot{T} = -HT \quad (4.61)$$

с параметром Хаббла, равным

$$H = \left( \frac{8\pi^3 g_*}{90} \right)^{1/2} \frac{T^2}{M_{\text{Pl}}} \equiv G_* \frac{T^2}{M_{\text{Pl}}}, \quad (4.62)$$

где  $M_{\text{Pl}} = 1,2 \cdot 10^{19}$  ГэВ — масса Планка;  $g_*$  — число типов частиц в первичной релятивистской плазме. В интересующем нас температурном режиме  $g_* \sim 100$ .

Теперь  $\dot{\theta}(t)$  выражается через  $\xi_B(t)$  в соответствии с (4.44), и вместо (4.57) получаем

$$\dot{\xi}_B = \gamma \left( \frac{\dot{\theta}_{\text{in}} T^2}{T_{\text{in}}^3} - \kappa \xi_B \right). \quad (4.63)$$

Это уравнение удобнее решать, если сделать замену переменной  $dt = -dT/(HT)$  и ввести безразмерную обратную температуру  $\eta = T_{\text{in}}/T$ . Тогда барионный химический потенциал, как функция  $\eta = T_{\text{in}}/T$ , меняется как

$$\xi_B(\eta) = K \int_1^\eta \frac{d\eta'}{(\eta')^6} \exp \left[ -N \int_{\eta'}^\eta \frac{d\eta''}{(\eta'')^4} \left( \frac{10}{3} + \frac{C_B T_{\text{in}}^2}{f^2 \eta''^2} \right) \right], \quad (4.64)$$

где  $K = \dot{\theta}_{\text{in}} M_{\text{Pl}} T_{\text{in}}^2 / (C_B m^4 G_*)$ ,  $N = M_{\text{Pl}} T_{\text{in}}^3 / (C_B m^4 G_*)$ . Если  $K \gg 1$ , что соответствует равновесному случаю, интеграл можно оценить с точностью до членов порядка  $1/K$ . Тогда находим

$$\xi_B^{\text{eq}}(\eta) = \frac{(\dot{\theta}_{\text{in}}/T_{\text{in}})}{(10\eta^2/3) + (C_B T_{\text{in}}^2)/f^2}. \quad (4.65)$$

Этот результат совпадает, как и ожидалось, с равновесным решением уравнения (4.63):  $\xi_B = \dot{\theta}_{\text{in}} T^2 / (T_{\text{in}}^3 \kappa)$ . Заметим, что в равновесии  $\xi_B$  и  $\dot{\theta}/T$  падают как  $T^2$  с уменьшением температуры.

Полезно рассмотреть другую модель с несохранением барионного числа через кварк-антикварковый переход  $2Q \leftrightarrow 2\bar{Q}$ . Для реалистичных кварков такой процесс запрещен, но процесс  $3q \leftrightarrow 3\bar{q}$  разрешен, например, в  $SO(10)$ -модели Великого объединения. Однако для простоты ограничимся первым случаем. Кинетическое уравнение (4.55) принимает вид

$$\dot{n}_B = \left( \frac{\dot{\theta}}{T} - 4\xi_B \right) \frac{T^8}{m^4}, \quad (4.66)$$

и в равновесии по отношению к процессу  $2Q \leftrightarrow 2\bar{Q}$  барионный химический потенциал стремится к  $\xi_B \rightarrow \dot{\theta}/(4T)$ .

Рассмотрим теперь, что происходит вне равновесия. Для этого интеграл в (4.64) был определен численно для разных значений  $K$  и  $C_B T_{\text{in}}^2/f^2$ . Результаты для  $\xi_B(\eta)$  и отношения  $\xi_B$  к равновесному значению  $(3/10)\dot{\theta}/T$  как функции  $\eta = T_{\text{in}}/T$  представлены на рис. 36, *a* и *б* соответственно. Как видно на рис. 36, *a*, барионная асимметрия является немонотонной функцией скорости процессов с несохранением барионного числа. Для больших скоростей (большие  $K$  и  $N$ ) барионная асимметрия быстро генерируется и достигает высокой величины, но падает как равновесная,  $\sim 1/\eta^2$ , до более низких температур. В результате конечная барионная асимметрия меньше для больших скоростей. С другой стороны, если скорость очень мала, генерация барионной асимметрии неэффективна с самого начала, и поэтому конечное значение также мало. Таким образом, существует промежуточная величина скорости, для которой барионная асимметрия максимальна.

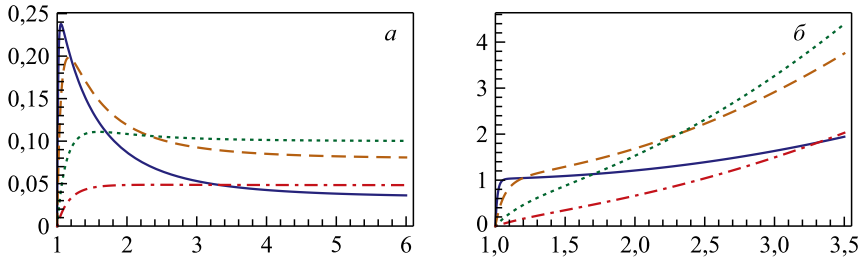


Рис. 36. *а)* Эволюция  $\xi_B(\eta)$  согласно уравнению (4.64), в котором  $C_B T_{\text{in}}^2 / (5f^2) = 0,1$ , для  $K = N = 20$  (сплошная линия), 5 (штриховая), 1 (пунктирная) и 0,3 (штрихпунктирная). *б)* Отношение  $\xi_B(\eta)$  к его равновесному значению  $\xi_B^{\text{eq}}(\eta)$ , определенному в (4.65), для тех же значений параметров

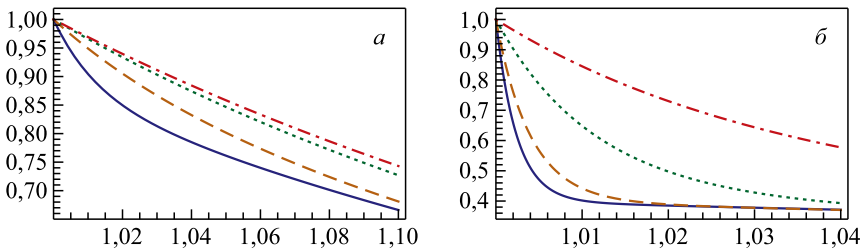


Рис. 37. *а)* Эволюция  $\dot{\theta}(\eta)$ , нормированного на его начальное значение  $\dot{\theta}_{\text{in}}$ , для  $C_B T_{\text{in}}^2 / (5f^2) = 0,1$  и  $K = N = 20$  (сплошная линия), 5 (штриховая), 1 (пунктирная) и 0,3 (штрихпунктирная). *б)* То же для  $C_B T_{\text{in}}^2 / (5f^2) = 1$  и  $K = N = 50$  (сплошная линия), 30 (штриховая), 10 (пунктирная) и 3 (штрихпунктирная)

Изменение  $\dot{\theta}(\eta)$ , вычисленное по формуле (4.44) с  $\xi_B(\eta)$ , определенным из (4.64), представлено на рис. 37. Ясно видно, что производная  $\dot{\theta}$  не является постоянной, но довольно сильно меняется как функция температуры или времени, особенно вблизи начального момента. Это означает, что основное предположение сценария спонтанного бариосинтеза оказывается нарушенным.

**4.1.5. Псевдоголдстоуновский случай.** Если потенциал  $U(\theta)$  отличен от нуля, уравнение движения (4.19) не удастся так легко проинтегрировать. Этот случай является более эффективным для генерации космологической барионной асимметрии, поскольку поле  $\theta(t)$  естественным образом осциллирует вокруг минимума потенциала, в то время как механизм, приводящий к ненулевому  $\dot{\theta}$ , особенно после инфляции, не ясен. Потенциал обычно выбирается в виде

$$U(\theta) = -f^2 m_\theta^2 \cos \theta \rightarrow f^2 m_\theta^2 \theta^2 / 2, \quad (4.67)$$

где последний переход соответствует разложению косинуса вблизи минимума потенциала.



Чтобы получить замкнутую систему уравнений, описывающую эволюцию  $\theta(t)$  с учетом обратной реакции рожденных барионов, нужно усреднить квантовый оператор  $(\dot{n}_B + 3Hn_B)$  по среде. В работах [176, 199] было проведено усреднение по вакуумному состоянию, что соответствует распаду  $\theta(t)$  в случае, когда обратной реакцией частиц в космической плазме, восстанавливающей  $\theta(t)$ -поле, можно пренебречь. Чтобы учесть эту обратную реакцию, нужно использовать кинетическое уравнение (4.132), выражающее  $\dot{n}_B$  через интеграл столкновений, зависящий от  $\theta(t)$  и  $\xi_B(t)$ . В результате будет получена система обыкновенных дифференциальных и интегральных уравнений, полностью определяющая эволюцию  $\theta(t)$  и  $n_B(t)$ . Задача заметно упрощается в тепловом равновесии, когда интеграл столкновений сводится к алгебраическому соотношению между  $\theta(t)$  и  $\xi_B$ . Однако это справедливо только в случае, когда  $\theta$  является медленно меняющейся функцией времени и  $\dot{\theta}$  можно считать постоянным. Если это так, мы возвращаемся к уже рассмотренной в предыдущем разделе ситуации. Необходимость учитывать изменение  $\theta(t)$  требует модификации кинетического уравнения на случай нестационарных внешних полей, как обсуждается ниже.

Отметим, что, если реакции с несохранением барионов заморожены, плотность барионного числа остается постоянной в сопутствующем объеме, т. е.  $\dot{n}_B + 3Hn_B = 0$ , так что эволюция  $\theta$  определяется уравнением Клейна–Гордона. Соответственно,  $\theta(t)$  в течение равновесного периода просто осциллирует вблизи минимума потенциала с адиабатически уменьшающейся амплитудой, что вызывается космологическим расширением.

В работах [155, 156] использовался другой подход. Там предполагалось, что обратная реакция рождения частиц на эволюцию  $\theta$  могла бы описываться слагаемым с «трением»  $\Gamma\dot{\theta}$ , которое вводится в уравнение движения:

$$f^2(\partial_t + 3H)\dot{\theta} + f^2\Gamma\dot{\theta} + U'(\theta) = 0, \quad (4.68)$$

где  $\Gamma$  — скорость процессов с несохранением барионного числа. Сравнивая это уравнение с уравнением (4.19), авторы приходят к заключению, что  $\theta(t)$  осциллирует с экспоненциально уменьшающейся амплитудой,  $\sim \exp(-\Gamma t)$ , тогда

$$\dot{n}_B + 3Hn_B = f^2\Gamma\dot{\theta}. \quad (4.69)$$

Однако это может быть верным только для распадов в пустое или переохлажденное состояние, как было отмечено в [156]. В этом случае тепловое равновесие нарушается и идентификация  $\dot{\theta}/\Gamma$  с  $\xi_B$  становится спорной. Другой проблемой является возможность описания рождения частиц с помощью  $\Gamma\dot{\theta}$ . Как показано в работе [175], такое описание может быть справедливым (но не обязательно) для гармонического потенциала поля, которое рождает частицы. В случае, когда взаимодействие дается  $(\dot{n}_B + 3Hn_B)$ , нужно усреднить квантовый оператор по среде с внешним полем  $\theta(t)$ . В результате

возникнет нелокальное по времени выражение, содержащее  $\theta(t)$ , приводящее к интегродифференциальному уравнению для  $\theta$ , которое не сводится к уравнению (4.68). Подобным образом задача решалась в работе [176], результаты которой отличаются от тех, что были получены в статьях [155, 156].

#### 4.1.6. Кинетическое уравнение с амплитудой, зависящей от времени.

Каноническое кинетическое уравнение (4.132) обычно используется для процессов рассеяния или распада на стационарном или медленно меняющемся фоне с интегралом столкновений, представленным уравнением (4.133). Если взаимодействие протекает на зависящем от времени фоне и/или время длительности процесса конечно, то дельта-функция, отражающая закон сохранения энергии, не возникает и описанный в п. 4.1.3 метод становится неприменимым, поэтому необходимо проводить интегрирование по времени с учетом нестационарности фона и интегрировать по фазовому пространству без сохранения энергии.

Далее мы рассматриваем двухчастичный неупругий процесс с несохранением барионного числа с амплитудой, полученной из последнего слагаемого в лагранжиане (4.9). Пока не будем конкретизировать форму реакции, ограничься словами, что это двухчастичная реакция вида

$$a + b \leftrightarrow c + d, \quad (4.70)$$

где  $a, b, c$  и  $d$  — некоторые кварки и лептоны или их античастицы. Выражение для эволюции плотности барионного числа,  $n_B$ , следует из (4.132) после интегрирования его обеих частей по  $d^3 p_i / (2\pi)^3$ . Таким образом, получаем

$$\dot{n}_B + 3Hn_B = -\frac{(2\pi)^3}{t_{\max}} \int d\nu_{\text{in}} d\nu_{\text{fin}} \delta(\mathbf{P}_{\text{in}} - \mathbf{P}_{\text{fin}}) |A|^2 (f_a f_b - f_c f_d), \quad (4.71)$$

где, например,  $d\nu_{\text{in}} = d^3 p_a d^3 p_b / [4E_a E_b (2\pi)^6]$ , а амплитуда процесса определяется как

$$A = \left( \int_0^{t_{\max}} dt \exp \{ i[(E_c + E_d - E_a - E_b)t + \theta(t)] \} \right) F(p_a, p_b, p_c, p_d). \quad (4.72)$$

$F$  есть функция 4-импульсов участвующих частиц, определяемая конкретной формой лагранжиана взаимодействия. В дальнейшем мы рассматриваем две возможности:  $F = \text{const}$  и  $F = \psi^4 m_X^{-2}$ , при этом в последнем случае  $\psi^4$  символически обозначает произведение дираковских спиноров частиц  $a, b, c$  и  $d$ .

В равновесии по отношению к реакциям с сохранением барионов функции распределения имеют канонический вид  $f_a = \exp(-E_a/T + \xi_a)$ , где  $\xi_a \equiv \mu_a/T$  — безразмерный химический потенциал. Поэтому для постоянной функции  $F$  произведение  $|A|^2 (f_a f_b - f_c f_d)$  зависит от 4-импульсов частиц

только через  $E_{\text{in}}$  и  $E_{\text{fin}}$ , где

$$E_{\text{in}} = E_a + E_b, \quad E_{\text{fin}} = E_c + E_d. \quad (4.73)$$

Теперь можно провести все, кроме одного, этапы интегрирования по фазовому пространству в (4.71). Для этого удобно сделать следующую замену переменных интегрирования:

$$\frac{d^3 p_a}{E_a} \frac{d^3 p_b}{E_b} = d^4 P_{\text{in}} d^4 R_{\text{in}} \delta(P_{\text{in}}^2 + R_{\text{in}}^2) \delta(P_{\text{in}} R_{\text{in}}), \quad (4.74)$$

где  $P_{\text{in}} = p_a + p_b$ ,  $R_{\text{in}} = p_a - p_b$ , а массы частиц считаются равными нулю. Для конечных состояний частиц справедливы аналогичные выражения. Очевидно, что временная компонента 4-вектора  $P$  является суммой энергий входящей и выходящей частиц:  $P_{\text{in}}^{(4)} = E_{\text{in}}$  и  $P_{\text{fin}}^{(4)} = E_{\text{fin}}$ .

