ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА
2020. Т. 51. ВЫП. 4. С. 471–482

q-ДЕФОРМАЦИЯ И СВОБОДНАЯ СТАТИСТИКА ДЛЯ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПОЛЯ С ЧАСТИЦЕЙ

С. В. Козырев *

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва

Описано возникновение свободной (или квантовой больцмановской) статистики для модели квантовой частицы, взаимодействующей с квантовым полем, в стохастическом пределе вне дипольного приближения. При этом квантовое поле находится в гауссовском (например, температурном) состоянии. Запутанные операторы, описывающие взаимодействие поля с частицей, удовлетворяют q-деформированным соотношениям, которые в стохастическом пределе порождают свободную статистику.

Emerging of free (or quantum Boltzmann) statistics for a model of quantum particle interacting with quantum field is described in the stochastic limit without dipole approximation. The quantum field is considered in the Gaussian (for example, temperature) state. Entangled operators which describe interaction of a field and a particle satisfy the q-deformed relations which in the stochastic limit generate free statistics.

PACS: 03.67.Bg; 02.50.Fz

ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе обсуждается стохастический предел для квантовой частицы, взаимодействующей с квантовым бозонным полем вне рамок дипольного приближения. Показывается, что при этом коллективные возбуждения поля и частицы (запутанные операторы, определяемые как свободная эволюция от вкладов в гамильтониан взаимодействия поля с частицей) приобретают свободную (или квантовую больцмановскую) статистику. Алгебра свободных операторов рождения и уничтожения определяется соотношениями

$$b_i b_j^\dagger = \delta_{ij},$$

при этом операторы уничтожения b_i не коммутируют и образуют свободную алгебру. Мы показываем, что в рассматриваемой физической модели возникает некоторая деформация такой алгебры. Свободные операторы рождения и уничтожения изучались в свободной теории вероятностей, см. [1], и такие

*E-mail: kozyrev@mi-ras.ru

операторы связаны с теорией случайных матриц и полукруглым предельным законом Вигнера.

С помощью стохастического предела изучается динамика взаимодействующей квантовой системы с константой связи λ при перерастяжке ван Хова – Боголюбова $t \mapsto t/\lambda^2$ в пределе $\lambda \to 0$, т. е. изучается эффект слабых взаимодействий в пределе больших времен [2].

До стохастического предела запутанные операторы образуют некоторую алгебру с «динамически» q-деформированными соотношениями (см. формулы (3)–(5) ниже), свободные операторы рождения и уничтожения возникают как стохастический предел q-деформированных. При этом квантовое поле находится в некотором гауссовском (например, температурном) состоянии. Для случая, когда поле находится в фоковском состоянии (т. е. состояние определяется вакуумным средним), подобная модель была рассмотрена в работе [3], см. также [2, 4]. Другие модели с нелинейным взаимодействием, где в стохастическом пределе возникала свободная статистика, изучались в [5, 6]. В настоящей работе мы обобщаем подход [3] на случай общего гауссовского состояния (в частности, температурного). Для рассмотрения температурного состояния мы применяем свободный аналог конструкции температурного дубля, т. е. варианта преобразования Боголюбова, позволяющего представить произвольное гауссовское состояние поля через фоковские состояния для пары вспомогательных полей (см. разд. 3).

Настоящая работа устроена следующим образом. В разд. 1 представлена модель взаимодействия поля с частицей вне рамок дипольного приближения, вводятся запутанные операторы, описывающие коллективные возбуждения поля и частицы, описываются q-деформированные соотношения для таких операторов, и показывается на примере 4-точечной корреляционной функции, что в стохастическом пределе возникает свободная статистика. В разд. 2 вычисляются корреляционные функции для алгебры q-деформированных соотношений для запутанных операторов в произвольном (несжатом с нулевым средним) гауссовском состоянии и находится стохастический предел для таких корреляционных функций. В разд. 3 показывается, что стохастический предел корреляционных функций из разд. 2 равен корреляционной функции для некоторой алгебры свободных операторов рождения и уничтожения, строящейся по аналогии с конструкцией температурного дубля.

