ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА
2020. Т. 51. ВЫП. 4. С. 501–510

ТЕОРИЯ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ЯНГИАНА СУПЕРАЛГЕБРЫ ЛИ И КВАНТОВОЙ ПЕТЛЕВОЙ СУПЕРАЛГЕБРЫ

В. А. Стукопин *

Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет), Долгопрудный, Россия

Южный математический институт Владикавказского научного центра РАН,
Владикавказ, Россия

Основываясь на описании конечномерных неприводимых представлений янгиана специальной линейной супералгебры Ли и квантовой петлевой специальной супералгебры, мы вводим аналоги категорий $\mathfrak{O}$ для этих квантовых супералгебр. Анонсирована теорема об эквивалентности этих категорий представлений.

Based on the description of irreducible finite-dimensional representations of Yangian of special linear Lie superalgebra and quantum loop special linear superalgebra, we introduce the counterparts of categories $\mathfrak{O}$ for representations of these quantum superalgebras. The equivalence theorem for these categories for Yangian and quantum loop superalgebra is announced.

PACS: 02.20.Sv

ВВЕДЕНИЕ

Супералгебры Ли давно превратились в рабочий инструмент физиков при исследовании суперсимметричных моделей квантовой теории поля. Классификация простых супералгебр Ли была получена В. Г. Кацем в конце 70-х годов прошлого века [1, 2]. В середине 80-х годов прошлого века В. Г. Дринфельд ввел в математику квантовые группы, которые являются либо деформациями алгебр функций на группе, либо деформациями универсальных обертывающих алгебр. Наиболее важные примеры квантовых групп доставляют янгианы [3–6], связанные с рациональными решениями квантового уравнения Янга–Бакстера со спектральным параметром, а также квантовые аффинные алгебры (или тесно связанные с ними квантовые петлевые алгебры) [3, 4].

*E-mail: stukopin@mail.ru

Несколько позднее стали изучаться и янгианы супералгебр Ли [7–9], и квантовые аффинные супералгебры (являющиеся центральным расширением петлевых супералгебр). Квантовые супералгебры стали уже в этом веке широко применяться в современной теоретической физике, а янгианы супералгебр Ли стали важной частью математического аппарата, используемого в квантовой теории суперструн [10], в частности в AdS-соответствии [11]. В основе этих применений лежит использование градуированного алгебраического анзаца Бете, основанного, по существу, на теории квантовых супералгебр. В основе алгебраического анзаца Бете лежит использование коммутационных соотношений для элементов трансфер-матрицы, которые, в свою очередь, могут быть получены с использованием явных выражений для универсальных R-матриц и теории представлений квантовых алгебр, которые вместе и дают возможность явного описания трансфер-матрицы и изучения ее свойств. Наряду с этим возникает задача описания коммутативных подалгебр (подалгебр Бете) квантовых (супер)алгебр. Важным для этих применений стало разрешение таких математических задач, как явное вычисление универсальных R-матриц [9, 12, 13], развитие теории представлений янгианов супералгебр Ли и квантовых аффинных супералгебр [14], описание коммутативных подалгебр в квантовых супералгебрах. В настоящее время этим математическим вопросам посвящено немало работ (см., например, [11, 13–19]). Несмотря на то, что в настоящее время в теории квантовых супералгебр, и в частности в теории их представлений, получено много результатов, многие фундаментальные вопросы пока остаются неразрешенными. Так, пока неясна в полной мере в суперслучае геометрическая природа появляющихся основных объектов теории, так же как и связь между представлениями янгианов и квантовых аффинных супералгебр. Хотя какие-то попытки в этом направлении были сделаны в последнее время [15, 19]. В то же время в теории квантовых алгебр эти вопросы в значительной степени разрешены к настоящему времени [25–28]. Во многом понята связь между янгианами и квантовыми петлевыми алгебрами [20], их представлениями [21], а также в определенной степени понята их геометрическая природа [22, 23]. В данной работе мы делаем попытку продвинуться в этом направлении. Мы анонсируем результат о связи категорий представлений янгиана специальной линейной супералгебры и квантовой петлевой специальной линейной супералгебры. Кроме того, мы описываем и используем конечномерные неприводимые представления квантовой петлевой супералгебры в удобной нам форме. Это описание эквивалентно классификации неприводимых представлений, полученной в работе [18]. Наша работа является естественным продолжением работы [15], в которой мы построили изоморфизм между пополнениями суперянгиана и квантовой петлевой супералгебры в случае специальной линейной супералгебры. Здесь мы исследуем связь между исходными объектами — янгианом и квантовой петлевой алгеброй на уровне категорий их представлений. По существу, мы показываем, что янгиан и квантовая петлевая супералгебра имеют похожую теорию представлений. Вопрос о связи структур коалгебр, а также обоснование полученного результата будут опубликованы позже.

