*ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА*
*2020. Т. 51. ВЫП. 4. С. 933–943*

# О ДОКАЗАТЕЛЬСТВЕ СУЩЕСТВОВАНИЯ МИКРОСКОПИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ КИНЕТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ БОЛЬЦМАНА–ЭНСКОГА

*А. С. Трушечкин* *

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва

Рассматривается проблема придания строгого смысла так называемым микроскопическим решениям кинетического уравнения Больцмана–Энскога, открытых Н. Н. Боголюбовым, которые имеют вид сумм дельта-функций и соответствуют обратимой динамике конечного числа частиц. Однако непосредственная подстановка дельта-функций в уравнение формально некорректна. Предлагается регуляризация интеграла столкновений, при которой подстановка в него дельта-функций становится возможной.

Problem of rigorous justification of microscopic solutions of the Boltzmann–Enskog kinetic equation is under consideration. These solutions were discovered by N. N. Bogolyubov. They have a form of the sum of delta functions, but their direct substitution into the equation is formally incorrect. We introduce a regularization of the collision integral which makes such a substitution possible.

PACS: 05.20.-y; 05.20.Dd

## ВВЕДЕНИЕ

В 1975 г. Николаем Николаевичем Боголюбовым было открыто, что кинетическое уравнение Больцмана–Энскога, описывающее динамику газа из твердых шаров, имеет решения в виде сумм конечного числа дельта-функций, соответствующих динамике конечного числа твердых шаров [1] (см. также [2]). Таким образом, данное кинетическое уравнение, которое, как считалось, описывает динамику газа на статистическом уровне, в терминах функции плотности содержит и решения, соответствующие точной динамике конечного числа частиц. Поскольку динамика отдельных частиц называется микроскопической (в противоположность макроскопической динамике газа как целого,

*E-mail: trushechkin@mi-ras.ru

описываемого кинетическими и гидродинамическими уравнениями), эти решения были названы Н. Н. Боголюбовым микроскопическими. Также распространено название соответствующих решений как «решения в виде эмпирических мер» [3–5]. Известно, что микроскопическими решениями обладает также кинетическое уравнение Власова [6] (см. также [7]).

Этот факт об уравнении Больцмана–Энскога становится еще более удивительным, если учесть, что микроскопическая динамика обратима по времени. Он означает, что уравнение Больцмана–Энскога, описывающее необратимую динамику газа, содержит также и решения, соответствующие обратимой динамике. Обратимость или необратимость динамики, описываемой данным уравнением, оказывается зависимой от рассматриваемого класса решений: решения в виде интегрируемых функций плотности необратимы, тогда как решения в виде сумм дельта-функций обратимы.

Однако доказательство существования микроскопических решений у уравнения Больцмана–Энскога выполнено Н. Н. Боголюбовым на «физическом» уровне строгости. Непосредственная подстановка дельта-функций в интеграл столкновения уравнения Больцмана–Энскога приводит к формально некорректным произведениям дельта-функций. В серии работ [8–12] предлагаются различные способы придания строгого смысла этим решениям. Все эти способы включают ту или иную регуляризацию. Так, например, в работе [11] в уравнение Больцмана–Энскога подставляются регуляризованные дельта-функции, также используется регуляризация интеграла столкновений. Доказывается существование независимого от способа регуляризации предела при параметре регуляризации, стремящемся к нулю. В работе [12] рассматривается другой подход к приданию строгого смысла микроскопическим (или мерозначным) решениям на основе представления решений в виде рядов по историям столкновений. Этот подход не требует регуляризации дельта-функций, но использует регуляризацию в определении членов ряда.

В настоящей работе предлагается регуляризация интеграла столкновений, при которой подстановка в него дельта-функций становится возможной. То есть по сравнению с работой [11], развитием которой можно считать данную работу, не требуется регуляризация дельта-функций. Это позволяет упростить формулировку и доказательство основной теоремы. По сравнению с работой [12] не требуется предварительная запись решения уравнения Больцмана–Энскога в виде ряда, подстановка осуществляется непосредственно в (регуляризованное) уравнение Больцмана–Энскога.

