*ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА*
*2020. Т. 51. ВЫП. 4. С. 676–685*

# О НЕКОТОРЫХ УРАВНЕНИЯХ, МОДЕЛИРУЮЩИХ УРАВНЕНИЯ ЯНГА–МИЛЛСА

*Н. Г. Марчук* [1,*], *Д. С. Широков* [2,3,**]

[1] Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва

[2] Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Москва

[3] Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича РАН, Москва

Рассматриваются решения уравнений Янга–Миллса типа плоской волны, которые позволяют выписать три системы уравнений, моделирующих систему уравнений Янга–Миллса. Представлен явный вид всех решений типа плоской волны уравнений Янга–Миллса с $SU(2)$ калибровочной симметрией и нулевым током в (псевдо)евклидовом пространстве произвольной конечной размерности.

We consider plane wave solutions of the Yang–Mills equations, which allow us to write down three systems of equations modeling the Yang–Mills equations. We present explicit form of all plane wave solutions of the Yang–Mills equations with $SU(2)$ gauge symmetry with zero current in (pseudo-)Euclidean space of arbitrary finite dimension.

PACS: 11.15.-q; 11.10.-z; 02.10.Yn; 02.10.Ud; 03.50.-z; 03.65.Fd

## ВВЕДЕНИЕ

Уравнения Янга–Миллса были введены в 1954 г. и уже давно рассматриваются в качестве фундаментальных уравнений квантовой физики. Уравнения Янга–Миллса — это класс уравнений, зависящий от калибровочной группы Ли и ее вещественной алгебры Ли. В физике, как правило, используют унитарные калибровочные группы, или (более общие) полупростые группы Ли. В Стандартной модели уравнения Янга–Миллса используются для описания электрослабых и сильных взаимодействий элементарных частиц [1]. Как отмечалось многими авторами, исследование уравнений Янга–Миллса и их решение сопряжено с трудностями, проистекающими из-за нелинейности уравнений. Для упрощения ситуации специалисты вводят те или иные дополнительные условия, ограничивающие класс решений уравнений Янга–Миллса.

*E-mail: nmarchuk@mi-ras.ru
**E-mail: dm.shirokov@gmail.com

В частности, рассматривают автодуальные (инстантонные) решения, а также решения, зависящие от меньшего числа независимых переменных. В этой статье будут указаны некоторые решения типа плоской волны уравнений Янга–Миллса, которые позволят выписать три системы уравнений, моделирующих уравнения Янга–Миллса.

Частные классы решений уравнений Янга–Миллса представлены в классических работах [2–7], обзоре [8] и в других работах. Частные классы решений уравнений Янга–Миллса типа плоской волны рассматривались в [9–16]. В настоящей работе представлены все решения типа плоской волны уравнений Янга–Миллса с $SU(2)$ калибровочной симметрией с нулевым током в евлидовом или псевдоевклидовом пространстве произвольной конечной размерности. Данные результаты обобщают результаты одного из авторов о всех постоянных решениях в евклидовых и псевдоевклидовых пространствах произвольной конечной размерности [17, 18]. Вопросы, связанные с постоянными и ковариантно постоянными решениями уравнений Янга–Миллса, рассматривались также в [19–21].

## 1. УРАВНЕНИЯ ЯНГА–МИЛЛСА

Пусть $p, q$ — целые неотрицательные числа и $n = p + q$ — натуральное число. Рассмотрение уравнений ведется в (псевдо)евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{p,q}$ с декартовыми координатами $x^\mu$, $\mu = 1, \dots, n$. Частные производные обозначаем $\partial_\mu = \partial/\partial x^\mu$. Предполагаем, что все функции от $x \in \mathbb{R}^{p,q}$, которые дальше рассматриваются, являются достаточно гладкими (их гладкость достаточна для справедливости проводимых рассуждений).

Пусть $K$ — полупростая группа Ли (в частности, группа $K$ может быть унитарной группой Ли); $L$ — вещественная алгебра Ли группы Ли $K$. Предполагаем, что группа Ли $K$ и алгебра Ли $L$ представляются квадратными матрицами некоторого размера $N$. При этом скобка Ли $[A, B]$, задающая умножение в алгебре Ли $L$, реализуется в виде коммутатора матриц $[A, B] = AB - BA$.

