ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА
2020. Т. 51. ВЫП. 4. С. 844–853

ДВОЙНОЙ СЛОЙ В КВАДРАТИЧНОЙ ГРАВИТАЦИИ И ПРИНЦИП НАИМЕНЬШЕГО ДЕЙСТВИЯ

В. А. Березин [*], *В. И. Докучаев, Ю. Н. Ерошенко, А. Л. Смирнов*

Институт ядерных исследований РАН, Москва

Получены уравнения Израэля для тонких оболочек в общей теории относительности напрямую из принципа наименьшего действия. Разработан метод получения уравнений для двойного слоя в квадратичной гравитации из принципа наименьшего действия.

Israel equations for thin shells in General Relativity are derived directly from the least action principle. The method is elaborated for obtaining the equations for double layers in quadratic gravity from the least action principle.

PACS: 04.20.Fy; 04.20.Jb; 04.50.Kd; 04.60.Bc; 04.70.Bw

ВВЕДЕНИЕ

Любая релятивистская теория гравитации должна описываться нелинейными уравнениями, поскольку гравитационное поле обладает энергией и поэтому само по себе является источником. Решение таких уравнений даже для случая вакуума крайне затруднительно. Поэтому особый интерес представляют сингулярные распределения тензора энергии-импульса материальных (не гравитационных источников). Мы имеем в виду, прежде всего, распределения, описываемые δ-функцией Дирака, т. е. тонкими оболочками.

Строго говоря, мы рассматриваем интеграл действия в виде суммы гравитационного действия $S_{\rm grav}$ и действия для полей материи S_m:

$$S_{\rm tot} = S_{\rm grav} + S_m. \tag{1}$$

[*] E-mail: berezin@inr.ac.ru

По определению вариация действия материи по метрическому тензору $g_{\mu\nu}$ ($ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$) дает тензор энергии-импульса $T_{\mu\nu}$:

$$\delta S_m \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \int T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g}\, d^4x = \frac{1}{2} \int T^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \sqrt{-g}\, d^4x, \tag{2}$$

где g — детерминант тензора $g_{\mu\nu}$.

Предполагается, что внутри объема интегрирования существует сингулярная поверхность Σ_0, на которой сосредоточен тензор энергии-импульса. Только эта сингулярная часть нас и интересует. Трехмерная гиперповерхность Σ_0 делит четырехмерный пространственно-временной объем интегрирования условно на две части: внутреннюю $(-)$ и внешнюю $(+)$. Преобразованием координат в каждой из этих областей можно добиться непрерывности метрического тензора на Σ_0 (это единственное, что их связывает). Заметим, что без такой непрерывности внутреннюю и внешнюю части следовало бы рассматривать как совершенно самостоятельные, никак не связанные между собой многообразия. В частности, можно ввести гауссову нормальную систему координат, связанную с Σ_0: $x^\mu = (n, x^i)$, $x^i \in \Sigma_0$,

$$ds^2 = \epsilon\, dn^2 + \gamma_{ij}\, dx^i\, dx^j, \tag{3}$$

где n — координата вдоль внешней нормали к Σ_0, а $\epsilon = \pm 1$ в зависимости от того, является Σ_0 пространственно-подобной гиперповерхностью или же времениподобной (мы используем сигнатуру $(+---)$), а уравнение для Σ_0 есть просто $n = 0$. Вложение же Σ_0 в четырехмерный объем описывается тензором внешней кривизны K_{ij}:

$$K_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial n}\bigg|_{\Sigma_0}. \tag{4}$$

В этих координатах $T_{\mu\nu} = S_{\mu\nu} \delta(n) + \ldots$ и

$$\delta S_m = \frac{1}{2} \int\limits_{\Sigma_0} (S_{nn} \delta g^{nn} + 2 S_{ni} \delta g^{ni} + S_{ij} \delta g^{ij}) \sqrt{|\gamma|}\, d^3x. \tag{5}$$

Тензор $S_{\mu\nu}$ есть поверхностный тензор энергии-импульса на оболочке. Отметим, что хотя $g_{nn} = g^{nn} = \epsilon$, $g_{ni} = g^{ni} = 0$, но их вариации не обязательно равны нулю на Σ_0.