1. ДИНАМИЧЕСКАЯ q-ДЕФОРМАЦИЯ

1.1. Формулировка модели. Рассмотрим гамильтониан квантовой частицы, взаимодействующей с квантовым бозе-полем вне рамок дипольного приближения:

$$H = H_0 + \lambda H_I = \int \omega(k)\, a^\dagger(k)\, a(k)\, dk + \frac{1}{2}\, p^2 + \lambda H_I,$$

$$H_I = p \cdot \mathcal{A}(q) + \mathcal{A}(q) \cdot p = \\ = \int d^3k \left(g(k)p \cdot \mathrm{e}^{ikq} a^\dagger(k) + \overline{g(k)} p \cdot \mathrm{e}^{-ikq}\, a(k) \right) + \text{h.c.},$$

$$q = (q_1, q_2, q_3), \quad p = (p_1, p_2, p_3), \quad [q_h, p_k] = i\delta_{hk},$$
$$a(k) = (a_1(k), a_2(k), a_3(k)), \quad a^\dagger(k) = (a_1^\dagger(k), \ldots, a_3^\dagger(k)),$$
$$[a_j(k), a_h^\dagger(k')] = \delta_{jh}\delta(k - k').$$

Здесь q и p суть координата и импульс частицы, поле $a(k)$ имеет дисперсию $\omega(k)$, функция $g(k)$ есть формфактор взаимодействия поля с частицей.

В процедуре стохастического предела вычисляется приближение для ряда теории возмущений для оператора эволюции в представлении взаимодействия. При этом изучается свободная эволюция гамильтониана взаимодействия $H_I(t) = \mathrm{e}^{itH_0} H_I\, \mathrm{e}^{-itH_0}$ и ее перерастяжка ван Хова – Боголюбова на квадрат константы связи λ, после чего берется предел слабой связи $\lambda \to 0$:

$$\frac{1}{\lambda} H_I \left(\frac{t}{\lambda^2} \right) = \frac{1}{\lambda} A(t/\lambda^2) + \text{h.c.} = \\ = \int d^3k\, p(\overline{g}(k)\, a_\lambda(t,k) + g(k)\, a_\lambda^\dagger(t,k)) + \text{h.c.}$$

При этом возникают величины, описывающие совместную свободную эволюцию поля и системы (запутанные операторы):

$$a_\lambda(t,k) = \frac{1}{\lambda} \exp\left(i \frac{t}{\lambda^2} H_0 \right) \exp(-ikq)\; a(k) \exp\left(-i \frac{t}{\lambda^2} H_0 \right) = \\ = \frac{1}{\lambda} \exp\left\{ -i \frac{t}{\lambda^2} \left[\omega(k) + \frac{1}{2} k^2 + kp \right] \right\} \exp(-ikq)\, a(k), \quad (1)$$

$$a_\lambda^\dagger(t,k) = \frac{1}{\lambda} \exp\left(i \frac{t}{\lambda^2} \left[\omega(k) - \frac{1}{2} k^2 + kp \right] \right) \exp(ikq)\; a^\dagger(k). \quad (2)$$

1.2. Динамическая q-деформация. Имеет место важное наблюдение, что такие операторы образуют алгебру динамически q-деформированных соотношений

$$a_\lambda(t,k) a_\lambda^\dagger(t',k') = a_\lambda^\dagger(t',k') a_\lambda(t,k) q_\lambda(t-t', kk') + \\ + \frac{1}{\lambda^2} q_\lambda \left(t - t', \omega(k) + \frac{1}{2} k^2 + kp \right) \delta(k - k'), \quad (3)$$

$$a_\lambda(t,k) p = (p + k) a_\lambda(t,k), \quad (4)$$

$$a_\lambda(t,k) a_\lambda(t',k') = a_\lambda(t',k') a_\lambda(t,k) q_\lambda^{-1}(t - t', kk'), \quad (5)$$

где функция q есть осциллирующая экспонента

$$q_\lambda(t-t',x)=\exp\left(-i\frac{t-t'}{\lambda^2}\,x\right).$$

Назовем $t-t'$ временным аргументом осциллирующей экспоненты, а x — энергетическим. Рассмотрим задачу построения мастер-поля, т. е. стохастического предела запутанного оператора

$$b(t,k)=\lim_{\lambda\to 0}a_\lambda(t,k),$$

и нахождения для него перестановочных соотношений.