Через $L\mathrm{T}^r_s$ обозначим множество тензорных полей типа $(r, s)$ (псевдо)евклидова пространства $\mathbb{R}^{p,q}$ со значениями в $L$.

Пусть $x \in \mathbb{R}^{p,q}$ и $A_\mu \in L\mathrm{T}_1$, $J^\nu \in L\mathrm{T}^1$, $F_{\mu\nu} \in L\mathrm{T}_2$, причем $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$. Уравнения

$$\begin{aligned} \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - [A_\mu, A_\nu] = F_{\mu\nu}, \\ \partial_\mu F^{\mu\nu} - [A_\mu, F^{\mu\nu}] = J^\nu \end{aligned} \tag{1}$$

называются *уравнениями Янга–Миллса* (система уравнений Янга–Миллса).

Обычно предполагается, что $A_\mu, F_{\mu\nu}$ — неизвестные, а $J^\nu$ — известный заданный вектор со значениями в алгебре Ли $L$.

Говорят, что уравнения (1) задают *поле Янга–Миллса* $(A_\mu, F_{\mu\nu})$. Причем $A_\mu$ — *потенциал* и $F_{\mu\nu}$ — *напряженность* поля Янга–Миллса. Вектор $J^\nu$ называется *неабелевым током* (в случае абелевой группы $K$ вектор $J^\nu$ называется *током*).

Можно проверить, что из системы уравнений (1) следует соотношение

$$\partial_\mu J^\mu - [A_\mu, J^\mu] = 0,$$

которое называется *неабелевым законом сохранения* (в случае абелевой группы $K$ будем иметь $\partial_\nu J^\nu = 0$, т. е. дивергенция вектора $J^\nu$ равна нулю).

Пусть тензорные поля $A_\mu$, $F_{\mu\nu}$, $J^\nu$ удовлетворяют уравнениям Янга–Миллса (1). Возьмем некоторый элемент $U = U(x) \in K$ (функцию $U\colon \mathbb{R}^{p,q} \to K$) и рассмотрим преобразованные тензорные поля

$$\begin{aligned} \acute{A}_\mu &= U^{-1} A_\mu U - U^{-1} \partial_\mu U, \\ \acute{F}_{\mu\nu} &= U^{-1} F_{\mu\nu} U, \quad \acute{J}^\nu = U^{-1} J^\nu U. \end{aligned} \tag{2}$$

Тогда эти величины удовлетворяют тем же уравнениям Янга–Миллса

$$\partial_\mu \acute{A}_\nu - \partial_\nu \acute{A}_\mu - [\acute{A}_\mu, \acute{A}_\nu] = \acute{F}_{\mu\nu},$$

$$\partial_\mu \acute{F}^{\mu\nu} - [\acute{A}_\mu, \acute{F}^{\mu\nu}] = \acute{J}^\nu,$$

т. е. уравнения (1) являются инвариантными по отношению к преобразованиям (2). Преобразование (2) называется *калибровочным преобразованием* (или *калибровочной симметрией*), а группа $K$ называется *калибровочной группой* уравнений Янга–Миллса (1).

Компоненты кососимметрического тензорного поля $F_{\mu\nu}$, определенные первым уравнением из (1), можно подставить во второе уравнение и получить одно уравнение второго порядка для ковекторного потенциала поля Янга–Миллса

$$\begin{aligned} \partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu \partial_\mu A^\mu - [\partial_\mu A^\mu, A^\nu] - 2[A^\mu, \partial_\mu A^\nu] &+ \\ + [A_\mu, \partial^\nu A^\mu] + [A_\mu, [A^\mu, A^\nu]] &= J^\nu. \end{aligned} \tag{3}$$