## 1. УРАВНЕНИЕ БОЛЬЦМАНА–ЭНСКОГА

Уравнение Больцмана–Энскога имеет следующий вид:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -v_1 \frac{\partial f}{\partial r_1} + Q(f, f), \tag{1}$$

$$Q(f,f)(r_1,v_1,t) = na^2 \int\limits_{\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3} (v_{21},\omega)_+ \ [f(r_1,v_1',t)f(r_1+a\omega,v_2',t) - \\ - f(r_1,v_1,t)f(r_1-a\omega,v_2,t)]\,d\omega\,dv_2. \quad (2)$$

Здесь $f = f(r_1,v_1,t) \geqslant 0$ — функция плотности распределения частиц (твердых шаров) в момент времени $t \geqslant 0$, где $r_1$ — пространственные координаты частицы (координаты центра шара); $v_1$ — скорость частицы. Будем считать, что газ заключен в ограниченный объем. Если газ заключен в прямоугольный параллелепипед с упругим отражением от стенок, то динамику внутри такого параллелепипеда можно свести к динамике на плоском торе $\mathbb{T}^3 = \mathbb{R}^3/(\alpha\mathbb{Z}\times\beta\mathbb{Z}\times\gamma\mathbb{Z})$, где $\alpha,\beta,\gamma$ — некоторые вещественные числа, превосходящие диаметр шара: $a>0$. Тогда $r_1\in\mathbb{T}^3$, $v_1\in\mathbb{R}^3$, $\partial/\partial r_1$ — градиент по переменной $r_1$.

Смысл постоянной $n>0$ зависит от нормировки функции $f$. Если функция $f$ нормирована на единицу, т. е. $\int f\,dr_1\,dv_1 = 1$ (тогда $f$ — функция плотности вероятности), то $n$ — число частиц в газе (обозначим его через $N$). Если $f$ нормирована на число шаров $N$, то $n=1$. Если $f$ нормирована на объем $V$ емкости, в которую заключен газ (в нашем случае $V=\alpha\beta\gamma$), то $n=N/V$ — концентрация шаров. Для удобства примем $n=1$, т. е. будем считать, что $f$ нормирована на количество частиц.

Далее,

$$v_1' = v_1 + (v_{21},\omega)\omega, \quad v_2' = v_2 - (v_{21},\omega)\omega, \quad (3)$$

$v_{21} = v_2 - v_1$; $\omega\in S^2$ ($S^2$ — единичная сфера в $\mathbb{R}^3$); $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение; $x_+ = \max\{x,0\}$. Векторы $v_1$ и $v_2$ имеют смысл скоростей первого и второго шара перед столкновением, $v_1'$ и $v_2'$ — после столкновения. Тогда $\omega$ — единичный вектор, направленный из центра второго шара в центр первого шара. Выражение $Q(f,f)$ называется интегралом столкновений. Формулы (3) позволяют рассчитать скорости после столкновения при известных скоростях перед столкновением. Если, напротив, нам известны скорости после столкновений, то скорости до столкновений можно определить по аналогичным формулам:

$$v_1 = v_1' + (v_{21}',\omega)\omega, \quad v_2 = v_2' - (v_{21}',\omega)\omega, \quad (4)$$

где $v_{21}' = v_2' - v_1'$. То, что (3) и (4) совпадают с точностью до замены $(v_1,v_2)$ на $(v_1',v_2')$ и наоборот, отражает обратимость упругого столкновения.

Уравнение Больцмана–Энскога представляет собой уточненную версию уравнения Больцмана для газа из твердых шаров. Оно отличается от уравнения Больцмана для твердых шаров слагаемыми $\pm a\omega$ в аргументах $f$ в интеграле столкновений. Иными словами, в уравнении Больцмана предполагается, что размером шаров можно пренебречь (в сравнении с пространственным масштабом, на котором функция плотности $f$ существенно меняется), тогда как уравнение Больцмана–Энскога учитывает этот размер. Формально уравнение Больцмана для твердых шаров можно получить из уравнения Больцмана–Энскога в пределе Больцмана–Грэда $n \to \infty$, $a \to 0$, $na^2 = \mathrm{const}$. Сходимость решений уравнения Больцмана–Энскога к решениям уравнения Больцмана в этом пределе доказана в [13–15]. Интересно отметить, что Боголюбов в своей известной работе [16] получает из гамильтоновой динамики не уравнение Больцмана в исходном виде, а уточненное уравнение Больцмана, которое в частном случае твердых шаров переходит именно в уравнение Больцмана–Энскога.