Мы будем работать в рамках римановой геометрии, т. е. коэффициенты связности $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ равны

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} (g_{\sigma\mu,\nu} + g_{\sigma\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\sigma}), \tag{6}$$

где запятая обозначает частную производную. Тензор кривизны Римана равен

$$R^{\mu}{}_{\nu\lambda\sigma} = \frac{\partial \Gamma^{\mu}_{\nu\sigma}}{\partial x^{\lambda}} - \frac{\partial \Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}}{\partial x^{\sigma}} + \Gamma^{\mu}_{\varkappa\lambda}\Gamma^{\varkappa}_{\nu\sigma} - \Gamma^{\mu}_{\varkappa\sigma}\Gamma^{\varkappa}_{\nu\lambda}, \tag{7}$$

а тензор Риччи $R_{\nu\sigma}$ и скаляр кривизны R есть его свертки: $R_{\nu\sigma} = R^{\mu}{}_{\nu\mu\sigma}$, $R = g^{\mu\nu}R^{\mu}_{\mu}$. В гауссовой нормальной системе координат вблизи гиперповерхности Σ_0 эти формулы выглядят следующим образом (вертикальная черта обозначает ковариантную производную по трехмерной метрике γ_{ij}):

$$\Gamma^{n}_{ij} = \epsilon K_{ij}, \quad \Gamma^{l}_{ni} = -K^{l}_{i}, \quad \Gamma^{l}_{ij} = {}^{(3)}\Gamma^{l}_{ij}, \tag{8}$$

$$R^{n}{}_{inj} = \epsilon(K_{ij|n} + K_{lj}K^{l}_{i}), \tag{9}$$

$$R^{n}{}_{ikj} = \epsilon(K_{ij|k} + K_{ik|j}), \tag{10}$$

$$R^{l}{}_{ikj} = -\epsilon(K_{ij}K^{l}_{k} - K^{l}_{j}K_{ik}) + {}^{(3)}R^{l}{}_{ikj}, \tag{11}$$

$$R_{nn} = K_{ij|n} + K_{lj}K^{l}_{i}, \quad R_{ni} = -K^{j}_{i|j} + K_{|i}, \tag{12}$$

$$R_{ij} = \epsilon(K_{ij|n} + K_{lj}K^{l}_{i}) + {}^{(3)}R_{ij}, \tag{13}$$

$$R = 2\epsilon(K_{,n} + K_{lj}K^{i}_{l}K^{l}_{i}) + {}^{(3)}R, \tag{14}$$

$$[R_{ninj}] = [K_{ij,n}], \quad [R_{nn}] = \gamma^{ij}[K_{ij,n}], \tag{15}$$

$$[R_{ij}] = \epsilon[K_{ij,n}], \quad [R] = 2\epsilon\gamma^{ij}[K_{ij,n}]. \tag{16}$$

Единственными динамическими переменными в гравитационном действии являются компоненты метрического тензора $g_{\mu\nu}$ или обратного ему тензора $g^{\mu\nu}$.

Мы полагаем сингулярную поверхность Σ_0 фиксированной. Вариация полного действия должна быть равна нулю отдельно во внешнем и внутреннем объемах (всегда можно выбрать произвольно «вспомогательный» объем интегрирования, не затрагивающий сингулярную гиперповерхность), что дает уравнения поля. Равенство же нулю вариации действия на Σ_0 приводит к уравнениям для сшивки решений в $(+)$ и $(-)$ областях.