При этом мы хотим воспользоваться пределом для осциллирующей экспоненты (в пространстве обобщенных функций медленного роста)

$$\lim_{\lambda\to 0}q_\lambda(t,x)=0,\qquad \lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{\lambda^2}\,q_\lambda(t,x)=2\pi\delta(t)\,\delta(x). \tag{6}$$

Естественно ожидать, что перестановочные соотношения для мастер-поля являются пределом динамически q-деформированных соотношений (3), (4)

$$b(t,k)\,b^\dagger(t',k')=2\pi\delta(t-t')\delta\left(\omega(k)+\frac{1}{2}\,k^2+kp\right)\delta(k-k'), \tag{7}$$

$$b(t,k)p=(p+k)\,b(t,k), \tag{8}$$

а третье уравнение (5) ведет к возникновению свободной статистики, для которой операторы рождения не перестановочны (в отличие от статистики Бозе) и образуют свободную алгебру. Мы проверим, что мастер-поле имеет свободную статистику и удовлетворяет (7), (8) в случае, когда поле $a(k)$ находится в фоковском состоянии. Для более общих гауссовских состояний поля (в частности, температурного) мы получим обобщение (7), (8) — квантовую алгебру со свободной статистикой и соотношениями, зависящими от температуры. Здесь мастер-поле имеет дельта-коррелятор по времени, т. е. является квантовым белым шумом (со свободной статистикой).

1.3. Свободная статистика на примере 4-точечного коррелятора. Обсудим возникновение в пределе $\lambda\to 0$ свободной статистики. Операторы $a_\lambda(t,k)$ удовлетворяют соотношению (5). Казалось бы, в пределе $\lambda\to 0$ такие соотношения должны давать $b(t_1,k_1)\,b(t_2,k_2)=0$. Но это не так. На самом деле это соотношение приводит к возникновению свободной статистики (т. е. операторы уничтожения в пределе перестают коммутировать).

Для проверки рассмотрим 4-точечный коррелятор (в фоковском состоянии)

$$\langle a_\lambda(t_1,k_1)\,a_\lambda(t_2,k_2)\,a_\lambda^\dagger(t_2',k_2')\,a_\lambda^\dagger(t_1',k_1')\rangle =$$
$$= \frac{1}{\lambda^2}\,q_\lambda\left(t_2-t_2',\omega(k_2)+\frac{1}{2}k_2^2+k_2(p+k_1)\right)\delta(k_2-k_2')\times$$
$$\times\frac{1}{\lambda^2}\,q_\lambda\left(t_1-t_1',\omega(k_1)+\frac{1}{2}k_1^2+k_1p\right)\delta(k_1-k_1')\,q_\lambda(t_2-t_2',k_2k_2')+$$
$$+\frac{1}{\lambda^2}\,q_\lambda\left(t_1-t_2',\omega(k_1)+\frac{1}{2}k_1^2+k_1p\right)\delta(k_1-k_2')\times$$
$$\times\frac{1}{\lambda^2}\,q_\lambda\left(t_2-t_1',\omega(k_2)+\frac{1}{2}k_2^2+k_2p\right)\delta(k_2-k_1')\,q_\lambda(t_2-t_2',k_2k_2'). \quad (9)$$

Первый член содержит произведение вкладов $(1/\lambda^2)q_\lambda(t_1-t_1',\cdot)$, $(1/\lambda^2)\,q_\lambda(t_2-t_2',\cdot)$ (стремящихся к δ-функциям) и $q_\lambda(t_2-t_2',\cdot)$ (стремящегося к нулю), но стремящийся к нулю вклад имеет временной аргумент, совпадающий с аргументом одной из ненулевых в пределе $\lambda\to 0$ осциллирующих экспонент. Поэтому произведение этих двух вкладов выживает в пределе (предел произведения не равен произведению пределов).

Во втором члене все осциллирующие экспоненты имеют разные временные аргументы, поэтому стремящаяся к нулю осциллирующая экспонента не может сократиться и предел $\lambda\to 0$ второго члена равен нулю. Первый член отвечает непересекающейся диаграмме (non-crossing или rainbow diagram), второй отвечает пересекающейся диаграмме (crossing diagram). Видно, что в стохастическом пределе выживают только непересекающиеся диаграммы.

