ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА
2020. Т. 51. ВЫП. 4. С. 582–590

МНОГОМАСШТАБНАЯ КАЛИБРОВОЧНАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ

М. В. Алтайский *

Институт космических исследований РАН, Москва

Принцип симметрии относительно локальных калибровочных преобразований $\psi(x) \to \mathrm{e}^{\imath w(x)}\psi(x)$ распространен на поля $\psi(g) \equiv \langle\chi|\Omega^*(g)|\psi\rangle$, определенные на локально компактной группе Ли, $g \in G$, где $\Omega(g)$ — квадратично-интегрируемое представление G. Показано, что, выбрав в качестве G аффинную группу $G : x' = ax+b, x, b \in \mathbb{R}^d$, можно построить квантово-полевую модель с калибровочной группой $SU(N)$, свободную как от УФ-, так и от ИК-расходимостей.

The symmetry with respect to local gauge transformations $\psi(x) \to \mathrm{e}^{\imath w(x)}\psi(x)$ is generalized to the fields $\psi(g) \equiv \langle\chi|\Omega^*(g)|\psi\rangle$ defined on a locally compact Lie group, $g \in G$, where $\Omega(g)$ is a square-integrable representation of G. It is shown that choosing G to be the affine group $G : x' = ax + b, x, b \in \mathbb{R}^d$ we can build a quantum field theory model with the $SU(N)$ gauge group, which is free of both the UV and the IR divergences.

PACS: 11.15.-q

ВВЕДЕНИЕ

Калибровочные теории являются основой современной физики. Квантовая электродинамика (КЭД) — калибровочная теория с калибровочной группой $U(1)$ — явилась первой физической теорией, с огромной точностью описавшей широкий спектр атомных явлений [1]. Неприятной особенностью формализма КЭД является то, что представление физических полей в пространстве квадратично-интегрируемых функций влечет за собой появление формально бесконечных функций Грина, если только не применена процедура перенормировки [2,3]. Калибровочная теория с калибровочной группой $\mathcal{A} = SU(2) \times U(1) \times SU_c(3)$ образует Стандартную модель (СМ) физики элементарных частиц. Перенормировка таких теорий, и, как следствие, получение физически интерпретируемых результатов в случае неабелевых калибровочных теорий представляет собой весьма нетривиальную задачу [4].

*E-mail: altaisky@rssi.ru

Причиной расходимостей в квантовой теории поля, по мнению автора [5], является неадекватный для описания физических полей выбор пространства функций $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$. Ни одна физическая величина не может быть измерена строго в точке x — согласно принципу неопределенности Гейзенберга, $\Delta x \to 0$ потребовало бы бесконечно большой передачи импульса. Следовательно, для получения физически интерпретируемых результатов любые физически измеримые величины должны быть определены на области конечного размера Δx, а физические поля должны зависеть как от координаты, так и от масштаба измерения $\psi = \psi_{\Delta x}(x)$. Квантово-полевые модели таких полей, ранее развитые автором на основе непрерывного вейвлет-преобразования [5–7], конечны по построению и не требуют перенормировки.

Несколько сложнее дело обстоит с калибровочными теориями. Непосредственная замена обычных полей $\psi(x)$ на поля $\psi_a(x)$, являющиеся функциями двух аргументов, хотя и приводит к конечной теории, но оставляет вычисление петлевых интегралов технически сложным [8]. В данной работе предложено альтернативное решение проблемы: калибровочные преобразования определены непосредственно на пространстве масштабно-зависимых функций. Это позволило построить модель с калибровочной группой $SU(N)$, по построению не содержащую ни УФ-, ни ИК-расходимостей. Связь функций Грина $\langle\psi_a(x_1)\cdots\psi_a(x_n)\rangle$, полученных в теории с масштабно-зависимой калибровочной инвариантностью, $\psi_a(x) \to U_a(x)\psi_a(x)$ с проекцией обычных функций Грина на базис фиксированного масштаба a еще предстоит выяснить.