Рассмотрим *частные решения уравнений Янга–Миллса*. Система уравнений Янга–Миллса (1) (либо (3)) рассматривается как система нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных для неизвестных тензорных полей $A_\mu(x)$, $F_{\mu\nu}(x)$ с известной правой частью $J^\nu(x)$. Накопленные знания по теории дифференциальных уравнений в частных производных указывают на то, что для углубленного анализа решений уравнений Янга–Миллса надо рассматривать краевые задачи в некоторой области пространства $\mathbb{R}^{p,q}$. Постановка краевых задач (где и какие граничные условия задавать) зависит от сигнатуры псевдоевклидова пространства $(p, q)$. Рассчитывать на постановку корректных краевых задач для уравнений Янга–Миллса можно в первую очередь в случае сигнатур $(1, n-1)$, $(n-1, 1)$ — гиперболические случаи и в случае сигнатур $(0, n)$, $(n, 0)$ — эллиптические случаи.

Также представляет интерес поиск частных решений уравнений Янга–Миллса в случаях, когда правая часть $J^\nu(x)$ имеет тот или иной специальный вид (например, диктуемый физической постановкой задачи).

При $J^\nu = 0$ имеем нулевое решение уравнений Янга–Миллса $A_\mu = 0$, $F_{\mu\nu} = 0$. Если $U = U(x) \in K$, то с помощью калибровочного преобразования (2) из нулевого решения получим другое тривиальное (калибровочно эквивалентное нулевому) решение уравнений Янга–Миллса $A_\mu = -U^{-1}\partial_\mu U$, $F_{\mu\nu} = 0$, $J^\nu = 0$.

## 2. РЕШЕНИЯ ТИПА ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ УРАВНЕНИЙ ЯНГА–МИЛЛСА

В теории линейных дифференциальных уравнений в частных производных в (псевдо)евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{p,q}$ важную роль играют решения типа плоской волны. В таких решениях зависимость от точек $x$ (псевдо)евклидова пространства сводится к зависимости от скаляра (инварианта) $\rho := \xi_\mu x^\mu$, который определяется по заданному постоянному (не зависящему от точек $x$) ковекторному полю $\xi_\mu$ (вещественному или комплексному).

Будем искать решения уравнений Янга–Миллса (3) в следующем виде:

$$A_\mu = a_\mu \, \mathrm{e}^\rho, \quad \text{где} \quad \rho = \xi_\mu x^\mu \tag{4}$$

и $a_\mu$ — компоненты постоянного ковекторного поля со значениями в алгебре Ли $L$. Частные производные действуют на экспоненту $\mathrm{e}^\rho$ по стандартному правилу

$$\partial_\nu \, \mathrm{e}^\rho = (\partial_\nu \rho) \, \mathrm{e}^\rho = \xi_\nu \, \mathrm{e}^\rho.$$

Подставляя $A_\mu$ из (4) в левую часть (3), будем иметь

$$\begin{aligned}\partial_\mu\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu\partial_\mu A^\mu - [\partial_\mu A^\mu, A^\nu] - 2[A^\mu, \partial_\mu A^\nu] + [A_\mu, \partial^\nu A^\mu] + [A_\mu, [A^\mu, A^\nu]] =\\ = (\xi_\mu \xi^\mu a^\nu - \xi^\nu \xi_\mu a^\mu) \, \mathrm{e}^\rho - 3\xi_\mu [a^\mu, a^\nu] \, \mathrm{e}^{2\rho} + [a_\mu, [a^\mu, a^\nu]] \, \mathrm{e}^{3\rho}.\end{aligned} \tag{5}$$

Теперь предположим, что правая часть уравнения (3) имеет вид

$$J^\nu = j^\nu_{(1)} \, \mathrm{e}^\rho + j^\nu_{(2)} \, \mathrm{e}^{2\rho} + j^\nu_{(3)} \, \mathrm{e}^{3\rho}, \tag{6}$$

где $j^\nu_{(k)}$, $k = 1, 2, 3$, — не зависящие от $x$ компоненты трех векторов (векторных полей) со значениями в алгебре Ли $L$. Приравнивая правые части равенств (5) и (6), получим систему уравнений

$$\xi_\mu \xi^\mu a^\nu - \xi^\nu \xi_\mu a^\mu = j^\nu_{(1)}, \tag{7}$$

$$-3\xi_\mu [a^\mu, a^\nu] = j^\nu_{(2)}, \tag{8}$$

$$[a_\mu, [a^\mu, a^\nu]] = j^\nu_{(3)}, \tag{9}$$

которую можно рассматривать как систему алгебраических уравнений для нахождения комплексного вектора $\xi^\mu$ и вектора $a_\mu$ со значениями в алгебре Ли $L$ по известной правой части $j^\nu_{(k)}$, $k = 1, 2, 3$.