Интегрирование по начальным импульсам  $d^4 P_{\text{in}} d^4 R_{\text{in}}$  проводится в несколько этапов (чтобы не перегружать уравнения, мы опускаем нижний индекс «in» там, где он не является необходимым):

1. Интегрирование по  $d^3 P_{\text{in}}$  (или  $d^3 P_{\text{fin}}$ ) с  $\delta(\mathbf{P}_{\text{in}} - \mathbf{P}_{\text{fin}})$  дает просто 1.
2. Вычисляя интеграл по  $d^4 R = 2\pi dR_4 \mathbf{R}^2 d|\mathbf{R}| d\zeta$ , сначала интегрируем по полярному углу, используя

$$\delta(PR) = \delta(P_4 R_4 - |\mathbf{P}||\mathbf{R}|\zeta), \quad (4.75)$$

так что  $\zeta = Q_4 R_4 / (|\mathbf{R}||\mathbf{Q}|)$ , а с помощью дельта-функции  $\delta(Q_4^2 - \mathbf{Q}^2 + R_4^2 - \mathbf{R}^2)$  находим, что  $R_4$  ограничено условием  $R_4^2 < \mathbf{Q}^2$ , поскольку  $|\zeta| < 1$ . Интеграл по  $\mathbf{R}^2/|\mathbf{Q}|$  берется с записанной выше дельта-функцией, и остается интегрирование по  $dR_4$  в пределах от  $(-|\mathbf{Q}|)$  до  $(+|\mathbf{Q}|)$ . Таким образом, интегрирование по начальным импульсам сводится к  $2\pi dQ_4$ .

3. Проводя аналогичное интегрирование по фазовому объему конечных частиц, но без  $\delta(\mathbf{P}_{\text{in}} - \mathbf{P}_{\text{fin}})$ , получаем

$$(2\pi)^3 \int d\nu_{\text{in}} d\nu_{\text{fin}} \delta(\mathbf{P}_{\text{in}} - \mathbf{P}_{\text{fin}}) = \frac{1}{29\pi^6} \int dE_{\text{in}} dE_{\text{fin}} d|\mathbf{Q}_{\text{fin}}| |\mathbf{Q}_{\text{fin}}^2|. \quad (4.76)$$

Можно наивно ожидать, что интегрирование по  $|\mathbf{Q}_{\text{fin}}|$  будет проводиться в пределах от 0 до  $E_{\text{fin}}$ , так как

$$\mathbf{Q}_{\text{fin}}^2 = E_c^2 + E_d^2 + 2E_c E_d \zeta < (E_c + E_d)^2 = E_{\text{fin}}^2, \quad (4.77)$$

но существует ограничение  $\mathbf{Q}_{\text{fin}} = \mathbf{Q}_{\text{in}}$ , поэтому верхним пределом для  $|\mathbf{Q}_{\text{fin}}|$  будет меньшее из  $E_{\text{fin}}$  и  $E_{\text{in}}$ . Введем новые обозначения:  $E_+ = E_{\text{in}} + E_{\text{fin}}$  и  $E_- = E_{\text{in}} - E_{\text{fin}}$ . Легко проверить, что  $E_{\text{fin}} > E_{\text{in}}$  для  $E_- < 0$  и  $E_{\text{fin}} < E_{\text{in}}$  для  $E_- > 0$ . При этом для  $E_- < 0$  интегрирование по  $d|\mathbf{Q}_{\text{fin}}|$  в уравнении (4.76) дает  $E_{\text{in}}^3/3$ , в то время как для  $E_- > 0$  результатом будет  $E_{\text{fin}}^3/3$ .

4. У нас остался интеграл по  $dE_{\text{in}} dE_{\text{fin}}$ , который удобно переписать в виде

$$\int dE_{\text{in}} dE_{\text{fin}} = \frac{dE_+ dE_-}{2}, \quad (4.78)$$

Отметим, что амплитуда  $A$  (4.72) зависит только от  $E_-$ , но не от  $E_+$ , в то время как произведения плотностей частиц в фазовом объеме будут такими:

$$\begin{aligned} f_a f_b &= \exp\left(-\frac{E_+ + E_-}{2T} + \xi_a + \xi_b\right), \\ f_c f_d &= \exp\left(-\frac{E_+ - E_-}{2T} + \xi_c + \xi_d\right). \end{aligned} \quad (4.79)$$

5. Интеграл по  $dE_+$  можно вычислить явно, но сначала нужно установить пределы интегрирования. Исходное интегрирование проводится от 0 до  $\infty$ , поэтому интеграл по  $dE_+$  берется от  $|E_-|$  до  $\infty$ , а интеграл по  $dE_-$  — от  $(-\infty)$  до  $(+\infty)$ . Удобно разделить интегрирование по  $dE_+$  на две части: для положительных и отрицательных  $E_-$ . Для положительных  $E_-$  находим

$$\begin{aligned} \int_{E_-}^{\infty} dE_+ \left(\frac{E_+ - E_-}{2}\right)^3 \exp\left(-\frac{E_+ + E_-}{2T}\right) &= 12T^4 e^{-y}, \\ \int_{\bar{E}_-}^{\infty} dE_+ \left(\frac{E_+ - E_-}{2}\right)^3 \exp\left(-\frac{E_+ - E_-}{2T}\right) &= 12T^4, \end{aligned} \quad (4.80)$$

где  $y = E_-/T$ . Для отрицательных  $E_-$  получаем те же результаты с перестановкой начального и конечного состояний, т. е.  $f_a f_b \leftrightarrow f_c f_d$ , и с  $y \rightarrow |y|$ . Эффективно это соответствует изменению знака  $\theta(t)$  в (4.72).

Таким образом, собирая все факторы (4.79), окончательно получаем

$$\begin{aligned} \dot{n}_B + 3Hn_B &= -\frac{T^5}{2^5 \pi^6 t_{\text{max}}} \int_0^{\infty} dy \left[ e^{\xi_a + \xi_b} (|A_+|^2 + |A_-|^2 e^{-y}) - \right. \\ &\quad \left. - e^{\xi_c + \xi_d} (|A_-|^2 + |A_+|^2 e^{-y}) \right], \end{aligned} \quad (4.81)$$

где  $A_+$  есть амплитуда, взятая при положительных  $E_-$ , в то время как  $A_-$  берется при отрицательных  $E_-$ . При замене  $E_- \rightarrow |E_-|$  разница между  $A_+$  и  $A_-$  состоит лишь в том, что  $A_-(\theta) = A_+(-\theta)$ .

Равновесие достигается, когда интеграл в (4.81) обращается в нуль. Эта точка определяет равновесные значения химических потенциалов во внешнем

поле  $\dot{\theta}$ . Очевидно, это имеет место при

$$\xi_a + \xi_b - \xi_c - \xi_d = \frac{\langle |A_+|^2 e^{-y} + |A_-|^2 \rangle}{\langle |A_+|^2 + |A_-|^2 e^{-y} \rangle} - 1, \quad (4.82)$$

где угловые скобки означают интегрирование по  $dy$ , как показано в (4.81).

Представленные выше результаты получены для амплитуды, не зависящей от импульсов участвующих частиц. Расчеты будут несколько сложнее, если это ограничение неверно. Например, если несохранение барионов происходит в четырехфермионных взаимодействиях, то квадрат амплитуды может содержать члены вида  $(p_a p_b)^2 / m_X^4$  или  $(p_a p_c)^2 / m_X^4$  и т. д. Учет таких слагаемых привел бы к изменению численного коэффициента в (4.55) и, что более важно, температурный коэффициент перед интегралом в этом уравнении изменился бы с  $T^5$  на  $T^9 / m_X^4$ .

**4.1.7. Примеры нестационарного  $\theta$ . Постоянное  $\dot{\theta}$ .** Этот случай обычно рассматривается в литературе и является самым простым. Интеграл (4.72) берется аналитически, что приводит к выражению

$$|A|^2 \sim \frac{2 - 2 \cos[(\dot{\theta} - E_-)t_{\max}]}{(\dot{\theta} - E_-)^2}. \quad (4.83)$$

Здесь  $E_-$  пробегает положительную полуось, см. уравнение (4.80) и комментарии при нем.

Для больших  $t_{\max}$  это выражение стремится к  $\delta(E_- - \dot{\theta})$ , так что  $|A_+|^2 = 2\pi\delta(E_- - \dot{\theta})t_{\max}$  и  $|A_-|^2 = 2\pi\delta(E_- + \dot{\theta})t_{\max} = 0$ , если  $\dot{\theta} > 0$ , и наоборот в противоположном случае. Следовательно, равновесное решение имеет вид

$$\xi_a + \xi_b - \xi_c - \xi_d - \dot{\theta}/T = 0, \quad (4.84)$$

совпадающий со стандартным результатом.

Предел  $\dot{\theta} = \text{const}$  соответствует несохранению энергии, а именно, увеличению (или уменьшению) энергии конечного состояния в реакции (4.70) ровно на  $\dot{\theta}$ . Однако, если  $t_{\max}$  не является достаточно большим, несохранение энергии не равно точно  $\dot{\theta}$ , а как-то размазано, и равновесное решение будет другим. В этом случае нет простого аналитического выражения, поэтому приходится брать интегралы по  $y$  в (4.82) численно.

Результаты вычислений представлены на рис. 38. На рис. 38, *a* значения правой части уравнения (4.82) приведены как функции  $\dot{\theta}/T$  для следующих обрезаний интеграла по времени в (4.83):  $\tau \equiv t_{\max}T = 30; 10; 3$ . Чем больше интервал интегрирования, тем ближе линии к графику  $\dot{\theta}/T$ , который также изображен.

На рис. 38, *b* показана относительная разность между правой частью уравнения (4.82) и  $\dot{\theta}/T$ , нормированная на  $\dot{\theta}/T$ , как функция  $\dot{\theta}/T$  для различных

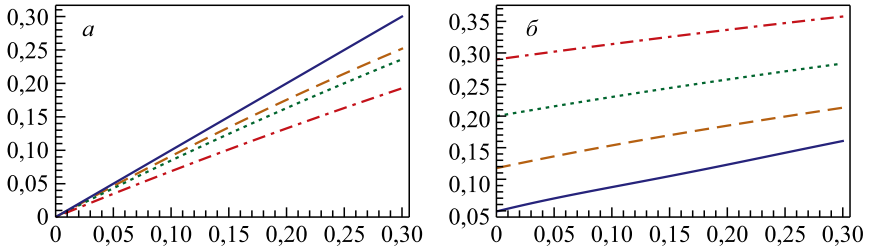


Рис. 38. *а*) Правая часть уравнения (4.82), обозначенная  $\Xi$ , как функция  $\dot{\theta}/T$ , для следующих обрезаний интеграла по времени в (4.83):  $\tau \equiv t_{\max}T = 30$  (штриховая линия); 10 (пунктирная); 3 (штрихпунктирная) и  $\dot{\theta}/T$  (сплошная). *б*) Относительная разность:  $\zeta = \Xi/(\dot{\theta}/T) - 1$  как функция  $\dot{\theta}/T$  для  $\tau = 30$  (сплошная линия), 10 (штриховая), 5 (пунктирная), 3 (штрихпунктирная)

значений максимального времени интегрирования. Видно, что для  $\tau = 30$  отклонение меньше 10 %, в то время как для  $\tau = 3$  отклонение составляет около 30 %. Если выбрать  $\tau$  близким к единице, отклонения будут около 100 %. Величина  $\dot{\theta}/T$  ограничена сверху значением  $\sim 0,3$ , так как при больших  $\dot{\theta}/T$  линейное разложение, использованное в наших оценках, несправедливо.

Реалистические значения  $\tau$  зависят от параметров модели. Существует одно очевидное ограничение, относящееся к космологическому расширению, которое подразумевает  $\tau < t_{\text{cosm}}T \sim T/H \sim M_{\text{Pl}}/T$ . Здесь  $M_{\text{Pl}}$  — масса Планка,  $H$  — параметр Хаббла, а  $t_{\text{cosm}} \sim 1/H$ , поэтому эффекты расширения могут быть значительными только вблизи планковской температуры. Другая верхняя граница  $\tau$  дается кинетическим уравнением, которое требует, чтобы характерное время изменения было близко (по крайней мере в начале) к обратной скорости реакции  $\gamma \sim T^5/m_X^4$ . Рассмотренные эффекты могут оказывать существенное влияние на приближение к равновесию при температуре  $T \sim m_X$ .

Учет членов второго порядка в разложении  $\theta(t)$ . Как показано выше, приближение  $\dot{\theta} = \text{const}$  сильно ограничено. Здесь мы предполагаем, что  $\theta(t)$  можно аппроксимировать выражением

$$\theta(t) = \dot{\theta}t + \ddot{\theta}t^2/2, \quad (4.85)$$

где  $\dot{\theta}$  и  $\ddot{\theta}$  считаются постоянными или медленно меняющимися. В этом случае интеграл по времени (4.72) также можно вычислить аналитически, но результат будет заметно сложнее. Нужно взять интеграл

$$\int_0^{t_{\max}} dt \exp[i\theta(t)]. \quad (4.86)$$

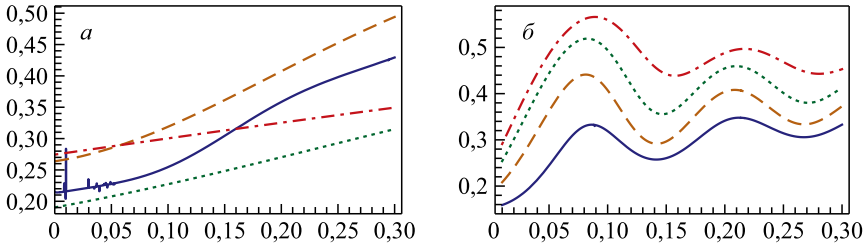


Рис. 39. *а*) Относительная разность  $\zeta = \Xi/(\dot{\theta}/T) - 1$  как функция  $\dot{\theta}/T$  при фиксированном  $\ddot{\theta}/T^2 = 0,1$  для следующих обрезаний интеграла по времени:  $\tau = 30$  (сплошная линия), 10 (штриховая), 5 (пунктирная), 3 (штрихпунктирная). *б*) Та же разность как функция  $\dot{\theta}/T$  для фиксированного интегрирования по времени до  $\tau = 10$  и различных  $\ddot{\theta}/T^2$ : 0,1 (сплошная линия), 0,2 (штриховая), 0,3 (пунктирная), 0,4 (штрихпунктирная)

Его вещественная и мнимая части выражаются через функции Френеля. При этом квадрат амплитуды дается функциями, загабулированными в пакете «Mathematica», и положение точки равновесия можно найти, как и в предыдущем случае, взяв одномерный интеграл численно.

Правая часть уравнения (4.82) как функция  $\dot{\theta}/T$  для различных значений  $\tau$  представлена на рис. 39, *а*. Интересно, что зависимость от  $\tau$  не монотонная. Это можно объяснить меньшим влиянием  $\ddot{\theta}^2$  на меньших временных интервалах.

Чтобы проследить зависимость от  $\ddot{\theta}$ , мы снова вычислили правую часть уравнения (4.82), но теперь как функцию  $\ddot{\theta}/T^2$  при фиксированном интегрировании по времени и разных значениях  $\dot{\theta}/T$ , что представлено на рис. 39, *б*. Видно, что точка равновесия осциллирует как функция  $\ddot{\theta}$ .