В общей теории относительности, как известно, уравнения гравитационного поля — второго порядка по производным метрического тензора, несмотря на присутствие этих вторых производных в лагранжиане Гильберта, пропорциональном скаляру кривизны R. Поэтому появление тонкой оболочки в виде δ-функции в тензоре энергии-импульса (в правой части уравнений Эйнштейна) должно быть с необходимостью компенсировано такой же

δ-функцией во вторых производных метрики, а значит, и в скаляре кривизны. В результате получаем следующую логическую цепочку: δ-функция во вторых производных метрики $\to$ скачок в первых производных $\to$ непрерывность метрического тензора. Уравнения сшивки как раз и определяют скачок внешней кривизны при переходе через сингулярную гиперповерхность Σ_0. Эти уравнения впервые были получены В. Израэлем [1]. Уравнения Израэля описывают не только тонкие оболочки, но и ударные волны, когда имеется скачок в тензоре энергии-импульса материи. В этом случае тензор внешней кривизны непрерывен на Σ_0, а вот его производные по нормали (и, соответственно, вторые производные метрического тензора) и скаляр кривизны терпят разрыв R. То есть ударная волна материи сопровождается гравитационной ударной волной. В следующем разделе найдем уравнения Израэля из принципа наименьшего действия, а не прямым интегрированием уравнений поля.

В квадратичной гравитации ситуация с сингулярной поверхностью не так проста. Лагранжиан квадратичной гравитации есть сумма квадратов тензора кривизны Римана, тензора Риччи и скаляра кривизны, а также линейного по кривизне скаляра кривизны и космологической постоянной. Поэтому уравнения поля содержат производные метрического тензора до четвертого порядка включительно. В отличие от общей теории относительности тензор внешней кривизны сингулярной гиперповерхности Σ_0 обязан быть непрерывным, в противном случае мы получили бы δ-функцию в кривизне и δ^2-функцию в интеграле действия, что категорически запрещено в стандартной теории обобщенных функций (которой мы здесь будем следовать). Поэтому кривизна может иметь на Σ_0 максимум скачок. В таком случае логическая цепочка следующая: вторые производные метрического тензора претерпевают скачок $\to$ третьи производные имеют особенность в виде δ-функций $\to$ четвертые производные имеют особенность в виде δ'-функции. По традиции это называется двойным слоем. Общие уравнения двойного слоя в квадратичной гравитации были получены Х. Сеновийей [2]. Мы подробно исследовали случай сферической симметрии в гравитации Вейля–Эйнштейна [3] и обнаружили ряд интересных особенностей, скрытых в общем формализме. Задача данной работы — получить уравнения двойного слоя из принципа наименьшего действия и выяснить природу этих особенностей.

Итак, скачок кривизны вызывает появление двойного слоя в квадратичной гравитации. В общей теории относительности подобный скачок означает появление ударной гравитационной волны, сопровождаемой ударной волной полей материи. Теперь же в уравнениях гравитационного поля появляются δ'-функция, δ-функция и скачок производных метрического тензора, а в тензоре энергии-импульса — δ-функция (тонкая оболочка) и скачок (ударная волна). То есть в квадратичной гравитации ударная гравитационная волна может сопровождать тонкую оболочку, а может существовать и без нее. (Заметим, что ударная волна в полях материи может и не вызывать ударную гравитационную волну.)

Далее будут использоваться следующие обозначения: запятая «,» перед индексом обозначает обычную частную производную, точка с запятой «;» — ковариантную производную по четырехмерной метрике $g_{\mu\nu}$, а вертикальная черта «|» — ковариантную производную по трехмерной метрике γ_{ij}. Нечто в квадратных скобках обозначает скачок через гиперповерхность Σ_0, т. е. $[\ldots] \equiv (+) - (-)$.

ВЫВОД УРАВНЕНИЙ ИЗРАЭЛЯ ИЗ ПРИНЦИПА НАИМЕНЬШЕГО ДЕЙСТВИЯ

Начнем с действия Гильберта в общей теории относительности:

$$S_H = -\frac{1}{16\pi G}\int R\sqrt{-g}\, d^4x. \tag{17}$$

Интегрирование ведется по четырехмерному объему, ограниченному некоторой гиперповерхностью Σ. Здесь опустим добавочный поверхностный член, который, как известно, необходим, чтобы при варьировании с закрепленными краями (на Σ) соблюдался принцип наименьшего действия. Для нас важно лишь то, что вариация тензора внешней кривизны δK_{ij} на Σ совершенно произвольна, тогда как δK_{ij} по определению равна нулю.

