ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА
2020. Т. 51. ВЫП. 4. С. 895–911

ОБЫЧНАЯ КВАНТОВАЯ СТАТИСТИКА С ОПИСАНИЕМ КВАНТОВЫХ СОСТОЯНИЙ СИСТЕМЫ ФУНКЦИЯМИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТИ

В. И. Манько [1,2,*], *О. В. Манько* [1,3,**], *В. Н. Чернега* [1,***]

[1] Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, Москва

[2] Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Долгопрудный, Россия

[3] Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана, Москва

Дан обзор нового вероятностного представления квантовых состояний, описываемых обычными функциями распределения вероятности. Найдено обратимое отображение между вероятностным представлением и представлением векторов состояний и операторов плотности в гильбертовых пространствах с использованием введенных операторов, называемых «квантайзером» и «деквантайзером», задающих обратимое отображение операторов квантовых наблюдаемых на функции и произведения операторов на ассоциативное (звездочное) произведение функций. Рассмотрены примеры квантового осциллятора и частицы со спином $1/2$. Получены явно кинетические уравнения для вероятностей, задающих эволюцию состояния квантовых систем, эквивалентные уравнениям Шредингера и фон Неймана.

The review of new probability representation of quantum states, where the states are described by usual probability distribution functions, is presented. The invertable map of the probability distributions onto density operators acting in a Hilbert space is found using the introduced quantizer–dequantizer operators which determine also the invertable map of the operators of quantum observables onto the functions and the product of the operators onto the associative product (star product) of the functions. Examples of quantum oscillator and spin-$1/2$ are considered. The kinetic equations for the probability distributions describing the evolution of quantum system states, which are equivalent to Schrödinger and von Neumann equations, are obtained.

PACS: 05.30.-d; 03.65.Wj

---

*E-mail: mankovi@lebedev.ru

**E-mail: mankoov@lebedev.ru

***E-mail: vchernega@gmail.com

ВВЕДЕНИЕ

В квантовой механике, квантовой теории поля [1] и квантовой статистике состояния физических систем описываются волновыми функциями [2], матрицами плотности [3,4], а также векторами в гильбертовых пространствах [5]. В классической статистической механике состояния систем описываются распределениями вероятности [6] в фазовом пространстве. Эволюция классических состояний описывается уравнением Лиувилля для плотности вероятности $f(q,p,t)$ в фазовом пространстве системы или уравнением Больцмана [7,8]. Эволюция чистых квантовых состояний, идентифицируемых с волновыми функциями систем с гамильтонианом, описывается уравнением Шредингера, а уравнение фон Неймана описывает эволюцию матрицы плотности смешанных состояний. Описания классических состояний функциями распределения вероятности и квантовых состояний волновыми функциями или матрицами плотности существенно различны. Интуитивно описание квантовых состояний требует дополнительной интерпретации с точки зрения соответствия классической картине физических явлений. В связи с этим были предложены другие описания квантовых состояний, например, с помощью распределений квазивероятности в фазовом пространстве систем — функции Вигнера [9], функции Хусими–Кано [10, 11] и Глаубера–Сударшана [12, 13]. Было предложено описание состояний функцией в фазовом пространстве Блохинцевым [14]. Все эти описания квантовых состояний оперируют с функциями на формальном фазовом пространстве системы, но эти функции не являются распределениями вероятностей. Причиной невозможности описать состояние частицы совместной функцией распределения координаты и импульса является соотношение неопределенностей [15–17], поскольку квантовая природа такова, что невозможно одновременно задать (измерить) и координату, и импульс частицы. Поэтому не существует совместная функция распределения этих случайных величин. Однако описать состояние распределением вероятности одной величины, например только координаты, соотношение неопределенностей позволяет. Такое описание было предложено [18, 19] на основе экспериментального подхода к измерению состояния фотона, идентифицируемого с функцией Вигнера [20], с помощью гомодинного детектора, позволяющего определить оптическую томограмму фотона, являющуюся функцией распределения квадратурной компоненты фотона при фиксированном значении фазы локального осциллятора. Известно [21, 22], что с помощью преобразования Радона [23] из оптической томограммы, определенной в проведенных экспериментах, реконструируется функция Вигнера, идентифицируемая с квантовым состоянием. С точки зрения механической модели колебаний электромагнитного поля (состояния фотона) это соответствует колебанию осциллятора. Состояние квантового осциллятора при этом задается распределением вероятности только одной случайной координаты осциллятора, измеряемой в ансамбле систем отсчета в фазовом пространстве. Таким образом, нет противоречий с соотношением неопределенности Гейзенберга, поскольку случайный импульс осциллятора не является аргументом функции распределения вероятности, которая зависит только от случайной координаты и значений параметров системы отсчета, в которой измеряется эта случайная координата.

Цель работы — показать, что состояния квантовых систем могут быть заданы стандартными распределениями вероятности для систем как с непрерывными переменными (осциллятор), так и с дискретными переменными (спин электрона). Это означает, что существуют обратимые отображения операторов плотности на распределения вероятностей. Эти отображения линейны, поэтому линейные уравнения квантовой механики (например, уравнение фон Неймана для оператора плотности [4]) отображаются на кинетические уравнения для распределений вероятностей [18, 24], задающие состояния квантовой системы в вероятностном представлении квантовой механики. Проблема описания квантовых состояний, связанных с распределениями вероятностей, обсуждалась, например, в [25–27] (см. также недавний обзор [28] и ссылки в нем). Относящиеся к этой проблеме аспекты затрагивались в работах [29, 30].