Уравнение Больцмана–Энскога описывает необратимую динамику газа в следующем смысле. Рассмотрим функционал

$$H(f) = \int\limits_{\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3} f \ln f \, dr \, dv + \frac{na^2}{2} \int\limits_{\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3} dr_1 \int\limits_{B(r_1,a)} \rho(r_1,t)\,\rho(r_2,t)\,dr_2, \tag{5}$$

где $B(r,a) \subset \mathbb{T}^3$ — шар с центром в $r$ и с радиусом $a$, а $\rho(r,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^3} f(r, v,t)\,dv$ — пространственная плотность. Этот функционал не возрастает по времени, если $f$ — решение уравнения Больцмана–Энскога [14]. Этот функционал представляет собой обобщение $H$-функции для уравнения Больцмана на уравнение Больцмана–Энскога. В пределе Больцмана–Грэда второе слагаемое в (5) исчезает, и мы получаем известную $H$-функцию для уравнения Больцмана: энтропию, взятую с обратным знаком.

## 2. МИКРОСКОПИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ

Микроскопические решения, открытые Н. Н. Боголюбовым, имеют вид

$$f(r_1,v_1,t) = \sum_{i=1}^{N} \delta(r_1 - q_i(t), v_1 - w_i(t)), \tag{6}$$

где $\delta(r,v) \equiv \delta(r)\delta(v)$ — шестимерная дельта-функция; $q_i(t)$, $w_i(t)$ — положения и скорости $N$ твердых шаров в момент $t$. Зависимость от времени определяется динамикой твердых шаров.

Динамика твердых шаров определена корректно, если она не приводит к одновременным столкновениям трех и более шаров и к бесконечному числу столкновений за конечное время. Множество начальных условий, приводящих к некорректно определенной динамике, имеет меру нуль. Исключив эти начальные условия, мы получим корректно определенную динамику. В дальнейшем будем предполагать, что $q_i(t)$ и $w_i(t)$ определены корректно для всех $t \in (-\infty, +\infty)$.

Динамика твердых шаров (микроскопическая динамика) обратима по времени в том смысле, что если функции времени $\{q_i(t), w_i(t)\}_{i=1}^N$ описывают динамику твердых шаров, то функции времени $\{q_i(-t), -w_i(-t)\}_{i=1}^N$ также описывают динамику твердых шаров. Поэтому если $f(r_1, v_1, t)$ — решение уравнения Больцмана–Энскога вида (6), то $f(r_1, -v_1, -t)$ — тоже решение этого уравнения. В этом смысле можно говорить о том, что уравнение Больцмана–Энскога содержит обратимые по времени решения, соответствующие микроскопической динамике частиц. Отметим, что $H$-функция (5) не определена для обобщенной функции (6), поэтому формального противоречия в существовании обратимых решений в виде сумм дельта-функций не возникает. Тем не менее факт существования обратимых решений у кинетического уравнения, предложенного для описания необратимой динамики, удивителен и интересен.

Однако непосредственная подстановка функций (6) в интеграл столкновений приводит к формально некорректным произведениям дельта-функций. Для придания строгого смысла микроскопическим решениям удобно взять за основу концепцию «мягкого» («mild») решения этого уравнения Больцмана–Энскога [5, 17]:

$$f(r_1, v_1, t) = f(r_1 - v_1 t, v_1, 0) + \int\limits_0^t Q(f, f)(r_1 - v_1(t - s), v_1, s)\, ds. \tag{7}$$

Далее, введем следующую регуляризацию интеграла столкновений. Пусть $\chi_\varepsilon(\varrho)$ — семейство неотрицательных интегрируемых функций вещественного аргумента с компактными носителями, лежащими в $(0, \infty)$. Также потребуем, чтобы $\chi_\varepsilon(\varrho) \to \delta(\varrho - 0)$ и чтобы диаметр носителя $\chi_\varepsilon$ стремился к нулю при $\varepsilon \to +0$. Здесь $\delta(\varrho - 0) = \lim\limits_{\varepsilon \to +0} \delta(\varrho - \varepsilon)$ — односторонняя дельта-функция. Если $\delta(\varrho - 0)$ действует на непрерывную функцию, то результат, очевидно, совпадает с действием обычной дельта-функции. Однако нам встретится обобщенная функция вида $\delta(g(\varrho))$, где $g$ — непрерывная кусочно-гладкая функция. Если $\varrho_0$ — корень этой функции, но $g$ не дифференцируема в этой точке, то обобщенная функция $\delta(g(\varrho))$ не определена, в то время как $\delta(g(\varrho) - 0) = \lim\limits_{\varepsilon \to +0} \delta(g(\varrho) - \varepsilon)$ хорошо определена при достаточно малых $\varepsilon$.

