ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА
2020. Т. 51. ВЫП. 4. С. 865–876

МЕТОД СУПЕРПОТЕНЦИАЛА ДЛЯ КОСМОЛОГИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ $F(R)$-ГРАВИТАЦИИ

С. Ю. Вернов [1,*], *В. Р. Иванов* [2,**], *Е. О. Поздеева* [1,***]

[1] Научно-исследовательский институт ядерной физики им. Д. В. Скобельцына Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, Москва

[2] Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва

Модели $F(R)$-гравитации с точными частными решениями строятся с помощью конформного преобразования и метода суперпотенциала для соответствующих моделей в формулировке Эйнштейна. Функции $F(R)$ получаются в явном виде. Подробно рассматриваются точные решения для полученной модели R^2-гравитации с космологической постоянной.

We construct the $F(R)$ gravity models with exact particular solutions using the conformal transformation and the superpotential method for the corresponding models in the Einstein frame. The functions $F(R)$ are obtained explicitly. We consider exact solutions for the obtained R^2 gravity model with the cosmological constant in detail.

PACS: 98.80.Cq; 95.30.Sf; 98.80.Jk

ВВЕДЕНИЕ

$F(R)$-гравитация является одним из самых популярных обобщений общей теории относительности [1]. Модели $F(R)$-гравитации активно используются для описания различных стадий эволюции Вселенной. Например, инфляционная R^2-модель Старобинского [2] (см. также [3]) приводит к предсказаниям, которые не противоречат данным наблюдений [4]. $F(R)$-модели темной энергии активно исследуются и анализируются, например, в статьях [5–12]. Более того, существуют модели $F(R)$-гравитации, которые могут описывать и инфляцию, и позднее космическое ускорение [13–15].

*E-mail: svernov@theory.sinp.msu.ru
**E-mail: vsvd.ivanov@gmail.com
***E-mail: pozdeeva@www-hep.sinp.msu.ru

Точные решения играют важную роль в космологии, поэтому поиск интегрируемых $F(R)$-моделей, а также моделей с точными частными решениями, является интересной задачей [16, 17]. С помощью преобразований метрики и скалярного поля модель $F(R)$-гравитации может быть преобразована в модель с минимально связанным скалярным полем, обладающим каноническим кинетическим членом [18]. Существует несколько методов построения моделей с минимально связанными скалярными полями с точными космологическими решениями. Одним из популярных методов является метод суперпотенциала [19, 20] (известный также как метод Гамильтона–Якоби или формализм первого порядка). В этой работе данный метод обобщается на случай моделей $F(R)$-гравитации для получения моделей с точными решениями. Приводится несколько примеров таких моделей с явной $F(R)$-зависимостью.

1. СООТВЕТСТВУЮЩИЕ МОДЕЛИ В ФОРМУЛИРОВКЕ ЭЙНШТЕЙНА

Рассмотрим модель $F(R)$-гравитации:

$$S_R = \int d^4\tilde{x}\sqrt{-\tilde{g}}F(R), \tag{1}$$

где $F(R)$ — дважды дифференцируемая функция от скаляра Риччи R. Введем новое скалярное поле без кинетического члена σ и перепишем S_R следующим образом [18, 21]:

$$\tilde{S}_J = \int d^4\tilde{x}\sqrt{-\tilde{g}}\left[\frac{dF(\sigma)}{d\sigma}(R-\sigma)+F(\sigma)\right]. \tag{2}$$

С помощью конформного преобразования метрики $g_{\mu\nu} = (2f(\sigma)/M_{\rm Pl}^2)\,\tilde{g}_{\mu\nu}$, где $f \equiv dF(\sigma)/d\sigma$, получаем следующее действие гравитации Эйнштейна [22]:

$$\begin{gathered} S_E = \int d^4x\sqrt{-g}\left[\frac{M_{\rm Pl}^2}{2}R_E - \frac{h(\sigma)}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\sigma\partial_\nu\sigma - V_E\right], \\ h(\sigma) = \frac{3M_{\rm Pl}^2}{2f^2}\left(\frac{df}{d\sigma}\right)^2, \quad V_E = M_{\rm Pl}^4\frac{f\sigma - F}{4f^2}. \end{gathered} \tag{3}$$

Вводя скалярное поле

$$\psi = \sqrt{\frac{3}{2}}M_{\rm Pl}\ln\left(\frac{2}{M_{\rm Pl}^2}f(\sigma)\right), \tag{4}$$

получаем действие S_E в следующем виде:

$$S_E = \int d^4x\sqrt{-g}\left[\frac{M_{\rm Pl}^2}{2}R_E - \frac{1}{2}\partial_\mu\psi\partial_\mu\psi - V_E(\psi)\right]. \tag{5}$$