1. ЛОКАЛЬНЫЕ КАЛИБРОВОЧНЫЕ ТЕОРИИ

Теория калибровочных полей основывается на инвариантности функционала действия относительно унитарных преобразований полей материи

$$\psi(x) \to U(x)\psi(x), \quad U(x)U^\dagger(x) = \mathbb{I}. \tag{1}$$

Действие свободных фермионов в такой теории

$$S_E = \int d^4x \left[\bar\psi\gamma_\mu\partial_\mu\psi + \imath m\bar\psi\psi\right] \tag{2}$$

(где $\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = -2\delta_{\mu\nu}$ — соотношение между γ-матрицами в евклидовой теории) становится инвариантным относительно калибровочных преобразований (1), если заменить частную производную ∂_μ на *ковариантную*

$$D_\mu = \partial_\mu + \imath A_\mu(x), \tag{3}$$

где поле $A_\mu(x)$, называемое калибровочным полем, при преобразованиях (1) изменяется по закону

$$A^U_\mu = U(x)A_\mu(x)U^\dagger(x) + \imath\left(\partial_\mu U(x)\right)U^\dagger(x). \tag{4}$$

В простейшем случае абелевой теории (КЭД) преобразования (1) сводятся к изменению фазы полей материи: $U(x) = \mathrm{e}^{\imath w(x)}$. В случае произвольной группы Ли преобразование (1) есть унитарное преобразование мультиплета полей материи, задаваемое генераторами группы:

$$w(x) = \sum_A w^A(x) T^A, \quad [T^A, T^B] = \imath f^{ABC} T^C. \tag{5}$$

Генераторы T^A действуют на поля материи в фундаментальном представлении, а на калибровочные поля — в присоединенном. Они нормированы $\mathrm{Tr}\,[T^A, T^B] = T_F \delta^{AB}$; обычно $T_F = 1/2$. Для нас наиболее интересны представления группы $SU(N)$, частными случаями которой являются как КЭД, так и КХД.

Дополнительно к действию полей материи действие калибровочной теории содержит также член самодействия поля A_μ и член, фиксирующий калибровку:

$$S'_E = \int d^4x \left[\bar{\psi} \gamma_\mu D_\mu \psi + \imath m \bar{\psi} \psi \right] + \frac{1}{2g^2} \int d^4x\, \mathrm{Tr}\,[F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}] + \\ + \text{члены, фиксирующие калибровку}, \tag{6}$$

где $F_{\mu\nu} = -\imath [D_\mu, D_\nu] = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + \imath [A_\mu, A_\nu]$ — тензор напряженности калибровочного поля, а g — формальная константа связи, получаемая заменой $A_\mu \to g A_\mu$.

Калибровочным теориям посвящена обширная литература (см., например, [9]). Мы же непосредственно перейдем к построению калибровочной теории для полей $\psi_a(x)$, зависящих от масштаба измерения.

2. КАЛИБРОВОЧНАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ В КТП С ЯВНОЙ ЗАВИСИМОСТЬЮ ОТ МАСШТАБА

В случае КЭД, когда группа калибровочных преобразований является абелевой, разделение компонент полей различных масштабов может быть проведено путем выражения локальных полей $(\psi(x), A_\mu(x))$, входящих в действие (6) посредством непрерывного вейвлет-преобразования:

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \frac{1}{C_\chi} \int \frac{1}{a^d} \chi\left(\frac{x-b}{a}\right) \psi_a(b) \frac{da\, d^d b}{a}, \\ A_\mu(x) &= \frac{1}{C_\chi} \int \frac{1}{a^d} \chi\left(\frac{x-b}{a}\right) A_{\mu,a}(b) \frac{da\, d^d b}{a}, \end{aligned} \tag{7}$$

где
$$\psi_a(b) := \int d^d x \frac{1}{a^d} \overline{\chi\left(\frac{x-b}{a}\right)} \psi(x) \tag{8}$$

— вейвлет-коэффициенты функции ψ по отношению к базисному вейвлету χ (общую теорию вейвлет-преобразования см., например, в [10]). (Здесь, следуя [11], использована L^1-нормировка, отличающаяся от принятой в математической литературе L^2-нормировки [10]. Это обеспечивает вейвлет-коэффициентам те же размерности, что и у анализируемых полей [5].) Подстановка (7) позволяет получить УФ-конечные выражения для функций Грина масштабно-зависимых полей при введении соответствующих условий причинности по масштабной переменной a, однако аналитическое вычисление петлевых интегралов здесь часто оказывается затруднительным [8]. В силу линейности вейвлет-преобразования (8) калибровочные преобразования масштабно-зависимых полей $A_{mu,a}(b)$ также имеют градиентный вид и удовлетворяют соответствующим тождествам Уорда–Такахаши [8, 12].