*Осциллирующее  $\theta(t)$ .* Если потенциал, зависящий от  $\theta$ , не равен нулю, эволюция  $\theta(t)$  будет более сложной. Потенциал  $U(\theta)$  должен быть периодической функцией угла  $\theta$  и поэтому часто выбирается в виде  $m^2 \cos \theta$ . Предположим, что поле  $\theta$  изначально находится вблизи минимума потенциала, который в этом случае можно аппроксимировать как  $U = m^2 \theta^2/2$ , где  $m$  — масса  $\theta$ -поля. При отсутствии обратной реакции рожденных барионов  $\theta(t)$  должно эволюционировать как

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(mt + \phi). \quad (4.87)$$

К сожалению, интеграл (4.72) не берется аналитически, а численные расчеты с двумерными интегралами весьма трудоемки. Однако подынтегральную функцию можно разложить следующим образом:

$$e^{i\theta(t)} = 1 + i\theta_0 \cos(mt + \phi). \quad (4.88)$$

В этом приближении интеграл (4.72) легко берется аналитически, и мы снова можем свести вычисление отклонения алгебраической суммы безразмерных

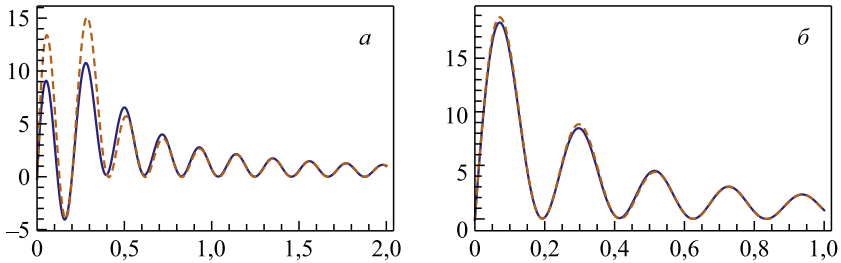


Рис. 40. Точное (сплошная линия) и приближенное (штриховая) выражения для амплитуды  $A$  (4.72) с  $\theta(t)$ , заданным уравнением (4.88), как функции  $mt$  для  $\theta_0 = 1$  (а) и  $\theta_0 = 0,3$  (б)

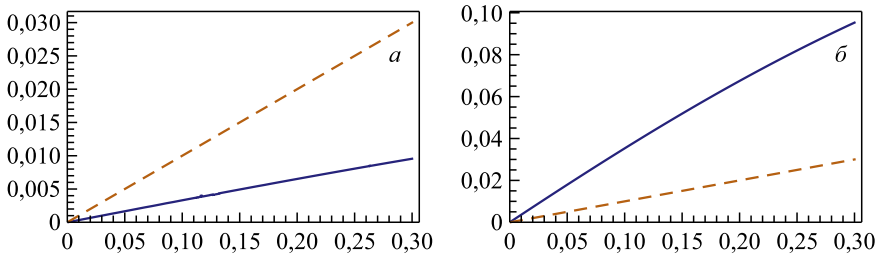


Рис. 41. а) Сплошная линия — правая часть уравнения (4.82),  $\Xi$ , при  $m/T = 0,1$  и максимальном пределе интегрирования по времени  $\tau = 30$ ; штриховая —  $\dot{\theta}/T$  как функция  $\theta_0$ , см. (4.87). б) То же самое при максимальном пределе интегрирования по времени  $\tau = 3$

химических потенциалов от  $\dot{\theta}/T$  (4.84) к численному расчету одномерного интеграла. Однако, чтобы быть уверенными в правильности процедуры, нужно сравнить проинтегрированную по времени точную амплитуду с той, что получена в результате приближенного разложения. Действительно, численное сравнение показывает, что даже для  $\theta_0 = 1$  поправки являются пренебрежимыми, а для  $\theta_0 \leq 0,5$  эти амплитуды практически неразличимы (рис. 40).

Отклонение от правой части уравнения (4.82) от  $\dot{\theta}/T$  представлено на рис. 41. Отличие от стандартных предсказаний спонтанного бариосинтеза может быть значительным, если масса  $\theta$  не является пренебрежимой, так что осцилляции  $\theta$  проявляются за «время»  $\tau$ . Вследствие этого стандартный спонтанный бариосинтез, в котором барионный химический потенциал пропорционален  $\dot{\theta}$ , не является точным на больших временах или, точнее, при больших  $mt_{\max}$ . С другой стороны, как видно на рис. 41, при малых  $\tau$  отклонения также весьма заметны, но теперь эффект связан с неопределенностью энергии из-за конечных пределов интегрирования по времени. Как показано на рисунках, эффект меняет знак — относительное расположение сплошной и пунктирной кривых меняется.



В заключение этого подраздела следует отметить, что, несмотря на эти поправки, стандартный сценарий спонтанного бариогенезиса остается работающим механизмом для создания наблюдаемого космологического избытка вещества над антивеществом. Однако этот механизм не особенно эффективен в случае чисто спонтанного нарушения симметрии, когда потенциал  $\theta$ -поля отсутствует. Ненулевой потенциал  $U(\theta)$ , который может появиться в результате явного нарушения барионной  $U(1)$ -симметрии в дополнение к спонтанному нарушению, может существенно повысить эффективность спонтанного бариогенезиса. Оценка эффективности требует численного решения обыкновенного дифференциального уравнения движения для  $\theta$ -поля вместе с интегральным кинетическим уравнением. В случае теплового равновесия кинетическое уравнение сводится к алгебраическому и возникающая система уравнений легко исследуется. Неравновесная ситуация намного сложнее технически и будет изучаться отдельно.

**4.2. Неустойчивость гравитационного бариосинтеза со скалярами.** Теории гравитационного бариосинтеза [157] приобрели заметную популярность в последние годы, для обзора см. [204]. С появлением  $F(R)$ -модифицированной гравитации гравитационный бариосинтез изучался также и в рамках этих теорий [205, 207–212], в том числе рассматривался бариогенезис как результат лептогенезиса [208, 213].

В сценариях гравитационного бариогенезиса (ГБГ) исходная модель спонтанного бариосинтеза была модифицирована заменой голдстоуновского поля  $\theta$  на скаляр кривизны  $R$ , т.е. лагранжиан теории ГБГ представляет собой связь барионного тока  $J_B^\mu$  с производной скаляра кривизны  $R$ :

$$\mathcal{L}_{\text{GBG}} = \frac{1}{M^2}(\partial_\mu R)J_B^\mu, \quad (4.89)$$

где  $M$  — постоянный параметр размерности массы.

В этом подразделе, следуя нашей работе [163], мы покажем, что добавление зависящего от кривизны слагаемого (4.89) в действие Гильберта–Эйнштейна в ОТО приводит к гравитационным уравнениям движения высокого порядка, являющимся сильно неустойчивыми по отношению к малым возмущениям.

**4.2.1. Уравнения движения.** Начнем с модели, в которой барионное число переносится скалярным полем  $\phi$  с потенциалом  $U(\phi, \phi^*)$ . Пример с барионным током фермионов, рассмотренный в нашей работе [164], будет обсуждаться в п. 4.3.

Действие скалярной модели имеет вид

$$A = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{M_{\text{Pl}}^2}{16\pi} R + \frac{1}{M^2} (\partial_\mu R) J^\mu - g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi^* + U(\phi, \phi^*) \right] - A_m, \quad (4.90)$$

где  $A_m$  — действие материи,  $g^{\mu\nu}$  есть метрический тензор фонового пространства-времени,  $J^\mu = g^{\mu\nu} J_\nu$ , и для краткости в обозначении тока опущен индекс  $B$ . Мы предполагаем, что начальная метрика является обычной метрикой общей теории относительности, и изучаем возникновение поправок, вызванных описанной ниже неустойчивостью.

В отличие от скалярной электродинамики барионный ток скаляров не определен однозначно. В электродинамике форма электрического тока диктуется условиями калибровочной инвариантности и сохранения тока, которые требуют добавления к току слагаемого, так называемого «sea-gull» члена, пропорционального  $e^2 A_\mu |\phi|^2$ , где  $A_\mu$  — электромагнитный потенциал.

С другой стороны, теория, определяемая действием (4.90), не обладает локальной  $U(1)$ -симметрией. Эта теория инвариантна только относительно  $U(1)$ -преобразований с постоянной фазой, поэтому барионный ток скаляров не является однозначно определенным. В частности, мы можем добавить к току аналог «sea-gull» члена,  $\sim (\partial_\mu R) |\phi|^2$ , с произвольным коэффициентом. Вследствие этого мы рассматриваем две возможности: 1) «sea-gull» член отсутствует и ток не сохраняется; 2) «sea-gull» член входит с коэффициентом, обеспечивающим сохранение тока. В обоих случаях барионная асимметрия не может возникнуть без дополнительного взаимодействия. Это очевидно в последнем случае, когда ток сохраняется, но это также верно и в первом случае, несмотря на несохранение тока, просто потому, что ненулевая дивергенция  $D_\mu J^\mu$  не меняет барионного числа поля  $\phi$ , а только ведет к перераспределению частиц в фазовом пространстве. Поэтому для создания любой ненулевой барионной асимметрии нужно ввести взаимодействие  $\phi$  с другими частицами, которое, делая потенциал  $U$  неинвариантным относительно вращения фазы поля  $\phi$ , нарушает сохранение барионного числа.

Если потенциал  $U(\phi)$  не инвариантен по отношению к  $U(1)$ -вращению,  $\phi \rightarrow \exp(i\beta)\phi$ , барионный ток, определенный обычным образом:

$$J_{1\mu} = iq(\phi^* \partial_\mu \phi - \phi \partial_\mu \phi^*), \quad (4.91)$$

не сохраняется. Здесь  $q$  — барионное число  $\phi$ .

При таком выборе тока получаем из лагранжиана (4.89) уравнения для гравитационного поля в виде

$$\begin{aligned} & \frac{M_{\text{Pl}}^2}{16\pi} \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) - \frac{1}{M^2} \left( \left[ R_{\mu\nu} - (D_\mu D_\nu - g_{\mu\nu} D^2) \right] D_\alpha J_1^\alpha + \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} J_1^\alpha D_\alpha R - \frac{1}{2} (J_{1\nu} D_\mu R + J_{1\mu} D_\nu R) \right) - \\ & - \frac{1}{2} (D_\mu \phi D_\nu \phi^* + D_\nu \phi D_\mu \phi^*) + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (D_\alpha \phi D^\alpha \phi^* - U(\phi)) = \frac{1}{2} T_{\mu\nu}, \quad (4.92) \end{aligned}$$

где  $D_\mu$  — ковариантная производная в метрике  $g_{\mu\nu}$  (очевидно, для скаляров  $D_\mu = \partial_\mu$ );  $T_{\mu\nu}$  — тензор энергии-импульса материи, полученный из действия  $A_m$ .

Вычисляя след уравнения (4.92) по индексам  $\mu$  и  $\nu$ , находим

$$\frac{M_{\text{Pl}}^2}{16\pi} R + \frac{1}{M^2} [(R + 3D^2)D_\alpha J_1^\alpha + J_1^\alpha D_\alpha R] - D_\alpha \phi D^\alpha \phi^* + 2U(\phi) - \frac{1}{2} T_\mu^\mu. \quad (4.93)$$

Уравнение движения для поля  $\phi$  имеет вид

$$D^2 \phi + \frac{\partial U}{\partial \phi^*} = -\frac{iq}{M^2} (2D_\mu R D^\mu \phi + \phi D^2 R). \quad (4.94)$$

Согласно определению (4.91) дивергенция тока равна

$$D_\mu J_1^\mu = \frac{2q^2}{M^2} [D_\mu R (\phi^* D^\mu \phi + \phi D^\mu \phi^*) + |\phi|^2 D^2 R] + iq \left( \phi \frac{\partial U}{\partial \phi} - \phi^* \frac{\partial U}{\partial \phi^*} \right). \quad (4.95)$$

Если потенциал  $U$  инвариантен по отношению к вращению фазы поля  $\phi$ , т. е.  $U = U(|\phi|)$ , последнее слагаемое в этом выражении исчезает. Ток по-прежнему остается несохраняющимся, но это несохранение не ведет ни к какой барионной асимметрии. Действительно, дивергенция тока пропорциональна билинейным комбинациям  $\phi^*$  и  $\phi$  или их производных, поэтому возможны рождение или аннигиляция только равного количества барионов и антибарионов.

Для создания космологической барионной асимметрии нужно ввести новые виды взаимодействия, например, потенциал вида  $U_4 = \lambda_4 \phi^4 + \lambda_4^* \phi^{*4}$ . Этот потенциал, безусловно, не инвариантен по отношению к вращению фазы  $\phi$  и может индуцировать процесс перехода двух скалярных барионов в два антибариона,  $2\phi \rightarrow 2\bar{\phi}$ , протекающий без сохранения барионного числа. Дополнительное взаимодействие, в котором барионное число не сохраняется, может содержать некоторые другие поля, например, слагаемое  $\phi \bar{q} q$ , где  $q$  есть некоторый фермион, не обязательно кварк. Такие (или более сложные) слагаемые могут быть включены в потенциал  $U$ , благодаря чему будет нарушена инвариантность теории относительно вращения фазы поля  $\phi$ .

Если  $U = U(|\phi|)$  и теория инвариантна по отношению к вращению фазы  $\phi \rightarrow \exp(i\beta)\phi$  с постоянным  $\beta$ , то, по теореме Нетер, должен существовать сохраняющийся ток, который имеет вид

$$J_{2\mu} = iq (\phi^* \partial_\mu \phi - \phi \partial_\mu \phi^*) - \frac{2q^2}{M^2} |\phi|^2 D_\mu R. \quad (4.96)$$

Напомним, что последнее слагаемое в этом выражении называется «sea-gull» членом так же, как и в скалярной электродинамике.

Уравнение движения для поля  $\phi$  модифицируется следующим образом:

$$D^2\phi + \frac{\partial U}{\partial\phi^*} = -\frac{iq}{M^2}(2D_\mu R D^\mu\phi + \phi D^2R) + \frac{2q^2}{M^4}\phi D_\mu R D^\mu R, \quad (4.97)$$

а дивергенция тока теперь равна

$$D_\mu J_2^\mu = iq \left( \phi \frac{\partial U}{\partial\phi} - \phi^* \frac{\partial U}{\partial\phi^*} \right). \quad (4.98)$$

Повторим, что правая часть этого выражения будет равна нулю, если  $U = U(|\phi|)$ .

Соответственно, в уравнения движения гравитационного поля добавятся слагаемые, полученные вариацией «sea-gull» члена в токе, и эти уравнения приобретут вид

$$\begin{aligned} & \frac{M_{\text{Pl}}^2}{16\pi} \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \right) - \frac{1}{M^2} \left[ (R_{\mu\nu} - D_\mu D_\nu + g_{\mu\nu}D^2) D_\alpha J_2^\alpha + \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}J_2^\alpha D_\alpha R - \frac{1}{2}(J_{2\nu} D_\mu R + J_{2\mu} D_\nu R) \right] - \\ & \quad - \frac{2q^2}{M^4} (R_{\mu\nu} - D_\mu D_\nu + g_{\mu\nu}D^2) D_\alpha (|\phi|^2 D^\alpha R) - \\ & \quad - \frac{1}{2}(D_\mu\phi D_\nu\phi^* + D_\nu\phi D_\mu\phi^*) + \frac{1}{2}g_{\mu\nu} [D_\alpha\phi D^\alpha\phi^* - U(\phi)] = \frac{1}{2}T_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (4.99)$$

Нами было проверено, что ковариантная производная  $D_\mu$ , действующая на левую часть уравнения (4.92) или (4.99), равна нулю, как и должно быть.

Вычисляя след уравнения (4.99) по индексам  $\mu$  и  $\nu$ , получим

$$\begin{aligned} & \frac{M_{\text{Pl}}^2}{16\pi} R + \frac{1}{M^2} [(R + 3D^2)D_\alpha J_2^\alpha + J_2^\alpha D_\alpha R] + \\ & \quad + \frac{2q^2}{M^4} (R + 3D^2)D_\alpha (|\phi|^2 D^\alpha R) - D_\alpha\phi D^\alpha\phi^* + 2U(\phi) = -\frac{1}{2}T_\mu^\mu. \end{aligned} \quad (4.100)$$

**4.2.2. Решения в космологической метрике.** Найдем решения полученных выше уравнений движения в космологии, используя пространственно плоскую фоновую метрику Фридмана–Робертсона–Уокера в виде

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) d\mathbf{r}^2. \quad (4.101)$$

В однородном случае (4.93) для скаляра кривизны принимает вид

$$\frac{M_{\text{Pl}}^2}{16\pi} R + \frac{1}{M^2} [(R + 3\partial_t^2 + 9H\partial_t)D_\alpha J_1^\alpha + \dot{R}J_1^0] = -\frac{T^{\text{(tot)}}}{2}, \quad (4.102)$$

где  $J^0$  — плотность барионного числа  $\phi$ -поля;  $H = \dot{a}/a$  — параметр Хаббла;  $T^{(\text{tot})}$  — след тензора энергии импульса материи, включающий вклад от поля  $\phi$ . В однородной и изотропной космологической плазме

$$T^{(\text{tot})} = \rho - 3P, \quad (4.103)$$

где  $\rho$  и  $P$  являются плотностью энергии и давлением плазмы соответственно. Для релятивистской плазмы  $\rho = \pi^2 g_* T^4/30$ , где  $T$  и  $g_*$  — температура и число типов частиц в плазме соответственно. Параметр Хаббла выражается через  $\rho$  как  $H^2 = 8\pi\rho/(3M_{\text{Pl}}^2) \sim T^4/M_{\text{Pl}}^2$ .