Таким образом, получаем модель в формулировке Эйнштейна со стандартным скалярным полем. Чтобы получить обратное преобразование, представим потенциал и его производную в следующем виде:

$$V_E(\psi) = \frac{M_{\rm Pl}^2}{2}R\,\exp\left(-\frac{\sqrt{6}\psi}{3M_{\rm Pl}}\right) - F\,\exp\left(-\frac{2\sqrt{6}\psi}{3M_{\rm Pl}}\right),$$

$$\frac{dV_E(\psi)}{d\psi} = -\frac{M_{\rm Pl}}{\sqrt{6}}R\,\exp\left(-\frac{\sqrt{6}\psi}{3M_{\rm Pl}}\right) + \frac{4}{\sqrt{6}M_{\rm Pl}}F\,\exp\left(-\frac{2\sqrt{6}\psi}{3M_{\rm Pl}}\right).$$

Таким образом, получаем функцию $F(R)$ в параметрической форме [23–25]:

$$R = \left[\frac{\sqrt{6}}{M_{\rm Pl}}\frac{dV_E}{d\psi} + \frac{4V_E}{M_{\rm Pl}^2}\right]\exp\left(\frac{\sqrt{6}\psi}{3M_{\rm Pl}}\right), \tag{6}$$

$$F = \frac{M_{\rm Pl}^2}{2}\left[\frac{\sqrt{6}}{M_{\rm Pl}}\frac{dV_E}{d\psi} + \frac{2V_E}{M_{\rm Pl}^2}\right]\exp\left(2\frac{\sqrt{6}\psi}{3M_{\rm Pl}}\right). \tag{7}$$

Если модель с одним минимально связанным скалярным полем имеет точные решения, то соответствующая модель $F(R)$-гравитации тоже их имеет. Цель данной работы — найти такие потенциалы V_E, чтобы модель в формулировке Эйнштейна имела точные решения, а функцию $F(R)$ можно было найти в аналитическом виде.

2. ПОСТРОЕНИЕ МОДЕЛЕЙ $F(R)$-ГРАВИТАЦИИ

Пусть уравнение (6) имеет решение

$$R = C_1 + C_k\exp\left(\frac{k\psi}{M_{\rm Pl}}\right), \tag{8}$$

где C_1 и $C_k \neq 0$ — произвольные постоянные, тогда функция $F(R)$ может быть получена в аналитическом виде. Из уравнений (6) и (8) получаем следующее линейное дифференциальное уравнение первого порядка для потенциала V_E:

$$\left[\frac{\sqrt{6}}{M_{\rm Pl}}\frac{dV_E}{d\psi} + \frac{4V_E}{M_{\rm Pl}^2}\right]\exp\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\frac{\psi}{M_{\rm Pl}}\right) = C_1 + C_k\,\exp\left(k\frac{\psi}{M_{\rm Pl}}\right). \tag{9}$$

У уравнения (9) есть общее решение:

$$V_E(\psi) = \frac{M_{\rm Pl}^2}{2}\left(C_2\,\exp\left(-2\frac{\sqrt{6}\psi}{3M_{\rm Pl}}\right) + \right.$$
$$\left. + C_1\exp\left(-\frac{\sqrt{6}\psi}{3M_{\rm Pl}}\right) + C_\omega\,\exp\left(\omega\frac{\sqrt{6}\psi}{3M_{\rm Pl}}\right)\right), \quad (10)$$

где C_2 — константа интегрирования, $\omega = \sqrt{6}k/2 - 1$ и $C_\omega = \sqrt{6}C_k/(\sqrt{6}+3k) = C_k/(\omega+2)$.

При подстановке потенциала (10) в (6) и (7) получаем следующие выражения:

$$\begin{aligned} R &= C_\omega(\omega+2)\exp\left[(\omega+1)\frac{\sqrt{6}\psi}{3M_{\rm Pl}}\right] + C_1, \\ F &= \frac{M_{\rm Pl}^2}{2}\left(C_\omega(\omega+1)\,\exp\left[(\omega+2)\frac{\sqrt{6}\psi}{3M_{\rm Pl}}\right] - C_2\right). \end{aligned} \quad (11)$$

В итоге получаем

$$F(R) = \frac{M_{\rm Pl}^2}{2}\left(C_\omega(\omega+1)\left(\frac{R-C_1}{C_\omega(\omega+2)}\right)^\alpha - C_2\right), \quad \text{где} \quad \alpha = \frac{\omega+2}{\omega+1}. \quad (12)$$

Легко видеть, что $\alpha \neq 1$ для любого ω и что $\alpha = 2$ соответствует $\omega = 0$.