Рассмотрим теперь 4-точечный коррелятор с переставленными двумя первыми членами (воспользуемся перестановочным соотношением (5)):

$$\langle a_\lambda(t_2,k_2)a_\lambda(t_1,k_1)\,a_\lambda^\dagger(t_2',k_2')\,a_\lambda^\dagger(t_1',k_1')\rangle q_\lambda^{-1}(t_1-t_2,k_1k_2) =$$
$$= q_\lambda^{-1}(t_1-t_2,k_1k_2)\left(\frac{1}{\lambda^2}\,q_\lambda\left(t_1-t_2',\omega(k_1)+\frac{1}{2}k_1^2+k_1(p+k_1)\right)\delta(k_1-k_2')\times\right.$$
$$\times\frac{1}{\lambda^2}\,q_\lambda\left(t_2-t_1',\omega(k_2)+\frac{1}{2}k_2^2+k_2p\right)\delta(k_2-k_1')\,q_\lambda(t_1-t_2',k_1k_2')+$$
$$+\frac{1}{\lambda^2}\,q_\lambda\left(t_2-t_2',\omega(k_2)+\frac{1}{2}k_2^2+k_2p\right)\delta(k_2-k_2')\times$$
$$\left.\times\frac{1}{\lambda^2}\,q_\lambda\left(t_1-t_1',\omega(k_1)+\frac{1}{2}k_1^2+k_1p\right)\delta(k_1-k_1')\,q_\lambda(t_1-t_2',k_1k_2')\right). \quad (10)$$

Теперь, благодаря наличию осциллирующей экспоненты $q_\lambda^{-1}(t_1-t_2, k_1k_2)$, первый член становится стремящимся к нулю. Во втором члене две осциллирующие экспоненты (стремящиеся к нулю) сокращаются с образованием $q_\lambda(t_2 - t_2', k_1k_2)$, временной аргумент в этом члене совпадает с аргументом в одной из не стремящихся к нулю осциллирующих экспонент. То есть при применении соотношения (5) мы получили, что в пределе 4-точечного коррелятора выживает пересекающаяся диаграмма, а обнуляется непересекающаяся. Но это те же диаграммы, что были ранее (для (9) и (10) пересекающиеся и непересекающиеся диаграммы меняются ролями, т. е. при попытке поменять местами операторы уничтожения, воспользовавшись условием (5), операторы снова меняются местами, восстанавливая исходный порядок). Таким образом, перестановочное соотношение (5) в пределе заменяется на условие свободной статистики.

2. ВЫЧИСЛЕНИЕ N-ТОЧЕЧНОГО КОРРЕЛЯТОРА

В этом разделе мы вычислим вид многоточечного коррелятора для алгебры запутанных операторов (3)–(5)

$$\langle a_\lambda^{\varepsilon_1}(t_1, k_1)\dots a_\lambda^{\varepsilon_N}(t_N, k_N)\rangle.$$

Здесь a^ε обозначает a или $a^\dagger$ ($\varepsilon = -1$ для a и $\varepsilon = 1$ для $a^\dagger$), скобки $\langle\cdot\rangle$ обозначают гауссовское (в частности, температурное) состояние.

Гауссовское состояние (несжатое с нулевым средним) для алгебры канонических коммутационных соотношений описывается теоремой Вика (либо Блоха – де Доминичиса). Для такого состояния среднее от монома по операторам рождения и уничтожения может отличаться от нуля, только если число n операторов рождения равно числу операторов уничтожения, ненулевые спаривания операторов рождения и уничтожения (средние от произведения двух операторов) равны

$$\langle a^\dagger(k)a(k')\rangle = N(k)\delta(k-k'),$$
$$\langle a(k)a^\dagger(k')\rangle = (N(k)+1)\delta(k-k').$$

В частности, для температурного состояния

$$N(k) = \frac{1}{\mathrm{e}^{\beta\omega(k)} - 1},$$

где β есть обратная температура и $\omega(k)$ есть дисперсия поля с волновым вектором k (постоянная Планка положена равной единице).

Для монома длиной $N = 2n$ корреляционная функция

$$\langle a^{\varepsilon_1}(k_1)\dots a^{\varepsilon_N}(k_N)\rangle, \quad N = 2n,$$

равна сумме по всевозможным разбиениям монома на пары операторов рождения и уничтожения от произведений спариваний и определяется следующим образом.