Определим

$$\begin{gathered} Q_\varepsilon(f, f)(r_1, v_1, t) = \int\limits_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} d\omega\, dv_2 \int\limits_0^\infty d\varrho\, (a + \varrho)^2 (v_{21}, \omega)_+ [f(r_1, v_1', t) \times \\ \times f(r_1 + (a + \varrho)\omega, v_2', t) - f(r_1, v_1, t) f(r_1 - (a + \varrho)\omega, v_2, t)] \chi_\varepsilon(\varrho). \end{gathered} \tag{8}$$

Пусть $f$ — обобщенная функция из $C'(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)$, т. е. непрерывный линейный функционал на пространстве $C(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)$ непрерывных функций из

$\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3$. Определим тогда $Q_\varepsilon(f,f)$ как другую обобщенную функцию из $C'(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)$ через ее действие на пробную функцию $\varphi \in C(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)$ следующим образом:

$$\int\limits_{\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3} Q_\varepsilon(f,f)(r_1,v_1,t)\varphi(r_1,v_1)\,dr_1\,dv_1 =$$

$$= \int\limits_{(\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3)^2} dr_1\,dv_1\,dr_2\,dv_2\,f(r_1,v_1,t)f(r_2,v_2,t)\times$$

$$\times\left\{\left(v'_{21},\frac{r_2-r_1}{|r_2-r_1|}\right)_+\varphi(r_1,v'_1)-\left(v_{21},\frac{r_1-r_2}{|r_1-r_2|}\right)_+\varphi(r_1,v_1)\right\}\chi_\varepsilon(|r_2-r_1|-a).$$

В этом определении мы воспользовались следующими формальными преобразованиями, верными, если $f$ — непрерывная функция с компактным носителем. Представим интеграл (8) в виде суммы двух интегралов. Во втором интеграле (с переменными $v_1$ и $v_2$ в аргументах $f$) мы ввели переменную $r_2 = r_1 - (a+\rho)\omega \in \mathbb{T}^3$. В первом интеграле (с переменными $v'_1$ и $v'_2$ в аргументах $f$) мы ввели переменную $r_2 = r_1 + (a+\rho)\omega$, выразили переменные интегрирования $v_1$ и $v_2$ через $v'_1$ и $v'_2$ согласно (4) (якобиан этого преобразования по модулю равен единице) и, наконец, переобозначили $v'_1$ и $v'_2$ снова как $v_1$ и $v_2$, при этом в соответствии с (3) и (4) $v_1$ и $v_2$ можно обозначить как $v'_1$ и $v'_2$.

Обобщенную функцию $Q_\varepsilon(r_1 - v_1(t-s), v_1, s)$ при фиксированных $t$ и $s$ определим тогда по формуле

$$\int\limits_{\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3} Q_\varepsilon(r_1-v_1(t-s),v_1,s)\,\varphi(r_1,v_1)\,dr_1\,dv_1 =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3} Q_\varepsilon(r_1,v_1,s)\,\varphi(r_1+v_1(t-s),v_1)\,dr_1\,dv_1.$$

Зависящую от времени обобщенную функцию $f(r_1,v_1,t)$ будем называть решением уравнения Больцмана–Энскога в классе $C'(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)$, если в $C'(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)$ для почти всех $t \in (-\infty,+\infty)$ существует предел

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int\limits_0^t Q_\varepsilon(f,f)(r_1-v_1(t-s),v_1,s)\,ds = f(r_1,v_1,t)-f(r_1-v_1t,v_1,0). \quad (9)$$

**Теорема.** *Рассмотрим зависящую от времени обобщенную функцию $f(r_1,v_1,t)$ вида (6), где $\{q_i(t),w_i(t)\}_{i=1}^N$ — положения и скорости $N$ твердых* *шаров в момент $t$. Пусть начальные условия $\{q_i(0) = q_i^0, w_i(0) = w_i^0\}_{i=1}^N$ таковы, что динамика твердых шаров с этими начальными условиями определена корректно для всех времен и что в начальный момент времени $t = 0$ не происходит столкновений, т. е. $|q_i^0 - q_j^0| > a$ для всех $i \neq j$. Тогда $f(r_1, v_1, t)$ является решением уравнения Больцмана–Энскога в классе $C'(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)$. А именно равенство (9) выполнено для всех моментов времени $t$, при которых не происходит столкновений, т. е. $|q_i(t) - q_j(t)| > a$ для всех $i \neq j$.*

*Доказательство.* Рассмотрим сначала случай $t > 0$. Если на интервале $(0, t)$ не происходит столкновений, то равенство (9), очевидно, справедливо, причем обе части равенства равны нулю. Левая часть равна нулю при достаточно малых $\varepsilon$ в силу наличия множителя $\chi_\varepsilon(|r_2 - r_1| - a)$, свойств семейства функций $\chi_\varepsilon$ и того, что носитель $\int f(r, v, s)\, dv$ содержит только точки $\{q_i(s)\}$.