3. ПОИСК ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ

Рассмотрим потенциал (10) для случая $C_1 = C_2 = 0$. Если $\omega \neq 0$, то получаем экспоненциальный потенциал и интегрируемую космологическую модель [19, 26–28]. Общие решения этой модели могут быть найдены явно в параметрическом времени [27]. Общие решения соответствующих R^α-моделей с произвольным параметром α (кроме случаев $\alpha = 2$ и $\alpha = 1$) могут быть получены из общего решения модели с экспоненциальным потенциалом конформным преобразованием метрики. В случае $\omega = 0$ получаем модель с космологической постоянной, которая интегрируема (общее решение представлено в [29, 30]) и соответствует модели чистой R^2-гравитации.

Для доказательства интегрируемости космологической модели с экспоненциальным потенциалом в работе [19] был применен метод суперпотенциала. Этот метод активно используется для получения космологических моделей с точными частными решениями как с одним скалярным полем [19, 20, 31–35], так и с несколькими скалярными полями [19, 36–38], а также для

Список полученных $F(R)$-моделей

a, b	ω	α	C_2	C_1	C_ω	$2F(R)/M_{\mathrm{Pl}}^2$
$a=-\frac{2}{3},\ b=0$	0	2	$\frac{10}{3}W_a^2$	$12W_aW_b$	$6W_b^2$	$\frac{1}{24W_b^2}R^2-\frac{W_a}{W_b}R+\frac{8W_a^2}{3}$
$a=-\frac{2}{3},\ b=1$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{10}{3}W_a^2$	0	$20W_aW_b$	$30W_aW_b\left(\frac{R}{50W_aW_b}\right)^{5/3}-\frac{10W_a^2}{3}$
$a=-1,\ b=\frac{1}{3}$	1	$\frac{3}{2}$	0	$16W_aW_b$	$\frac{16}{3}W_b^2$	$\frac{32}{3}W_b^2\left(\frac{1}{16W_b^2}R-\frac{W_a}{W_b}\right)^{3/2}$
$a=-\frac{1}{3},\ b=1$	1	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{16}{3}W_a^2$	$16W_aW_b$	$32W_aW_b\left(\frac{R}{48W_aW_b}-\frac{W_a}{9W_b}\right)^{3/2}$
$a=-3,\ b=-\frac{1}{3}$	-9	$\frac{7}{8}$	0	$\frac{16}{3}W_b^2$	$-48W_a^2$	$384W_a^2\left(\frac{1}{336W_a^2}R-\frac{W_b^2}{63W_a^2}\right)^{7/8}$
$a=-\frac{7}{3},\ b=1$	-7	$\frac{5}{6}$	$40W_aW_b$	0	$-\frac{80}{3}W_a^2$	$160W_a^2\left[\frac{3R}{400W_a^2}\right]^{5/6}-40W_aW_b$
$a=-\frac{5}{3},\ b=1$	-5	$\frac{3}{4}$	0	$32W_aW_b$	$-\frac{32}{3}W_a^2$	$\frac{128}{3}W_a^2\left(\frac{R}{32W_a^2}-\frac{W_b}{W_a}\right)^{3/4}$
$a=-\frac{3}{2},\ b=-\frac{2}{3}$	$-\frac{9}{2}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{10}{3}W_b^2$	0	$-\frac{15}{2}W_a^2$	$\frac{105}{4}W_a^2\left(\frac{4}{75W_a^2}R\right)^{5/7}-\frac{10W_b^2}{3}$
$a=-1,\ b=-\frac{2}{3}$	$-\frac{5}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{10}{3}W_b^2$	0	$4W_aW_b$	$6W_aW_b\left(\frac{1}{2W_aW_b}R\right)^{1/3}-\frac{10W_b^2}{3}$
$a=-\frac{2}{3},\ b=-\frac{1}{3}$	$-\frac{3}{2}$	-1	$\frac{10}{3}W_a^2$	$\frac{16}{3}W_b^2$	$\frac{28}{3}W_aW_b$	$\frac{196W_a^2W_b^2}{3(3R-16W_b^2)}-\frac{10W_a^2}{3}$

построения инфляционных моделей [39–41]. Мы используем этот метод для получения моделей с точными решениями для случаев с $C_1^2 + C_2^2 \neq 0$.