Пусть $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{2n})$ описывает расстановку операторов рождения и уничтожения в мономе, $\sigma(\varepsilon) = \{(m_j, m'_j)\}$, $j = 1, \dots, n$, есть разбиение монома на пары операторов рождения и уничтожения (m_j есть номер оператора рождения, m'_j есть номер оператора уничтожения в паре, все номера в разбиении различны). Также введем символ упорядочения пары $\delta_j = \operatorname{sign}\left(m_j - m'_j\right)$ (т. е. $\delta_j = 1$, если $a^\dagger$ расположен правее a в j-й паре, и $\delta_j = -1$ при обратном расположении). Каждому разбиению монома можно сопоставить диаграмму, в которой операторы изображаются точками на отрезке, упорядоченными в соответствии с их положением в мономе (левее в мономе — левее на отрезке), а пары изображаются дугами, соединяющими точки, отрезок пусть лежит на оси абсцисс в координатной плоскости, а дуги — в верхней полуплоскости. Диаграмма называется непересекающейся, если дуги можно при этом изобразить без пересечений. При этом каждая вершина принадлежит ровно одной из дуг (m_j, m'_j). Дуги в диаграмме занумеруем, упорядочив их в соответствии с их левыми концами (т. е. дуга, у которой левый конец расположен левее, будет иметь меньший номер в нумерации).

Корреляционная функция равна сумме по разбиениям σ (т. е. по диаграммам)

$$\begin{gathered}\langle a^{\varepsilon_1}(k_1) \dots a^{\varepsilon_N}(k_N) \rangle = \sum_{\sigma(\varepsilon)} \prod_{j=1}^{n} M(k_{m_j}) \delta(k_{m_j} - k_{m'_j}), \\ M(k_{m_j}) = N(k_{m_j}) + \frac{1}{2}(\delta_j + 1), \quad \delta_j = \operatorname{sign}\left(m_j - m'_j\right). \end{gathered} \tag{11}$$

В частности, для фоковского состояния $N(k) = 0$, и $m_j > m'_j$ для всех ненулевых вкладов в корреляционную функцию. Благодаря наличию дельта-функции волновые векторы k_{m_j}, $k_{m'_j}$ операторов рождения и уничтожения в паре совпадают.

N-точечный коррелятор для запутанных операторов (1), (2) имеет вид

$$\begin{aligned} &\langle a_\lambda^{\varepsilon_1}(t_1, k_1) \dots a_\lambda^{\varepsilon_N}(t_N, k_N) \rangle = \\ &\quad = \frac{1}{\lambda^{2n}} \prod_{s=1}^{2n} \left[\exp\left\{ -i \frac{t_s}{\lambda^2} \left[\omega(k_s) + \frac{1}{2} k_s^2 + k_s p \right] \right\} \exp\left(-i k_s q\right) \right]^{-\varepsilon_s} \times \\ &\qquad\qquad \times \sum_{\sigma(\varepsilon)} \prod_{j=1}^{n} M(k_{m_j}) \delta(k_{m_j} - k_{m'_j}), \end{aligned}$$

содержащий произведение дельта-функций, отвечающих дугам диаграммы (парам операторов рождения и уничтожения из разбиения монома), а также произведение множителей (произведение экспонент), отвечающих вершинам диаграммы. Первое произведение содержит некоммутирующие операторы, оно упорядочено слева направо.

Занумеруем также временные аргументы для запутанных операторов как t_{m_j}, $t_{m'_j}$. Аналогично занумеруем индексы ε_{m_j}, $\varepsilon_{m'_j}$. Обе квадратичные корреляционные функции (или спаривания вершин диаграммы) $\langle a_\lambda(t_{m'_j}, k_{m'_j})$ $a^\dagger_\lambda(t_{m_j}, k_{m_j})\rangle$, $\langle a^\dagger_\lambda(t_{m_j}, k_{m_j})\, a_\lambda(t_{m'_j}, k_{m'_j})\rangle$, отвечающие дугам диаграммы, можно представить в виде

$$\frac{1}{\lambda^2}\exp\left\{i\frac{(t_{m_j}-t_{m'_j})}{\lambda^2}\left[\omega(k_{m_j})+\delta_j\frac{1}{2}k^2_{m_j}+pk_{m_j}\right]\right\}\times$$
$$\times M(k_{m_j})\delta(k_{m_j}-k_{m'_j}). \quad (12)$$

Мы хотим выразить N-точечный коррелятор через такие корреляционные функции.