1. СУПЕРЯНГИАН $Y_\hbar(A(m,n))$ И КВАНТОВАЯ ПЕТЛЕВАЯ СУПЕРАЛГЕБРА $U_q(LA(m,n))$

В этом разделе мы напомним определение янгиана $Y(A(m,n))$ [7] специальной линейной супералгебры Ли и квантовой петлевой супералгебры $U_q(LA(m,n))$.

1.1. Специальная линейная супералгебра Ли. Супералгебра Ли $A(m,n)$ (см. [1,2]) определяется своей матрицей Картана $A=(a_{i,j})_{i,j=1}^{m+n+1}$. Ее ненулевые элементы имеют следующий вид:

$$a_{i,i}=2,\quad a_{i,i+1}=a_{i+1,i}=-1,\quad i<m+1;$$
$$a_{i-1,i}=a_{i,i-1}=1,\quad a_{i,i}=-2,\quad m+1<i,\quad i\in I=\{1,\ldots,m+n+1\}.$$

Эта матрица Картана симметризуема, и часто бывает удобнее использовать ее симметризованную форму. В симметризованной матрице Картана диагональные элементы, начиная с $m+2$-го, и элементы, расположенные на соседних диагоналях, меняют знак на противоположный, т. е. диагональные становятся отрицательными и равными -2, а расположенные на соседних диагоналях становятся равными 1. Остальные элементы в матрице: $m+1$-й диагональный и расположенные на диагоналях, отличных от средних трех, равны 0.

Супералгебра Ли $\mathfrak{g}=A(m,n)$ порождается образующими: $h_i, x_i^{\pm}$, $i\in I$. Образующие $x_{m+1}^{\pm}$ — нечетные, а остальные образующие — четные, таким образом, функция четности p принимает следующие значения: $p(h_i)=0$, $i\in I, p(x_j^{\pm})=0$, $j\neq m+1$, $p(x_{m+1}^{\pm})=1$. Эти образующие удовлетворяют следующей системе определяющих соотношений:

$$[h_i,h_j]=0,\quad [h_i,x_j^{\pm}]=\pm a_{ij}x_j^{\pm},$$
$$[x_i^+,x_j^-]=\delta_{ij}h_i,\quad [[x_m^{\pm},x_{m+1}^{\pm}],[x_{m+1}^{\pm},x_{m+2}^{\pm}]]=0,$$
$$ad^{1-\tilde{a}_{ij}}(x_i^{\pm})x_j^{\pm}=[x_i^{\pm},[x_i^{\pm},x_j^{\pm}]]=0.$$

Ниже мы будем использовать обозначение $\bar{i}:=p(x_i^{\pm})$.

1.2. Определение суперянгиана

Определение 1.1. *Янгиан (более точно, $\hbar$-янгиан) $Y_\hbar(\mathfrak{g})$ супералгебры Ли $\mathfrak{g}$ — это супералгебра Хопфа над кольцом $\mathbb{C}[[\hbar]]$ формальных степенных рядов, порожденная как ассоциативная супералгебра образующими* $h_{i,k}:=$

$h_{\alpha_i,k}$, $x^{\pm}_{i,k} := x^{\pm}_{\alpha_i,k}$, $i \in I$, $k \in \mathbb{Z}_+$, которые удовлетворяют следующей системе определяющих соотношений:

$$[h_{i,k}, h_{j,l}] = 0, \quad [h_{i,0}, x^{\pm}_{j,s}] = \pm d_i a_{ij} x^{\pm}_{j,s},$$

$$\delta_{i,j} h_{i,k+l} = [x^{+}_{i,k}, x^{-}_{j,l}],$$

$$[h_{i,k+1}, x^{\pm}_{j,l}] = [h_{i,k}, x^{\pm}_{j,l+1}] + d_i a_{ij} \hbar (h_{i,k} x^{\pm}_{j,l} + x^{\pm}_{j,l} h_{i,k}),\ i \text{ или } j \neq m+1,$$