## 3. ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМЫ (7)–(9) И РЕШЕНИЯ В ВИДЕ СУММЫ ВОЛН

Более подробно обсудим системы алгебраических уравнений (7)–(9), предложенные в предыдущем разделе. Система (9) является системой уравнений для поиска постоянных решений уравнений Янга–Миллса (аналогичную систему можно получить из (3), если предположить, что решения не зависят от точки $x$ рассматриваемого (псевдо)евклидова пространства). Решение такой системы уравнений для произвольного тока в случае группы Ли $SU(2)$ обсуждается в работах [17, 18]. При некоторых условиях, налагаемых на ток, решения могут не существовать. Например, в случае группы Ли $SU(2)$ в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ условием существования решений является ограничение $\operatorname{rank}(j^\nu_{(3)\,k}) \neq 1$ на ранг матрицы из коэффициентов разложения тока $j^\nu_{(3)} = j^\nu_{(3)\,k} \tau^k$ через базис $\tau^k$, $k = 1, 2, 3$, алгебры Ли $\mathfrak{su}(2)$, см. [17]. В тех случаях, когда постоянные решения $a^\mu$ существуют, можем найти их из системы (9) и подставить в (7) и (8). Заметим, что система (8) является системой линейных уравнений на неизвестные $\xi_\mu$, причем матрица этой системы есть кососимметричная матрица напряженности соответствующего постоянного поля Янга–Миллса:

$$\xi_\mu f^{\mu\nu} = \frac{1}{3} j^\nu_{(2)}, \quad f^{\mu\nu} := -[a^\mu, a^\nu].$$

Как известно, определитель кососимметричной матрицы нечетного порядка $n = 2k + 1$ равен нулю, а определитель кососимметричной матрицы четного порядка $n = 2k$ есть квадрат однородного полинома степени $k$, который называется пфаффианом. Рассматриваемая система (7)–(9) имеет решения при некоторых ограничениях, налагаемых на токи $j^\nu_{(1)}$, $j^\nu_{(2)}$, $j^\nu_{(3)}$. Существование решения и его явный вид зависят от сигнатуры и размерности пространства, а также от рассматриваемой группы Ли.

В случае нулевого тока $j^\nu_{(1)} = j^\nu_{(2)} = j^\nu_{(3)} = 0$ получаем систему

$$\xi_\mu \xi^\mu a^\nu - \xi^\nu \xi_\mu a^\mu = 0, \tag{10}$$

$$-3\xi_\mu [a^\mu, a^\nu] = 0, \tag{11}$$

$$[a_\mu, [a^\mu, a^\nu]] = 0. \tag{12}$$

Если рассматриваемая алгебра Ли $L$ является компактной, то в случае пространства $\mathbb{R}^{p,q}$ лоренцевой $(p,q) = (1, n-1)$, $(n-1, 1)$ или евклидовой $(n, 0)$, $(0, n)$ сигнатуры для всех решений $a_\mu$ системы (12) имеем $f^{\mu\nu} = -[a^\mu, a^\nu] = 0$ (этот факт доказан в работах [22, 23]), т. е. система (11) выполняется автоматически для любых $\xi_\mu$, и выражения $\xi_\mu$ стоит искать из системы (10). Аналогичный факт не верен в случае других сигнатур, контрпример для случая $\mathbb{R}^{p,q}$, $p \geqslant 2$, $q \geqslant 2$, приведен ниже.