Ковариантная дивергенция тока дается выражением (4.95). В рассматриваемом нами однородном случае она принимает вид

$$D_\alpha J_1^\alpha = \frac{2q^2}{M^2} \left[ \dot{R}(\phi^* \dot{\phi} + \phi \dot{\phi}^*) + (\ddot{R} + 3H\dot{R})\phi^* \phi \right] + iq \left( \phi \frac{\partial U}{\partial \phi} - \phi^* \frac{\partial U}{\partial \phi^*} \right). \quad (4.104)$$

Чтобы получить уравнение движения для классического поля  $R$  в космологической плазме, нужно провести усреднение произведений квантовых операторов  $\phi$ ,  $\phi^*$  и их производных по равновесной плазме. Для этого разложим оператор поля  $\phi(x)$  по квантовым операторам рождения-уничтожения следующим образом:

$$\phi(x) = \int \frac{d^3q}{\sqrt{2E_q}(2\pi)^3} \left[ a(\mathbf{q}) e^{-iE_q t + i\mathbf{q}\mathbf{x}} + b^\dagger(\mathbf{q}) e^{iE_q t - i\mathbf{q}\mathbf{x}} \right], \quad (4.105)$$

где  $E_q = \sqrt{q^2 + m_\phi^2}$  с  $q = |\mathbf{q}|$ . В уравнении (4.105)  $a$  и  $a^\dagger$ ,  $b$  и  $b^\dagger$  обозначают операторы уничтожения и рождения скалярных частиц и античастиц соответственно. Эти операторы удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[a(\mathbf{q}), a^\dagger(\mathbf{q}')] = 2E_q(2\pi)^3 \delta(\mathbf{q} - \mathbf{q}'), \quad (4.106)$$

и то же самое для  $b(\mathbf{q})$ .

Произведения операторов рождения-уничтожения, усредненные по среде, имеют следующий вид (см., например, [214]):

$$\begin{aligned} \langle a^\dagger(\mathbf{q})a(\mathbf{q}') \rangle &= f_B(E_q) \delta^{(3)}(\mathbf{q} - \mathbf{q}'), \\ \langle a(\mathbf{q})a^\dagger(\mathbf{q}') \rangle &= [1 + f_B(E_q)] \delta^{(3)}(\mathbf{q} - \mathbf{q}'), \\ \langle b^\dagger(\mathbf{q})b(\mathbf{q}') \rangle &= f_{\bar{B}}(E_q) \delta^{(3)}(\mathbf{q} - \mathbf{q}'), \\ \langle b(\mathbf{q})b^\dagger(\mathbf{q}') \rangle &= [1 + f_{\bar{B}}(E_q)] \delta^{(3)}(\mathbf{q} - \mathbf{q}'), \end{aligned} \quad (4.107)$$

где  $f_{B,\bar{B}}(E_q)$  — зависящая от энергии функция распределения бозона, которая может быть произвольной, поскольку мы предполагаем только, что среда является однородной и изотропной. Мы также предполагаем, как это обычно делается, что недиагональные матричные элементы операторов рождения-уничтожения равны нулю из-за отсутствия когерентности. Для вакуумного состояния  $f(E) = 0$ , и мы получаем обычное вакуумное среднее операторов  $aa^\dagger$  и  $a^\dagger a$ , которым можно пренебречь, так как нас интересует только влияние материи.

Усредняя произведение  $\phi^*(x)\phi(x)$ , получим

$$\begin{aligned} \langle \phi^*(x)\phi(x) \rangle &= \int \frac{d^3q d^3q'}{2(2\pi)^3 \sqrt{E_q E_{q'}}} \times \\ &\times \langle [a^\dagger(\mathbf{q}) e^{iE_q t - i\mathbf{q}\mathbf{x}} + b(\mathbf{q}) e^{-iE_q t + i\mathbf{q}\mathbf{x}}] [a(\mathbf{q}') e^{-iE_{q'} t + i\mathbf{q}'\mathbf{x}} + b^\dagger(\mathbf{q}') e^{iE_{q'} t - i\mathbf{q}'\mathbf{x}}] \rangle = \\ &= \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3 E_q} f(E_q, T). \quad (4.108) \end{aligned}$$

В тепловом равновесии функции распределения бозонов и их античастиц с нулевым химическим потенциалом имеют обычную форму Бозе–Эйнштейна:

$$f_B(E, T) = f_{\bar{B}}(E, T) = \frac{1}{\exp(E/T) - 1}, \quad (4.109)$$

где в пределе высоких температур можно пренебречь массой частицы, т. е. можно считать  $E_q = |\mathbf{q}| \equiv q$ .

Последний интеграл в (4.108) легко берется и дает

$$\langle \phi^*(x)\phi(x) \rangle = \frac{1}{2\pi^2} \int \frac{dq q}{e^{q/T} - 1} = \frac{T^2}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{dz z}{e^z - 1} = \frac{T^2}{12}. \quad (4.110)$$

Среднее значение оператора  $\langle \phi^* \dot{\phi} + \dot{\phi}^* \phi \rangle$  равно нулю.

Подставляя найденные средние значения в уравнение для скаляра кривизны (4.102) и пренебрегая последним слагаемым в выражении для дивергенции тока (4.104), приходим к дифференциальному уравнению четвертого порядка:

$$\begin{aligned} \frac{M_{\text{Pl}}^2}{16\pi} R + \frac{q^2}{6M^4} (R + 3\partial_t^2 + 9H\partial_t) \left[ \left( \ddot{R} + 3H\dot{R} \right) T^2 \right] + \\ + \frac{1}{M^2} \dot{R} \langle J_1^0 \rangle = -\frac{T^{(\text{tot})}}{2}. \quad (4.111) \end{aligned}$$

Здесь  $\langle J^0 \rangle$  является тепловым средним значением плотности барионного числа поля  $\phi$ . Предполагается, что равное нулю изначально, оно генерируется

в результате гравитационного бариосинтеза. Мы пренебрегаем этим слагаемым, поскольку оно не влияет на экспоненциальный рост  $R$  при развитии неустойчивости.

Уравнение (4.111) еще больше упрощается, если  $R(t)$  меняется значительно быстрее, чем темп расширения Вселенной, другими словами, если  $\ddot{R}/\dot{R} \gg H$ . Соответственно, температуру можно считать адиабатически постоянной. Справедливость этих предположений проверяется *a posteriori* после того, как решение для  $R(t)$  найдено.

Удерживая только линейные по  $R$  члены и пренебрегая более высокими степенями  $R$  такими, как  $R^2$  или  $HR$ , получаем линейное дифференциальное уравнение четвертого порядка:

$$\frac{d^4 R}{dt^4} + \mu^4 R = -\frac{1}{2} T^{(\text{tot})}, \quad (4.112)$$

где

$$\mu^4 = \frac{M_{\text{P1}}^2 M^4}{8\pi q^2 T^2}. \quad (4.113)$$

Однородная часть этого уравнения имеет экспоненциальное решение  $R \sim \exp(\lambda t)$  с

$$\lambda = |\mu| \exp\left(\frac{i\pi}{4} + \frac{i\pi n}{2}\right), \quad (4.114)$$

где  $n = 0, 1, 2, 3$ .

Существуют два решения с положительной действительной частью  $\lambda$ . Это означает, что скаляр кривизны экспоненциально неустойчив по отношению к малым возмущениям, т. е.  $R$  будет экспоненциально расти со временем и быстро осциллировать вокруг этой растущей функции.

Теперь следует проверить, действительно ли характерная скорость роста возмущений значительно превышает темп расширения Вселенной, т. е.

$$(\text{Re } \lambda)^4 > H^4 = \left(\frac{8\pi\rho}{3M_{\text{P1}}^2}\right)^2 = \frac{16\pi^6 g_*^2}{2025} \frac{T^8}{M_{\text{P1}}^4}, \quad (4.115)$$

где  $\rho = \pi^2 g_* T^4/30$  есть плотность энергии первичной плазмы при температуре  $T$ , с числом  $g_* \sim 10\text{--}100$  релятивистских степеней свободы в плазме. Это условие выполняется, если

$$\frac{2025}{2^9 \pi^7 q^2 g_*^2} \frac{M_{\text{P1}}^6 M^4}{T^{10}} > 1, \quad (4.116)$$

или, грубо, если  $T \leq M_{\text{Pl}}^{3/5} M^{2/5}$ . Подчеркнем, что при таких температурах неустойчивость быстро развивается и стандартная космология будет разрушена.

Если мы захотим сохранить успешные результаты первичного нуклеосинтеза (BBN) и наложим условие, что время развития неустойчивости больше времени Хаббла в эпоху BBN при температурах  $T \sim 1$  МэВ, то получим, что константа  $M$  должна быть экстремально мала,  $M < 10^{-32}$  МэВ. Желание сохранить стандартную космологию при еще меньших температурах потребует еще меньшей  $M$ . Крошечная  $M$  приводит к огромной силе связи (4.89). Это, очевидно, должно вести к заметным эффектам в астрофизике.

**4.2.3. Обсуждение полученных результатов.** Мы показали, что добавление зависящего от кривизны слагаемого (4.89) в лагранжиан Гильберта–Эйнштейна приводит к дифференциальным уравнениям движения 4-го порядка (4.111) или (4.143) для скаляра кривизны  $R$ . Эти уравнения являются неустойчивыми по отношению к малым возмущениям космологического фона Фридмана–Робертсона–Уокера. Неустойчивость, которую мы обнаружили, ведет к экспоненциальному росту кривизны. Для большого диапазона космологических температур развитие неустойчивости происходит значительно быстрее расширения Вселенной. Рост  $R$  мог бы остановить влияние нелинейных членов в уравнениях движения. Очевидно, что  $R$  перестанет расти, когда нелинейные слагаемые станут сравнимыми по величине с линейными. Это означает, что рост остановится, когда  $R$  заметно превысит значение скаляра кривизны в общей теории относительности. Таким образом, простая версия гравитационного бариосинтеза, основанная на связи (4.89), несовместима с наблюдениями, и необходимы некоторые новые стабилизирующие типы взаимодействия.

Наши результаты получены для двух возможных форм скалярного барионного тока, отличающихся наличием или отсутствием «sea-gull» члена  $|\phi|^2 \partial_\mu R$ . Обе формы тока,  $J_{1\mu}$  и  $J_{2\mu}$ , могут использоваться для построения модели гравитационного бариогенезиса. Важным различием между этими двумя токами является то, что, в отсутствие взаимодействий поля  $\phi$  с другими частицами, протекающих без сохранения барионного числа, ток  $J_{2\mu}$  сохраняется, а ток  $J_{1\mu}$  нет.

В уравнении (4.111) мы пренебрегли влиянием материи и, в частности, поля  $\phi$ . Однако уравнения движения для  $\phi$  (4.94) и (4.97) демонстрируют, что эволюция  $\phi$  зависит от  $R$ . Но на начальной стадии неустойчивости, когда кривизна  $R$  еще не достигла больших значений, влиянием  $R$  на  $\phi$  можно пренебречь. При больших  $R$  эффект может быть существенным и оказывать заметное влияние на бариогенезис.

Следует сделать еще одно замечание. Мы предполагаем, что вначале  $R$  близко к его значению в ОТО, т. е.  $R = R_{\text{GR}} + R_1(t)$ , где  $R_1$  — малая поправка к  $R_{\text{GR}}$ , вызванная неустойчивостью уравнения (4.111). При этом фоновая ме-



трика остается обычной метрикой Фрийдмана–Робертсона–Уокера с медленно или, лучше сказать, нормально меняющимся космологическим масштабным фактором. Когда и если  $R_1$  становится сравнимым по величине с каноническим  $R_{GR}$ , масштабный фактор начинает меняться с той же скоростью, что и  $R_1$ , поскольку для пространственно плоской Вселенной

$$R = -6 \left( \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right). \quad (4.117)$$

Если удастся найти стабилизирующий механизм, приводящий к постоянному  $R$ , то это обеспечит ускоренное расширение Вселенной. При этом взаимодействие (4.89) будет имитировать эффекты темной энергии.

Таким образом, несмотря на неустойчивость, которая кардинально меняет исход гравитационного бариогенезиса, сценарий с взаимодействием (4.89) является многообещающим и может вести к интересным модификациям стандартной космологии.

### 4.3. Неустойчивость гравитационного бариосинтеза с фермионами.

Обобщим результаты, полученные в п. 4.2, на случай более реалистичных барионов со спином  $1/2$  (кварков), который рассмотрен в нашей работе [164]. Лагранжиан взаимодействия  $\mathcal{L}_{GBG}$ , индуцирующий бариогенезис, формально имеет ту же форму, что и лагранжиан (4.89):

$$\mathcal{L}_{GBG} = \frac{f}{M^2} (\partial_\mu R) J_B^\mu, \quad (4.118)$$

в который вместо барионного тока скалярных частиц подставлен барионный ток фермионов  $J^\mu = \bar{Q} \gamma^\mu Q$  с гамма-матрицами  $\gamma^\mu$ , взятыми в искривленном пространстве. Безразмерная константа связи  $f = \pm 1$  введена для возможного изменения знака в выражении выше.

#### 4.3.1. Уравнения движения.

Начнем с действия в виде

$$A = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{M_{Pl}^2}{16\pi} R - \mathcal{L}_m \right] \quad (4.119)$$

с

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_m = & \frac{i}{2} (\bar{Q} \gamma^\mu \nabla_\mu Q - \nabla_\mu \bar{Q} \gamma^\mu Q) - m_Q \bar{Q} Q + \\ & + \frac{i}{2} (\bar{L} \gamma^\mu \nabla_\mu L - \nabla_\mu \bar{L} \gamma^\mu L) - m_L \bar{L} L + \\ & + \frac{g}{m_X^2} [(\bar{Q} Q^c)(\bar{Q} L) + (\bar{Q}^c Q)(\bar{L} Q)] + \frac{f}{M^2} (\partial_\mu R) J^\mu + \mathcal{L}_{\text{other}}, \end{aligned} \quad (4.120)$$

где  $Q$  — кварковое (или кваркоподобное) поле с ненулевым барионным числом,  $L$  — другое фермионное (лептонное) поле;  $\nabla_\mu$  — ковариантная производная дираковского фермиона в тетрадном формализме.  $\mathcal{L}_{\text{other}}$  описывает

все другие формы вещества. Четырехфермионное взаимодействие между кварками и лептонами введено, чтобы обеспечить необходимое несохранение барионного числа, где  $m_X$  — постоянный параметр размерности массы, а  $g$  — безразмерная константа связи. В теориях Великого объединения  $m_X$  может быть порядка  $10^{14}$ – $10^{15}$  ГэВ.