$$[h_{m+1,k+1}, x^{\pm}_{m+1,l}] = 0,$$

$$[x^{\pm}_{i,k+1}, x^{\pm}_{j,l}] = [x^{\pm}_{i,k}, x^{\pm}_{j,l+1}] + d_i a_{ij} \hbar (x^{\pm}_{i,k} x^{\pm}_{j,l} + x^{\pm}_{j,l} x^{\pm}_{i,k}),\ i \neq m, \text{ если } j \neq m+1,$$

$$[x^{\pm}_{m+1,k+1}, x^{\pm}_{m+1,l}] = 0,$$

$$[x^{\pm}_{i,k}, [x^{\pm}_{i,s}, x^{\pm}_{j,l}]] + [x^{\pm}_{i,s}, [x^{\pm}_{i,k}, x^{\pm}_{j,l}]] = 0, \quad i \neq j,$$

$$[[x^{\pm}_{m,k}, x^{\pm}_{m+1,0}], [x^{\pm}_{m+1,0}, x^{\pm}_{m+2,t}]] = 0$$

для всех целых $t_1, \ldots, t_r, s$. Здесь $\mathfrak{S}_r$ — группа перестановок конечного множества, содержащего r элементов.

1.3. Определение квантовой петлевой супералгебры. Здесь мы напомним определение квантованной универсальной обертывающей супералгебры петлевой супералгебры $LA(m,n)$ в терминах токовой системы образующих и определяющих соотношений, естественных аналогов новой системы образующих и соотношений Дринфельда. Мы полагаем, что $q = \mathrm{e}^{\hbar/2}$. Пусть также ниже $\mathfrak{g} = A(m,n)$.

Определение 1.2. *Пусть $U_q(L\mathfrak{g})$ — это ассоциативная супералгебра с единицей над $C[q, q^{-1}]$, порожденная образующими $\{E_{i,k}, F_{i,k}, H_{i,k}\}_{i \in I, k \in \mathbb{Z}}$, которые удовлетворяют следующей системе определяющих соотношений:*

1) Для любых $i, j \in I$ и $r, s \in \mathbb{Z}$

$$[H_{i,r}, H_{j,s}] = 0.$$

2) Для любых $i, j \in I$ и $k \in \mathbb{Z}$

$$[H_{i,0}, E_{j,k}] = a_{i,j} E_{j,k}, \quad [H_{i,0}, F_{j,k}] = -a_{i,j} F_{j,k}.$$

3) Для любых $i, j \in I$ и $r, k \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}$

$$[H_{i,r}, E_{j,k}] = \frac{[r a_{i,j}]_{q_i}}{r} E_{j,r+k}, \quad [H_{i,r}, F_{j,k}] = -\frac{[r a_{i,j}]_{q_i}}{r} F_{j,r+k}.$$

4) Для любых $i, j \in I$ и $k, l \in \mathbb{Z}$

$$E_{i,k+1} E_{j,l} - q_i^{a_{ij}} E_{j,l} E_{i,k+1} = q_i^{a_{ij}} E_{i,k} E_{j,l+1} - E_{j,l+1} E_{i,k},$$

$$F_{i,k+1} F_{j,l} - q_i^{-a_{ij}} F_{j,l} F_{i,k+1} = q_i^{-a_{ij}} F_{i,k} F_{j,l+1} - F_{j,l+1} F_{i,k}.$$

5) Для любых $i, j \in I$ и $k, l \in \mathbb{Z}$

$$[E_{i,k}, F_{j,l}] = \delta_{i,j} \frac{\psi^+_{i,k+l} - \psi^-_{i,k+l}}{q_i - q_i^{-1}}.$$

6) Пусть $i \neq j \in I$ и $m = 1 - \tilde{a}_{ij}$. Для любых $k_1, \ldots, k_m \in \mathbb{Z}$, $l \in \mathbb{Z}$

$$\sum_{\pi \in \mathfrak{S}_m} \sum_{s=0}^{m} (-1)^s \begin{bmatrix} m \\ s \end{bmatrix}_{q_i} E_{i,k_{\pi(1)}} \cdot \ldots \cdot E_{i,k_{\pi(s)}} \cdot E_{j,l} \cdot E_{i,k_{\pi(s+1)}} \cdot \ldots \cdot E_{i,k_{\pi(m)}} = 0,$$

$$\sum_{\pi \in \mathfrak{S}_m} \sum_{s=0}^{m} (-1)^s \begin{bmatrix} m \\ s \end{bmatrix}_{q_i} F_{i,k_{\pi(1)}} \cdot \ldots \cdot F_{i,k_{\pi(s)}} \cdot F_{j,l} \cdot F_{i,k_{\pi(s+1)}} \cdot \ldots \cdot F_{i,k_{\pi(m)}} = 0.$$