СОСТОЯНИЯ КЛАССИЧЕСКОГО ГАРМОНИЧЕСКОГО ОСЦИЛЛЯТОРА В ТОМОГРАФИЧЕСКОМ ВЕРОЯТНОСТНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ

Чтобы выяснить физический смысл распределения вероятности, задающего состояние квантовой системы, рассмотрим пример состояния классического осциллятора с гамильтонианом $H_{\rm cl} = p^2/2 + q^2/2$ при наличии флуктуаций в рамках классической статистической механики [1]. Состояние осциллятора в любой момент времени описывается совместной функцией распределения вероятности $f(q,p,t) \geqslant 0$ на фазовом пространстве системы, удовлетворяющей условию нормировки $\int f(q,p,t)\,dq\,dp = 1$. Введем новую систему координат в фазовом пространстве системы, используя симплектическое преобразование координаты $q \to X$ и импульса $p \to \mathcal{P}$, задаваемое матрицей вида

$$\begin{pmatrix} X \\ \mathcal{P} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s\cos\theta & s^{-1}\sin\theta \\ -s\sin\theta & s^{-1}\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Смысл этого преобразования заключается в том, что мы меняем сначала масштаб пространственных координат $q \to q' = sq$, $p \to p' = s^{-1}p$, а затем поворачиваем оси абсцисс и ординат $X = q'\cos\theta + p'\sin\theta$, $\mathcal{P} = -q'\sin\theta + p'\cos\theta$. Введем переменные $\mu = s\cos\theta$, $\nu = s^{-1}\sin\theta$. Рассмотрим следующую задачу. Если в момент времени t состояние осциллятора задано совместной функцией распределения $f(q,p,t)$ двух случайных переменных q и p, то какова функция распределения одной случайной переменной координаты $X = \mu q + \nu p$, обозначаемая $w_k(X|\mu,\nu,t)$? Легко убедиться, что эта функция задается преобразованием Радона [23] функции распределения $f(q,p,t)$, а именно:

$$w_k(X|\mu,\nu,t) = \int f(q,p,t)\,\delta(X-\mu q-\nu p)\,dq\,dp. \qquad (2)$$

Функция $w_k(X|\mu,\nu,t)$ называется симплектическим томографическим распределением вероятности или симплектической томограммой. Это преобразование обратимо, и распределение вероятностей двух случайных величин $f(q,p,t)$ восстанавливается, если известна симплектическая томограмма, а именно:

$$f(q,p,t) = \frac{1}{4\pi^2}\int w_k(X|\mu,\nu,t)\,\exp\left[i\,(X-\mu q-\nu p)\right]dX\,d\mu\,d\nu. \qquad (3)$$

Очевидно, что симплектическая томограмма (2) неотрицательна и нормирована: $\int w_k(X|\mu,\nu,t)\,dX = 1$. Переменная X имеет смысл координаты частицы, измеряемой в системе отсчета в фазовом пространстве частицы с повернутыми на угол θ осями координат, при этом перед поворотом произведено преобразование масштаба координаты $q \to sq$ и скорости (импульса) $p \to s^{-1}p$. Можно интерпретировать рассматриваемое преобразование как преобразование в пространстве координат q и скоростей $\dot{q}$, при котором масштаб координаты меняется, а скорость сохраняется. Симплектическая томограмма $w_k(X|\mu,\nu,t)$ классической частицы является условным распределением вероятности координаты X, при задании которого определены параметры μ и ν системы отсчета в фазовом пространстве частицы, в котором эта координата измеряется. По формуле Байеса можно ввести совместную функцию распределения вероятности $w_k(X,\mu,\nu,t)$ трех случайных переменных X, μ, ν, как задающих координату X, так и характеризующих систему отсчета в фазовом пространстве частицы случайных параметров μ и ν. Эта функция может быть представлена формулой

$$w_k(X,\mu,\nu,t) = w_k(X|\mu,\nu,t)\,\mathcal{P}(\mu,\nu), \qquad (4)$$

где $\mathcal{P}(\mu,\nu) \geqslant 0$. Эта функция является функцией распределения двух случайных величин μ и ν, нормированной условием

$$\int \mathcal{P}(\mu,\nu)\,d\mu\,d\nu = 1. \qquad (5)$$

В частности, ее можно задать нормальным распределением вероятности

$$\mathcal{P}_G(\mu,\nu) = \pi^{-1}\,\exp\left(-\mu^2-\nu^2\right). \qquad (6)$$

Функция распределения $f(q,p,t)$ восстанавливается с использованием (4):

$$f(q,p,t) = \frac{1}{4\pi^2} \int w_K(X,\mu,\nu,t)\ \mathcal{P}^{-1}(\mu,\nu) \times \\ \times \exp\left(i(X-\mu q-\nu p)\right) dX\, d\mu\, d\nu. \quad (7)$$

Для классической частицы допустимы функции распределения

$$f(q,p,t) = \delta(q-q_0(t))\,\delta(p-p_0(t)), \quad (8)$$

где $q_0(t)$ и $p_0(t)$ описывают траекторию частицы. Томограмма состояния частицы в классической механике с функцией распределения (8) имеет вид

$$w_k(X|\mu,\nu,t) = \delta(X-\mu q_0(t)-\nu p_0(t)). \quad (9)$$

В (9) $q_0(t)$ и $p_0(t)$ описывают траектории частицы в ее фазовом пространстве. Например, для упоминавшегося классического осциллятора допустимой является симплектическая томограмма

$$w_k(X|\mu,\nu,t) = \delta[X-\mu(A\cos t+B\sin t)-\nu(B\cos t-A\sin t)] \quad (10)$$

с произвольными начальными значениями координаты A и импульса B. Для квантового осциллятора в силу соотношения неопределенности Гейзенберга [15] функции распределения $f(q,p,t)$ не существует. Поэтому для квантового осциллятора не существует томограммы вида (10), связанной с распределением (8) и нарушающей соотношения неопределенностей. Однако распределение (10) зависит только от координаты X и не зависит от импульса $\mathcal{P}$, поэтому возможно существование томограмм, описывающих состояния, не нарушающие соотношение неопределенностей. Ниже рассмотрены такие случаи с учетом процедуры квантования, основанной на методе звездочного произведения функций. Используя частный случай томограммы $w_k(X|\mu,\nu,t)$ при $\mu=\cos\theta$, $\nu=\sin\theta$, получаем распределение вероятностей $w_k(X|\theta,t)$, называемое оптической томограммой. Она задает также симплектическую томограмму благодаря свойству дельта-функции Дирака $\delta(\lambda y)=|\lambda|^{-1}\delta(y)$, что приводит к формуле

$$w_k(X|\mu,\nu,t) = \frac{1}{\sqrt{\mu^2+\nu^2}} w_k\left(X|\theta=\arctan\frac{\nu}{\mu},t\right). \quad (11)$$