Для плоской метрики Фридмана–Леметра–Робертсона–Уокера с метрикой, задаваемой выражением

$$ds^2 = -dt^2 + a_E^2(t)\left(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2\right), \tag{13}$$

уравнения Эйнштейна могут быть записаны в следующем виде:

$$\dot{\psi} = -2M_{\rm Pl}^2 W'_{,\psi}, \tag{14}$$

$$V_E = 3M_{\rm Pl}^2 W^2 - 2M_{\rm Pl}^4 {W'_{,\psi}}^2, \tag{15}$$

где параметр Хаббла $H_E \equiv \dot{a}/a = W(\psi)$ и $W'_{,\psi} = dW/d\psi$.

Выбирая суперпотенциал

$$W(\psi) = W_a \exp\left(a\frac{\sqrt{6}\psi}{2M_{\rm Pl}}\right) + W_b \exp\left(b\frac{\sqrt{6}\psi}{2M_{\rm Pl}}\right), \tag{16}$$

где a, b, W_a и W_b — постоянные, получаем следующий потенциал:

$$\begin{aligned} V_E = 6\Bigg(W_a^2(1-a^2)\exp\left(a\sqrt{6}\frac{\psi}{M_{\rm Pl}}\right) + {}\\ + 2W_aW_b(1-ab)\exp\left(\frac{(a+b)}{2}\sqrt{6}\frac{\psi}{M_{\rm Pl}}\right) + {}\\ + W_b^2(1-b^2)\exp\left(b\sqrt{6}\frac{\psi}{M_{\rm Pl}}\right)\Bigg). \end{aligned} \tag{17}$$

Для некоторых значений параметров a и b получаем потенциалы в виде (10) и соответствующие модели $F(R)$-гравитации с точными решениями (см. таблицу). Предполагаем, что $a < b$ без потери общности. В случаях $a = -1/3$, $b = 1$ и $a = -1$, $b = 1/3$ полученные $F(R)$-модели совпадают. В общем случае точное решение $\psi(t)$ может быть получено в квадратурах интегрированием уравнения (14).

4. СЛУЧАЙ МОДЕЛИ R^2-ГРАВИТАЦИИ

Рассмотрим подробно случай модели R^2-гравитации с

$$F(R) = \frac{M_{\rm Pl}^2}{2}\left(\frac{1}{24W_b^2}R^2 - \frac{W_a}{W_b}R + \frac{8W_a^2}{3}\right), \tag{18}$$

которой соответствует суперпотенциал $W(\psi) = W_a \exp\left(-\sqrt{6}\psi/3M_{\rm Pl}\right) + W_b$.

Уравнение (14) решается в явном виде:

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{2\sqrt{6}}{3} M_{\rm Pl} W_a \, \exp\left(-\frac{\sqrt{6}\psi}{3M_{\rm Pl}}\right) \to \psi = \frac{\sqrt{6}}{2} M_{\rm Pl} \ln\left(\frac{4W_a}{3}(t-t_0)\right), \quad (19)$$

где t_0 — константа интегрирования.

Подстановкой $\psi(t)$ в $W(\psi)$ получаем параметр Хаббла для модели со скалярным полем:

$$H_E = \frac{3}{4(t-t_0)} + W_b. \quad (20)$$

В изначальной модели $F(R)$ получаем метрику Фридмана–Леметра–Робертсона–Уокера с параметрическим временем t и

$$d\tilde{s}^2 = -\frac{M_{\rm Pl}^2}{2f(R)} dt^2 + \tilde{a}^2\left(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2\right), \quad \text{где} \quad \tilde{a}^2 = \frac{M_{\rm Pl}^2}{2f(R)} a_E^2. \quad (21)$$

С помощью уравнения (11) получаем

$$f(R) = \frac{M_{\rm Pl}^2}{2} \exp\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\frac{\psi}{M_{\rm Pl}}\right) = \frac{2}{3} M_{\rm Pl}^2 W_a (t-t_0).$$

Космическое время в этом фрейме есть

$$\tilde{t} = \int \sqrt{\frac{M_{\rm Pl}^2}{2f(\sigma)}} dt = \sqrt{\frac{3(t-t_0)}{W_a}} + \tilde{t}_0. \quad (22)$$

Соответствующий параметр Хаббла может быть представлен в виде

$$\tilde{H} = \tilde{a}^{-1}\frac{d\tilde{a}}{d\tilde{t}} = \sqrt{\frac{2f(R)}{M_{\rm Pl}^2}}\left[H_E - \frac{1}{2}\frac{d\ln(f)}{dt}\right] = \frac{1}{2(\tilde{t}-\tilde{t}_0)} + \frac{2}{3} W_b W_a (\tilde{t}-\tilde{t}_0). \quad (23)$$