Лагранжиан (4.120) ведет к следующим уравнениям движения для кварков:

$$\begin{aligned} i\gamma^\mu \nabla_\mu Q &= m_Q Q - \frac{f}{M^2} (\partial_\mu R) \gamma^\mu Q - \frac{g}{m_X^2} [2Q^c (\bar{Q}L) + (\bar{Q}Q^c)L], \\ i\nabla_\mu \bar{Q} \gamma^\mu &= -m_Q \bar{Q} + \frac{f}{M^2} (\partial_\mu R) \bar{Q} \gamma^\mu + \frac{g}{m_X^2} [2\bar{Q}^c (\bar{L}Q) + \bar{L}(\bar{Q}^c Q)], \end{aligned} \quad (4.121)$$

в то время как для лептонов он дает

$$\begin{aligned} i\gamma^\mu \nabla_\mu L &= m_L L - \frac{g}{m_X^2} (\bar{Q}^c Q) Q, \\ i\nabla_\mu \bar{L} \gamma^\mu &= -m_L \bar{L} + \frac{g}{m_X^2} (\bar{Q}Q^c) \bar{Q}. \end{aligned} \quad (4.122)$$

Заметим, что фермионная часть лагранжиана (4.120), взятая на уравнениях движения кварков и лептонов (4.121) и (4.122), не обращается в нуль вследствие взаимодействия между ними:

$$\mathcal{L}_m [\text{Eqs of motion}] = -\frac{g}{m_X^2} [(\bar{Q}Q^c)(\bar{Q}L) + (\bar{Q}^c Q)(\bar{L}Q)], \quad (4.123)$$

в отличие от случая свободных фермионов.

Варируя действие (4.119) по метрике  $g^{\mu\nu}$ , запишем уравнения для гравитационного поля в форме

$$\frac{M_{\text{Pl}}^2}{8\pi} \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) = T_{\mu\nu}^m, \quad (4.124)$$

где тензор энергии-импульса  $T_{\mu\nu}^m$  определен как

$$T_{\mu\nu}^m = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta A_m}{\delta g^{\mu\nu}} \quad (4.125)$$

с

$$A_m = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_m. \quad (4.126)$$

Полученные таким образом гравитационные уравнения движения могут быть представлены как

$$\begin{aligned} \frac{M_{\text{Pl}}^2}{8\pi} \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) = & -g_{\mu\nu} \mathcal{L}_m + \\ & + \frac{i}{4} [(\bar{Q}(\gamma_\mu \nabla_\nu + \gamma_\nu \nabla_\mu)Q - (\nabla_\nu \bar{Q} \gamma_\mu + \nabla_\mu \bar{Q} \gamma_\nu)Q)] + \\ & + \frac{i}{4} [(\bar{L}(\gamma_\mu \nabla_\nu + \gamma_\nu \nabla_\mu)L - (\nabla_\nu \bar{L} \gamma_\mu + \nabla_\mu \bar{L} \gamma_\nu)L] - \\ & - \frac{2f}{M^2} [R_{\mu\nu} + g_{\mu\nu} D^2 - D_\mu D_\nu] D_\alpha J^\alpha + \frac{f}{2M^2} (J_\mu \partial_\nu R + J_\nu \partial_\mu R), \end{aligned} \quad (4.127)$$

где  $D_\mu$  — обычная ковариантная производная в фоновой метрике.

Сворачивая выражение (4.127) по индексам  $\mu$  и  $\nu$ , получим следующее уравнение движения для скаляра кривизны:

$$\begin{aligned} -\frac{M_{\text{Pl}}^2}{8\pi} R = m_Q \bar{Q}Q + m_L \bar{L}L + \frac{2g}{m_X^2} [(\bar{Q}Q^c)(\bar{Q}L) + (\bar{Q}^cQ)(\bar{L}Q)] - \\ - \frac{2f}{M^2} (R + 3D^2) D_\alpha J^\alpha + T_{\text{other}}. \end{aligned} \quad (4.128)$$

Здесь  $T_{\text{other}}$  есть след тензора энергии-импульса всех остальных полей. На релятивистской стадии, когда все массы пренебрежимо малы, можно положить  $T_{\text{other}} = 0$ . Членом взаимодействия, пропорциональным  $g$ , усредненным по космологической плазме, также можно пренебречь.

Как будет показано ниже, кинетическое уравнение приводит к явной зависимости от  $R$  дивергенции тока,  $D_\alpha J^\alpha$ , если ток не сохраняется. В результате возникает уравнение четвертого порядка для скаляра кривизны  $R$ , являющееся сильно неустойчивым.

Можно использовать другое представление для кварковых полей:

$$Q_2 = \exp(ifR/M^2) Q, \quad (4.129)$$

аналогично тому, как было сделано при рассмотрении спонтанного бариосинтеза в нашей работе [162] и обсуждалось в п. 4.1 данного обзора. Записанный в терминах поля  $Q_2$  лагранжиан (4.120) не будет содержать слагаемых, пропорциональных  $f/M^2$ , однако зависимость от таких слагаемых возникнет в члене взаимодействия:

$$\frac{2g}{m_X^2} \left[ e^{-3ifR/M^2} (\bar{Q}_2 Q_2^c)(\bar{Q}_2 L) + e^{3ifR/M^2} (\bar{Q}_2^c Q_2)(\bar{L} Q_2) \right]. \quad (4.130)$$

Тем не менее для эволюции скаляра кривизны получается такое же уравнение четвертого порядка, что и в случае «неповернутого» поля  $Q$ .

Как и ранее, мы изучаем решения уравнения (4.128) в космологии на однородном и изотропном фоне с метрикой Фрийдмана–Робертсона–Уокера (4.101):  $ds^2 = dt^2 - a^2(t) d\mathbf{r}^2$ . Кривизна зависит только от времени, а ковариантная производная, действующая на вектор  $V^\alpha$ , зависящий только от времени и имеющий лишь временную компоненту, имеет вид

$$D_\alpha V^\alpha = (\partial_t + 3H)V^t, \quad (4.131)$$

где  $H = \dot{a}/a$  — параметр Хаббла.

**4.3.2. Кинетическое уравнение.** Рассмотрим в качестве примера реакцию  $q_1 + q_2 \leftrightarrow \bar{q}_3 + l_4$ , в которой  $q_1$  и  $q_2$  суть кварки с импульсами  $q_1$  и  $q_2$ , в то время как  $\bar{q}_3$  и  $l_4$  обозначают антикварк и лептон с импульсами  $q_3$  и  $l_4$ . Мы используем один и тот же символ для обозначения самой частицы и ее импульса. Кинетическое уравнение для вариации плотности барионного числа  $n_B \equiv J^t$ , записанное для такой реакции в FRW-метрике, имеет вид

$$(\partial_t + 3H)n_B = I_B^{\text{coll}}. \quad (4.132)$$

Интеграл столкновений для взаимодействия, не зависящего от времени и пространства, равен

$$I_B^{\text{coll}} = -3B_q(2\pi)^4 \int d\nu_{q_1, q_2} d\nu_{\bar{q}_3, l_4} \delta^4(q_1 + q_2 - q_3 - l_4) \times \\ \times [ |A(q_1 + q_2 \rightarrow \bar{q}_3 + l_4)|^2 f_{q_1} f_{q_2} - |A(\bar{q}_3 + l_4 \rightarrow q_1 + q_2)|^2 f_{\bar{q}_3} f_{l_4} ], \quad (4.133)$$

где  $A(a \rightarrow b)$  есть амплитуда перехода из состояния  $a$  в состояние  $b$ ,  $B_q$  — барионное число кварков;  $f_a$  — распределение в фазовом пространстве (число заполнения), и

$$d\nu_{q_1, q_2} = \frac{d^3 q_1}{2E_{q_1} (2\pi)^3} \frac{d^3 q_2}{2E_{q_2} (2\pi)^3}. \quad (4.134)$$

$E_q = \sqrt{q^2 + m^2}$  есть энергия частицы с 3-импульсом  $q$  и массой  $m$ . Элемент фазового пространства конечных частиц,  $d\nu_{\bar{q}_3, l_4}$ , определяется аналогично.

В интеграле столкновений мы пренебрегаем факторами Ферми подавления и эффектами гравитации, что обычно является хорошим приближением.

Вычисления сильно упрощаются, если кварки и лептоны находятся в равновесии относительно упругого рассеяния и аннигиляции. В этом случае их функции распределения имеют вид

$$f = \frac{1}{e^{(E/T - \xi)} + 1} \approx e^{-E/T + \xi}, \quad (4.135)$$

где  $\xi = \mu/T$  — безразмерный химический потенциал, различающийся для кварков  $\xi_q$  и лептонов  $\xi_l$ .

Предположение о кинетическом равновесии вполне оправдано, поскольку оно обычно обеспечивается очень эффективным упругим рассеянием. Равновесие относительно аннигиляции, скажем, в два канала:  $2\gamma$  и  $3\gamma$ , подразумевает обычную связь между химическими потенциалами частиц и античастиц,  $\bar{\mu} = -\mu$ . Однако, если мы используем исходное представление для кварковых полей, удовлетворяющих уравнениям движения (4.121), вывод о кинетическом равновесии неочевиден, поскольку эволюция кварков зависит от кривизны  $R(t)$ , которая может быстро меняться, как мы увидим в дальнейшем. На первый взгляд, равновесное распределение, возможно, не в состоянии следовать за быстрым изменением  $R$ . Эта проблема отсутствует в представлении (4.129), так как  $R(t)$  не входит ни в уравнение движения, ни в амплитуды упругого рассеяния и аннигиляции.

В представлении (4.129) плотность барионного числа дается выражением

$$\begin{aligned} n_B &= \int \frac{d^3q}{2E_q(2\pi)^3} (f_q - f_{\bar{q}}) = \\ &= \frac{g_S B_q}{6} \left( \mu T^2 + \frac{\mu^3}{\pi^2} \right) = \frac{g_S B_q T^3}{6} \left( \xi + \frac{\xi^3}{\pi^2} \right), \end{aligned} \quad (4.136)$$

где  $T$  — космологическая температура плазмы;  $g_S$  — число спиновых состояний барионов.

Поскольку амплитуды перехода, входящие в интеграл столкновений, являются результатом интегрирования по времени оператора (4.130), взятого между начальным и конечным состояниями, дельта-функция, отражающая закон сохранения энергии в (4.133), должна быть модифицирована из-за наличия зависящих от времени факторов  $\exp[\pm 3ifR(t)/M^2]$ . В простейшем случае, который обычно рассматривается в гравитационном (и спонтанном) бариосинтезе, предполагается, что  $\dot{R}$  медленно меняется, так что можно аппроксимировать  $R(t) \approx \dot{R}(t)t$ . В этом случае энергия не сохраняется, но условие сохранения энергии очевидным образом модифицируется:

$$\begin{aligned} \delta[E(q_1) + E(q_2) - E(q_3) - E(l_4)] &\rightarrow \\ \rightarrow \delta \left[ E(q_1) + E(q_2) - E(q_3) - E(l_4) - \frac{3f\dot{R}(t)}{M^2} \right]. \end{aligned} \quad (4.137)$$

Таким образом, энергия не сохраняется из-за действия внешнего поля  $R(t)$ . Дельта-функция (4.137) не является точной, но результат близок к ней, если  $\dot{R}(t)$  очень мало меняется в течение эффективного времени соответствующих реакций.

Если безразмерные химические потенциалы  $\xi_q$  и  $\xi_l$ , так же, как и член  $f\dot{R}(t)/M^2/T$ , малы, а баланс энергии задается дельта-функцией (4.137), то

интеграл столкновений можно аппроксимировать как

$$I_B^{\text{coll}} \approx \frac{C_I g^2 T^8}{m_X^4} \left[ \frac{3f\dot{R}(t)}{M^2 T} - 3\xi_q + \xi_l \right], \quad (4.138)$$

где  $C_I$  — положительная безразмерная постоянная. Фактор  $T^8$  возникает для реакций с безмассовыми частицами, а степень 8 найдена из соображений размерностей. Так как сумма барионного и лептонного чисел сохраняется, то  $\xi_l = -\xi_q/3$ .

Случай существенного изменения  $\dot{R}(t)$  аналогичен быстрому изменению  $\dot{\theta}(t)$ , исследованному в нашей работе [162] и рассмотренному в п. 4.1.7 обзора. Ясно, что это значительно сложнее технически. Здесь мы изучаем только простую ситуацию с квазистационарным фоном и откладываем более реалистичную зависимость  $R(t)$  от времени до будущих работ.

Для малого химического потенциала плотность барионного числа (4.136) равна

$$n_B \approx \frac{g_S B_q}{6} \xi_q T^3, \quad (4.139)$$

и если температура медленно понижается в ходе космологического расширения, в соответствии с  $\dot{T} = -HT$ , то уравнение (4.132) переходит в

$$\dot{\xi}_q = \Gamma \left[ \frac{9f\dot{R}(t)}{10M^2 T} - \xi_q \right], \quad (4.140)$$

где  $\Gamma \sim g^2 T^5 / m_X^4$  является скоростью реакций с несохранением барионного числа.

Если  $\Gamma$  достаточно велико, то (4.140) можно решить в приближении стационарной точки:

$$\xi_q = \xi_q^{\text{eq}} - \dot{\xi}_q^{\text{eq}} / \Gamma, \quad (4.141)$$

где

$$\xi_q^{\text{eq}} = \frac{9}{10} \frac{f\dot{R}}{M^2 T}. \quad (4.142)$$

Это является главным выводом данного подраздела. Если подставить  $\xi_q^{\text{eq}}$  в (4.128), получим уравнение четвертого порядка для  $R$ , как описано ниже.

**4.3.3. Неустойчивость кривизны.** Как отмечено в комментарии после уравнения (4.128), вкладом частиц горячей космической плазмы можно пренебречь, и мы приходим к очень простому дифференциальному уравнению четвертого порядка:

$$\frac{d^4 R}{dt^4} = \lambda^4 R, \quad (4.143)$$

где  $\lambda^4 = C_\lambda M_{\text{Pl}}^2 M^4 / T^2$  с  $C_\lambda = 5 / (36\pi f^2 g_s B_q)$ . При выводе этого уравнения мы пренебрегли параметром Хаббла по сравнению с производной по времени от  $R$ . Справедливость этого устанавливается *a posteriori*, поскольку полученное  $\lambda$  оказывается значительно больше, чем  $H$ .

Несомненно, уравнение (4.143) имеет сильно неустойчивое решение, причем время развития неустойчивости заметно меньше космологического времени. Эта неустойчивость может привести к взрывному росту  $R$ , который, возможно, будет остановлен нелинейными членами, пропорциональными произведению  $H$  и низших производных  $R$ . Соответственно, можно ожидать стабилизации, если  $HR \sim \dot{R}$ , т. е.  $H \sim \lambda$ . Поскольку

$$\dot{H} + 2H^2 = -R/6, \quad (4.144)$$

$H$  будет расти экспоненциально вместе с  $R$ ,  $H \sim \exp(\lambda t)$  и  $\lambda H \sim R$ . Таким образом, стабилизация может иметь место при  $R \sim \lambda^2 \sim M_{\text{Pl}}^2 M^2 / T$ . Этот результат следует сравнить с обычным значением скаляра кривизны в ОТО,  $R_{\text{GR}} \sim T_{\text{matter}} / M_{\text{Pl}}^2$ , где  $T_{\text{matter}}$  — след тензора энергии-импульса вещества.

Если  $\dot{R}$  все еще мало, так что условие баланса энергии (4.137) выполняется, но  $\dot{R} / (M^2 T)$  велико, то асимметрия также будет большой, а приближение Больцмановской статистики становится несправедливым. Несмотря на это, равновесное решение, которое обращает в нуль интеграл столкновений, остается тем же, (4.142). Однако при  $\xi \gtrsim 1$  кубические члены в барийонной плотности (4.136) становятся существенными, и вместо (4.143) находим

$$\frac{d^2}{dt^2} \left[ \ddot{R} \left( 1 + \frac{3}{\pi^2} \left( \frac{9f\dot{R}}{10M^2T} \right)^2 \right) \right] = \lambda^4 R. \quad (4.145)$$

Если производными низкого порядка от  $R$  можно пренебречь, мы приходим к более простому уравнению

$$\frac{d^4 R}{dt^4} = \lambda^4 R \left[ 1 + \frac{243}{10\pi^2} \left( \frac{f\dot{R}}{M^2T} \right)^2 \right]^{-1}, \quad (4.146)$$

из которого видно, что рост  $R$  должен прекратиться, когда  $\dot{R} \sim M^2 T / f$ .