7)

$$[[E_{m,k}, E_{m+1,0}]_q, [E_{m+1,0}, E_{m+2,r}]_q]_q = 0,$$
$$[[F_{m,k}, F_{m+1,0}]_{q^{-1}}, [F_{m+1,0}, F_{m+2,r}]_{q^{-1}}]_{q^{-1}} = 0,$$

где элементы $\psi_{i,r}$, $\varphi_{i,r}$ определяются следующими формулами:

$$\psi_i^+(z) = \sum_{r \geqslant 0} \psi_{i,r} z^{-r} = \exp\left(\frac{\hbar d_i}{2} H_{i,0}\right) \exp\left[(q_i - q_i^{-1}) \sum_{s \geqslant 1} H_{i,s} z^{-s}\right],$$
$$\psi_i^-(z) = \sum_{r \geqslant 0} \varphi_{i,r} z^{r} = \exp\left(-\frac{\hbar d_i}{2} H_{i,0}\right) \exp\left[-(q_i - q_i^{-1}) \sum_{s \geqslant 1} H_{i,-s} z^{s}\right]$$

и $\psi^+_{i,-k} = \psi^-_{i,k} = 0$ для $k \geqslant 1$. Кроме того, $p(H_{i,r}) = 0$ для $i \in I$, $r \in \mathbb{Z}_+$ и $p(X^{\pm}_{i,r}) = 0$ для $i \in I \backslash \{m\}$, $r \in \mathbb{Z}$, $p(x^{\pm}_{m,r}) = 0$ для $r \in \mathbb{Z}$. Мы также будем использовать обозначение $[a, b]_q := a \cdot b - (-1)^{p(a)p(b)} q \cdot b \cdot a$ для q-(супер)коммутатора.

Мы будем обозначать через $U^0 \subset U_q(L\mathfrak{g})$ коммутативную подалгебру, порожденную образующими $\{H_{i,r}\}_{i \in I, r \in \mathbb{Z}}$.

2. ТЕОРИЯ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ КВАНТОВЫХ СУПЕРАЛГЕБР

2.1. Неприводимые представления суперянгиана и квантовой аффинной супералгебры. Следуя С. Гаутаму и В. Толедано-Ларедо [21], введем категории $\mathfrak{O}_{\mathrm{int}}(Y_\hbar(\mathfrak{g}))$ и $\mathfrak{O}_{\mathrm{int}}(U_q(L\mathfrak{g}))$ интегрируемых модулей. Представление (модуль)

i) $U \in \mathfrak{O}_{\mathrm{int}}(U_q(L\mathfrak{g}))$ тогда и только тогда, когда

a) $U = \oplus_{\mu \in \mathfrak{h}^*} U_\mu$ и $\dim U_\mu < \infty$, где $U_\mu = \{v \in U : K_h v = q^{\mu(h)} v, \forall h \in \mathfrak{h}\}$;

б) существует $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathfrak{h}^*$ такое, что если $U_\mu \neq 0$, то $\mu \leqslant \lambda_i$ для некоторого $i = 1, \dots, r$. (Мы говорим, что $\lambda \leqslant \mu$, если $\lambda - \mu \in \sum\limits_{i \in I} \mathbb{N}\alpha_i$, где $\{\alpha_i : i \in I\}$ — множество простых корней базисной супералгебры Ли $\mathfrak{g}$.)

в) для каждого $\mu \in \mathfrak{h}^*$ такого, что $U_m \neq 0$ и $i \in I$, существует $N > 0$ такое, что $U_{\mu - n\alpha_i} = 0$ для каждого $n \geqslant N$.

ii) Представление (янгианный модуль) V янгиана $Y_\hbar(\mathfrak{g})$ принадлежит категории $\mathfrak{O}_{\mathrm{int}}(Y_\hbar(\mathfrak{g}))$, если

а) $V = \oplus_{\mu \in \mathfrak{h}^*} V_\mu$ и $\dim V_\mu < \infty$, где $V_\mu = \{v \in V : hv = \mu(h)v, \forall h \in \mathfrak{h}\}$;

б) существует $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathfrak{h}^*$ такое, что если $V_\mu \neq 0$, то $\mu \leqslant \lambda_i$ для некоторого $i = 1, \dots, r$;

в) для каждого $\mu \in \mathfrak{h}^*$ такого, что $V_m \neq 0$ и $i \in I$, существует $N > 0$ такое, что $V_{\mu - n\alpha_i} = 0$ для каждого $n \geqslant N$.