Первое слагаемое этого выражения соответствует Вселенной, заполненной излучением, в то время как второе слагаемое — решение Рузмайкиной и Рузмайкина [42].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итак, мы нашли несколько моделей $F(R)$-гравитации с точными решениями и показали, что метод суперпотенциала — полезный инструмент для этой цели. Существование фундаментального скалярного поля (бозона Хиггса) дает хорошую мотивацию рассматривать модифицированные модели гравитации с добавочным скалярным полем. Модели $F(R,\chi)$-гравитации со скалярным полем χ [43] очень популярны [21, 44–48] в качестве моделей инфляции, в частности, смешанной модели Хиггс$-R^2$ [45–47]. Мы планируем обобщить исследование на случай моделей $F(R,\chi)$ и использовать метод суперпотенциала, разработанный для поиска точных решений киральных космологических моделей [38], или другие методы [49] для построения физически интересных моделей $F(R,\chi)$ с точными решениями.

Исследования С. Ю. Вернова и Е. О. Поздеевой частично выполнены при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-52-45016).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Sotiriou T. P., Faraoni V.* $f(R)$ Theories of Gravity // Rev. Mod. Phys. 2010. V. 82. P. 451; arXiv:0805.1726;
   De Felice A., Tsujikawa S. $f(R)$ Theories // Living Rev. Rel. 2010. V. 13. P. 3; arXiv:1002.4928;
   Faulkner T., Tegmark M., Bunn E. F., Mao Y. Constraining $f(R)$ Gravity as a Scalar Tensor Theory // Phys. Rev. D. 2007. V. 76. P. 063505; arXiv:astro-ph/0612569.
2. *Starobinsky A. A.* A New Type of Isotropic Cosmological Models without Singularity // Phys. Lett. B. 1980. V. 91. P. 99;
   Starobinsky A. A. Dynamics of Phase Transition in the New Inflationary Universe Scenario and Generation of Perturbations // Phys. Lett. B. 1982. V. 117. P. 175.
3. *Mijic M. B., Morris M. S., Suen W. M.* The R^2 Cosmology: Inflation without a Phase Transition // Phys. Rev. D. 1986. V. 34. P. 2934;
   Maeda K. Inflation as a Transient Attractor in R^2 Cosmology // Phys. Rev. D. 1988. V. 37. P. 858.
4. *Akrami Y. et al. (Planck Collab.).* Planck 2018 Results. X. Constraints on Inflation. arXiv:1807.06211.
5. *Capozziello S., Cardone V. F., Carloni S., Troisi A.* Curvature Quintessence Matched with Observational Data // Intern. J. Mod. Phys. D. 2003. V. 12. P. 1969; arXiv:astro-ph/0307018.
6. *Dolgov A. D., Kawasaki M.* Can Modified Gravity Explain Accelerated Cosmic Expansion? // Phys. Lett. B. 2003. V. 573. P. 1; arXiv:astro-ph/0307285.
7. *Hu W., Sawicki I.* Models of $f(R)$ Cosmic Acceleration that Evade Solar-System Tests // Phys. Rev. D. 2007. V. 76. P. 064004; arXiv:0705.1158;
   Bamba K., Geng C. Q., Nojiri S., Odintsov S. D. Crossing of the Phantom Divide in Modified Gravity // Phys. Rev. D. 2009. V. 79. P. 083014; arXiv:0810.4296.
8. *Starobinsky A. A.* Disappearing Cosmological Constant in $f(R)$ Gravity // JETP Lett. 2007. V. 86. P. 157; arXiv:0706.2041.
9. *Tsujikawa S.* Observational Signatures of $f(R)$ Dark Energy Models that Satisfy Cosmological and Local Gravity Constraints // Phys. Rev. D. 2008. V. 77. P. 023507; arXiv:0709.1391.
10. *Bamba K., Geng C. Q., Nojiri S., Odintsov S. D.* Crossing of the Phantom Divide in Modified Gravity // Phys. Rev. D. 2009. V. 79. P. 083014; arXiv:0810.4296;

Capozziello S., Nojiri S., Odintsov S. D. The Role of Energy Conditions in $f(R)$ Cosmology // Phys. Lett. B. 2018. V. 781. P. 99; arXiv:1803.08815.