Оптическая томограмма состояния классического осциллятора, определяемая формулой (10), имеет вид распределения вероятности

$$w_k(X|\theta,t) = \delta\left\{X-\cos\theta(A\cos t+B\sin t)- \right.\\ \left. -\sin\theta(B\cos t-A\sin t)\right\}. \quad (12)$$

КВАНТОВАНИЕ С ПОМОЩЬЮ ФОРМАЛИЗМА ЗВЕЗДОЧНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КВАНТАЙЗЕРА И ДЕКВАНТАЙЗЕРА

Рассмотрим переход к описанию состояний квантовых систем. Все возможные представления квантовых состояний можно сформулировать, используя процедуру квантования, понимаемую как правило обратимого отображения операторов $\hat{A}$, действующих в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, на функции $f_A(\chi)$, называемые символами операторов $\hat{A}$ и зависящие от набора дискретных или непрерывных переменных $\chi = (\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_N)$, где какие-то переменные χ_k, $k = 1, 2, \ldots, N$ пробегают непрерывный набор, а какие-то — дискретный набор значений. Обратимое отображение задается двумя соотношениями [31]:

$$\hat{A} \to f_A(\chi) = \mathrm{Tr}\,(\hat{A}\hat{U}(\chi)), \tag{13}$$

$$f_A(\chi) \to \hat{A} = \int f_A(\chi)\hat{D}(\chi)\,d\chi. \tag{14}$$

Оператор $\hat{U}(\chi)$ называется деквантайзером, оператор $\hat{D}(\chi)$ — квантайзером. Если часть переменных χ_k дискретна, соответствующий интеграл в (14) заменяется суммой по этим переменным. Деквантайзер и квантайзер $\hat{U}(\chi)$, $\hat{D}(\chi)$ должны удовлетворять тому условию, что для всех операторов $\hat{A}$, действующих в $\mathcal{H}$, существует равенство

$$\int \mathrm{Tr}\,\hat{U}(\chi)\hat{D}(\chi')\,\mathrm{Tr}\,(\hat{U}(\chi')\hat{A})\,d\chi' = \mathrm{Tr}\,(\hat{A}\hat{U}(\chi)). \tag{15}$$

В частном случае может выполняться соотношение $\mathrm{Tr}\,(\hat{U}(\chi)\hat{D}(\chi')) = \delta(\chi - \chi')$. При выполнении равенств (13)–(15) символ произведения операторов $f_{AB}(\chi)$, где $f_{AB}(\chi) = \mathrm{Tr}\,(\hat{A}\hat{B}\hat{U}(\chi))$, задается звездочным произведением символов операторов $\hat{A}$ и $\hat{B}$, т. е.

$$f_{AB}(\chi) = (f_A \star f_B)(\chi) = \int f_A(\chi_1)f_B(\chi_2)K(\chi_1, \chi_2, \chi)\,d\chi_1\,d\chi_2. \tag{16}$$

Произведение операторов ассоциативно, т. е. $(\hat{A}\hat{B})\hat{C} = \hat{A}(\hat{B}\hat{C})$, и звездочное произведение функций $f_A(\chi)$, $f_B(\chi)$ также является ассоциативным, т. е. $((f_A \star f_B) \star f_C)(\chi) = (f_A \star (f_B \star f_C))(\chi)$. Поскольку произведение операторов $\hat{A}$ и $\hat{B}$ в общем случае некоммутативно, звездочное произведение их символов в общем случае также некоммутативно. Подставляя (13) и (14) в (16), получаем ядро звездочного произведения функций, выраженное через квантайзер и деквантайзер:

$$\mathcal{K}(\chi_1, \chi_2, \chi_3) = \mathrm{Tr}\,(\hat{D}(\chi_1)\hat{D}(\chi_2)\hat{U}(\chi_3)). \tag{17}$$

Если взять два набора операторов $\hat{U}_1(\chi)$, $\hat{D}_1(\chi)$ и $\hat{U}_2(\xi)$, $\hat{D}_2(\xi)$, являющихся квантайзерами и деквантайзерами, удовлетворяющими (13)–(15), то символы операторов — функции $f_A^{(1)}(\chi)$ и $f_A^{(2)}(\xi)$, где $\chi = (\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_N)$, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_M)$, — связаны интегральным соотношением

$$f_A^{(1)}(\chi) = \int K^{(1,2)}(\chi, \xi) f_A^{(2)}(\xi)\, d\xi. \tag{18}$$

Ядро интегрального преобразования символов операторов $\hat{A}$ задается выражением

$$\mathcal{K}^{(1,2)}(\chi, \xi) = \mathrm{Tr}\,(\hat{U}_1(\chi)\hat{D}_2(\xi)). \tag{19}$$

Все имеющиеся представления операторов плотности квантовых состояний и наблюдаемых, задаваемых эрмитовыми операторами, действующими в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, описываются своими парами квантайзеров и деквантайзеров [31, 32].

СИМПЛЕКТИЧЕСКОЕ ТОМОГРАФИЧЕСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ КВАНТОВЫХ СОСТОЯНИЙ НА ПРИМЕРЕ ОСЦИЛЛЯТОРА

Как показано в работе [21, 22], преобразование Радона [23] функции Вигнера состояния фотона (оптическая томограмма $w(X|\theta)$, определенная гомодинным детектированием [20, 31–33]), является функцией распределения вероятности случайной величины X, называемой квадратурой фотона. Оптическая томограмма зависит также от угловой переменной θ, называемой фазой локального осциллятора. Преобразование Радона функции Вигнера задает выражение для оптической томограммы [21, 22]. При этом, если рассмотреть чистое состояние $|\psi\rangle$ с волновой функцией $\psi(y)$, то оптическая томограмма выражается через волновую функцию следующим образом:

$$w_\psi(X|\theta) = \frac{1}{2\pi|\sin\theta|} \left| \int \psi(y) \exp\left(\frac{i \cot\theta y^2}{2} - \frac{iXy}{\sin\theta}\right) dy \right|^2. \tag{20}$$

Томограмма (20) неотрицательна и нормирована при всех значениях фазы θ локального осциллятора. Так как оператор плотности смешанного состояния является выпуклой суммой операторов плотности чистых состояний, условия неотрицательности и нормировки для томограммы смешанного состояния также выполняются. Таким образом, оптическая томограмма является условной вероятностью квадратуры X при заданном параметре θ. Преобразование Радона обратимо, поэтому знание оптической томограммы позволило реконструировать функцию Вигнера фотона, идентифицируемую с его квантовым состоянием. В работе [22] томограмма рассматривается как метод нахождения квантового состояния, отождествленного с функцией Вигнера. В работе [18] было введено понятие симплектического распределения вероятности и предложено идентифицировать квантовые состояния с этим распределением, а также с оптическим томографическим распределением, считая их первичными объектами.