Пусть внутри объема варьирования существует некоторая заданная гиперповерхность Σ_0, на которой сосредоточена часть тензора энергии-импульса материи, пропорциональная δ-функции Дирака. В силу уравнений Эйнштейна аналогичное слагаемое появится и в скалярной кривизне R, входящей в интеграл действия. Далее есть два пути. Сначала можно проварьировать действие, а затем проинтегрировать δ-функцию. Этот способ был применен нами в работе [4]. Сейчас пойдем другим путем: сначала проинтегрируем δ-функцию, а затем будем варьировать действие. Итак, имеем

$$S_H = \frac{1}{16\pi G}\left\{+\int\limits_{\Sigma_0} 2[K]\sqrt{|\gamma|}\, d^3x + \int\limits_{(\pm)} R\sqrt{-g}\, d^4x\right\}. \tag{18}$$

Вариация этого действия равна

$$\delta S_H = \frac{1}{16\pi G}\left\{\epsilon\int\limits_{\Sigma_0}\left(2[\delta K] - [K]\gamma_{ij}\delta\gamma^{ij}\right)\sqrt{|\gamma|}\, d^3x + \right.$$
$$\left. + \int\limits_{(\pm)}\left(\gamma^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} + \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\right)\delta\gamma^{\mu\nu}\right)\sqrt{-g}\, d^4x\right\}. \tag{19}$$

Здесь необходимо сказать несколько слов о принятой нами процедуре. Наша цель — получить уравнения на сингулярной гиперповерхности Σ_0, связывающие решения во внешней $(+)$ и во внутренней $(-)$ областях. Поэтому предполагаем, что на граничной гиперповерхности заданы «начальные» условия для некоторых решений с одинаковыми γ_{ij}, но разными (произвольными) K_{ij} (благодаря дополнительному поверхностному члену это возможно), которые индуцируют $\delta\gamma_{ij}$ и δK_{ij} на сингулярной гиперповерхности Σ_0. При этом

$$\delta K_{ij} = A_{ijlp}\delta\gamma^{lp}, \tag{20}$$

поскольку эти вариации зависят от выбора решений на граничной гиперповерхности, но тензор A_{ijlp} — совершенно произволен (не считая симметрии внутри каждой пары индексов).

Так как вне Σ_0 выполняются уравнения Эйнштейна, то от объемных интегралов остаются только слагаемые, пропорциональные $\delta R_{\mu\nu}$, а они благодаря замечательной формуле $\delta R^{\mu}{}_{\nu\lambda\sigma} = (\delta T^{\mu}_{\nu\sigma})_{;\lambda} - (\delta\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda})_{;\sigma}$ легко превращаются в полную производную и по теореме Стокса равны

$$\begin{aligned}
-\int\limits_{\Sigma_0} g^{\mu\nu}[\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}]\sqrt{-g}\,dS_\lambda + \int\limits_{\Sigma_0} g^{\mu\nu}[\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda}]\sqrt{-g}\,dS_\nu &= \\
= \int\limits_{\Sigma_0} \left(-g^{\mu\nu}[\delta\Gamma^{n}_{\mu\nu}] + \epsilon[\delta\Gamma^{\lambda}_{n\lambda}]\right)\sqrt{|\gamma|}\,d^3x &= \\
= -\epsilon\int\limits_{\Sigma_0} \left(\gamma^{ij}[\delta K_{ij}] + [\delta K]\right)\sqrt{|\gamma|}\,d^3x. &
\end{aligned} \tag{21}$$

Вариация же полного действия $\delta S_H + \delta S_m$ равна

$$\frac{\epsilon}{16\pi G}\int\limits_{\Sigma_0} \left([K_{ij}] - \gamma_{ij}[K]\delta\gamma^{ij}\right)\sqrt{|\gamma|}\,d^3x + \frac{1}{2}\int\limits_{\Sigma_0} S_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\sqrt{|\gamma|}\,d^3x = 0. \tag{22}$$

Отметим, что произвольная вариация δK_{ij} полностью исчезла в окончательном выражении. Кроме того, во втором интеграле суммирование идет по всем четырем индексам, так как δg^{nn} и δg^{ni} не обязательно должны быть равными нулю. Отсутствие этих слагаемых в первом интеграле означает, что $S_{nn} = S_{ni} = 0$.