11. *Ali A., Gannouji R., Sami M., Sen A. A.* Background Cosmological Dynamics in $f(R)$ Gravity and Observational Constraints // Phys. Rev. D. 2010. V. 81. P. 104029; arXiv:1001.5384.
12. *Arbuzova E.* Instabilities in Modified Theories of Gravity. arXiv:1911.02892;
Arbuzova E. V., Dolgov A. D. Instability Effects in $F(R)$-Modified Gravity and in Gravitational Baryogenesis // Phys. Part. Nucl. 2019. V. 50. P. 850.
13. *Nojiri S., Odintsov S. D.* Modified Gravity with Negative and Positive Powers of the Curvature: Unification of the Inflation and of the Cosmic Acceleration // Phys. Rev. D. 2003. V. 68. P. 123512; arXiv:hep-th/0307288;
Cognola G., Elizalde E., Nojiri S., Odintsov S. D., Sebastiani L., Zerbini S. A Class of Viable Modified $f(R)$ Gravities Describing Inflation and the Onset of Accelerated Expansion // Phys. Rev. D. 2008. V. 77. P. 046009; arXiv:0712.4017.
14. *Motohashi H., Starobinsky A. A., Yokoyama J.* Phantom Boundary Crossing and Anomalous Growth Index of Fluctuations in Viable $f(R)$ Models of Cosmic Acceleration // Prog. Theor. Phys. 2010. V. 123. P. 887; arXiv:1002.1141.
15. *Nojiri S., Odintsov S. D.* Unified Cosmic History in Modified Gravity: From $F(R)$ Theory to Lorentz Non-Invariant Models // Phys. Rep. 2011. V. 505. P. 59; arXiv:1011.0544;
Nojiri S., Odintsov S. D., Oikonomou V. K. Modified Gravity Theories on a Nutshell: Inflation, Bounce and Late-Time Evolution // Phys. Rep. 2017. V. 692. P. 1; arXiv:1705.11098.
16. *Paliathanasis A.* Analytic Solution of the Starobinsky Model for Inflation // Eur. Phys. J. C. 2017. V. 77. P. 438; arXiv:1706.06400;
Papagiannopoulos G., Basilakos S., Barrow J. D., Paliathanasis A. New Integrable Models and Analytical Solutions in $f(R)$ Cosmology with an Ideal Gas // Phys. Rev. D. 2018. V. 97. P. 024026; arXiv:1801.01274.
17. *Muller D., Ricciardone A., Starobinsky A. A., Toporensky A.* Anisotropic Cosmological Solutions in $R + R^2$ Gravity // Eur. Phys. J. C. 2018. V. 78. P. 311; arXiv:1710.08753.
18. *Maeda K. I.* Towards the Einstein–Hilbert Action via Conformal Transformation // Phys. Rev. D. 1989. V. 39. P. 3159.
19. *Salopek D. S., Bond J. R.* Nonlinear Evolution of Long-Wavelength Metric Fluctuations in Inflationary Models // Phys. Rev. D. 1990. V. 42. P. 3936.
20. *Muslimov A. G.* On the Scalar Field Dynamics in a Spatially Flat Friedman Universe // Class. Quant. Grav. 1990. V. 7. P. 231.
21. *Kaneda S., Ketov S. V.* Starobinsky-Like Two-Field Inflation // Eur. Phys. J. C. 2016. V. 76, No. 1. P. 26; arXiv:1510.03524.
22. *Salopek D. S., Bond J. R., Bardeen J. M.* Designing Density Fluctuation Spectra in Inflation // Phys. Rev. D. 1989. V. 40. P. 1753.
23. *Ketov S. V., Watanabe N.* The $f(R)$ Gravity Function of Linde Quintessence // Phys. Lett. B. 2015. V. 741. P. 242; arXiv:1410.3557.
24. *Motohashi H., Starobinsky A. A.* $f(R)$ Constant-Roll Inflation // Eur. Phys. J. C. 2017. V. 77, No. 8. P. 538; arXiv:1704.08188.