Ограничимся случаем группы Ли $SU(2)$ и (псевдо)евклидова пространства $\mathbb{R}^{p,q}$, $p + q = n$, произвольной конечной размерности $n$. Для решения системы (12) воспользуемся ранее полученными результатами [17, 18] о всех постоянных решениях $SU(2)$ уравнений Янга–Миллса. Обозначим через $\tau^k = \sigma^k/2i$, $k = 1, 2, 3$, стандартный базис алгебры Ли $\mathfrak{su}(2)$, построенный с помощью матриц Паули $\sigma^k$, $k = 1, 2, 3$. Перечислим явный вид всех решений $\{a^\mu, \xi_\nu\}$ системы (10)–(12). Решения выписываются при должном выборе* системы координат и калибровки:

$$
\begin{array}{ll}
p \geqslant 1: & a^1 = a\tau^1, \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad \xi_1 \in \mathbb{C}; \\
p \geqslant 1: & a^1 = a\tau^1, \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad \xi_\mu \xi^\mu - \xi_1 \xi^1 = 0; \\
q \geqslant 1: & a^{p+1} = a\tau^1, \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad \xi_{p+1} \in \mathbb{C}; \\
q \geqslant 1: & a^{p+1} = a\tau^1, \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad \xi_\mu \xi^\mu - \xi_{p+1} \xi^{p+1} = 0; \\
p \geqslant 1, q \geqslant 1: & a^1 = a^{p+1} = \tau^1, \quad \forall \xi_1 \in \mathbb{C}; \\
p \geqslant 1, q \geqslant 1: & a^1 = a^{p+1} = \tau^1, \quad \forall \xi_{p+1} \in \mathbb{C}; \\
p \geqslant 1, q \geqslant 1: & a^1 = a^{p+1} = \tau^1, \quad \forall \xi_{p+1} = -\xi_1 \in \mathbb{C}, \quad \xi_\mu \xi^\mu = 0; \\
p \geqslant 2, q \geqslant 2: & a^1 = a^{p+1} = \tau^1, \quad a^2 = a^{p+2} = \tau^2, \quad \forall \xi_{p+1} = -\xi_1 \in \mathbb{C}, \\
& \quad \forall \xi_{p+2} = -\xi_2 \in \mathbb{C}, \quad \xi_\mu \xi^\mu = 0; \\
p \geqslant 3, q \geqslant 3: & a^1 = a^{p+1} = \tau^1, \quad a^2 = a^{p+2} = \tau^2, \quad a^3 = a^{p+3} = \tau^3, \\
& \quad \forall \xi_{p+1} = -\xi_1 \in \mathbb{C}, \quad \forall \xi_{p+2} = -\xi_2 \in \mathbb{C}, \quad \forall \xi_{p+3} = -\xi_3 \in \mathbb{C}, \quad \xi_\mu \xi^\mu = 0.
\end{array}
$$

Заметим, что в последних двух случаях выражение для напряженности поля Янга–Миллса отлично от нуля $(f^{\mu\nu} \neq 0)$ и при вычислениях учитывались уравнения (11).

---

*Другими словами, любое решение изучаемой системы может быть сведено с помощью ортогональной замены координат и фиксации калибровки к перечисленным далее решениям, более подробно см. [17, 18]. При перечислении решений выписаны только ненулевые компоненты $a^\mu$, $\xi_\nu$. Нулевое решение $a^1 = \ldots = a^n = 0$ с произвольными $\xi_\nu$ не рассматривается.

Рассмотрим также более общую постановку задачи, чем предлагалось в (4) и (6). А именно, рассмотрим решения уравнений (3) в виде суммы волн (ряда Фурье *). Пусть ток имеет вид

$$J^\nu = \sum_{k=-\infty}^{\infty} j^\nu_{(k)}\,\mathrm{e}^{k\rho}, \quad \rho = \xi_\mu x^\mu. \tag{13}$$

Будем искать решения системы (3) в виде

$$A^\nu = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a^\nu_{(k)}\,\mathrm{e}^{k\rho}. \tag{14}$$