Отметим, что каждое конечномерное представление суперянгиана $Y_\hbar(\mathfrak{g})$ (см. [14]) или квантовой петлевой супералгебры $U_q(L\mathfrak{g})$ (см. [18]) принадлежит $\mathfrak{O}_{\mathrm{int}}(Y_\hbar(\mathfrak{g}))$ (соответственно, категории $\mathfrak{O}_{\mathrm{int}}(U_q(L\mathfrak{g}))$).

Для удобства читателя сформулируем также теоремы о классификации конечномерных неприводимых представлений суперянгиана $Y(A(m,n))$ [14]. Здесь мы приведем очевидную модификацию для $Y_\hbar(A(m,n))$.

Пусть $\bar{d} = \{d_{i,k}\}_{i \in I, k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ — набор комплексных чисел и пусть $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ такое, что $d_{i,0} = d_i \lambda(\check{\alpha}_i)$. Представление V янгиана $Y_\hbar(\mathfrak{g})$ называется представлением со старшим весом $(\lambda, \bar{d})$, если существует такой вектор $v \in V$, что

(i) $V = Y_\hbar(\mathfrak{g})v$;

(ii) $x^+_{i,r} v = 0$ для каждого $i \in I$, $r \in \mathbb{N}$;

(iii) $h_{i,r} v = d_{i,r} v$ и $h_0(v) = \lambda(h_0)$ для каждого $i \in I$, $r \in \mathbb{N}$, $h_0 \in \mathfrak{h}$.

С парой $(\lambda, \bar{d})$ мы связываем модуль Верма $M(\lambda, \bar{d})$ очевидным образом и будем обозначать через $L(\lambda, \bar{d})$ его единственный неприводимый фактормодуль.

Теорема 2.1 [14]

1) Каждый неприводимый конечномерный $Y_\hbar(A(m,n))$-модуль V является модулем со старшим весом $d : V = L(\lambda, \bar{d})$, т. е.

$$h_i(u)v_0 = \left(1 + \hbar \sum_{k=0}^{\infty} h_{i,k} \cdot u^{-k-1}\right) v_0 = \left(1 + \hbar \sum_{k=0}^{\infty} d_{i,k} \cdot u^{-k-1}\right) v_0,$$

где v_0 — старший вектор и $i \in I = \{1, 2, \dots, m+n+1\}$.

2) Модуль $L(\lambda, \bar{d})$ конечномерен в том и только в том случае, если существуют такие многочлены P_i^d, $i \in \{1, 2, \dots, m, m+2, \dots m+n+1\} = I \backslash \{m+1\}$, а также многочлены P_{m+1}^d, Q_{m+1}^d, которые удовлетворяют следующим условиям:

а) все эти многочлены со старшим коэффициентом, равным 1;

б)

$$\frac{P_i^d(u+d_ia_{ii}\hbar/2)}{P_i^d(u)} = 1+\hbar\sum_{k=0}^{\infty} d_{i,k}\cdot u^{-k-1}, \quad i\in I\backslash\{m+1\}, \tag{1}$$

$$\frac{P_{m+1}^d(u)}{Q_{m+1}^d(u)} = 1+\hbar\sum_{k=0}^{\infty} d_{m+1,k}\cdot u^{-k-1}. \tag{2}$$

Здесь d_ia_{ii} — матричный элемент симметризованной матрицы Картана супералгебры Ли $A(m,n)$.

Заметим, что $\lambda(\check{\alpha}_i)=\deg(P_i^{\bar{d}})\in\mathbb{N}$, $i\neq m+1$ и $\lambda(\check{\alpha}_{m+1})=p_{m+1,n-1}-q_{m+1,n-1}\in\mathbb{R}$, где $P_{m+1}^{\bar{d}}(u)=u^n+p_{m+1,n-1}u^{n-1}+\ldots+p_{m+1,0}$, $Q_{m+1}^{\bar{d}}=u^n+q_{m+1,n-1}u^{n_1}+\ldots+q_{m+1,0}$. Так что λ — это доминантный целый вес в смысле теории представлений супералгебр Ли: все его четные компоненты являются целыми. Таким образом, приведенная выше теорема утверждает, что множество простых объектов категории $\mathfrak{O}_{\rm int}(Y_\hbar(\mathfrak{g}))$ находится в биективном соответствии с множеством Π_+^Y пар $(\lambda\in\mathfrak{h}^*,\{P_i^{\bar{d}}(u)\in\mathbb{C}[u]\}_{i\in I},Q_{m+1}^{\bar{d}}(u)\in\mathbb{C}[u])$ таких, что $\lambda(\check{\alpha}_i)=\deg(P_i^{\bar{d}})$, $i\in I\backslash\{m+1\}$, $\lambda(\check{\alpha}_{m+1})=p_{m+1,n-1}-q_{m+1,n-1}$. Если $(\lambda,\{P_i^{\bar{d}}\},Q_{m+1}^{\bar{d}})\in\Pi_+^Y$, мы обозначаем через $L(\lambda,\{P_i^{\bar{d}}\},Q_{m+1}^{\bar{d}})$ соответствующий неприводимый $Y_\hbar(\mathfrak{g})$-модуль.