Такой подход, однако, встречает серьезные трудности в случае *неабелевой* калибровочной группы: преобразование масштабно-зависимых полей $A_{\mu a}(b)$ при калибровочном преобразовании полей материи (1) уже не имеет простой градиентной формы — вместо этого возникает нелинейное взаимодействие компонент всех масштабов. Считая, что физическими полями являются именно поля $(\psi_a(b), A_{\mu a}(b))$, зависящие от масштаба измерения a, можно предложить другой подход к построению калибровочных теорий.

Для построения калибровочной теории масштабно-зависимых полей вспомним, что функционал действия свободных фермионов может быть записан в виде матричного элемента оператора Дирака

$$S_E = \langle \psi | \gamma_\mu \partial_\mu + \imath m | \psi \rangle \tag{9}$$

в пространстве со скалярным произведением $\langle \psi | \phi \rangle = \int d^d x \bar{\psi}(x) \phi(x)$. В выражение (9) можно вставить любые разбиения единицы $\mathbb{I} = \sum_c |c\rangle\langle c|$, в том числе разбиение единицы на группе Ли (G) [13, 14]:

$$\mathbb{I} = \int_G \Omega(\nu) |\chi\rangle \frac{d\mu_L(\nu)}{C_\chi} \langle \chi | \Omega^\dagger(\nu), \tag{10}$$

где $\Omega(\nu)$ — представление группы G; $d\mu_L(\nu)$ — левоинвариантная мера на группе G, а $|\chi\rangle$ — допустимый вектор гильбертова пространства состояний, удовлетворяющий условию нормировки

$$C_\chi = \frac{1}{\|\chi\|^2} \int_G |\langle \chi | \Omega(\nu) | \chi \rangle|^2 \, d\mu(\nu) < \infty.$$

Выражения $\langle\chi|\Omega^\dagger(\nu)|\psi\rangle$ называют обобщенными вейвлет-коэффициентами вектора ψ по отношению к базисному вейвлету χ. Таким образом, действие свободных фермионов (9) может быть представлено в виде

$$S_E = \sum_{c,c'} \langle\psi|c\rangle\langle c|\gamma_\mu\partial_\mu + \imath m|c'\rangle\langle c'|\psi\rangle.$$

С точки зрения анализа интересующей нас зависимости от масштаба логично выбрать в качестве группы G аффинную группу, включающую сдвиги и масштабные преобразования $G: x' = ax + b$, получив тем самым разложение произвольного вектора по ее представлениям

$$[\Omega(a,b)\chi](x) := \frac{1}{a^d}\chi\left(\frac{x-b}{a}\right).$$

Действие S_E таким образом может быть представлено в виде

$$S_E = \frac{1}{C_\chi} \int\limits_{\mathbb{R}_+\otimes\mathbb{R}^d} \left[\bar\psi_a(b)\gamma_\mu\partial_\mu\psi_a(b) + \imath m\bar\psi_a(b)\psi_a(b)\right]\frac{da\,d^db}{a}, \tag{11}$$

где частные производные ∂_μ берутся по отношению к координатам b_μ. Полученное действие (11), очевидно, имеет тот же вид, что и исходное действие (9), формально отличаясь лишь заменой координаты x на абелевой группе $\mathbb{R}^d$ на координаты (a,b) на на неабелевой группе G с инвариантной мерой $d\mu(a,b) = (da\,d^db)/a$. Как нетрудно видеть, функционал (11) представляет собой сумму не взаимодействующих друг с другом масштабных компонент: $S_E = \int (da/a)\,S(a)$.