Получим систему

$$\begin{aligned}\sum_k (a^\nu_{(k)}\xi_\mu\xi^\mu - a^\mu_{(k)}\xi_\mu\xi^\nu)k^2\,\mathrm{e}^{k\rho} - \sum_k\sum_l \xi_\mu[a^\mu_{(k)}, a^\nu_{(l)}]k\,\mathrm{e}^{(k+l)\rho} - {}\\ - 2\sum_k\sum_l \xi_\mu[a^\mu_{(k)}, a^\nu_{(l)}]l\,\mathrm{e}^{(k+l)\rho} + \sum_k\sum_l \xi^\nu[a_{\mu\,(k)}, a^\mu_{(l)}]l\,\mathrm{e}^{(k+l)\rho} + {}\\ + \sum_k\sum_l\sum_m [a_{\mu\,(k)}, [a^\mu_{(l)}, a^\nu_{(m)}]]\,\mathrm{e}^{(k+l+m)\rho} = \sum_k j^\nu_{(k)}\,\mathrm{e}^{k\rho}.\end{aligned} \tag{15}$$

Данная система расщепляется в систему уравнений вида

$$F_k(a^\mu_{(l)}, \xi^\nu) = j^\nu_{(k)}, \quad k = -\infty, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, \infty,$$

где $F_k$ есть заданные выражения, являющиеся многочленами степени не выше 2 относительно неизвестных $\xi^\nu$ и многочленами степени не выше 3 относительно неизвестных $a^\mu_{(l)}$. Также можно рассматривать более частную постановку задачи, когда суммирование в (13) и (14) ведется от 0 до $\infty$ (т. е. все $j^\nu_{(k)} = a^\nu_{(k)} = 0$ при $k = -1, -2, \ldots$). Полученная в данном случае система расщепляется в систему уравнений на неизвестные $a^\nu_{(k)}$, $k = 0, 1, \ldots, \infty$ и $\xi^\mu$. Первые три уравнения этой системы имеют вид

$$j^\nu_{(0)} = [a_{\mu\,(0)}, [a^\mu_{(0)}, a^\nu_{(0)}]], \tag{16}$$

$$\begin{aligned}j^\nu_{(1)} &= \xi_\mu\xi^\mu a^\nu_{(1)} - \xi_\mu\xi^\nu a^\mu_{(1)} - \xi_\mu[a^\mu_{(1)}, a^\nu_{(0)}] - 2\xi_\mu[a^\mu_{(0)}, a^\nu_{(1)}] + {}\\ &+ \xi^\nu[a_{\mu\,(0)}, a^\mu_{(1)}] + [a_{\mu\,(1)}, [a^\mu_{(0)}, a^\nu_{(0)}]] + [a_{\mu\,(0)}, [a^\mu_{(1)}, a^\nu_{(0)}]] + {}\\ &+ [a_{\mu\,(0)}, [a^\mu_{(0)}, a^\nu_{(1)}]],\end{aligned} \tag{17}$$

*Вопросы сходимости рядов в настоящем изложении не рассматриваем. Все указанные далее ряды рассматриваются только в тех случаях, когда сходятся.

$$
\begin{aligned}
j^{\nu}_{(2)} &= 4(\xi_\mu \xi^\mu a^{\nu}_{(2)} - \xi_\mu \xi^\nu a^{\mu}_{(2)}) - \xi_\mu [a^{\mu}_{(1)}, a^{\nu}_{(1)}] - 2\xi_\mu [a^{\mu}_{(2)}, a^{\nu}_{(0)}] - \\
&- 2\xi_\mu [a^{\mu}_{(1)}, a^{\nu}_{(1)}] - 4\xi_\mu [a^{\mu}_{(0)}, a^{\nu}_{(2)}] + \xi^\nu [a_{\mu\,(1)}, a^{\mu}_{(1)}] + 2\xi^\nu [a_{\mu\,(0)}, a^{\mu}_{(2)}] + \\
&+ [a_{\mu\,(2)}, [a^{\mu}_{(0)}, a^{\nu}_{(0)}]] + [a_{\mu\,(0)}, [a^{\mu}_{(2)}, a^{\nu}_{(0)}]] + [a_{\mu\,(0)}, [a^{\mu}_{(0)}, a^{\nu}_{(2)}]] + \\
&+ [a_{\mu\,(1)}, [a^{\mu}_{(1)}, a^{\nu}_{(0)}]] + [a_{\mu\,(1)}, [a^{\mu}_{(0)}, a^{\nu}_{(1)}]] + [a_{\mu\,(0)}, [a^{\mu}_{(1)}, a^{\nu}_{(1)}]]. \qquad (18)
\end{aligned}
$$