Аналогичным образом в терминах многочленов P_i^δ, $i\in\{1,2,\ldots,m,m+2,\ldots,m+n+1\}=I\backslash\{m+1\}$, $P_{m+1}^\delta,Q_{m+1}^\delta$ формулируется теорема о классификации конечномерных неприводимых представлений квантовой петлевой супералгебры $U_q(LA(m,n))$ (см. [18]). Из-за недостатка места мы опускаем здесь ее формулировку, а также замечания, аналогичные приведенным выше для случая янгианных модулей.

2.2. Категории интегрируемых модулей. Композиционный ряд. Нам потребуется аналог для $Y_\hbar(\mathfrak{g})$ и $U_q(L\mathfrak{g})$ результата о существовании композиционного ряда в категории O для алгебры Каца–Муди $\hat{\mathfrak{g}}$.

Лемма 2.1

i) Пусть $U\in\mathfrak{O}(U_q(L\mathfrak{g}))$ и $\lambda\in\mathfrak{h}^*$. Тогда существует фильтрация $U_q(L\mathfrak{g})$-модулей $0=U_0\subset\ldots\subset U_t=U$ такая, что для любых U_j, $j=1,2,\ldots,t$:

а) либо $U_j/U_{j-1}=L(\lambda_j,\{P_i^{\delta,j}\},Q_{m+1}^{\delta,j})$ для некоторого $\lambda_j\geqslant\lambda_{j-1}$,

б) либо $(U_j/U_{j-1})_\mu=0$ для некоторого $\mu\geqslant\lambda$.

Более того, для данного $\mu\geqslant\lambda$ и $(\mu,\{P_i\},Q_{m+1})\in\Pi_+^U$ количество раз, когда $L(\lambda_j,\{P_i^{\delta,j}\},Q_{m+1}^{\delta,j})$ появляется в U_j/U_{j1}, не зависит от λ и фильтрация, заданная таким образом, обозначается как $[U:L(\lambda_j,\{P_i^{\delta,j}\},Q_{m+1}^{\delta,j})]$.

ii) Пусть $V\in\mathfrak{O}(Y_\hbar(\mathfrak{g}))$ и $\lambda\in\mathfrak{h}^*$. Тогда существует фильтрация $Y_\hbar(\mathfrak{g})$-модулей $0=V_0\subset\ldots\subset V_t=U$ такая, что для любых V_j, $j=1,2,\ldots,t$:

а) либо $V_j/V_{j-1}=L(\lambda_j,\{P_i^{d,j}\},Q_{m+1}^{d,j})$ для некоторого $\lambda_j\geqslant\lambda_{j-1}$,

б) либо $(V_j/V_{j-1})_\mu=0$ для каждого $\mu\geqslant\lambda$.

Более того, для данных $\mu \geqslant \lambda$ *и* $(\mu, \{P_i\}, Q_{m+1}) \in \Pi_+^Y$ *число вхождений* $L(\lambda_j, \{P_i^{d,j}\}, Q_{m+1}^{d,j})$ *в* V_j/V_{j-1} *не зависит от* λ *и определенная таким образом фильтрация обозначается через* $[V : L(\lambda_j, \{P_i^{d,j}\}, Q_{m+1}^{d,j})]$.