Рассмотренный нами эффект сильной неустойчивости дифференциальных уравнений высокого порядка с малым коэффициентом  $\epsilon$  при старшей производной хорошо известен математикам, но может быть неожиданным для физиков. Еще более удивительным является отсутствие непрерывности при переходе к пределу  $\epsilon \rightarrow 0$ . Если положить  $\epsilon = 0$  с самого начала, то неустойчивость не возникает и теория сводится к обычной теории низших порядков, в то время как с произвольным малым, но ненулевым,  $\epsilon$  уравнение

движения имеет решения, отсутствующие в пределе  $\epsilon = 0$ . Более того, чем меньше  $\epsilon$ , тем быстрее растет неустойчивое решение.

Здесь мы описываем только основные черты нового эффекта неустойчивости в гравитационном бариогенезисе с фермионами. Для более аккуратного анализа необходимо численное решение. Проблема усложняется, поскольку предположение о медленном изменении  $\dot{R}$  быстро нарушается, а интеграл столкновений на зависящем от времени фоне вычисляется не так просто, как стационарный. Техника решения кинетического уравнения на нестационарном фоне представлена в нашей работе [162].

В заключение следует сказать, что нами показано, что гравитационный бариогенезис в простейших версиях, описанных в литературе, не является реалистичным, поскольку неустойчивость возникающих гравитационных уравнений разрушает стандартную космологию. Очень желателен какой-нибудь стабилизирующий механизм. Возможно, стабилизацию удастся получить в  $F(R)$ -модифицированной гравитации или путем введения формфактора  $g(R)$  в связь (4.118) такого, что  $g(R)$  будет падать с ростом  $R$ .

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В отличие от общей теории относительности, при модификациях гравитации уравнения движения имеют порядок выше второго, что может приводить к сильной неустойчивости решений относительно малых флуктуаций и заметному искажению стандартной космологии и астрофизики.

Было обнаружено новое явление возникновения сингулярного состояния с бесконечной величиной скаляра кривизны пространства-времени в сжимающихся системах с растущей плотностью массы/энергии вещества. Далее было показано, что для предложенного в литературе механизма устранения сингулярности в прошлом за счет добавления квадратичного по кривизне слагаемого в лагранжиан сингулярность также исчезает и в будущем. При этом кривизна  $R$  хотя и не обращается в бесконечность, но в процессе высокочастотных осцилляций принимает значения, намного превышающие ее величину в классической ОТО. Расчеты эффективности рождения элементарных частиц осциллирующей кривизной показали, что это явление потенциально наблюдаемо в спектре космических лучей высоких энергий.

Величина вклада частиц высоких энергий, порожденных осцилляциями  $R(t)$ , в спектр космических лучей зависит от параметров  $F(R)$ -модели, и сравнение предсказаний теории с наблюдениями можно рекомендовать как перспективный метод фиксации формы  $F(R)$ -функции.

Детальное изучение космологической эволюции в теории с  $R^2$ -слагаемым, добавленным в лагранжиан, с учетом гравитационного рождения частиц позволило заключить, что космологическая эволюция обычной материи суще-



ственно отличается от стандартной, что вновь открывает возможность существования легчайших суперсимметричных частиц (ЛСЧ) в качестве носителей темной материи.

Полученные результаты позволяют оценить величину массы легчайших суперсимметричных частиц и могут быть рекомендованы как перспективное направление по поиску ЛСЧ в низкофоновых детекторах и по продуктам их аннигиляции в космических лучах.

Была исследована гравитационная неустойчивость в классической ОТО и модифицированной  $F(R)$ -гравитации. В классическом случае был предложен новый способ решения известной проблемы несамосогласованности уравнений теории Джинса. В рамках  $F(R)$ -теории было обнаружено, что нарушается теорема Джебсена–Биркгофа, и в силу этого системы конечного размера могут создавать гравитационное отталкивание. Было найдено, что рост возмущений плотности на фоне осциллирующей кривизны существенно усиливается за счет параметрического резонанса и нового эффекта антитрения.

Найденное явление антигравитации может объяснить существование космических пустот. Для более точных выводов в перспективе рекомендуется детальный количественный анализ образования крупномасштабной структуры Вселенной.

Подробный анализ генерации барионной асимметрии Вселенной в рамках моделей спонтанного и гравитационного бариогенезиса позволил сделать вывод, что поправки к космологическим уравнениям, возникающие в модели гравитационного бариогенезиса, приводят к сильной неустойчивости решений и, как результат, к неприемлемому искажению космологической эволюции.

Полученный результат либо исключает сценарий гравитационного бариогенезиса, либо стимулирует поиск механизма стабилизации полученных уравнений, открывая перспективную возможность одновременного объяснения ускоренного космологического расширения.

Данная работа была выполнена при поддержке Российского научного фонда (грант № 19-42-02004).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Riess A. G. et al. (Supernova Search Team)*. Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant // *Astron. J.* 1998. V. 116. P. 1009.
2. *Perlmutter S. et al. (Supernova Cosmology Project Collab.)*. Discovery of a Supernova Explosion at Half the Age of the Universe and Its Cosmological Implications // *Nature*. 1998. V. 391. P. 51.
3. *Schmidt B. P. et al. (Supernova Search Team)*. The High  $Z$  Supernova Search: Measuring Cosmic Deceleration and Global Curvature of the Universe Using Type Ia Supernovae // *Astrophys. J.* 1998. V. 507. P. 46.

4. *Perlmutter S. et al. (Supernova Cosmology Project Collab.)*. Measurements of Omega and Lambda from 42 High Redshift Supernovae // *Astrophys. J.* 1999. V. 517. P. 565.
5. *Riess A. G. et al. (Supernova Search Team)*. Type Ia Supernova Discoveries at  $z > 1$  from the Hubble Space Telescope: Evidence for Past Deceleration and Constraints on Dark Energy Evolution // *Astrophys. J.* 2004. V. 607. P. 665.
6. *Freedman W. L. et al.* The Hubble Space Telescope Extragalactic Distance Scale Key Project. 1: The Discovery of Cepheids and a New Distance to M81 // *Astrophys. J.* 1994. V. 427. P. 628.
7. *Schmidt B. P., Kirshner R. P., Eastman R. G., Phillips M. M., Suntzeff N. B., Hamuy M., Maza J., Aviles R.* The Distances to Five Type II Supernovae Using the Expanding Photosphere Method and the Value of  $h_0$  // *Astrophys. J.* 1994. V. 432. P. 42.
8. *Riess A. G., Press W. H., Kirshner R. P.* A Precise Distance Indicator: Type Ia Supernova Multicolor Light Curve Shapes // *Astrophys. J.* 1996. V. 473. P. 88.
9. *Chaboyer B.* The Age of the Universe // *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* 1996. V. 51B. P. 10.
10. *Chaboyer B., Kernan P. J., Krauss L. M., Demarque P.* A Lower Limit on the Age of the Universe // *Science.* 1996. V. 271. P. 957.
11. *Chaboyer B., Demarque P., Sarajedini A.* Globular Cluster Ages and the Formation of the Galactic Halo // *Astrophys. J.* 1996. V. 459. P. 558.
12. *Hinshaw G. et al. (WMAP Collab.)*. Nine-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Cosmological Parameter Results // *Astrophys. J. Suppl.* 2013. V. 208. P. 19.
13. *Aghanim N. et al. (Planck Collab.)*. Planck 2018 Results. VI. Cosmological Parameters. <https://arxiv.org/abs/1807.06209>.
14. *Percival W. J. et al. (2dFGRS Collab.)*. The 2dF Galaxy Redshift Survey: The Power Spectrum and the Matter Content of the Universe // *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 2001. V. 327. P. 1297.
15. *Peacock J. A. et al.* A Measurement of the Cosmological Mass Density from Clustering in the 2dF Galaxy Redshift Survey // *Nature.* 2001. V. 410. P. 169.
16. *Deustua S. E., Caldwell R., Garnavich P., Hui L., Refregier A.* Cosmological Parameters, Dark Energy and Large Scale Structure. <https://arxiv.org/abs/astro-ph/0207293>.
17. *Coil A. L.* Large Scale Structure of the Universe. <https://arxiv.org/abs/1202.6633>.
18. *Dodelson S.* *Modern Cosmology*. Amsterdam: Acad. Press, 2003. 440 p.
19. *Mukhanov V.* *Physical Foundations of Cosmology*. Oxford, UK: Cambridge Univ. Press, 2005. 421 p.
20. *Weinberg S.* *Cosmology*. Oxford, UK: Oxford Univ. Press, 2008. 593 p.
21. *Горбунов Д. С., Рубаков В. А.* Введение в теорию ранней Вселенной: космологические возмущения. Инфляционная теория. М.: КРАСАНД, 2016. 568 с. (*Gorbunov D. S., Rubakov V. A.* Introduction to the Theory of the Early Universe: Cosmological Perturbations and Inflationary Theory. Hackensack, USA: World Sci., 2011. 489 p.)
22. *Bambi C., Dolgov A. D.* *Introduction to Particle Cosmology*. Springer, 2015. 215 p.
23. *Gamow G.* Expanding Universe and the Origin of Elements // *Phys. Rev.* 1946. V. 70. P. 572.

24. *Alpher R. A., Bethe H., Gamow G.* The Origin of Chemical Elements // *Phys. Rev.* 1948. V. 73. P. 803.
25. Долгов А. Д., Зельдович Я. Б. Космология и элементарные частицы // УФН. 1980. Т. 130. С. 559.
26. *Dolgov A. D., Zeldovich Ya. B.* Cosmology and Elementary Particles // *Rev. Mod. Phys.* 1981. V. 53. P. 1.
27. Долгов А. Д., Зельдович Я. Б., Сажин М. В. Космология ранней Вселенной. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1988. 199 с.
28. *Kolb E., Turner M.* The Early Universe // *Front. Phys.* 1990. V. 69. P. 1.
29. *Dolgov A. D., Sazhin M. V., Zeldovich Ya. B.* Basics of Modern Cosmology. Gif-sur-Yvette, France: Frontieres, 1991. 247 p.
30. *Kazanas D.* Dynamics of the Universe and Spontaneous Symmetry Breaking // *Astrophys. J.* 1980. V. 241. P. L59.
31. Старобинский А. А. Спектр реликтового гравитационного излучения и начальное состояние Вселенной // Письма в ЖЭТФ. 1979. Т. 30. № 11. С. 719 (*Starobinsky A. A.* Spectrum of Relict Gravitational Radiation and the Early State of the Universe // *JETP Lett.* 1979. V. 30. No. 11. P. 682).
32. Гурович В. Ц., Старобинский А. А. Квантовые эффекты и регулярные космологические модели // ЖЭТФ. 1979. Т. 77, № 5. С. 1683 (*Gurovich V. T., Starobinsky A. A.* Quantum Effects and Regular Cosmological Models // *Sov. Phys. JETP.* 1979. V. 50. P. 844).
33. *Starobinsky A. A.* A New Type of Isotropic Cosmological Models without Singularity // *Phys. Lett. B.* 1980. V. 91. P. 99.
34. *Guth A. H.* The Inflationary Universe: A Possible Solution to the Horizon and Flatness Problems // *Phys. Rev. D.* 1981. V. 23. P. 347.
35. *Linde A. D.* A New Inflationary Universe Scenario: A Possible Solution of the Horizon, Flatness, Homogeneity, Isotropy and Primordial Monopole Problems // *Phys. Lett. B.* 1982. V. 108. P. 389.
36. *Linde A. D.* Scalar Field Fluctuations in Expanding Universe and the New Inflationary Universe Scenario // *Ibid.* V. 116. P. 335.
37. *Albrecht A., Steinhardt P. J.* Cosmology for Grand Unified Theories with Radiatively Induced Symmetry Breaking // *Phys. Rev. Lett.* 1982. V. 48. P. 1220.
38. Муханов В. Ф., Чибисов Г. В. Квантовые флуктуации и несингулярная Вселенная // Письма ЖЭТФ. 1981. Т. 33. С. 549 (*Mukhanov V. F., Chibisov G. V.* Quantum Fluctuations and a Nonsingular Universe // *JETP Lett.* 1981. V. 33. P. 532).
39. *Linde A. D.* Particle Physics and Inflationary Cosmology // *Contemp. Concepts Phys.* 1990. V. 5. P. 1.
40. *Guth A. H.* The Inflationary Universe: The Quest for a New Theory of Cosmic Origins. Reading, USA: Addison-Wesley, 1997. 358 p.
41. *Liddle A. R., Lyth D. H.* Cosmological Inflation and Large Scale Structure. Cambridge, UK: Univ. Press, 2000. 400 p.
42. *Linde A. D.* Inflationary Cosmology // *Lect. Notes Phys.* 2008. V. 738. P. 1.
43. *Lyth D. H., Liddle A. R.* The Primordial Density Perturbation: Cosmology, Inflation and the Origin of Structure. Cambridge, UK: Cambridge Univ. Press, 2009. 497 p.

44. *Brandenberger R. H.* Beyond Standard Inflationary Cosmology. <https://arxiv.org/abs/1809.04926>.
45. *Rubakov V. A., Sazhin M. V., Veryaskin A. V.* Graviton Creation in the Inflationary Universe and the Grand Unification Scale // *Phys. Lett. B.* 1982. V. 115. P. 189.
46. *Dolgov A. D., Linde A. D.* Baryon Asymmetry in Inflationary Universe // *Ibid.* V. 116. P. 329.
47. *Albrecht A., Steinhardt P. J., Turner M. S., Wilczek F.* Reheating an Inflationary Universe // *Phys. Rev. Lett.* 1982. V. 48. P. 1437.
48. *Abbott L. F., Farhi E., Wise M. B.* Particle Production in the New Inflationary Cosmology // *Phys. Lett. B.* 1982. V. 117. P. 29.
49. *Долгов А. Д., Кирилова Д. П.* Рождение частиц переменным скалярным полем // *ЯФ.* 1990. Т. 51. С. 273; (*Dolgov A. D., Kirilova D. P.* On Particle Creation by a Time-Dependent Scalar Field // *Sov. J. Nucl. Phys.* 1990. V. 51. P. 172).
50. *Traschen J. H., Brandenberger R. H.* Particle Production during Out-of-Equilibrium Phase Transitions // *Phys. Rev. D.* 1990. V. 42. P. 2491.
51. *Kofman L., Linde A. D., Starobinsky A. A.* Towards the Theory of Reheating after Inflation // *Phys. Rev. D.* 1997. V. 56. P. 3258.
52. *Kuzmin V. A., Tkachev I. I.* Matter Creation via Vacuum Fluctuations in the Early Universe and Observed Ultrahigh-Energy Cosmic Ray Events // *Phys. Rev. D.* 1999. V. 59. P. 123006.
53. *Kuzmin V. A., Tkachev I. I.* Ultrahigh-Energy Cosmic Rays and Inflation Relics // *Phys. Rep.* 1999. V. 320. P. 199.
54. *Kofman L.* Preheating after Inflation // *Lect. Notes Phys.* 2008. V. 738. P. 55.
55. *Zwicky F.* Die Rotverschiebung von extragalaktischen Nebeln // *Helv. Phys. Acta.* 1933. V. 6. P. 110 (*Gen. Rel. Grav.* 2009. V. 41. P. 207).
56. *Zwicky F.* On the Masses of Nebulae and of Clusters of Nebulae // *Astrophys. J.* 1937. V. 86. P. 217.
57. *Babcock H. W.* The Rotation of the Andromeda Nebula // *Lick Observ. Bull.* 1939. V. 19, No. 498. P. 41.
58. *Einasto J., Kaasik A., Saar E.* Dynamic Evidence on Massive Coronas of Galaxies // *Nature.* 1974. V. 250. P. 309.
59. *Einasto J., Saar E., Kaasik A., Chernin A. D.* Missing Mass around Galaxies — Morphological Evidence // *Ibid.* V. 252. P. 111.
60. *Ostriker J. P., Peebles P. J. E., Yahil A.* The Size and Mass of Galaxies, and the Mass of the Universe // *Astrophys. J.* 1974. V. 193. P. L1.
61. *Блинников С. И.* Зеркальное вещество и другие модели для темной материи // *УФН.* 2014. Т. 184, № 2. С. 194 (*Blinnikov S. I.* Mirror Matter and Other Dark Matter Models // *Phys. Usp.* 2014. V. 184, No. 2. P. 194).
62. *Gelmini G. B.* TASI 2014 Lectures: The Hunt for Dark Matter. <https://arxiv.org/abs/1502.01320>.
63. *Lisanti M.* Lectures on Dark Matter Physics. <https://arxiv.org/abs/1603.03797>.
64. *Slatyer T. R.* TASI Lectures on Indirect Detection of Dark Matter. <https://arxiv.org/abs/1710.05137>.