Определим деквантайзер выражением $\hat{U}(\chi) \equiv \hat{U}(X, \mu, \nu)$, где действительные переменные $0 < X, \mu, \nu < \infty$ задают оператор

$$\hat{U}(X, \mu, \nu) = \delta(X\hat{1} - \mu\hat{q} - \nu\hat{p}). \tag{21}$$

Символ оператора плотности $\hat{\rho}$, называемый симплектической томограммой, например состояния осциллятора, имеет вид

$$w(X|\mu, \nu) = \mathrm{Tr}\,\hat{\rho}\delta(X\hat{1} - \mu\hat{q} - \nu\hat{p}). \tag{22}$$

Квантайзер $\hat{D}(\chi) \equiv \hat{D}(X, \mu, \nu)$ зададим выражением

$$\hat{D}(X, \mu, \nu) = \frac{1}{2\pi} \exp\left[i(X\hat{1} - \mu\hat{q} - \nu\hat{p})\right]. \tag{23}$$

Из свойств дельта-функции следует соотношение нормировки. Поскольку $\mathrm{Tr}\,\hat{\rho} = 1$, то

$$\int w(X|\mu, \nu)\, dX = 1 \tag{24}$$

при любых значениях параметров μ и ν. Оптическая томограмма является частным случаем симплектической томограммы при значении параметров $\mu = \cos\theta$, $\nu = \sin\theta$. Также для чистых состояний $|\psi\rangle$, как и в случае оптической томограммы, можно выразить симплектическую томограмму через волновую функцию $\psi(y)$ [34]:

$$w_\psi(X|\mu, \nu) = \frac{1}{2\pi|\nu|} \left| \int \psi(y) \exp\left(\frac{i\mu y^2}{2\nu} - \frac{iXy}{\nu}\right) dy \right|^2. \tag{25}$$

Из этого выражения следует неотрицательность, а из свойств дельта-функции Дирака вытекает нормированность симплектической томограммы. Аналогичные свойства справедливы и для выпуклой суммы операторов плотности, следовательно, симплектическая томограмма $w(X|\mu, \nu)$ любого смешанного состояния также неотрицательна и нормирована. Хотя симплектическая томограмма зависит от трех переменных X, μ, ν, а оптическая — от двух переменных X, θ, они выражаются, как и в классическом случае, через друг друга (11).

Рассмотрим пример гармонического осциллятора с гамильтонианом $\hat{H} = p^2/2 + \hat{q}^2/2 = \hat{a}^\dagger \hat{a} + 1/2$. Для когерентного состояния $|\alpha\rangle$, являющегося собственным нормированным состоянием оператора уничтожения $\hat{a}$, т. е. $\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$ с комплексным собственным значением $\alpha = \operatorname{Re}\alpha + i\operatorname{Im}\alpha$, получаем симплектическую томограмму в виде нормального распределения случайной переменной X, зависящего от параметров μ и ν,

$$w_\alpha(X|\mu,\nu) = [\pi(\mu^2+\nu^2)]^{-1/2} \exp\left[-\frac{(X-\bar{X})^2}{\mu^2+\nu^2}\right] \tag{26}$$

со средним значением $\bar{X} = \mu\sqrt{2}\operatorname{Re}\alpha + \nu\sqrt{2}\operatorname{Im}\alpha$ и дисперсией $\sigma = (\mu^2+\nu^2)/2$. Для фоковского состояния $|n\rangle$ томограмма имеет вид распределения

$$w_n(X|\mu,\nu) = \left[\pi\left(\mu^2+\nu^2\right)\right]^{-1/2}\left[2^n n!\right]^{-1} \times \\ \times \exp\left[-\frac{X^2}{\mu^2+\nu^2}\right] H_n^2\left(\frac{X}{\sqrt{\mu^2+\nu^2}}\right), \tag{27}$$

где H_n — полином Эрмита. Оптическая томограмма когерентного состояния $|\alpha\rangle$ получается из (27) подстановкой $\mu = \cos\theta$ и $\nu = \sin\theta$ и имеет вид нормального распределения. Оптическая томограмма фоковского состояния $|n\rangle$ не зависит от фазы локального осциллятора и задается распределением вероятности случайной величины X, а именно $w_n(X|\theta) = \pi^{-1/2}(2^n n!)^{-1}\times \exp(-X^2)H_n^2(X)$.

ЭВОЛЮЦИЯ КВАНТОВЫХ СОСТОЯНИЙ В ВЕРОЯТНОСТНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ

Оператор плотности $\hat{\rho}(t)$ квантового состояния при описании систем с гамильтонианом $\hat{H}$ удовлетворяет уравнению фон Неймана

$$\frac{\partial\hat{\rho}(t)}{\partial t} + i[\hat{H},\hat{\rho}(t)] = 0. \tag{28}$$

При этом оператор плотности $\hat{\rho}(t)$ может быть выражен через оператор плотности $\hat{\rho}(0)$ и унитарный оператор эволюции $\hat{u}(t)$, задающий вектор $|\psi(t)\rangle = \hat{u}(t)|\psi(0)\rangle$, в следующем виде

$$\hat{\rho}(t) = \hat{u}(t)\,\rho(0)\,\hat{u}^\dagger(t). \tag{29}$$

При этом операторы координаты $\hat{q}_H(t)$ и импульса $\hat{p}_H(t)$ в представлении Гейзенберга могут быть также выражены через операторы координаты $\hat{q}$ и импульса $\hat{p}$ в представлении Шредингера $\hat{q}_H(t) = \hat{u}^\dagger(t)\hat{q}\hat{u}(t)$, $\hat{p}_H(t) = \hat{u}^\dagger(t)\hat{p}\hat{u}(t)$.