2.3. Определение категорий $\mathfrak{O}^\Pi(Y_\hbar(\mathfrak{g}))$ и $\mathfrak{O}^\Omega(U_q(L\mathfrak{g}))$. Пусть $\Pi \subset \mathbb{C}$ — такое подмножество, что $\Pi \pm \hbar/2 \subset \Pi$. Далее мы будем использовать понятие суперкатегории (см., например, [24]). Напомним, в суперкатегории объекты и морфизмы Z_2-градуированы. Суперфунктор между суперкатегориями — это функтор, сохраняющий четность. В случае, когда категория строится из категории векторных суперпространств, требуется также линейность функтора. Для суперфункторов $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ суперестественное преобразование $\eta : F \Rightarrow G$ — это семейство морфизмов $\eta_M = \eta_{M,\bar{0}} + \eta_{M,\bar{1}} : FM \to GM$ для каждого $M \in ob(\mathcal{C})$, такого, что $\eta_{N,p} \circ Ff = (-1)^{|f|p} Gf \circ \eta_{M,p}$ для каждого однородного морфизма $f : M \to N$ в $\mathcal{C}$ и любого $p \in \mathbb{Z}_2$. Заметим, что определенные выше категории $\mathfrak{O}^\Pi(Y_\hbar(\mathfrak{g}))$ и $\mathfrak{O}^\Omega(U_q(L\mathfrak{g}))$ являются моноидальными суперкатегориями (см. [24]). Моноидальная суперкатегория — это суперкатегория $\mathcal{A}$, наделенная суперфунктором $- \otimes - : \mathcal{A} \boxtimes \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, единичным объектом $\mathbf{1}$ и четными суперестественными изоморфизмами a, l, r, которые удовлетворяют аксиомам, аналогичным аксиомам в моноидальной категории. Также естественно определяется моноидальный суперфунктор и моноидальное естественное суперпреобразование, а также точный и строгий моноидальный суперфункторы (см. [24]). Далее приставку «супер» мы будем опускать.

Мы определяем категорию $\mathfrak{O}^\Pi(Y_\hbar(\mathfrak{g}))$ как полную подкатегорию категории $\mathfrak{O}(Y_\hbar(\mathfrak{g}))$, состоящую из таких представлений V, что для каждого $(\lambda, \{P_i^d\}, Q_{m+1}^d) \in \Pi_+^Y$, для которого $[V : L(\lambda, \{P_i^d\}, Q_{m+1}^d)] \neq 0$, корни $P_i^d, i \in I, Q_{m+1}^d$ лежат в Π. Аналогично, пусть $\Omega \in \mathbb{C}^*$ — подмножество проколотой комплексной плоскости $\mathbb{C}^*$, инвариантное относительно умножения на $q^\pm$. Мы также определяем $\mathfrak{O}^\Omega(U_q(L\mathfrak{g}))$ как полную подкатегорию категории $\mathfrak{O}(U_q(L\mathfrak{g}))$, состоящую из таких U, что для каждого $(\lambda, \{P_i^\delta\}, Q_{m+1}^\delta) \in \Pi_+^U$, для которого $[U : L(\lambda, \{P_i^\delta\}, Q_{m+1}^\delta)] \neq 0$, корни полиномов $P_i^\delta, i \in I, Q_{m+1}^\delta$ лежат в Ω.

Лемма 2.2

i) $\mathfrak{O}^\Pi(Y_\hbar(\mathfrak{g}))$ *и* $\mathfrak{O}^\Omega(U_q(L\mathfrak{g}))$ *замкнуты относительно операций взятия прямой суммы, подобъекта, фактор-объекта и расширения, т. е. являются подкатегориями Серра категории* $\mathfrak{O}(Y_\hbar(\mathfrak{g}))$ *и* $\mathfrak{O}(U_q(L\mathfrak{g}))$.

ii) $\mathfrak{O}^\Pi(Y_\hbar(\mathfrak{g}))$ *и* $\mathfrak{O}^\Omega(U_q(L\mathfrak{g}))$ *замкнуты относительно операции тензорного произведения.*

Сформулируем главный результат работы.

Теорема 2.2. *Существует точный и строгий моноидальный функтор*

$$\Phi : \mathfrak{O}^\Pi(Y_\hbar(\mathfrak{g})) \to \mathfrak{O}^\Omega(U_q(L\mathfrak{g})), \tag{3}$$

являющийся эквивалентностью (супер)категорий.