На каждом фиксированном масштабе a можно потребовать инвариантность действия относительно локальных калибровочных преобразований полей материи:

$$\psi_a(b) \to U_a(b)\psi_a(b), \quad U_a(b) := \exp\Bigl(\imath\sum_A w_a^A(b)T^A\Bigr). \tag{12}$$

Заменив теперь обычную производную на ковариантную

$$D_{\mu,a} = \partial_\mu + \imath g A_{\mu,a}(b), \tag{13}$$

получим закон преобразования калибровочного поля $A_{\mu,a}(b)$, действующего на фиксированном масштабе a:

$$A'_{\mu,a}(b) = U_a(b)A_{\mu,a}(b)U_a^\dagger(b) + \frac{\imath}{g}\left(\partial_\mu U_a(b)\right)U_a^\dagger(b).$$

Евклидово действие построенной таким образом калибровочной теории имеет вид

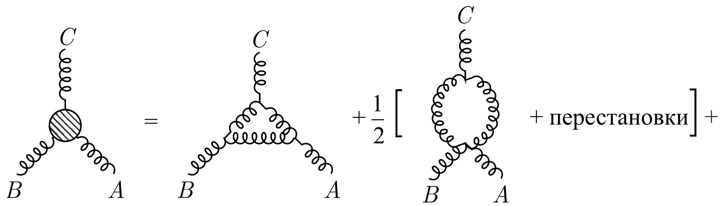
$$S_E = \frac{1}{C_\chi} \int \frac{da\, d^d b}{a} \Big[\bar{\psi}_a(b)(\gamma_\mu D_{\mu,a} + \imath m)\psi_a(b) + \frac{1}{4} F^A_{\mu\nu,a} F^A_{\mu\nu,a} \Big] + \\ + \text{ члены, фиксирующие калибровку,} \quad (14)$$

где

$$F^A_{\mu\nu,a} = \partial_\mu A^A_{\nu,a} - \partial_\nu A^A_{\mu,a} - g f^{ABC} A^B_{\mu,a} A^C_{\nu,a}.$$

Фейнмановская диаграммная техника масштабно-зависимой теории будет отличаться от диаграммной техники обычной евклидовой калибровочной теории (см., например, [15]) лишь наличием вейвлетного множителя $|\tilde{\chi}(ap)|^2$ на каждой пропагаторной линии и формальной зависимостью константы связи от масштаба $g = g(a)$. Выбирая для упрощения вычислений, как и в предыдущих работах [5, 8], в качестве базисного вейвлета первую производную гауссиана $\tilde{\chi}(p) = -\imath p\, \mathrm{e}^{-p^2/2}$, $C_\chi = 1/2$, получим для каждого пропагатора регуляризующий множитель $F_a(p) = (ap)^2\, \mathrm{e}^{-a^2 p^2}$, обеспечивающий конечность всех диаграмм.

В качестве примера приведем однопетлевой расчет поправок к трехглюонной вершине в чисто янг-миллсовской теории. Соответствующие вклады в трехглюонную вершину задаются диаграммным разложением



+ духовые петли. (15)

В стандартной калибровочной теории (КХД) вычисление однопетлевых поправок к трехглюонной вершине может быть произведено в произвольной ковариантной калибровке [16]. При этом, однако, используется размерная регуляризация и результат определяется расходящимися частями интегралов. Различные приемы, связанные с подсчетом высших петель, теорией перенормировок и использованием свойств аналитичности, не меняют ситуацию качественно [17–19].

В представленном в данной работе подходе все интегралы конечны. Для упрощения вычислений здесь использована калибровка Фейнмана и самая простая форма базисного вейвлета. Ниже приводятся результаты для трехглюонной вершины простейшего вида $p_1 = p$, $p_2 = -p$, $p_3 = 0$, т. е. в отсутствие передачи импульса. Вычисления приводятся для чисто янг-миллсовской теории, в отсутствие фермионов. Подробные вычисления для вершины с произвольными импульсами будут опубликованы в статье большего объема.

