

HYPERVIRIAL AND EHRENFEST THEOREMS IN SPHERICAL COORDINATES: SYSTEMATIC APPROACH

A. Khelashvili^{a, b, *}, *T. Nadareishvili*^{a, c, **}

^a High Energy Physics Institute, Ivane Javakhishvili Tbilisi State University, Tbilisi

^b St. Andrew the First-Called Georgian University of the Patriarchate of Georgia, Tbilisi

^c Faculty of Exact and Natural Sciences, Ivane Javakhishvili Tbilisi State University, Tbilisi

Elaboration of some fundamental relations in three-dimensional quantum mechanics is considered taking into account the restricted character of areas in radial distance. In such cases, the boundary behavior of the radial wave function and singularity of operators at the origin of coordinates contribute to these relations. We derive the relation between the average value of the operator's time derivative and the time derivative of the mean value of this operator, which is usually considered to be the same by definition. The deviation from the known result is deduced and manifested by extra term, which depends on the boundary behavior mentioned above. The general form for this extra term takes place in the hypervirial-like theorems. As a particular case, the virial theorem for the Coulomb and oscillator potentials is considered, and correction to the Kramers' sum rule is derived. Moreover, the corrected Ehrenfest theorem is deduced and its consistency with real physical picture is demonstrated.

Рассматривается разработка некоторых фундаментальных соотношений в трехмерной квантовой механике с учетом ограниченного характера областей в радиальном направлении. В таких случаях поведение радиальной волновой функции на границе и сингулярность операторов в начале координат дают вклад в эти соотношения. Было получено соотношение между средним значением производной оператора по времени и производной по времени среднего значения этого оператора, который обычно считается тем же по определению. Также получено отклонение от известного результата, проявляющееся в появлении дополнительного члена, который зависит от упомянутого выше поведения на границе. Подобный дополнительный член в общей форме появляется в теоремах гипервириала. Как частный случай рассмотрена теорема вириала для кулоновского и осцилляторного потенциалов, и получена поправка к правилу сумм Крамерса. Кроме того, выведена откорректированная теорема Эренфеста, и продемонстрировано ее согласие с реальной физической картиной мира.

PACS: 03.65.-w; 03.65.Ca; 03.65.Ge; 03.65.Ta

*E-mail: anzor.khelashvili@tsu.ge

**Corresponding author: e-mail: teimuraz.nadareishvili@tsu.ge