Оператор эволюции $\hat{u}(t)$ удовлетворяет уравнению Шредингера

$$i\frac{\partial \hat{u}(t)}{\partial t} = \hat{H}\hat{u}(t), \quad \hat{u}(0) = \hat{1}. \tag{30}$$

Используя определение для симплектической томограммы осциллятора (22), получаем значение симплектического томографического распределения вероятности в момент времени t в виде

$$w(X|\mu,\nu,t) = \mathrm{Tr}\,[\hat{u}(t)\hat{\rho}(0)\hat{u}^\dagger(t)\,\delta(X\hat{1} - \mu\hat{q} - \nu\hat{p})]. \tag{31}$$

Используя свойства операции взятия следа от произведения операторов в (31), получаем для распределения вероятностей выражение

$$w(X|\mu,\nu,t) = \mathrm{Tr}\,[\hat{\rho}(0)[\hat{u}^\dagger(t)\,\delta(X\hat{1} - \mu\hat{q} - \nu\hat{p})\hat{u}(t)]]. \tag{32}$$

Таким образом, можно выразить это распределение вероятностей, используя операторы координаты и импульса в представлении Гейзенберга

$$w(X|\mu,\nu,t) = \mathrm{Tr}\,[\hat{\rho}(0)\,\delta(X\hat{1} - \mu\hat{q}_H(t) - \nu\hat{p}_H(t))]. \tag{33}$$

При $t = 0$ имеем томограмму $w(X|\mu,\nu,t=0)$, где $\hat{q}_H(0) = \hat{q}$, $\hat{p}_H(0) = \hat{p}$. Для гармонического осциллятора $(m = \omega = 1)$

$$\hat{q}_H(t) = \hat{q}\,\cos\,t + \hat{p}\,\sin\,t, \quad \hat{p}_H(t) = -\hat{q}\,\sin\,t + \hat{p}\,\cos\,t. \tag{34}$$

Поэтому томографическое распределение вероятностей, равное при $t = 0$ $w_{\mathrm{in}}(X|\mu,\nu)$, эволюционирует следующим образом:

$$w(X|\mu,\nu,t) = w_{\mathrm{in}}(X|\mu_H(t),\nu_H(t)). \tag{35}$$

Благодаря соотношению (34) получаем эволюцию томограмм состояния осциллятора, зная начальные значения функции распределения при $t = 0$, а именно:

$$\begin{aligned} w(X|\mu,\nu,t) = w_{\mathrm{in}}(X|\mu_H(t) = \\ = \mu\,\cos\,t - \nu\,\sin\,t, \nu_H(t) = \mu\,\sin\,t + \nu\,\cos\,t). \end{aligned} \tag{36}$$

Например, томографическое распределение вероятностей $w_n(X|\mu,\nu,t)$ фоковского стационарного состояния $|n\rangle$ дается соотношением (27). Соотношение (27) соответствует условию

$$\hat{u}^\dagger(t)|n\rangle\langle n|\hat{u}(t) = |n\rangle\langle n|, \quad n = 0,1,2,\ldots, \tag{37}$$

выполняющемуся, поскольку оператор эволюции осциллятора $\hat{u}(t) = \exp\left[-it(\hat{a}^\dagger\hat{a} + 1/2)\right]$ коммутирует с оператором $|n\rangle\langle n|$. Оптическая томограмма, заданная в начальный момент как функция $w_{\mathrm{in}}(X|\theta)$, превращается в момент времени t в функцию вида

$$w(X|t) = w_{\mathrm{in}}(X|(\theta + t)). \tag{38}$$

Соотношения неопределенностей Гейзенберга накладывают интегральные условия на томограмму квантовых состояний. Для оптической томограммы $w(X|\theta)$ имеем неравенство

$$\left\{\left[\int X^2 w(X|\theta)\,dX\right] - \left[\int X w(X|\theta)\,dX\right]^2\right\} \times \\ \times \left\{\left[\int X^2 w\left(X|\theta + \frac{\pi}{2}\right)dX\right] - \left[\int X w\left(X|\theta + \frac{\pi}{2}\right)\,dX\right]^2\right\} \geqslant \frac{1}{4}. \tag{39}$$

Этому условию не удовлетворяет томограмма (9) состояния классического осциллятора, нарушающего соотношения неопределенностей Гейзенберга. Поскольку в эксперименте [20] по определению функции Вигнера состояния фотонов измеряется оптическая томограмма $w(X|\theta)$, неравенство (39) может быть непосредственно проверено.

УРАВНЕНИЕ ЭВОЛЮЦИИ ДЛЯ СИМВОЛА ОПЕРАТОРА ПЛОТНОСТИ В СХЕМАХ КВАНТОВАНИЯ С РАЗЛИЧНЫМИ ДЕКВАНТАЙЗЕРАМИ И КВАНТАЙЗЕРАМИ

В данном разделе рассмотрим уравнение эволюции квантовых состояний с использованием квантайзера и деквантайзера [24] и кинетические уравнения для распределения вероятности, задающего квантовое состояние. Уравнение фон Неймана для унитарной эволюции оператора плотности задается гамильтонианом $\hat{H}(t)$, действующим в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, и оно имеет вид (28). Умножим это операторное уравнение на деквантайзер $\hat{U}(\chi)$ и возьмем след от полученного операторного соотношения. Получаем линейное интегральное уравнение для символа оператора плотности $f_\rho(\chi, t)$ вида

$$\frac{\partial}{\partial t} f_\rho(\chi, t) + \int \mathcal{K}_H(\chi, \chi', t) f_\rho(\chi', t)\,d\chi' = 0. \tag{40}$$

Ядро этого уравнения задается гамильтонианом, а также квантайзером $\hat{D}(\chi')$ и деквантайзером $\hat{U}(\chi)$ и имеет вид

$$\mathcal{K}_H(\chi, \chi', t) = i\,\mathrm{Tr}\left([\hat{U}(\chi), \hat{H}]\hat{D}(\chi')\right) \\ \text{или}\ \ \mathcal{K}_H(\chi, \chi', t) = i\,\mathrm{Tr}\left([\hat{D}(\chi'), \hat{U}(\chi)]\hat{H}\right). \tag{41}$$