Неперенормированная вершина имеет вид

$$\Gamma^{ABC}_{\mu_1\mu_2\mu_3}(p) = -\imath g(a) f^{ABC} V(p,-p,0), \tag{16}$$

где $V(p,-p,0) \equiv p_{\mu_1}\delta_{\mu_2\mu_3} + p_{\mu_2}\delta_{\mu_1\mu_3} - 2p_{\mu_3}\delta_{\mu_1\mu_2}$ — тензорная структура неперенормированной вершины.

Вклад первого члена разложения (15) — треугольной диаграммы — равен

$$\Gamma^{ABC,3}_{\mu_1\mu_2\mu_3}(p) = -\imath g^3 \frac{C_A}{2} f^{ABC} \frac{\exp\left(-\frac{2}{3}a^2p^2\right)}{144\pi^2}\left[a^2 V_0 + \frac{13}{6}V(p,-p,0)\right],$$

$$V_0 = \frac{4}{3}p_{\mu_1}p_{\mu_2}p_{\mu_3} - \frac{p^2}{27}\big(5\delta_{\mu_2\mu_3}p_{\mu_1} + 5\delta_{\mu_1\mu_3}p_{\mu_2} + 32\delta_{\mu_1\mu_2}p_{\mu_3}\big).$$

Вклад второго члена разложения (15) — трех диаграмм, содержащих 4-глюонную вершину, — равен

$$\Gamma^{ABC,4}_{\mu_1\mu_2\mu_3}(p) = -\imath \frac{g^3}{256\pi^2} 9C_A f^{ABC} \exp\left(-\frac{a^2p^2}{2}\right) V(p,-p,0). \tag{17}$$

Сумма двух треугольных диаграмм, содержащих духовую петлю, дает

$$\Gamma^{\text{ghost}}_{\mu_1\mu_2\mu_3}(p,-p,0) = -\imath g^3 \frac{C_A}{2}\frac{f^{ABC}}{144\pi^2}\times$$
$$\times \exp\left(-\frac{2}{3}a^2p^2\right)\frac{1}{9}\left[a^2\frac{4}{3}p_{\mu_1}p_{\mu_2}p_{\mu_3} + \frac{1}{2}V(p,-p,0)\right]. \tag{18}$$

Как мы видим, вершинные функции в УФ-пределе экспоненциально убывают как $e^{-\propto a^2p^2}$, что соответствует явлению асимптотической свободы. При этом все петлевые интегралы конечны. Тем не менее построенная теория не вполне идентична обычной локальной теории калибровочных полей.

В локальной теории наблюдаемой величиной является сумма компонент поля различных масштабов. Все эти компоненты, согласно действию (6), взаимодействуют между собой. Если такое поле подвергается локальному калибровочному преобразованию, то происходит изменение фазы всей суммы (7), но не ее отдельных компонент. В нашем же случае калибровочное преобразование фаз отдельных компонент не обязательно приводит к умножению их суммы на фазовый множитель. Кроме того, в построенном функционале действия (14) компоненты различных масштабов не взаимодействуют друг с другом. Следовательно, если именно это действие будет описывать процедуру измерения, то будет наблюдаться не сумма масштабных компонент, а отдельные компоненты, а точнее — их корреляторы.

Это означает, что если при вейвлет-регуляризации обычных скалярных полей с локальным взаимодействием масштаб измерения A можно рассматривать как аналог произвольного масштаба нормировки $1/\mu$ в теории с размерной регуляризацией, то в случае калибровочной теории (14), с не взаимодействующими друг с другом масштабными компонентами, параметр масштаба a следует рассматривать как независимую координату на $(d+1)$-мерном групповом многообразии G.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе предложено построение калибровочной теории путем перехода от координат на обычном пространстве ($\mathbb{R}^d$) к координатам на группе G, соответствующей процессу измерения. Выбрав в качестве G аффинную группу, $G : x' = ax + b$, можно построить калибровочную теорию с нужной калибровочной группой $\mathcal{A}$, например $\mathcal{A} = SU(N)$, все фейнмановские диаграммы которой не содержат петлевых расходимостей.

Более детальное исследование данного вопроса применительно к квантовой хромодинамике представлено в работе [20].