65. *Cline J. M.* TASI Lectures on Early Universe Cosmology: Inflation, Baryogenesis and Dark Matter. <https://arxiv.org/abs/1807.08749>.
66. *Will C. M.* The Confrontation between General Relativity and Experiment // *Living Rev. Rel.* 2006. V. 9. P. 3.
67. *Abbott B. P. et al. (LIGO Scientific and Virgo Collab.)*. GW151226: Observation of Gravitational Waves from a 22-Solar-Mass Binary Black Hole Coalescence // *Phys. Rev. Lett.* 2016. V. 116, No. 24. P. 241103.
68. *Abbott B. P. et al. (LIGO Scientific and Virgo Collab.)*. Binary Black Hole Mergers in the First Advanced LIGO Observing Run // *Phys. Rev. X.* 2016. V. 6, No. 4. P. 041015; Erratum // *Phys. Rev. X.* 2018. V. 8. No 3. P. 039903.
69. *Gauss C. F.* Beiträge zur Theorie der algebraischen Gleichungen // *Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen.* 1850. Bd. 4. 1848–1850. S. 3; <https://gdz.sub.uni-goettingen.de/id/PPN250442582-0004>.
70. *Einstein A.* Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie // *Ann. Phys.* 1916. V. 49, No. 7. P. 769;  
*Einstein A.* The Foundation of the General Theory of Relativity // *Ann. Phys.* 2005. V. 14. P. 517.
71. *Einstein A.* The Field Equations of Gravitation // *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)*. 1915. P. 844.
72. *Einstein A.* On the General Theory of Relativity // *Ibid.* P. 778; Addendum // *Ibid.* P. 799.
73. *Hilbert D.* Die Grundlagen der Physik. 1 // *Gott. Nachr.* 1915. V. 27. P. 395.
74. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теория поля: Учеб. пособие для вузов / Под ред. Л. П. Питаевского. 8-е изд., стер. М.: Физматлит, 2003. 536 с.
75. *Friedmann A.* On the Possibility of a World with Constant Negative Curvature of Space // *Z. Phys.* 1924. V. 21. P. 326 (Gen. Rel. Grav. 1999. V. 31. P. 2001).
76. *Lemaitre G.* A Homogeneous Universe of Constant Mass and Growing Radius Accounting for the Radial Velocity of Extragalactic Nebulae // *Ann. Soc. Sci. Bruxelles A.* 1927. V. 47. P. 49 (Gen. Rel. Grav. 2013. V. 45, No. 8. P. 1635).
77. *Robertson H. P.* Kinematics and World-Structure // *Astrophys. J.* 1935. V. 82. P. 284.
78. *Robertson H. P.* Kinematics and World-Structure. 2 // *Ibid.* V. 83. P. 187.
79. *Robertson H. P.* Kinematics and World-Structure. 3 // *Astrophys. J.* 1936. V. 83. P. 257.
80. *Walker A. G.* On Milne's Theory of World-Structure // *Proc. London Math. Soc.* 2. 1937. V. 42. P. 90.
81. *Abbott B. P. et al. (LIGO Scientific and Virgo and IM2H and Dark Energy Camera GW-E and DES and DLT40 and Las Cumbres Observatory and VINROUGE and MASTER Collab.)*. A Gravitational-Wave Standard Siren Measurement of the Hubble Constant // *Nature.* 2017. V. 551, No. 7678. P. 85.
82. *Riess A. G. et al.* Milky Way Cepheid Standards for Measuring Cosmic Distances and Application to Gaia DR2: Implications for the Hubble Constant // *Astrophys. J.* 2018. V. 861, No. 2. P. 126.
83. *Tanabashi M. et al. (Particle Data Group)*. Review of Particle Physics // *Phys. Rev. D.* 2018. V. 98, No. 3. P. 030001.

84. *Freedman W. L., Madore B. F., Scowcroft V., Burns C., Monson A., Persson S. E., Seibert M., Rigby J.* Carnegie Hubble Program: A Mid-Infrared Calibration of the Hubble Constant // *Astrophys. J.* 2012. V. 758. P. 24.
85. *Riess A. G. et al.* A 2.4% Determination of the Local Value of the Hubble Constant // *Astrophys. J.* 2016. V. 826, No. 1. P. 56.
86. *Berezhiani Z., Dolgov A. D., Tkachev I. I.* Reconciling Planck Results with Low Redshift Astronomical Measurements // *Phys. Rev. D.* 2015. V. 92, No. 6. P. 061303.
87. *Jebsen J. T.* Über die allgemeinen kugelsymmetrischen Lösungen der Einsteinschen Gravitationsgleichungen im Vakuum // *Arkiv für Matematik, Astronomi och Fysik.* 1921. V. 15. P. 1;  
*Jebsen J. T.* On the General Spherically Symmetric Solutions of Einstein's Gravitational Equations in Vacuo // *Gen. Rel. Grav.* 2005. V. 37, No. 12. P. 2253.
88. *Birkhoff G. D., Langer R. E.* *Relativity and Modern Physics.* Cambridge, Massachusetts: Harvard Univ. Press, 1923. 283 p.
89. *Hawking S. W., Ellis G. F. R.* *The Large Scale Structure of Space-Time.* Cambridge, UK: Cambridge Univ. Press, 1973. 391 p.
90. *Pauli W.* *Pauli Lectures on Physics. V. 6. Selected Topics in Field Quantization.* Cambridge, Massachusetts: MIT Press, 1971. 208 p.
91. *Visser M.* Lorentz Invariance and the Zero-Point Stress-Energy Tensor // *Particles.* 2018. V. 1. P. 10.
92. *Зельдович Я. Б.* Космологическая постоянная и теория элементарных частиц // *УФН.* 1968. Т. 95. С. 209.
93. *Weinberg S.* The Cosmological Constant Problem // *Rev. Mod. Phys.* 1989. V. 61. P. 1.
94. *Dolgov A. D.* Cosmology and New Physics // *Phys. At. Nucl.* 2008. V. 71. P. 651.
95. *Fujii Y.* Origin of the Gravitational Constant and Particle Masses in Scale Invariant Scalar-Tensor Theory // *Phys. Rev. D.* 1982. V. 26. P. 2580.
96. *Ratra B., Peebles P. J. E.* Cosmological Consequences of a Rolling Homogeneous Scalar Field // *Phys. Rev. D.* 1988. V. 37. P. 3406.
97. *Wetterich C.* Cosmology and the Fate of Dilatation Symmetry // *Nucl. Phys. B.* 1988. V. 302. P. 668.
98. *Caldwell R. R., Dave R., Steinhardt P. J.* Cosmological Imprint of an Energy Component with General Equation of State // *Phys. Rev. Lett.* 1998. V. 80. P. 1582.
99. *Nojiri S., Odintsov S. D.* Modified Gauss–Bonnet Theory as Gravitational Alternative for Dark Energy // *Phys. Lett. B.* 2005. V. 631. P. 1.
100. *Li B., Barrow J. D.* The Cosmology of  $f(R)$  Gravity in Metric Variational Approach // *Phys. Rev. D.* 2007. V. 75. P. 084010.
101. *Li B., Barrow J. D., Mota D. F.* The Cosmology of Modified Gauss–Bonnet Gravity // *Ibid.* V. 76. P. 044027.
102. *De Felice A., Mota D. F., Tsujikawa S.* Matter Instabilities in General Gauss–Bonnet Gravity // *Phys. Rev. D.* 2010. V. 81. P. 023532.
103. *Birrell N. D., Davies P. C. W.* *Quantum Fields in Curved Space.* Cambridge, UK: Cambridge Univ. Press, 1982. 349 p.

104. *Tkachev I. I.* Gravitational Phase Transition: An Origin of the Large Scale Structure in the Universe? // *Phys. Rev. D.* 1992. V. 45. P. R4367.
105. *Zakharov A. F., Nucita A. A., De Paolis F., Ingrosso G.* Solar System Constraints on  $R^n$  Gravity // *Phys. Rev. D.* 2006. V. 74. P. 107101.
106. *Capozziello S.* Curvature Quintessence // *Intern. J. Mod. Phys. D.* 2002. V. 11. P. 483.
107. *Capozziello S., Cardone V. F., Carloni S., Troisi A.* Curvature Quintessence Matched with Observational Data // *Intern. J. Mod. Phys. D.* 2003. V. 12. P. 1969.
108. *Capozziello S., Carloni S., Troisi A.* Quintessence without Scalar Fields // *Recent Res. Dev. Astron. Astrophys.* 2003. V. 1. P. 625.
109. *Carroll S. M., Duvvuri V., Trodden M., Turner M. S.* Is Cosmic Speed-Up Due to New Gravitational Physics? // *Phys. Rev. D.* 2004. V. 70. P. 043528.
110. *Carroll S. M., De Felice A., Duvvuri V., Easson D. A., Trodden M., Turner M. S.* The Cosmology of Generalized Modified Gravity Models // *Phys. Rev. D.* 2005. V. 71. P. 063513.
111. *Dolgov A. D., Kawasaki M.* Can Modified Gravity Explain Accelerated Cosmic Expansion? // *Phys. Lett. B.* 2003. V. 573. P. 1.
112. *Appleby S. A., Battye R. A., Starobinsky A. A.* Curing Singularities in Cosmological Evolution of  $F(R)$  Gravity // *JCAP.* 2010. V. 1006. P. 005.
113. *Hu W., Sawicki I.* Models of  $f(R)$  Cosmic Acceleration That Evade Solar-System Tests // *Phys. Rev. D.* 2007. V. 76. P. 064004.
114. *Appleby S. A., Battye R. A.* Do Consistent  $F(R)$  Models Mimic General Relativity plus  $\Lambda$ ? // *Phys. Lett. B.* 2007. V. 654. P. 7.
115. *Starobinsky A. A.* Disappearing Cosmological Constant in  $f(R)$  Gravity // *JETP Lett.* 2007. V. 86, No. 3. P. 157.
116. *Nojiri S., Odintsov S.* Unified Cosmic History in Modified Gravity: From  $F(R)$  Theory to Lorentz Non-Invariant Models // *Phys. Rep.* 2011. V. 505. P. 59.
117. *Appleby S. A., Battye R. A.* Aspects of Cosmological Expansion in  $F(R)$  Gravity Models // *JCAP.* 2008. V. 0805. P. 019.
118. *Frolov A. V.* A Singularity Problem with  $f(R)$  Dark Energy // *Phys. Rev. Lett.* 2008. V. 101. P. 061103.
119. *Thongkool I., Sami M., Gannouji R., Jhingan S.* Constraining  $f(R)$  Gravity Models with Disappearing Cosmological Constant // *Phys. Rev. D.* 2009. V. 80. P. 043523.
120. *Thongkool I., Sami M., Choudhury S. R.* How Delicate Are the  $f(R)$  Gravity Models with Disappearing Cosmological Constant? // *Ibid.* P. 127501.
121. *Arbuzova E. V., Dolgov A. D.* Explosive Phenomena in Modified Gravity // *Phys. Lett. B.* 2011. V. 700, No. 5. P. 289.
122. *Reverberi L.* Curvature Singularities from Gravitational Contraction in  $f(R)$  Gravity // *Phys. Rev. D.* 2013. V. 87, No. 8. P. 084005.
123. *Зельдович Я. Б., Старобинский А. А.* О скорости рождения частиц в гравитационных полях // *Письма в ЖЭТФ.* 1977. Т. 26, № 5. С. 373 (*Zel'dovich Ya. B., Starobinskii A. A.* Rate of Particle Production in Gravitational Fields // *JETP Lett.* 1977. V. 26, No. 5. P. 252).
124. *Starobinsky A. A.* Nonsingular Model of the Universe with the Quantum-Gravitational de Sitter Stage and Its Observational Consequences // *Proc. of the Second Seminar*

- Quantum Theory of Gravity, Moscow, Oct. 13–15, 1981. M., 1982. P. 58 (reprinted in: Quantum Gravity / Eds. M. A. Markov, P. C. West. New York: Plenum Publ. Co., 1984. P. 103).
125. *Vilenkin A.* Classical and Quantum Cosmology of the Starobinsky Inflationary Model // *Phys. Rev. D.* 1985. V. 32. P. 2511.
  126. *Arbuzova E. V., Dolgov A. D., Reverberi L.* Cosmological Evolution in  $R^2$  Gravity // *J. Cosmol. Astropart. Phys.* 2012. V. 2012, No. 02. P. 049.
  127. *Motohashi H., Nishizawa A.* Reheating after  $f(R)$  Inflation // *Phys. Rev. D.* 2012. V. 86. P. 083514.
  128. *Arbuzova E. V., Dolgov A. D., Singh R. S.* Distortion of the Standard Cosmology in  $R + R^2$  Theory // *J. Cosmol. Astropart. Phys.* 2018. V. 2018, No. 07. P. 019.
  129. *Capozziello S., De Laurentis M.* Extended Theories of Gravity // *Phys. Rep.* 2011. V. 509. P. 167.
  130. *Nojiri S., Odintsov S. D., Oikonomou V. K.* Modified Gravity Theories on a Nutshell: Inflation, Bounce and Late-Time Evolution // *Phys. Rep.* 2017. V. 692. P. 1.
  131. *Arbuzova E. V., Dolgov A. D., Reverberi L.* Curvature Oscillations in Modified Gravity and High Energy Cosmic Rays // *Eur. Phys. J. C.* 2012. V. 72, No. 12. P. 2247.
  132. *Arbuzova E. V., Dolgov A. D., Reverberi L.* Particle Production in  $F(R)$  Gravity During Structure Formation // *Phys. Rev. D.* 2013. V. 88, No. 2. P. 024035.
  133. *Арбузова Е. В., Долгов А. Д.* Модифицированная гравитация в современной Вселенной // ЭЧАЯ. 2013. Т. 44, № 6. С. 204 (*Arbuzova E. V., Dolgov A. D.* Modified Gravity in Contemporary Universe // *Phys. Part. Nucl.* 2013. V. 44, No. 2. P. 204).
  134. *Arbuzova E. V., Dolgov A. D., Reverberi L.* Cosmic Ray Production in Modified Gravity // *Eur. Phys. J. C.* 2018. V. 78, No. 6. P. 481.
  135. *Arbuzova E. V., Dolgov A. D., Reverberi L.* Spherically Symmetric Solutions in  $F(R)$  Gravity and Gravitational Repulsion // *Astropart. Phys.* 2014. V. 54. P. 44.
  136. *Arbuzova E. V., Dolgov A. D., Reverberi L.* Jeans Instability in Classical and Modified Gravity // *Phys. Lett. B.* 2014. V. 739. P. 279.
  137. *Arbuzova E. V., Dolgov A. D., Reverberi L.* Gravitational Instability in Oscillating Background // *Phys. Rev. D.* 2015. V. 92, No. 6. P. 064041.
  138. *Arbuzova E. V., Dolgov A. D.* High Frequency Curvature Oscillations in  $F(R)$  Gravity // *Grav. Cosmol.* 2016. V. 22, No. 2. P. 122.
  139. *Arbuzova E. V., Dolgov A. D.* Instability in Classical and Modified Gravity // *Astron. Astrophys. Trans.* 2017. V. 30, No. 1. P. 31.
  140. *Steigman G.* Observational Tests of Antimatter Cosmologies // *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* 1976. V. 14. P. 339.
  141. *Steigman G.* When Clusters Collide: Constraints on Antimatter on the Largest Scales // *JCAP.* 2008. V. 0810. P. 001.
  142. *Von Ballmoos P.* Antimatter in the Universe: Constraints from Gamma-Ray Astronomy // *Hyp. Int.* 2014. V. 228, No. 1–3. P. 001.
  143. *Bambi C., Dolgov A. D.* Antimatter in the Milky Way // *Nucl. Phys. B.* 2007. V. 784. P. 132.
  144. *Dolgov A. D., Blinnikov S. I.* Stars and Black Holes from the Very Early Universe // *Phys. Rev. D.* 2014. V. 89, No. 2. P. 021301.