Вот и воспроизведены уравнения Израэля:

$$\epsilon([K_{ij}] - \gamma_{ij}[K]) = 8\pi G S_{ij}, \quad S_{nn} = 0, \quad S_{ni} = 0. \tag{23}$$

ДВОЙНОЙ СЛОЙ В КВАДРАТИЧНОЙ ГРАВИТАЦИИ

Приступим, наконец, к основной задаче — выводу уравнений для двойного слоя в квадратичной гравитации, которые определяют сшивку решений во внешней и внутренней областях четырехмерного объема, разрешенных трехмерной сингулярной гиперповерхностью Σ_0. И все время будем подчеркивать отличия от общей теории относительности.

Гравитационная часть действия S_2 равна

$$S_2 = \int \mathcal{L}_2 \sqrt{-g}\, d^4x, \tag{24}$$

где

$$\mathcal{L}_2 = \alpha_1 R_{\mu\nu\lambda\sigma} R^{\mu\nu\lambda\sigma} + \alpha_2 R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + \alpha_3 R^2 + \alpha_4 \Lambda. \tag{25}$$

В отличие от общей теории относительности, где δ-функция в тензоре энергии-импульса вызывала с необходимостью появление δ-функции в скаляре кривизны R и, следовательно, в лагранжиане, сейчас, как уже говорилось во введении, кривизна может иметь лишь скачок на Σ_0. И этот скачок как раз и приводит к появлению гравитационного двойного слоя. Вариация действия S_2 равна

$$\delta\mathcal{L}_2 = \int \left\{ 2\alpha_1 R_\mu{}^{\nu\lambda\sigma} \delta R^\mu{}_{\nu\lambda\sigma} + 2\alpha_2 R^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} + 2\alpha_3 R g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} + \right.$$
$$\left. + \alpha_4 g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} + (\ldots)\, \delta g^{\mu\nu} \right\} \sqrt{-g}\, d^4x. \tag{26}$$

Мы не выписали длинный ряд членов в круглых скобках, так как в конечном выражении их сумма будет равна нулю вследствие полевых уравнений во внешнем и внутреннем объемах, а δ-функция пока не появилась. Далее

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{L}_2 \to \int \Big\{ & 2\alpha_1 R_\mu{}^{\nu\lambda\sigma} \big((\delta\Gamma^\mu_{\nu\sigma})_{;\lambda} - (\delta\Gamma^\mu_{\nu\lambda})_{;\sigma} \big) + \\
& + (2\alpha_2 R^{\mu\nu} + 2\alpha_3 R g^{\mu\nu} + \alpha_4 g^{\mu\nu}) \big((\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu})_{;\lambda} - (\delta\Gamma^\lambda_{\mu\lambda})_{;\nu} \big) \Big\} \sqrt{-g}\, d^4x = \\
= \int \Big\{ & (2\alpha_1 R_\mu{}^{\nu\lambda\sigma} \delta\Gamma^\mu_{\nu\sigma})_{;\lambda} - (2\alpha_1 R_\mu{}^{\nu\lambda\sigma} \delta\Gamma^\mu_{\nu\lambda})_{;\sigma} + \\
& + \big((2\alpha_2 R^{\mu\nu} + 2\alpha_3 R g^{\mu\nu} + \alpha_4 g^{\mu\nu}) \delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu} \big)_{;\lambda} - \\
& - \big((2\alpha_2 R^{\mu\nu} + 2\alpha_3 R g^{\mu\nu} + \alpha_4 g^{\mu\nu}) \delta\Gamma^\lambda_{\mu\lambda} \big)_{;\nu} - \\
& - 2\alpha_1 \big(R_\mu{}^{\nu\lambda\sigma}{}_{;\lambda} \delta\Gamma^\mu_{\nu\sigma} - R_\mu{}^{\nu\lambda\sigma}{}_{;\sigma} \delta\Gamma^\mu_{\nu\lambda} \big) - \\
& - (2\alpha_2 R^{\mu\nu} + 2\alpha_3 R g^{\mu\nu} + \alpha_4 g^{\mu\nu})_{;\lambda} \delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu} + \\
& + (2\alpha_2 R^{\mu\nu} + 2\alpha_3 R g^{\mu\nu} + \alpha_4 g^{\mu\nu})_{;\nu} \delta\Gamma^\lambda_{\mu\lambda} \Big\} \sqrt{-g}\, d^4x.
\end{aligned} \tag{27}$$