25. *Ketov S. V.* On the Equivalence between Starobinsky and Higgs Inflationary Models in Gravity and Supergravity. arXiv:1911.01008.
26. *Muller V., Schmidt H. J., Starobinsky A. A.* Power Law Inflation as an Attractor Solution for Inhomogeneous Cosmological Models // Class. Quant. Grav. 1990. V. 7. P. 1163;
Elizalde E., Nojiri S., Odintsov S. D. Late-Time Cosmology in (Phantom) Scalar-Tensor Theory: Dark Energy and the Cosmic Speed-Up // Phys. Rev. D. 2004. V. 70. P. 043539; arXiv:hep-th/0405034;
Andrianov A. A., Cannata F., Kamenshchik A. Y. General Solution of Scalar Field Cosmology with a (Piecewise) Exponential Potential // J. Cosmol. Astropart. Phys. 2011. V. 1110. P. 004; arXiv:1105.4515.
27. *Fré P., Sagnotti A., Sorin A. S.* Integrable Scalar Cosmologies. I. Foundations and Links with String Theory // Nucl. Phys. B. 2013. V. 877. P. 1028; arXiv:1307.1910.
28. *Kamenshchik A. Yu., Pozdeeva E. O., Tronconi A., Venturi G., Vernov S. Yu.* Integrable Cosmological Models with Non-Minimally Coupled Scalar Fields // Class. Quant. Grav. 2014. V. 31. P. 105003; arXiv:1307.1910.
29. *Aref'eva I. Ya., Joukovskaya L. V., Vernov S. Yu.* Dynamics in Nonlocal Linear Models in the Friedmann–Robertson–Walker Metric // J. Phys. A. 2008. V. 41. P. 304003; arXiv:0711.1364.
30. *Kamenshchik A. Yu., Pozdeeva E. O., Vernov S. Yu., Tronconi A., Venturi G.* Transformations between Jordan and Einstein Frames: Bounces, Antigravity, and Crossing Singularities // Phys. Rev. D. 2016. V. 94. P. 063510; arXiv:1602.07192;
Kamenshchik A. Yu., Pozdeeva E. O., Tronconi A., Venturi G., Vernov S. Yu. General Solutions of Integrable Cosmological Models with Non-Minimal Coupling // Phys. Part. Nucl. Lett. 2017. V. 14, No. 2. P. 382; arXiv:1604.01959;
Kamenshchik A. Yu., Pozdeeva E. O., Tronconi A., Venturi G., Vernov S. Yu. Integrable Cosmological Models in the Einstein and in the Jordan Frames and Bianchi-I Cosmology // Phys. Part. Nucl. 2018. V. 49, No. 1. P. 1; arXiv:1606.04260.
31. *Skenderis K., Townsend P. K.* Hamilton–Jacobi Method for Domain Walls and Cosmologies // Phys. Rev. D. 2006. V. 74. P. 125008; arXiv:hep-th/0609056;
Townsend P. K. Hamilton–Jacobi Mechanics from Pseudo-Supersymmetry // Class. Quant. Grav. 2008. V. 25. P. 045017; arXiv:0710.5178.
32. *Aref'eva I. Ya., Koshelev A. S., Vernov S. Yu.* Exactly Solvable SFT Inspired Phantom Model // Theor. Math. Phys. 2006. V. 148. P. 895; arXiv:astro-ph/0412619.
33. *Bazeia D., Gomes C. B., Losano L., Menezes R.* First-Order Formalism and Dark Energy // Phys. Lett. B. 2006. V. 633. P. 415; arXiv:astro-ph/0512197;
Bazeia D., Losano L., Rosenfeld R. First-Order Formalism for Dust // Eur. Phys. J. C. 2008. V. 55. P. 113; arXiv:astro-ph/0611770.
34. *Chervon S. V., Fomin I. V., Beesham A.* The Method of Generating Functions in Exact Scalar Field Cosmology // Eur. Phys. J. C. 2018. V. 78. P. 301; arXiv:1704.08712;
Harko T., Lobo F. S. N., Mak M. K. Arbitrary Scalar Field and Quintessence Cosmological Models // Eur. Phys. J. C. 2014. V. 74. P. 2784; arXiv:1310.7167.
35. *Kamenshchik A. Yu., Tronconi A., Venturi G., Vernov S. Yu.* Reconstruction of Scalar Potentials in Modified Gravity Models // Phys. Rev. D. 2013. V. 87. P. 063503; arXiv:1211.6272.