Главный результат, представленный в этой работе, был в основном получен во время пребывания автора в IHES (Бюр-сюр-Иветт, Франция) и был поддержан European Research Council (ERC) under the European Union's Horizon 2020 research and innovation program (QUASIFT grant agreement 677368).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kac V.* A Sketch of Lie Superalgebra Theory // Commun. Math. Phys. 1977. V. 53. P. 31–64.
2. *Frappat L., Sciarrino A., Sorba P.* Dictionary on Lie Superalgebras. London: Acad. Press, 2000.
3. *Drinfeld V.* Quantum Groups // Proc. of Intern. Cong. Math. 1988. V. 716. P. 789–820.
4. *Chari V., Pressley A.* A Guide to Quantum Groups. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995.
5. *Molev A.* Yangians and Their Applications. arXiv:0211288 [math. QA]. 2002.
6. *Молев А. И.* Янгианы и классические алгебры Ли. М.: МЦНМО, 2009.
7. *Stukopin V.* Yangians of Lie Superalgebras $A(m, n)$ Type // Func. Anal. Appl. 1994. V. 28, No. 2. P. 217–219.
8. *Nazarov M.* Quantum Berezinian and the Classical Capelly Identity // Lett. Math. Phys. 1991. V. 21. P. 121–131.
9. *Stukopin V.* The Yangian Double of the Lie Superalgebra $A(m, n)$ // Func. Anal. Appl. 2006. V. 40, No. 2. P. 155–158.
10. *Dolan L., Nappi Ch., Witten E.* Yangian Symmetry in $D = 4$ Superconformal Yang–Mills Theory. arXiv:04012439810055 [hep-th]. 2004.
11. *Spill F., Torrielli A.* On Drinfeld's Second Realization of the AdS/CFT $\mathfrak{su}(2|2)$ Yangian. arXiv:0803.3194 [hep-th]. 2008.
12. *Levendorskii S., Soibelman Ya., Stukopin V.* Quantum Weyl Group and Universal R-Matrix for Quantum Affine Lie Algebra $A_1^{(1)}$ // Lett. Math. Phys. 1993. V. 27. P. 253–264.
13. *Stukopin V.* The Quantum Double of the Yangian of the Lie Superalgebra $A(m, n)$ and Computation of the Universal R-Matrix // J. Math. Sci. 2007. V. 142, No. 2. P. 1989–2006.
14. *Stukopin V.* Representations of the Yangian of a Lie Superalgebra of Type $A(m, n)$ // Izv.: Math. 2013. V. 77, No. 5. P. 1021–1043.
15. *Stukopin V.* Isomorphism of the Yangian $Y_\hbar(A(m, n))$ of the Special Linear Lie Superalgebra and the Quantum Loop Superalgebra $U_\hbar(LA(m, n))$ // Theor. Math. Phys. 2019. V. 198, No. 1. P. 129–144.
16. *Stukopin V.* The Yangian of the Strange Lie Superalgebra and Its Quantum Double // Theor. Math. Phys. 2013. V. 174, No. 1. P. 122–133.
17. *Stukopin V.* Yangian of the Strange Lie Superalgebra of Q_{n-1} Type. Drinfel'd Approach // Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications. 2007. V. 3, No. 069. P. 1–12.
18. *Zhang H.* Representations of Quantum Affine Superalgebras. arXiv:1309.5259 [math. QA]. 2013.

19. *Nekrasov N.* Superstring Chains and Supersymmetric Gauge Theories. arXiv:1811.04278 [hep-th]. 2018.
20. *Gautam S., Toledano-Laredo V.* Yangians and Quantum Loop Algebras // Selecta Mathematica. 2013. V. 19. P. 271–336.
21. *Gautam S., Toledano-Laredo V.* Yangians, Quantum Loop Algebras and Abelian Difference Equations // J. Amer. Math. Soc. 2015. V. 29.
22. *Nakajima H.* Quiver Varieties and Finite Dimensional Representations of Quantum Affine Algebras // J. Amer. Math. Soc. 2001. V. 14, No. 1. P. 145–238.
23. *Varagnolo M.* Quiver Varieties and Yangians. arXiv:0005277 [math. QA]. 2005.
24. *Kang S.-J., Kashiwara M., Oh S.-J.* Supercategorification of Quantum Kac–Moody Algebras II // Advances Math. 2014. V. 2014. P. 169–240.
25. *Drinfeld V.* Hopf Algebras and Quantum Yang–Baxter Equation // Dokl. AN USSR. 1985. V. 283. P. 1060–1064.
26. *Drinfeld V.* New Realization of Yangians and Quantum Affine Algebras // Dokl. AN USSR. 1988. V. 36. P. 212–216.
27. *Frenkel E., Reshetikhin N.* The q-Characters of Representations of Quantum Affine Algebras and Deformations of $\mathcal{W}$-Algebras. arXiv:9810055 [math. QA]. 1998.
28. *Lusztig G.* Canonical Bases Arising from Quantized Enveloping Algebras // J. Amer. Math. Soc. 1990. V. 3, No. 2. P. 447–498.