Первая система (16) является системой для поиска всех постоянных решений уравнений Янга–Миллса $a^{\mu}_{(0)}$ с постоянным током $j^{\nu}_{(0)}$. Находя все постоянные решения $a^{\mu}_{(0)}$ (в случае группы Ли $SU(2)$ такая задача решена в работах [17, 18]), можно подставить их во вторую систему (17), линейную по неизвестным $a^{\mu}_{(1)}$ и квадратичную по неизвестным $\xi^\mu$. Следующая за ней система (18) является линейной по $a^{\mu}_{(2)}$ и квадратичной по $\xi^\mu$ и т. д. Существование и явный вид решений зависят от рассматриваемой группы Ли $K$, размерности и сигнатуры пространства $\mathbb{R}^{p,q}$ и токов $j^{\nu}_{(k)}$, $k = 0, 1, \ldots, \infty$.

## 4. О СИСТЕМАХ УРАВНЕНИЙ, МОДЕЛИРУЮЩИХ УРАВНЕНИЯ ЯНГА–МИЛЛСА

Рассуждения из предыдущего раздела, которые привели нас к алгебраической системе уравнений (7)–(9), подводят нас к мысли о том, что можно постулировать три системы уравнений, каждая из которых моделирует те или иные аспекты уравнений Янга–Миллса. А именно, предлагается рассматривать следующие системы уравнений:

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu \partial_\mu A^\mu = J^{\nu}_{(1)}, \qquad (19)$$

$$-[\partial_\mu A^\mu, A^\nu] - 2[A^\mu, \partial_\mu A^\nu] + [A_\mu, \partial^\nu A^\mu] = J^{\nu}_{(2)}, \qquad (20)$$

$$[A_\mu, [A^\mu, A^\nu]] = J^{\nu}_{(3)}, \qquad (21)$$

где $J^{\nu}_{(k)}$, $k = 1, 2, 3,$ — зависящие от $x$ компоненты трех векторных полей со значениями в алгебре Ли $L$.

Система уравнений (19) есть просто несколько экземпляров уравнений Максвелла, причем это число экземпляров равно размерности алгебры Ли $L$, рассматриваемой как векторное пространство.

Систему уравнений (21) назовем алгебраической аппроксимацией уравнений Янга–Миллса. Отметим, что данная система уравнений содержит в себе как частный класс решений все постоянные решения уравнений Янга–Миллса. Данная система содержит в себе также и другие классы (непостоянных) решений уравнений Янга–Миллса, которые являются одновременно решением систем (19) и (20).

В работах [17, 18] были представлены явные формулы для всех решений $A_\mu$ системы (21) в случае, когда все входящие в эту систему выражения $A_\mu$, $J^\nu_{(3)}$ не зависят от точки $x$ (псевдо)евклидова пространства $\mathbb{R}^{p,q}$ в случае группы Ли $SU(2)$. Эти результаты могут быть переформулированы локально для системы (21) в общем случае, так как в нее не входят никакие дифференциальные операторы.

Интересным представляется дальнейшее изучение системы уравнений (7)–(9) в общей постановке, с произвольным током, а также для других полупростых групп Ли, в частности, группы Ли $SU(3)$. Системы уравнений (19), (20), (21) представляют интерес для дальнейших исследований. Было бы интересно найти частные классы решений системы (20). В дальнейшем планируется обобщить результаты настоящей статьи на систему уравнений Янга–Миллса–Дирака в пространстве Минковского.

**Благодарности.** Авторы благодарны организаторам международной конференции «Вопросы математической и теоретической физики», посвященной 110-летию со дня рождения Н. Н. Боголюбова, а также участникам этой конференции за полезные обсуждения.