Отличие координат на аффинной группе G от координат на абелевой группе $\mathbb{R}^d$ состоит в том, что оператор (изменения) масштаба $\hat{D} = a(\partial/\partial a)$ не является эрмитовым, а сам масштаб, следовательно, не является наблюдаемой величиной — в отличие от координаты x и импульса p. Масштаб a, таким образом, является *параметром измерения*, который мы используем в наших экспериментах. Поступая таким образом, мы даем описание калибровочных полей по отношению к заданному базису функций $\chi(a, \cdot)$, для которых масштаб a является характерной шириной окна.

В данной работе предложена лишь теоретическая модель, обобщающая понятие калибровочной инвариантности и приводящая к теории квантовых полей, конечной по построению. Какой именно тип калибровочной инвариантности реализуется в природе — локальный или более общий, — еще предстоит выяснить.

Благодарности. Автор признателен А. В. Беднякову, С. В. Михайлову и О. В. Тарасову за полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Dyson F.* Advanced Quantum Mechanics. Singapore: World Sci. Publ. Co., 2007.
2. *Stueckelberg E. C. G., Petermann A.* La normalisation des constantes dans la theorie des quanta // Helv. Phys. Acta. 1953. V. 26. P. 499–520.
3. *Bogoliubov N. N., Shirkov D. V.* Charge Renormalization Group in Quantum Field Theory // Nuovo Cim. 1956. V. 3. P. 845–863.

4. *'t Hooft G., Veltman M.* Regularization and Renormalization of Gauge Theories // Nucl. Phys. B. 1972. V. 44. P. 189–213.
5. *Altaisky M. V.* Quantum Field Theory without Divergences // Phys. Rev. D. 2010. V. 81. P. 125003.
6. *Altaisky M. V.* Wavelet Based Regularization for Euclidean Field Theory // IOP Conf. Ser. 2003. V. 173. P. 893–897.
7. *Altaisky M. V.* Unifying Renormalization Group and the Continuous Wavelet Transform // Phys. Rev. D. 2016. V. 93. P. 105043.
8. *Altaisky M. V., Kaputkina N. E.* Continuous Wavelet Transform in Quantum Field Theory // Phys. Rev. D. 2013. V. 88. P. 025015.
9. *Славнов А. А., Фаддеев Л. Д.* Введение в квантовую теорию калибровочных полей. М.: Наука, 1988.
10. *Daubechies I.* Ten Lectures on Wavelets. Philadelphia: SIAM, 1992.
11. *Handy C. R., Murenzi R.* Continuous Wavelet Transform Analysis of One-Dimensional Quantum Bound States from First Principles // Phys. Rev. A. 1996. V. 54. P. 3754–3763.
12. *Albeverio S., Altaisky M. V.* Gauge Invariance in Wavelet-Based Quantum Field Theory // New Adv. Phys. 2011. V. 5. P. 1–8.
13. *Carey A. L.* Square-Integrable Representations of Non-Unimodular Groups // Bull. Austr. Math. Soc. 1976. V. 15. P. 1–12.
14. *Duflo M., Moore C. C.* On Regular Representations of Nonunimodular Locally Compact Group // J. Func. Anal. 1976. V. 21. P. 209–243.
15. *Ramond P.* Field Theory: A Modern Primer. MA: Reading; Addison-Wesley, 1989.
16. *Davydychev A. I., Osland P., Tarasov O. V.* Three-Gluon Vertex in Arbitrary Gauge and Dimension // Phys. Rev. D. 1996. V. 54. P. 4087–4113.
17. *Ширков Д. В., Соловцов И. Л.* Десятилетие аналитической теории возмущений в КХД // ТМФ. 2007. Т. 150. С. 152–176.
18. *Bakulev A. P., Mikhailov S. V., Stefanis N. G.* Higher Order QCD Perturbation Theory in Different Schemes: From FOPT to CIPT to FAPT // JHEP. 2010. V. 1006. P. 85.
19. *Baikov P. A., Chetyrkin K. G., Kühn J. H.* Five-Loop Running of the QCD Coupling Constant // Phys. Rev. Lett. 2017. V. 118. P. 082002.
20. *Altaisky M. V.* Wavelet Regularization of Gauge Theories // Phys. Rev. D. 2020. V. 101. P. 105004.