Корреляционная функция есть сумма по диаграммам (по разбиениям монома). Мы хотим представить вклад в корреляционную функцию, отвечающий диаграмме, в виде произведения по дугам от спариваний вершин, также произведение должно содержать дополнительные множители, возникающие при перестановке членов в первом произведении в формуле выше. Для придания вкладу такого вида надо протаскивать множители $\mathrm{e}^{i\delta_l k_l q}$ в произведении, отвечающие соединенным дугой вершинам, справа налево (протаскивать правый конец дуги к левому). Поскольку дуга содержит дельта-функцию по волновым векторам, отвечающие разным концам дуги множители $\mathrm{e}^{\pm ikq}$ при этом сократятся. После этого останется произведение коммутирующих операторов (которые будут содержать только функции от импульса p).

Введем обозначения $a(l) = \min(m_l, m'_l)$, $b(l) = \max(m_l, m'_l)$. Проделаем описанную выше процедуру протаскивания множителей для первой пары (m_1, m'_1). При этом возникнет спаривание (12) для первой пары и при коммутации возникнет произведение (для $l = 1$)

$$\prod_{s=a(l)+1}^{b(l)-1}\left[\exp\left\{-i\frac{t_s}{\lambda^2}\left[\delta_l k_s k_{m_l}\right]\right\}\right]^{-\varepsilon_s} = \prod_{s=a(l)+1}^{b(l)-1}\exp\left(i\frac{t_s}{\lambda^2}\varepsilon_s\delta_l k_s k_{m_l}\right).$$

Повторяя эту процедуру для всех дуг диаграммы, получим для вклада в корреляционную функцию от диаграммы выражение

$$\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{\lambda^2}\exp\left\{i\frac{\left(t_{m_j}-t_{m'_j}\right)}{\lambda^2}\left[\omega(k_{m_j})+\delta_j\frac{1}{2}k^2_{m_j}+pk_{m_j}\right]\right\}\times$$

$$\times M(k_{m_j})\delta(k_{m_j}-k_{m'_j})\prod_{s=a(j)+1}^{b(j)-1}\exp\left(i\frac{t_s}{\lambda^2}\varepsilon_s\delta_j k_s k_{m_j}\right).$$

При этом, если некоторая l-я дуга диаграммы находится целиком внутри j-й дуги, то произведение по s содержит два вклада от l-й дуги (отвечающие ее концам), причем волновые векторы для концов дуги совпадают. Поэтому произведение этих вкладов равно

$$\exp\left\{i\frac{t_{a_l}-t_{b_l}}{\lambda^2}\varepsilon_{a_l}\delta_j k_{m_l}k_{m_j}\right\}=\exp\left\{i\frac{t_{m_l}-t_{m'_l}}{\lambda^2}\delta_j k_{m_l}k_{m_j}\right\},$$

поэтому такой вклад будет зависеть от временного аргумента, совпадающего с временным аргументом, отвечающим некоторой дуге диаграммы. Если же какие-то дуги пересекаются, то возникнут временные аргументы, не отвечающие дугам диаграммы. В стохастическом пределе $\lambda\to 0$ вклады от таких диаграмм стремятся к нулю. Произведение вкладов от пересечений дуг в диаграмме, пересекающих j-ю дугу, принимает вид

$$\left[\prod_{l:a(l)<a(j)<b(l)<b(j)}\exp\left(i\frac{t_{b_l}}{\lambda^2}\varepsilon_{b_l}\delta_j k_{b_l}k_{m_j}\right)\right]\times$$

$$\times\left[\prod_{l:a(j)<a(l)<b(j)<b(l)}\exp\left(i\frac{t_{a_l}}{\lambda^2}\varepsilon_{a_l}\delta_j k_{a_l}k_{m_j}\right)\right].$$

Обобщая приведенную выше дискуссию и принимая во внимание (6), мы получаем:

Теорема 1. *N-точечная корреляционная функция запутанных операторов имеет вид*

$$\langle a_\lambda^{\varepsilon_1}(t_1,k_1)\dots a_\lambda^{\varepsilon_N}(t_N,k_N)\rangle = \sum_{\sigma(\varepsilon)}\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{\lambda^2}\exp\left\{i\frac{(t_{m_j}-t_{m'_j})}{\lambda^2}\times\right.$$
$$\left.\times\left[\omega(k_{m_j})+\delta_j\frac{1}{2}k_{m_j}^2+pk_{m_j}+\sum_{l:a(l)<a(j)<b(j)<b(l)}\delta_l k_{m_l}k_{m_j}\right]\right\}\times$$
$$\times\left[\prod_{l:a(l)<a(j)<b(l)<b(j)}\exp\left(i\frac{t_{b_l}}{\lambda^2}\varepsilon_{b_l}\delta_j k_{b_l}k_{m_j}\right)\right]\times$$
$$\times\left[\prod_{l:a(j)<a(l)<b(j)<b(l)}\exp\left(i\frac{t_{a_l}}{\lambda^2}\varepsilon_{a_l}\delta_j k_{a_l}k_{m_j}\right)\right]M(k_{m_j})\delta(k_{m_j}-k_{m'_j}). \quad (13)$$

Здесь $a(l)=\min(m_l,m'_l)$, $b(l)=\max(m_l,m'_l)$, $M(k_{m_j})$ *задано* (11).
Стохастический предел коррелятора примет вид

$$\lim_{\lambda\to 0}\langle a_\lambda^{\varepsilon_1}(t_1,k_1)\dots a_\lambda^{\varepsilon_N}(t_N,k_N)\rangle = \sum_{\sigma'(\varepsilon)}\prod_{j=1}^{n}2\pi\delta\left(t_{m_j}-t_{m'_j}\right)\times$$
$$\times\delta\left[\omega(k_{m_j})+\delta_j\frac{1}{2}k_{m_j}^2+pk_{m_j}+\sum_{l:a(l)<a(j)<b(j)<b(l)}\delta_l k_{m_l}k_{m_j}\right]\times$$
$$\times M(k_{m_j})\delta(k_{m_j}-k_{m'_j}), \quad (14)$$

где обозначение $\sigma'(\varepsilon)$ означает, что суммирование сужено на непересекающиеся диаграммы.

3. АЛГЕБРА МАСТЕР-ПОЛЯ

Конструкция температурного дубля (вариант преобразования Боголюбова) позволяет выразить гауссовское состояние через фоковское. Рассмотрим для бозонной алгебры преобразование, представляющее оператор уничтожения $a(k)$ в виде линейной комбинации $a_1(k)$ и $a_2^\dagger(k)$ — операторов рождения и уничтожения двух независимых бозонных полей (здесь u, v суть числовые параметры):

$$a(k)\mapsto ua_1(k)+va_2^\dagger(k),$$
$$a^\dagger(k)\mapsto u^*a_1^\dagger(k)+v^*a_2(k).$$

Условие сохранения коммутационных соотношений

$$[ua_1(k) + va_2^\dagger(k), u^* a_1^\dagger(k) + v^* a_2(k)] = |u|^2 - |v|^2 = 1.$$

Пусть поля $a_1(k)$, $a_2(k)$ находятся в фоковских состояниях. Тогда

$$\langle a^\dagger(k)a(k')\rangle = |v|^2\delta(k-k'),$$
$$\langle a(k)a(k')\rangle = \langle a^\dagger(k)a^\dagger(k')\rangle = 0.$$

Таким образом, при таком преобразовании фоковское состояние превращается в гауссовское нефоковское (несжатое с нулевым средним). Для доказательства этого факта достаточно показать, что корреляционная функция для поля $a(k)$ вычисляется по теореме Вика, это следует из теорем Вика для полей $a_1(k)$, $a_2(k)$.

Следующая теорема позволяет воспроизвести стохастические пределы корреляционных функций, вычисленных в теореме 1 предыдущего раздела, при помощи аналога конструкции температурного дубля для алгебры мастер-поля (квантового шума) со свободной статистикой. В отличие от бозонного случая, при температурном дубле меняется не только состояние, но и перестановочные соотношения для мастер-поля.