Исследование одного из авторов (Д. Широков, разд. 3) выполнено за счет Российского научного фонда (проект № 18-71-00010).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Faddeev L. D., Slavnov A. A.* Gauge Fields: An Introduction to Quantum Theory. 2nd ed. CRC Press, 2018.
2. *Wu T. T., Yang C. N.* Some Solutions of the Classical Isotopic Gauge Field Equations // Properties of Matter under Unusual Conditions / Ed. by H. Mark and S. Fernbach. New York: Interscience, 1968.
3. *'t Hooft G.* Magnetic Monopoles in Unified Gauge Theories // Nucl. Phys. B. 1974. V. 79. P. 276–284.
4. *Belavin A. A., Polyakov A. M., Schwartz A. S., Tyupkin Yu. S.* Pseudoparticle Solutions of the Yang–Mills Equations // Phys. Lett. B. 1975. V. 59. P. 85.
5. *de Alfaro V., Fubini S., Furlan G.* A New Classical Solution of the Yang–Mills Field Equations // Phys. Lett. B. 1976. V. 65. P. 163.
6. *Witten E.* Some Exact Multipseudoparticle Solutions of Classical Yang–Mills Theory // Phys. Rev. Lett. 1977. V. 38. P. 121.
7. *Atiyah M., Drinfeld V., Hitchin N., Manin Yu.* Construction of Instantons // Phys. Lett. A. 1978. V. 65. P. 185–187.
8. *Actor A.* Classical Solutions of $SU(2)$ Yang–Mills Theories // Rev. Mod. Phys. 1979. V. 51. P. 461–525.
9. *Coleman S.* Non-Abelian Plane Waves // Phys. Lett. B. 1977. V. 70. P. 59–60.
10. *Melia F., Lo S.* Linear Plane Waves Solutions of the Yang–Mills Theory // Phys. Lett. B. 1978. V. 77. P. 71–72.

11. *Baseyan G. Z., Matinyan S. G., Savvidi G. K.* Nonlinear Plane Waves in the Massless Yang–Mills Theory // Pis'ma ZhETF. 1979. V. 29. P. 641–644.
12. *Campbell W. B., Morgan T. A.* Non-Abelian Plane-Fronted Waves // Phys. Lett. B. 1979. V. 84. P. 87–88.
13. *Oh C. H., Teh R.* Periodic Solutions of the Yang–Mills Field Equations // Ibid. V. 87. P. 83–86.
14. *Oh C. H., Teh R.* Non-Abelian Progressive Waves // J. Math. Phys. 1985. V. 26. P. 841–844.
15. *Tsapalisa A., Politisa E. P., Maintasa X. N., Diakonosa F. K.* Gauss Law and Non-Linear Plane Waves for Yang–Mills Theory // Phys. Rev. D. 2016. V. 93. P. 085003.
16. *Li W.* Wave Solutions to the Yang–Mills Equation. www.physics.nus.edu.sg/student/Honours%20Projects%20Repository%202016-17/Li%20weijun.pdf. 2017.
17. *Shirokov D. S.* On Constant Solutions of $SU(2)$ Yang–Mills Equations with Arbitrary Current in Euclidean Space $\mathbb{R}^n$ // J. Nonlin. Math. Phys. 2020. V. 27, No. 2; arXiv:1804.04620.
18. *Shirokov D. S.* On Constant Solutions of $SU(2)$ Yang–Mills Equations with Arbitrary Current in Pseudo-Euclidean Space $\mathbb{R}^{p,q}$. arXiv:1912.04996.
19. *Marchuk N. G.* On a Field Equation Generating a New Class of Particular Solutions to the Yang–Mills Equations // Proc. Steklov Inst. Math. 2014. V. 285. P. 197–210.
20. *Marchuk N. G., Shirokov D. S.* Constant Solutions of Yang–Mills Equations and Generalized Proca Equations // J. Geom. Symmetry Phys. 2016. V. 42. P. 53–72.
21. *Shirokov D. S.* Covariantly Constant Solutions of the Yang–Mills Equations // Adv. Appl. Clifford Algebras. 2018. V. 28. P. 53.
22. *Schimming R.* On Constant Solutions of the Yang–Mills Equations // Arch. Math. 1988. V. 24. P. 65–73.
23. *Schimming R., Mundt E.* Constant Potential Solutions of the Yang–Mills Equation // J. Math. Phys. 1992. V. 33. P. 4250.