Если используется вероятностное представление квантовых состояний, то уравнение (40) является кинетическим уравнением для распределения вероятности $f_\rho(\chi, t)$, задающей квантовое состояние. Например, для симплектического томографического распределения вероятности ядро интегрального кинетического уравнения, описывающего эволюцию квантового состояния, задаваемого томограммой $w(X|\mu,\nu,t) = f_\rho(\chi,t)$, где $\chi = (X,\mu,\nu)$, представлено выражением

$$\mathcal{K}_H(X,\mu,\nu,t,X',\mu',\nu',t) = \\ = \frac{i}{2\pi}\operatorname{Tr}\left\{\left[\delta(X\hat{1}-\mu\hat{q}-\nu\hat{p}), \hat{H}(t)\right]\exp\left(i(X'\hat{1}-\mu'\hat{q}-\nu'\hat{p})\right)\right\} = \\ = \frac{i}{2\pi}\operatorname{Tr}\left\{\hat{H}(t)\left[\exp\left(i(X'\hat{1}-\mu'\hat{q}-\nu'\hat{p})\right), \delta(X\hat{1}-\mu\hat{q}-\nu\hat{p})\right]\right\}. \quad (42)$$

Таким образом, кинетическое уравнение для эволюции квантового состояния — распределения вероятностей $w(X|\mu,\nu,t)$ — имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t}w(X|\mu,\nu,t) + \int \mathcal{K}_H(X,\mu,\nu,X',\mu',\nu',t)\times \\ \times w(X'|\mu',\nu',t)\,dX'\,d\mu'\,d\nu' = 0. \quad (43)$$

В случае $\hat{H} = \hat{q}^2/2 + V(\hat{q})$ ядро интегрального оператора, задающего кинетическое уравнение эволюции для распределения вероятности $w(X|\mu,\nu,t)$, дано соотношением

$$\mathcal{K}(X,\mu,\nu,X',\mu',\nu',t) = \frac{i}{2\pi}\int dx\,dx'\left[-\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}\delta(x-x') + \right. \\ \left. + V(x',t)\delta(x-x')\right]\mathcal{O}_{x'x}(X,\mu,\nu,X',\mu',\nu',t),$$

$$\mathcal{O}_{x'x}(X,\mu,\nu,X',\mu',\nu',t) = \\ = \langle x'|\left[\exp\left(iX' - i\mu'\hat{q} - i\nu'\hat{p}\right), \delta(X\hat{1}-\mu\hat{q}-\nu\hat{p})\right]|x\rangle. \quad (44)$$

Выразим вероятность $P_{(1)}^{(2)} = \operatorname{Tr}(\hat{\rho}_1\hat{\rho}_2)$, получаемую по правилу Борна, через квантайзер и деквантайзер. Имеем

$$P_{(1)}^{(2)} = \int f_{\rho_1}(\chi_1) f_{\rho_2}(\chi_2)\operatorname{Tr}(\hat{D}(\chi_1)\hat{D}(\chi_2))\,d\chi_1\,d\chi_2. \quad (45)$$

В случае симплектического вероятностного представления квантового состояния получаем вероятность в виде

$$P_{(1)}^{(2)} = \frac{1}{2\pi}\int w_1(X|\mu,\nu)w_2(Y|-\mu,-\nu)\,\mathrm{e}^{i(X+Y)}\,dX\,dY\,d\mu\,d\nu. \quad (46)$$

Для всех чистых состояний $\hat{\rho}_{\psi}^{2} = \hat{\rho}_{\psi}$, и томограмма удовлетворяет условию

$$\frac{1}{2\pi}\int w_{\psi}(X|\mu,\nu)w_{\psi}(Y|-\mu,-\nu)\,\mathrm{e}^{i(X+Y)}\,dX\,dY\,d\mu\,d\nu = 1. \tag{47}$$

При заданном гамильтониане $\hat{H}$ стационарные состояния $\hat{\rho}_E$, отвечающие заданной энергии E, удовлетворяют условию $\partial\hat{\rho}_E/\partial t = 0$ и $\hat{H}\hat{\rho}_E = \hat{\rho}_E\hat{H}$. Символ $f_{\hat{\rho}_E}(\chi)$ оператора $\hat{\rho}_E$ удовлетворяет интегральному матричному уравнению

$$\int f_{\rho_E}(\chi)[\hat{H},\hat{D}(\chi)]\,d\chi = 0. \tag{48}$$

Уравнение (48), записанное через символы гамильтониана, оператора плотности и ядро звездочного произведения символов операторов, имеет вид

$$\int f_H(\chi)f_{\rho_E}(\chi_1)f_{\rho_E}(\chi_2)\,\mathrm{Tr}\,([\hat{D}(\chi_1),\hat{D}(\chi_2)]\,\hat{U}(\chi)) = 0. \tag{49}$$

В случае симплектического вероятностного представления получаем уравнение для томограммы $w_E(X|\mu,\nu)$ состояния с заданной энергией

$$\int w_E(X,\mu,\nu)[\hat{H},\,\exp\left(i(X\hat{1}-\mu\hat{q}-\nu\hat{p})\right)]\,d\chi\,d\mu\,d\nu = 0. \tag{50}$$

Для гармонического осциллятора $\hat{H} = \hat{a}^{\dagger}\hat{a} + 1/2$ томограммы (27) удовлетворяют уравнению (50). Уравнение (50) приводится к виду

$$\begin{aligned}\int w_E(X_1|\mu_1,\nu_1)\,w_H(X_2|\mu_2,\nu_2)[\mathcal{K}(X_1,\mu_1,\nu_1,X_2,\mu_2,\nu_2) - \\ - \mathcal{K}(X_2,\mu_2,\nu_2,X_1,\mu_1,\nu_1)]\,dX_1\,dX_2\,d\mu_1\,d\mu_2\,d\nu_1\,d\nu_2 = 0,\end{aligned} \tag{51}$$

где ядро звездочного произведения томографических символов операторов найдено в [31].

ВЕРОЯТНОСТНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СОСТОЯНИЙ КУБИТА (СПИН $1/2$)

Рассмотрим вероятностное представление состояний систем с дискретными переменными на примере спина $1/2$. Гильбертово пространство является двумерным, и для матриц операторов, действующих в этом пространстве, рассмотрим четыре матрицы (деквантайзеры) [35]

$$\begin{aligned} &u(1) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \; u(2) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}, \\ &u(3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad u(4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{52}$$

и четыре матрицы (квантайзеры)

$$D(1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad D(2) = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},$$
$$D(3) = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{-1+i}{2} \\ \dfrac{-1-i}{2} & 0 \end{pmatrix}, \; D(4) = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{-1+i}{2} \\ \dfrac{-1-i}{2} & 1 \end{pmatrix}. \tag{53}$$

Можно проверить, что матрица плотности $\rho = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{pmatrix}$ такая, что $\rho = \rho^\dagger$, $\operatorname{Tr}\rho = 1$, $0 \leqslant \rho_{11}, \rho_{22} \leqslant 1$, может быть представлена в виде [36–39]

$$\rho = \begin{pmatrix} p_3 & p_1 - 1/2 - i(p_2 - 1/2) \\ p_1 - 1/2 + i(p_2 - 1/2) & 1 - p_3 \end{pmatrix}. \tag{54}$$

Здесь $p_j = \operatorname{Tr}\rho(u(j))$, $j = 1, 2, 3$, $1 - p_3 = \operatorname{Tr}\rho(u(4))$. Кроме того, $\rho = \sum\limits_{j=1}^{4} (\operatorname{Tr}\rho u(j))D(j)$. Физический смысл параметров p_1, p_2, p_3 заключается в том, что в состоянии с матрицей плотности ρ согласно правилу Борна они являются вероятностями проекций спина $m = +1/2$ на направления x, y, z соответственно. Действительно, матрицы $u(1)$, $u(2)$, $u(3)$ являются матрицами плотности чистых состояний с векторами состояний

$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad |\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \quad |\psi_3\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{55}$$

Эти состояния являются собственными векторами операторов проекций спина на направления x, y, z, задаваемых матрицами Паули $\sigma_x = D(1)$, $\sigma_y = D(2)$, $\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ с собственными значениями $m = +1/2$. Согласно правилу Борна числа p_1, p_2, p_3 имеют физический смысл соответствующих вероятностей. Формула (54) непосредственно проверяется. Поэтому операторы $U(j)$, $D(j)$, $j = 1, 2, 3, 4$, являются деквантайзером и квантайзером для любой матрицы наблюдаемой. Таким образом, состояние частицы со спином $1/2$ может быть полностью задано тремя распределениями вероятности $(p_1, 1 - p_1)$, $(p_2, 1 - p_2)$, $(p_3, 1 - p_3)$ проекций спина $m = \pm 1/2$ на направления x, y и z соответственно. В чистом состоянии с матрицей плотности ρ_ψ такой, что $\rho_\psi^2 = \rho_\psi$, вероятности p_1, p_2, p_3 удовлетворяют условию

$$\sum_{j=1}^{3} \left(p_j - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}. \tag{56}$$

Эволюция матрицы плотности ρ, описываемая уравнением фон Неймана

$$\begin{pmatrix} \dot{\rho}_{11} & \dot{\rho}_{12} \\ \dot{\rho}_{21} & \dot{\rho}_{22} \end{pmatrix} + i\left[\begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{pmatrix}\right] = 0, \tag{57}$$

при использовании (54) приводит к линейному кинетическому уравнению для вероятностей $p_1(t)$, $p_2(t)$, $p_3(t)$, рассматриваемых как компоненты трехмерного вектора $\mathbf{p}(t)$, а именно $d\mathbf{p}(t)/dt = M\mathbf{p}(t) + \Gamma$. Здесь матрица M и вектор Γ имеют вид

$$M = \begin{pmatrix} 0 & (H_{22} - H_{11}) & -2\,\mathrm{Im}\,H_{12} \\ H_{11} - H_{22} & 0 & -2\,\mathrm{Re}\,H_{12} \\ 2\,\mathrm{Im}\,H_{12} & 2\,\mathrm{Re}\,H_{12} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \dfrac{H_{11} - H_{22}}{2} + \mathrm{Im}\,H_{12} \\ \dfrac{H_{22} - H_{11}}{2} + \mathrm{Re}\,H_{12} \\ -\mathrm{Im}\,H_{12} - \mathrm{Re}\,H_{12} \end{pmatrix}. \tag{58}$$

Таким образом, квантовое уравнение эволюции фон Неймана эквивалентно кинетическому уравнению для вероятностей дихотомных классически подобных наблюдаемых.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Отметим основные результаты работы. Мы представили обзор нового вероятностного представления квантовой механики. В этом представлении состояние квантовой системы описывается распределениями вероятности, подчиняющимися кинетическим уравнениям. Это представление полностью эквивалентно другим представлениям с использованием векторов состояний, принадлежащих гильбертову пространству, и операторов плотности, действующих в гильбертовом пространстве. Эта эквивалентность связана с существованием отображений операторов плотности на распределения вероятности с помощью квантайзеров и деквантайзеров, сопоставляющих операторам их символы — функции. Существуют квантайзеры и деквантайзеры, отображающие операторы плотности на квазираспределения типа функции Вигнера. Однако, как показано в работе, существуют отображения, сопоставляющие операторам плотности обычные функции распределения вероятности. Подобная конструкция может быть распространена на развитые в работах Н. Н. Боголюбова [1, 7, 8] квантовую статистику и квантовую теорию поля.