Теорема 2. *Стохастический предел N-точечной корреляционной функции для запутанных операторов равен коррелятору для алгебры шумов*

$$\lim_{\lambda\to 0}\langle a_\lambda^{\varepsilon_1}(t_1,k_1)\dots a_\lambda^{\varepsilon_N}(t_N,k_N)\rangle = \langle b^{\varepsilon_1}(t_1,k_1)\dots b^{\varepsilon_N}(t_N,k_N)\rangle,$$

где алгебра шумов определяется соотношениями со свободной статистикой — мастер-поле есть сумма двух вкладов:

$$b(t,k) = b_1(t,k) + b_2^\dagger(t,k), \tag{15}$$

независимых в свободном смысле $b_1 b_2^\dagger = b_2 b_1^\dagger = 0$, с соотношениями

$$b_1(t,k)b_1^\dagger(t',k') = 2\pi\delta(t-t')\delta\left(\omega(k) + \frac{1}{2}\,k^2 + kp\right)(N(k)+1)\delta(k-k'), \tag{16}$$

$$b_2(t,k)b_2^\dagger(t',k') = 2\pi\delta(t-t')\delta\left(\omega(k) - \frac{1}{2}\,k^2 + kp\right)N(k)\delta(k-k'). \tag{17}$$

$$b_1(t,k)p = (p+k)b_1(t,k), \tag{18}$$

$$b_2(t,k)p = (p-k)b_2(t,k). \tag{19}$$

Корреляционные функции при этом берутся для фоковского состояния для алгебры свободных операторов рождения и уничтожения с образующими b_1, $b_1^\dagger$, b_2, $b_2^\dagger$.

Мы должны доказать деформированный вариант теоремы Вика для случая свободной статистики. Корреляционная функция $\langle b^{\varepsilon_1}(t_1,k_1)\dots b^{\varepsilon_N}(t_N,k_N)\rangle$, $N=2n$, принимает вид суммы по всевозможным непересекающимся диаграммам (это следует из свободной статистики). Дуги в этих диаграммах отвечают спариваниям $b_1b_1^\dagger$, $b_2b_2^\dagger$ (каждой дуге вида $bb^\dagger$ отвечает спаривание $b_1b_1^\dagger$, а дуге $b^\dagger b$ — спаривание $b_2b_2^\dagger$). Из (16), (17) следует, что каждое такое спаривание порождает член, представленный в корреляционной функции (14) (без вклада суммирования по l). Вклад под дельта-функцией, содержащий суммирование по l, возникает при протаскивании спаривания через дугу при упорядочении операторных дельта-функций с учетом соотношений (18), (19) (по тем же аргументам, которые обсуждались при доказательстве теоремы 1 и порождали соответствующие вклады в корреляционной функции (14)).

Благодарности. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 19-11-00320).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Voiculescu D. V., Dykema K. J., Nica A.* Free Random Variables. A Noncommutative Probability Approach to Free Products with Applications to Random Matrices, Operator Algebras and Harmonic Analysis on Free Groups. CRM Monograph Ser. 1. Amer. Math. Soc. Providence, RI, 1992.
2. *Accardi L., Yun Gang Lu, Volovich I. V.* Quantum Theory and Its Stochastic Limit. Springer, 2002
3. *Accardi L., Kozyrev S. V., Volovich I. V.* Dynamical q-Deformation in Quantum Theory and the Stochastic Limit // J. Phys. A. 1999. V. 32, No. 19. P. 3485–3495; arXiv:math/9807137.
4. *Аккарди Л., Волович И. В., Козырев С. В.* Стохастическое приближение в модели взаимодействия частицы с квантовым полем и новая алгебра // ТМФ. 1998. Т. 116, № 3. С. 401–416 (*Accardi L., Volovich I. V., Kozyrev S. V.* A New Algebra in the Stochastic Approximation for the Model of a Particle Interacting with a Quantum Field // Theor. Math. Phys. 1998. V. 116, No. 3. P. 1050–1062).
5. *Accardi L., Aref'eva I. Ya., Volovich I. V.* Stochastic Limit and Interacting Commutation Relations // Mathematical Physics and Stochastic Analysis. Lisbon, 1998; River Edge, NJ: World Sci. Publ., 2000. P. 18–36.
6. *Аккарди Л., Арефьева И. Я., Волович И. В.* Неравновесная квантовая теория поля и взаимодействующие коммутационные соотношения // Тр. МИАН. 2000. Т. 228. С. 116–135 (*Accardi L., Aref'eva I. Ya., Volovich I. V.* Non-Equilibrium Quantum Field Theory and Entangled Commutation Relations // Proc. Steklov Inst. Math. 2000. V. 228. P. 106–125).