145. *Blinkov S. I., Dolgov A. D., Postnov K. A.* Antimatter and Antistars in the Universe and in the Galaxy // *Phys. Rev. D.* 2015. V. 92, No. 2. P. 023516.
146. *Dolgov A. D.* NonGUT Baryogenesis // *Phys. Rep.* 1992. V. 222. P. 309.
147. *Сахаров А. Д.* Нарушение CP-инвариантности, C-асимметрия и барионная асимметрия Вселенной // *Письма в ЖЭТФ.* 1967. Т. 5, вып. 1. С. 32 (*JETP Lett.* 1967. V. 5. P. 24).
148. *Hawking S. W.* Black Hole Explosions? // *Nature.* 1974. V. 248. P. 30.
149. *Зельдович Я. Б.* Зарядовая несимметрия Вселенной как следствие испарения черных дыр и несимметрии слабого взаимодействия // *Письма в ЖЭТФ.* 1976. Т. 24. С. 29.
150. *Долгов А. Д.* Квантовое испарение черных дыр и барионная асимметрия Вселенной // *ЖЭТФ.* 1980. Т. 79, № 2. С. 337 (*Dolgov A. D.* Quantum Evaporation of Black Holes and the Baryon Asymmetry of the Universe // *JETP.* 1980. V. 52, No. 2. P. 169).
151. *Dolgov A. D.* Hiding of the Conserved (Anti)Baryonic Charge into Black Holes // *Phys. Rev. D.* 1981. V. 24. P. 1042.
152. *Kuzmin V. A., Rubakov V. A., Shaposhnikov M. E.* On the Anomalous Electroweak Baryon Number Nonconservation in the Early Universe // *Phys. Lett. B.* 1985. V. 155. P. 36.
153. *Affleck I., Dine M.* A New Mechanism for Baryogenesis // *Nucl. Phys. B.* 1985. V. 249. P. 361.
154. *Fukugita M., Yanagida T.* Baryogenesis without Grand Unification // *Phys. Lett. B.* 1986. V. 174. P. 45.
155. *Cohen A. G., Kaplan D. B.* Thermodynamic Generation of the Baryon Asymmetry // *Phys. Lett. B.* 1987. V. 199. P. 251.
156. *Cohen A. G., Kaplan D. B.* Spontaneous Baryogenesis // *Nucl. Phys. B.* 1988. V. 308. P. 913.
157. *Davoudiasl H., Kitano R., Kribs G. D., Murayama H., Steinhart P. J.* Gravitational Baryogenesis // *Phys. Rev. Lett.* 2004. V. 93. P. 201301.
158. *Dolgov A. D.* CPT Violation and Particle–Antiparticle Asymmetry in Cosmology // *Phys. At. Nucl.* 2010. V. 73, No. 4. P. 588 (*Долгов А. Д.* // *ЯФ.* 2010. Т. 73, № 4. С. 614).
159. *Rubakov V. A., Shaposhnikov M. E.* Electroweak Baryon Number Nonconservation in the Early Universe and in High-Energy Collisions // *Phys. Usp.* 1996. V. 39. P. 461 (*Рубаков В. А., Шапошников М. Е.* // *УФН.* 1996. Т. 166. С. 493).
160. *Riotto A., Trodden M.* Recent Progress in Baryogenesis // *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.* 1999. V. 49. P. 35.
161. *Dine M., Kusenko A.* The Origin of the Matter–Antimatter Asymmetry // *Rev. Mod. Phys.* 2003. V. 76. P. 1.
162. *Arbuzova E. V., Dolgov A. D., Novikov V. A.* General Properties and Kinetics of Spontaneous Baryogenesis // *Phys. Rev. D.* 2016. V. 94, No. 12. P. 123501.
163. *Arbuzova E. V., Dolgov A. D.* Intrinsic Problems of the Gravitational Baryogenesis // *Phys. Lett. B.* 2017. V. 769. P. 171.
164. *Arbuzova E. V., Dolgov A. D.* Instability of Gravitational Baryogenesis with Fermions // *J. Cosmol. Astropart. Phys.* 2017. V. 2017, No. 06. P. 001.

165. *Arbuzova E. V.* Проблемы гравитационного бариосинтеза // Письма в ЭЧАЯ. 2018. Т. 15, №4(216). С. 308 (*Arbuzova E. V. Gravitational Baryogenesis Revised // Phys. Part. Nucl. Lett.* 2018. V. 15, No. 4. P. 348).
166. *Arbuzova E. V.* Spontaneous and Gravitational Baryogenesis // *Intern. J. Mod. Phys. A.* 2018. V. 33. P. 1844023.
167. *Gorbunov D., Tokareva A.* Scalon Production in Contracting Astrophysical Objects // *J. Exp. Theor. Phys.* 2015. V. 120, No. 3. P. 528 (*Горбунов Д., Токарева А. // ЖЭТФ.* 2015. Т. 120, № 3. С. 599).
168. *Gorbunov D., Tokareva A.* No Cosmic Rays from Curvature Oscillations during Structure Formation in  $F(R)$  Gravity // *Phys. Rev. D.* 2017. V. 96, No. 10. P. 103527.
169. *Mijic M. B., Morris M. S., Suen W. M.* The  $R^2$  Cosmology: Inflation without a Phase Transition // *Phys. Rev. D.* 1986. V. 34. P. 2934.
170. *Suen W. M., Anderson P. R.* Reheating in the Higher Derivative Inflationary Models // *Phys. Rev. D.* 1987. V. 35. P. 2940.
171. *Gorbunov D. S., Panin A. G.* Scalon the Mighty: Producing Dark Matter and Baryon Asymmetry at Reheating // *Phys. Lett. B.* 2011. V. 700. P. 157.
172. *Gorbunov D. S., Panin A. G.* Free Scalar Dark Matter Candidates in  $R^2$ -Inflation: The Light, the Heavy and the Superheavy // *Phys. Lett. B.* 2012. V. 718. P. 15.
173. *De Felice A., Tsujikawa S.*  $f(R)$  Theories // *Living Rev. Rel.* 2010. V. 13. P. 3.
174. *Старобинский А. А.* Об одной несингулярной изотропной космологической модели // Письма в Астрон. журн. 1978. Т. 4, № 4. С. 155 (*Starobinskii A. A. On a Nonsingular Isotropic Cosmological Model // Sov. Astron. Lett.* 1978. V. 4, No. 2. P. 820).
175. *Dolgov A. D., Hansen S. H.* Equation of Motion of a Classical Scalar Field with Back Reaction of Produced Particles // *Nucl. Phys. B.* 1999. V. 548. P. 408.
176. *Dolgov A., Freese K.* Calculation of Particle Production by Nambu Goldstone Bosons with Application to Inflation Reheating and Baryogenesis // *Phys. Rev. D.* 1995. V. 51. P. 2693.
177. *Koshelev A. S., Modesto L., Rachwal L., Starobinsky A. A.* Occurrence of Exact  $R^2$  Inflation in Non-Local UV-Complete Gravity // *JHEP.* 2016. V. 1611. P. 067.
178. *Faulkner T., Tegmark M., Bunn E. F., Mao Y.* Constraining  $f(R)$  Gravity as a Scalar Tensor Theory // *Phys. Rev. D.* 2007. V. 76. P. 063505.
179. *de la Cruz-Dombriz A., Dobado A., Maroto A. L.* Black Holes in  $f(R)$  Theories // *Phys. Rev. D.* 2009. V. 80. P. 124011; Erratum // *Phys. Rev. D.* 2011. V. 83. P. 029903.
180. *Cembranos J. A. R., de la Cruz-Dombriz A, Montes Nunez B.* Gravitational Collapse in  $f(R)$  Theories // *JCAP.* 2012. V. 1204. P. 021.
181. *Capozziello S., De Laurentis M., Odintsov S. D., Stabile A.* Hydrostatic Equilibrium and Stellar Structure in  $f(R)$ -Gravity // *Phys. Rev. D.* 2011. V. 83. P. 064004.
182. *Capozziello S., De Laurentis M., De Martino I., Formisano M., Odintsov S. D.* Jeans Analysis of Self-Gravitating Systems in  $f(R)$ -Gravity // *Phys. Rev. D.* 2012. V. 85. P. 044022.
183. *Capozziello S., Stabile A., Troisi A.* The Newtonian Limit of  $f(R)$  Gravity // *Phys. Rev. D.* 2007. V. 76. P. 104019.

184. *Jeans J. H.* The Stability of a Spherical Nebula // *Philos. Trans. Royal Soc. A.* 1902. V. 199. P. 1.
185. *Лифушиц Е. М.* О гравитационной устойчивости расширяющегося мира // *ЖЭТФ.* 1946. Т. 16. С. 587.
186. *Зельдович Я. Б., Новиков И. Д.* Стрoение и эволюция Вселенной. М.: Наука, 1975. 736 с. (*Zeldovich Y. B., Novikov I. D.* Relativistic Astrophysics. V. 2. The Structure and Evolution of the Universe. Chicago, USA: Chicago Univ. Press, 1983. 751 p.).
187. *Eingorn M., Novak J., Zhuk A.*  $f(R)$  Gravity: Scalar Perturbations in the Late Universe // *Eur. Phys. J. C.* 2014. V. 74, No. 8. P. 3005.
188. *Zhang P.* Testing  $f(R)$  Gravity against the Large Scale Structure of the Universe // *Phys. Rev. D.* 2006. V. 73. P. 123504.
189. *Song Y. S., Hu W., Sawicki I.* The Large Scale Structure of  $f(R)$  Gravity // *Phys. Rev. D.* 2007. V. 75. P. 044004.
190. *Tsujiikawa S.* Matter Density Perturbations and Effective Gravitational Constant in Modified Gravity Models of Dark Energy // *Ibid.* V. 76. P. 023514.
191. *De la Cruz-Dombriz A., Dobado A, Maroto A. L.* On the Evolution of Density Perturbations in  $f(R)$  Theories of Gravity // *Phys. Rev. D.* 2008. V. 77. P. 123515.
192. *Ananda K. N., Carloni S., Dunsby P. K. S.* A Detailed Analysis of Structure Growth in  $f(R)$  Theories of Gravity // *Class. Quant. Grav.* 2009. V. 26. P. 235018.
193. *Ananda K. N., Carloni S, Dunsby P. K. S.* A Characteristic Signature of Fourth-Order Gravity // *Springer Proc. Phys.* 2011. V. 137. P. 165.
194. *Motohashi H., Starobinsky A. A., Yokoyama J.* Analytic Solution for Matter Density Perturbations in a Class of Viable Cosmological  $f(R)$  Models // *Intern. J. Mod. Phys. D.* 2009. V. 18. P. 1731.
195. *Matsumoto J.* Cosmological Linear Perturbations in the Models of Dark Energy and Modified Gravity // *Universe.* 2015. V. 1, No. 1. P. 17.
196. *Ландау Л. Д., Лифушиц Е. М.* Механика: Учеб. пособие для вузов. 5-е изд., стер. М.: Физматлит, 2004. 224 с.
197. *Cohen A. G., Kaplan D. B., Nelson A. E.* Spontaneous Baryogenesis at the Weak Phase Transition // *Phys. Lett. B.* 1991. V. 263. P. 86.
198. *Ландау Л. Д., Лифушиц Е. М.* Статистическая физика: Учеб. пособие для вузов. Ч. 1. 5-е изд., стер. М.: Физматлит, 2002. 616 с.
199. *Dolgov A., Freese K., Rangarajan R., Srednicki M.* Baryogenesis during Reheating in Natural Inflation and Comments on Spontaneous Baryogenesis // *Phys. Rev. D.* 1997. V. 56. P. 6155.
200. *Dolgov A. D.* Baryogenesis, 30 Years after // *Surveys in High Energy Physics.* 1998. V. 13. P. 83.
201. *Phillips D. G., II et al.* Neutron–Antineutron Oscillations: Theoretical Status and Experimental Prospects // *Phys. Rep.* 2016. V. 612. P. 1.
202. *Patrignani C. et al. (Particle Data Group).* Review of Particle Physics // *Chin. Phys. C.* 2016. V. 40. No. 10. P. 100001.
203. *Pati J. C., Salam A., Sarkar U.*  $\Delta B = -\Delta L$ , Neutron  $\rightarrow e^- \pi^+$ ,  $e^- K^+$ ,  $\mu^- \pi^+$  and  $\mu^- K^+$  Decay Modes in  $SU(2) - L \times SU(2) - R \times SU(4) - C$  or  $SO(10)$  // *Phys. Lett. B.* 1983. V. 133. P. 330.

204. *Lambiase G., Mohanty S., Prasanna A. R.* Neutrino Coupling to Cosmological Background: A Review on Gravitational Baryo/Leptogenesis // Intern. J. Mod. Phys. D. 2013. V. 22. P. 1330030.
205. *Lambiase G., Scarpetta G.* Baryogenesis in  $f(R)$ : Theories of Gravity // Phys. Rev. D. 2006. V. 74. P. 087504.
206. *Dolgov A. D., Kainulainen K.* Fermi–Dirac Corrections to the Relic Abundances // Nucl. Phys. B. 1993. V. 402. P. 349.
207. *Sadjadi H. M.* A Note on Gravitational Baryogenesis // Phys. Rev. D. 2007. V. 76. P. 123507.
208. *Lambiase G., Mohanty S., Pizza L.* Consequences of  $f(R)$ -Theories of Gravity on Gravitational Leptogenesis // Gen. Rel. Grav. 2013. V. 45. P. 1771.
209. *Fukushima M., Mizuno S., Maeda K.* Gravitational Baryogenesis after Anisotropic Inflation // Phys. Rev. D. 2016. V. 93, No. 10. P. 103513.
210. *Odintsov S. D., Oikonomou V. K.* Gaus–Bonnet Gravitational Baryogenesis // Phys. Lett. B. 2016. V. 760. P. 259.
211. *Oikonomou V. K., Pan S., Nunes R. C.* Gravitational Baryogenesis in Running Vacuum Models // Intern. J. Mod. Phys. A. 2017. V. 32, No. 22. P. 1750129.
212. *Odintsov S. D., Oikonomou V. K.* Loop Quantum Cosmology Gravitational Baryogenesis // Eur. Phys. Lett. 2016. V. 116, No. 4. P. 49001.
213. *McDonald J. I., Shore G. M.* Leptogenesis and Gravity: Baryon Asymmetry without Decays // Phys. Lett. B. 2017. V. 766. P. 162.
214. *Dolgov A. D., Lepidi A., Piccinelli G.* Electrodynamics at Non-Zero Temperature, Chemical Potential, and Bose Condensate // JCAP. 2009. V. 0902. P. 027.