Авторы посвящают данную статью памяти академика Н. Н. Боголюбова, на чьей кафедре на физическом факультете МГУ они учились и которую закончили.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bogolyubov N. N., Shirkov D. V.* Quantum Fields. Benjamin–Cummings Publ. Co., 1982.
2. *Schrödinger E.* Der stetige Übergang von der Mikro-zur Makromechanik // Naturwissenchaften. 1926. V. 14. P. 664.
3. *Landau L.* Das Dämpfungsproblem in der Wellenmechanik // Z. Phys. 1927. V. 45. P. 430–441.
4. *Neumann J.* Wahrscheinlichkeitstheoretischer Aufbau der Quantenmechanik // Gött. Nach. 1927. V. 1927. P. 245–272.
5. *Dirac P. A. M.* The Principles of Quantum Mechanics. Clarendon Press: Oxford, UK, 1981.
6. *Kolmogoroff A.* Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Ergebnisse der Mathematik und Ihrer Grenzgebiete. Berlin; Heidelberg: Springer, 1933.
7. *Bogoliubov N. N.* Microscopic Solutions of the Boltzmann–Enskog Equation in the Kinetic Theory of Hard Spheres // Theor. Math. Phys. 1975. V. 24, No. 2. P. 804–807.
8. *Bogoliubov N. N.* On the Theory of Superfluidity // J. Phys. (USSR). 1947. V. XI, No. 1. P. 23–32.
9. *Wigner E.* On the Quantum Correction for Thermodynamic Equilibrium // Phys. Rev. 1932. V. 40. P. 749–759.
10. *Husimi K.* Some Formal Properties of the Density Matrix // Proc. Phys. Math. Soc. Jpn. 1940. V. 22. P. 264–314.
11. *Kano Y.* A New Phase-Space Distribution Function in the Statistical Theory of the Electromagnetic Field // J. Math. Phys. 1965. V. 6. P. 1913–1915.
12. *Glauber R. J.* Photon Correlations // Phys. Rev. Lett. 1963. V. 10. P. 84–86.
13. *Sudarshan E. C. G.* Equivalence of Semiclassical and Quantum Mechanical Descriptions of Statistical Light Beams // Ibid. P. 277–279.
14. *Blokhintsev D. I.* Quantum Mechanics // J. Phys. (USSR). 1940. V. 2. P. 71.
15. *Heisenberg W.* Über den Anschaulichen Inhalt der Quantentheoretischen Kinematik und Mechanik // Z. Phys. 1927. V. 43. P. 172–198.
16. *Schrödinger E.* Zum Heisenbergschen Unscharfeprinzip // Ber. Kgl. Akad. Wiss. Berlin, 1930. P. 296–303.
17. *Robertson H. P.* A General Formulation of the Uncertainty Principle and Its Classical Interpretation // Phys. Rev. A. 1930. V. 35, No. 5. P. 667.
18. *Mancini S., Man'ko V. I., Tombesi P.* Symplectic Tomography as Classical Approach to Quantum Systems // Phys. Lett. A. 1996. V. 213. P. 1–6.
19. *Man'ko O. V., Man'ko V. I.* Quantum States in Probability Representation and Tomography // J. Russ. Laser Res. 1997. V. 18. P. 407–444.
20. *Smithey D. T., Beck M., Raymer M. G., Faridani A.* Measurement of the Wigner Distribution and the Density Matrix of a Light Mode Using Optical Homodyne Tomography: Application to Squeezed States and the Vacuum // Phys. Rev. Lett. 1993. V. 70. P. 1244–1247.
21. *Vogel K., Risken H.* Determination of Quasiprobability Distributions in Terms of Probability Distributions for the Rotated Quadrature Phase // Phys. Rev. A. 1989. V. 40. P. 2847–2849.

22. *Bertrand J., Bertrand P.* A Tomographic Approach to Wigner's Function // Found. Phys. 1989. V. 17. P. 397–405.
23. *Radon J.* Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte Längs Gewisser Mannigfaltigkeiten // Berichte Sächsische Akad. der Wissenschaften. Leipzig, 1917. V. 29. P. 262–277.
24. *Korennoy Ya. A., Man'ko V. I.* Gauge Transformation of Quantum States in Probability Representation // J. Phys. A: Math. Theor. 2017. V. 50. P. 155302.
25. *Wootters W. K.* Quantum Mechanics without Probability Amplitudes // Found. Phys. 1986. V. 16. P. 391–405.
26. *Mielnik B.* Geometry of Quantum States // Commun. Math. Phys. 1968. V. 9. P. 55–80.
27. *Koopman B. O.* On Distributions Admitting a Sufficient Statistics // Trans. Am. Math. Soc. 1936. V. 39. P. 399–409.
28. *Porta Mana P.* Quantum Theory within the Probability Calculus: A There-You-Go Theorem and Partially Exchangeable Models. arXiv:1803.02263v2. 2018.
29. *Khrennikov A., Alodjants A. A.* Classical (Local and Contextual) Probability Model for Bohm–Bell Type Experiments: No-Signaling as Independence of Random Variables // Entropy. 2019. V. 21. P. 157.
30. *Foukzon J., Potapov A. A., Menkova E., Podosenov S. A.* A New Quantum Mechanical Formalism Based on the Probability Representation of Quantum States. arXiv:1612.0298. 2016.
31. *Man'ko O. V., Man'ko V. I., Marmo G.* Alternative Commutation Relations, Star Products and Tomography // J. Phys. A: Math. Gen. 2002. V. 35. P. 699–719.
32. *Man'ko O. V., Man'ko V. I., Marmo G., Vitale P.* Star Products, Duality and Double Lie Algebras // Phys. Lett. A. 2007. V. 360. P. 522–532.
33. *Chernega V. N., Belolipetskiy S. N., Man'ko O. V., Man'ko V. I.* Probability Representation of Quantum Mechanics and Star-Product Quantization // J. Phys. Conf. Ser. 2019. V. 1348. P. 012101.
34. *Man'ko V. I., Mendes V.* Non-Commutative Time-Frequency Tomography // Phys. Lett. A. 1999. V. 263. P. 53.
35. *Adam P., Andreev V. A., Man'ko M. A., Mechler M., Man'ko V. I.* Star Product Formalism for Probability and Mean Value Representations of Qudits. arXiv:1912.06893. 2019.
36. *Man'ko V. I., Marmo G., Ventriglia F., Vitale P.* Metric on the Space of Quantum States from Relative Entropy. Tomographic Reconstruction // J. Phys. A: Math. Gen. 2017. V. 50. P. 335302.
37. *Chernega V. N., Man'ko O. V., Man'ko V. I.* Triangle Geometry of the Qubit State in the Probability Representation Expressed in Terms of the Triada of Malevich's Squares // J. Russ. Laser Res. 2017. V. 38. P. 141–149.
38. *Chernega V. N., Man'ko O. V.* Qubits and Two-Level Atom States in Representation of Malevich's Squares // Eur. Phys. J. Web Conf. 2019. V. 220. P. 03006.
39. *Man'ko O. V., Chernega V. N.* God Plays Coins, or Superposition Principle for Quantum States in Probability Representation of Quantum Mechanics // Ibid. P. 01008.