Здесь необходимо отметить очень важное отличие от общей теории относительности. Поскольку δ-функции отсутствуют в лагранжиане $\delta\mathcal{L}_2$, их нет и в вариации, а «явное» появление их в ковариантных производных тензора Римана и его свертках полностью компенсируется «спрятанными» δ-функциями в полных производных. Следовательно, можно смело считать объемный интеграл суммой интегралов, в отдельности по «$+$» и «$-$» областям. То же относится и к δ'-функции. Особенно важно рассмотреть поверхностный интеграл, возникающий из полных производных с участием вариаций коэффициентов связности $\delta\Gamma$. Обозначим его $\delta\Sigma_1$:

$$\delta\mathcal{L}_2 \to -\int\limits_{\Sigma_0} \big\{4\alpha_1 [R_{\mu}{}^{\nu n\sigma}]\delta\Gamma^{\mu}_{\nu\sigma} + 2(\alpha_2[R^{\mu\nu}] + \alpha_3[R]g^{\mu\nu})\delta\Gamma^{n}_{\mu\nu} - \\ - 2(\alpha_2[R^{\mu n}] + \alpha_3[R]g^{\mu n})\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda}\big\}\sqrt{|\gamma|}\, d^3x. \quad (28)$$

Здесь использованы симметрии тензора кривизны, а также равенство нулю ковариантной производной метрического тензора и его непрерывность на Σ_0. Заметим, что уже на этом этапе исчезли коэффициенты α_1 и α_2. Это означает, что не существует плавного перехода от квадратичной гравитации к гравитации Эйнштейна. Общий знак перед интегралом обусловлен направленностью внешней нормали к гиперповерхности Σ_0 (из «$-$» области в «$+$» область) и определением скачка ($[\ldots] = (+)-(-)$). Подставляя сюда значения скачков для тензора Римана и его сверток, определяемых скачком нормальной производной тензора внешней кривизны, $[K_{ij,n}]$, получаем:

$$\delta\mathcal{L}_2 \to -\int\limits_{\Sigma_0} \Big\{ \big((4\alpha_1 + \alpha_2)\gamma^{il}\gamma^{jp} + (\alpha_2 + 4\alpha_3)\gamma^{ij}\gamma^{lp}\big)\,[K_{ij:n}]\delta K_{lp} + \\ + \Big(2\alpha_1 K^{j}_{l}[K_{pj;n}] + (\alpha_2 + 2\alpha_3)\gamma^{ij}K_{lp}[K_{ij;n}]\Big)\,\delta\gamma^{lp}\Big\}\sqrt{|\gamma|}\, d^3x. \quad (29)$$

Отличный от нуля скачок производной по нормали тензора внешней кривизны $K_{ij,n}$ необходим для существования гравитационного двойного слоя. Мы видим, что в отличие от общей теории относительности в квадратичной гравитации возникает неустранимая, вообще говоря, вариация тензора внешней кривизны δK_{lp} с совершенно произвольным коэффициентом $[K_{ij,n}]$, кроме одного случая, когда $\alpha_2 = -4\alpha_1$, $\alpha_3 = \alpha_1$. Но это как раз соответствует члену Гаусса–Бонне, который в четырехмерном пространстве-времени не влияет на уравнения поля, и от двойного слоя не остается и следа.