36. *Aref'eva I. Ya., Koshelev A. S., Vernov S. Yu.* Crossing the $w = -1$ Barrier in the D3-Brane Dark Energy Model // Phys. Rev. D. 2005. V. 72. P. 064017; arXiv:astro-ph/0507067;
Vernov S. Yu. Construction of Exact Solutions in Two-Field Models // Theor. Math. Phys. 2008. V. 155. P. 544; arXiv:astro-ph/0612487;
Aref'eva I. Ya., Bulatov N. V., Vernov S. Yu. Stable Exact Solutions in Cosmological Models with Two Scalar Fields // Theor. Math. Phys. 2010. V. 163. P. 788; arXiv:0911.5105.
37. *Andrianov A. A., Cannata F., Kamenshchik A. Yu., Regoli D.* Reconstruction of Scalar Potentials in Two-Field Cosmological Models // J. Cosmol. Astropart. Phys. 2008. V. 0802. P. 015; arXiv:0711.4300;
Setare M. R., Sadeghi J. First-Order Formalism for the Quintom Model of Dark Energy // Intern. J. Theor. Phys. 2008. V. 47. P. 3219; arXiv:0805.1117.
38. *Chervon S. V., Fomin I. V., Pozdeeva E. O., Sami M., Vernov S. Yu.* Superpotential Method for Chiral Cosmological Models Connected with Modified Gravity // Phys. Rev. D. 2019. V. 100. P. 063522; arXiv:1904.11264.
39. *Lidsey J. E., Liddle A. R., Kolb E. W., Copeland E. J., Barreiro T., Abney M.* Reconstructing the Inflation Potential: An Overview // Rev. Mod. Phys. 1997. V. 69. P. 373; arXiv:astro-ph/9508078.
40. *Chervon S. V., Fomin I. V.* On Calculation of the Cosmological Parameters in Exact Models of Inflation // Grav. Cosmol. 2008. V. 14. P. 163; arXiv:1704.05378;
Yurov A. V., Yurov V. A., Chervon S. V., Sami M. Potential of Total Energy as Superpotential in Integrable Cosmological Models // Theor. Math. Phys. 2011. V. 166. P. 259;
Vennin V. Horizon-Flow Off-Track for Inflation // Phys. Rev. D. 2014. V. 89. P. 083526; arXiv:1401.2926.
41. *Binetruy P., Kiritsis E., Mabillard J., Pieroni M., Rosset C.* Universality Classes for Models of Inflation // J. Cosmol. Astropart. Phys. 2015. V. 1504. P. 033; arXiv:1407.0820;
Binetruy P., Mabillard J., Pieroni M. Universality in Generalized Models of Inflation // J. Cosmol. Astropart. Phys. 2017. V. 1703. P. 060; arXiv:1611.07019.
42. *Ruzmaikina T. V., Ruzmaikin A. A.* Quadratic Corrections to the Lagrangian Density of the Gravitational Field and the Singularity // Sov. Phys. JETP. 1970. V. 30. P. 372.
43. *Gottlober S., Mucket J. P., Starobinsky A. A.* Confrontation of a Double Inflationary Cosmological Model with Observations // Astrophys. J. 1994. V. 434. P. 417; arXiv: astro-ph/9309049.
44. *de la Cruz-Dombriz A., Elizalde E., Odintsov S. D., Saez-Gomez D.* Spotting Deviations from R^2 Inflation // J. Cosmol. Astropart. Phys. 2016. V. 1605. P. 060; arXiv:1603.05537.
45. *Wang Y. C., Wang T.* Primordial Perturbations Generated by Higgs Field and R^2 Operator // Phys. Rev. D. 2017. V. 96. P. 123506; arXiv:1701.06636;
Ema Y. Higgs Scalaron Mixed Inflation // Phys. Lett. B. 2017. V. 770. P. 403; arXiv:1701.07665;
Ema Y. Dynamical Emergence of Scalaron in Higgs Inflation // J. Cosmol. Astropart. Phys. 2019. V. 1909. P. 027; arXiv:1907.00993.

46. *He M., Starobinsky A. A., Yokoyama J.* Inflation in the Mixed Higgs-R^2 Model // J. Cosmol. Astropart. Phys. 2018. V. 1805. P. 064; arXiv:1804.00409.
47. *Gorbunov D., Tokareva A.* Scalaron the Healer: Removing the Strong-Coupling in the Higgs- and Higgs-Dilaton Inflations // Phys. Lett. B. 2019. V. 788. P. 37; arXiv:1807.02392;
Bezrukov F., Gorbunov D., Shepherd C., Tokareva A. Some Like It Hot: R^2 Heals Higgs Inflation, but Does not Cool It // Phys. Lett. B. 2019. V. 795. P. 657; arXiv:1904.04737.
48. *Karam A., Pappas T., Tamvakis K.* Nonminimal Coleman–Weinberg Inflation with an R^2 Term // J. Cosmol. Astropart. Phys. 2019. V. 1902. P. 006; arXiv:1810.12884.
49. *Paliathanasis A., Leon G., Pan S.* Exact Solutions in Chiral Cosmology // Gen. Rel. Grav. 2019. V. 51, No. 9. P. 106; arXiv:1811.10038;
Dimakis N., Paliathanasis A., Terzis P. A., Christodoulakis T. Cosmological Solutions in Multiscalar Field Theory // Eur. Phys. J. C. 2019. V. 79, No. 7. P. 618; arXiv:1904.09713;
Zubair M., Kousar F., Waheed S. Dynamics of Scalar Potentials in Theory of Gravity // Can. J. Phys. 2019. V. 97, No. 8. P. 880.