В общем же случае вариации тензора внешней кривизны δK_{ij} ничем не компенсируются, в отличие от общей теории относительности. Поэтому, как уже объяснялось выше,

$$\delta K_{ij} = B^{\mu\nu}_{ij}\delta\gamma_{\mu\nu}, \quad (30)$$

где $B^{\mu\nu}_{ij}$ — произвольный тензор четвертого ранга, симметричный по каждой паре индексов. Он должен определяться в процессе решения уравнений сшивки на сингулярной гиперповерхности Σ_0. Появление такого «произвола» впервые было рассмотрено в работе [4] на примере сферически симметричной гравитации Вейля–Эйнштейна. И появляется он в результате математических действий с производной от δ-функции — δ'. Здесь же — без нее.

Оставшийся объемный интеграл равен

$$\delta\mathcal{L}_2 \to \int \Big\{4\alpha_1 R_\mu{}^{\nu\lambda\sigma}{}_{;\sigma}\delta\Gamma^\mu_{\nu\lambda} - 2(\alpha_2 R^{\mu\nu}_{;\lambda} + \alpha_3 R_{;\lambda}g^{\mu\nu})\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu} + \\ + 2(\alpha_2 R^{\mu\nu}{}_{;\nu} + \alpha_3 R_{;\nu}g^{\mu\nu})\delta\Gamma^\lambda_{\mu\lambda}\Big\}\sqrt{-g}\,d^4x. \quad (31)$$

Для вариаций коэффициентов связности имеется еще одна замечательная формула:

$$\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\lambda\sigma}\big((\delta g_{\sigma\mu})_{;\nu} + (\delta g_{\sigma\nu})_{;\mu} - (\delta g_{\mu\nu})_{;\sigma}\big). \quad (32)$$

Далее, выделяя полные производные и применяя теорему Стокса, получаем еще один вклад в поверхностный интеграл. Назовем его $\delta\Sigma_2$:

$$\delta\Sigma_2 = \int\limits_{\Sigma_0} \Bigg\{ - 4\alpha_1[R^{\alpha n\lambda\sigma}{}_{;\sigma}]\delta g_{\alpha\sigma} + \\ + \alpha_2\left(2[R^{\mu n;\alpha}]\delta g_{\mu\alpha} - [R^{\mu\nu;n}]\delta g_{\mu\nu} - \frac{1}{2}[R^{;n}]g^{\lambda\sigma}\delta g_{\lambda\sigma}\right) + \\ + 2\alpha_3([R^{;i}]\delta g_{ni} - [R^{;n}]\gamma^{ij}\delta\gamma_{ij})\Bigg\}\sqrt{|\gamma|}\,d^3x. \quad (33)$$

Дальнейшие вычисления — сплошная рутина. Опишем качественно главные особенности результата. Во-первых, это появление в уравнениях сшивки произвольных функций, определяемых отдельно для каждой пары сшиваемых решений. Во-вторых, и это было отмечено Сеновийей [2], компоненты S^{nn} и S^{ni} поверхностного тензора энергии-импульса материи на сингулярной оболочке Σ_0, вообще говоря, не равны нулю (в отличие от общей теории относительности). Мы получили более сильный результат: S^{nn} и S^{ni} не исчезают даже в том случае, когда квадратичный лагранжиан представляет собой комбинацию Гаусса–Бонне, являющуюся полной производной и не влияющую на уравнения поля в объеме. А вот на сингулярной гиперповерхности — пожалуйста. С этим еще предстоит разбираться.

Авторы выражают признательность Российскому фонду фундаментальных исследований за финансовую поддержку в рамках гранта № 18-52-15001-NCNIa.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Israel W.* Singular Hypersurfaces and Thin Shells in General Relativity // Nuovo Cim. B. 1966. V. 44. P. 1–14.
2. *Senovilla J. M. M.* Double Layers in Gravity Theories // J. Phys. Conf. Ser. 2015. V. 600. P. 012004; arXiv:1410.5650 [gr-qc].
3. *Berezin V., Dokuchaev V., Eroshenko Yu.* On the Theory of Spherically Symmetric Thin Shells in Conformal Gravity // Intern. J. Mod. Phys. D. 2018. V. 27, No. 6. P. 1841012; arXiv:1710.10438 [gr-qc].
4. *Berezin V., Dokuchaev V., Eroshenko Yu., Smirnov A.* Least Action Principle and Gravitational Double Layer. arXiv:1909.06405 [gr-qc]. 2019.