Пусть на интервале $(0, t)$ происходит одно столкновение одной пары частиц в момент $\tau$. Пусть это будут частицы с номерами 1 и 2. Тогда при достаточно малых $\varepsilon$ имеем

$$\int\limits_0^t ds \int\limits_{\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3} Q_\varepsilon(f, f)(r_1 - v_1(t - s), v_1, s)\, \varphi(r_1, v_1)\, dr_1\, dv_1 = \sum_{i,j=1}^{2} \int\limits_0^t ds \times$$
$$\times \left\{ \left( w'_{ji}(s), \frac{q_{ji}(s)}{|q_{ji}(s)|} \right)_+ \chi_\varepsilon(|q_{ji}(s)| - a)\varphi(q_i(s) + w'_i(s)(t - s), w'_i(s)) - \right.$$
$$\left. - \left( w_{ji}(s), \frac{q_{ij}(s)}{|q_{ij}(s)|} \right)_+ \chi_\varepsilon(|q_{ij}(s)| - a)\varphi(q_i(s) + w_i(s)(t - s), w_i(s)) \right\}, \quad (10)$$

где $w'_1(s)$ и $w'_2(s)$ — скорости после столкновения, если бы столкновение состоялось в момент $s$ (при расстоянии между частицами $|q_1(s) - q_2(s)|$), $q_{ji} = q_j - q_i$. Формально они определяются формулой (3) с заменой $v_1$, $v_2$ и $\omega$ на $w_1(s)$, $w_2(s)$ и $(r_1 - r_2)/|r_1 - r_2|$.

Слагаемые в (10) с $i = j$ равны нулю, поскольку носитель $\chi_\varepsilon$ находится в положительной полуоси. Поэтому в данном выражении остаются ненулевыми два слагаемых: $i = 1, j = 2$ и $i = 2, j = 1$.

Осуществим предел $\varepsilon \to 0$ и воспользуемся тем, что $\chi_\varepsilon(\varrho) \to \delta(\varrho - 0)$. Воспользуемся также известной формулой $\delta(g(x)) = \sum\limits_i |g'(x_i)|^{-1}\delta(x - x_i)$, где $x_i$ — корни функции $g$. Значение $|q_{ji}(s)| = a + 0$ достигается в моменты

$\tau+0$ и $\tau-0$. Поэтому

$$\delta(|q_{ji}(s)|-a-0)=\left|\frac{d|q_{ji}(s)|}{ds}\right|^{-1}_{s=\tau-0}\delta(s-\tau+0)+$$
$$+\left|\frac{d|q_{ji}(s)|}{ds}\right|^{-1}_{s=\tau+0}\delta(s-\tau-0)=(w_{ji}(\tau-0),q_{ij}(\tau)/a)^{-1}\delta(s-\tau+0)-$$
$$-(w_{ji}(\tau+0),q_{ij}(\tau)/a)^{-1}\delta(s-\tau-0). \quad (11)$$

Знак «минус» перед вторым слагаемым связан с тем, что перед столкновением $(w_{ji}(\tau-0),q_{ij})>0$, тогда как после столкновения $(w_{ji}(\tau+0),q_{ij})<0$. Непосредственно перед столкновением скорости равны начальным: $w_i(\tau-0)=w_i^0$. Поскольку на интервале $(0,t)$ происходит только одно столкновение, конечные скорости равны скоростям сразу после столкновения: $w_i(\tau+0)=w_i(t)$. Преобразования (3) и (4) переводят скорости до столкновения в скорости после столкновения и обратно, поэтому $w_i'(\tau-0)=w_i(\tau+0)=w_i(t)$, $w_i'(\tau+0)=w_i(\tau-0)=w_i^0$. Поскольку $(w_{ji}(\tau+0),q_{ij}(\tau))<0$, то при подстановке в (10) ненулевой вклад дает только первое слагаемое в (11). Наконец, $q_i(\tau)=q_i^0+w_i^0\tau$, $q_i(t)=q_i(\tau)+w_i(\tau+0)(t-\tau)$. Используя все это, получаем

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int_0^t ds\int\limits_{\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3}Q_\varepsilon(f,f)(r_1-v_1(t-s),v_1,s)\,\varphi(r_1,v_1)\,dr_1\,dv_1=$$
$$=\sum_{i=1}^2\,[\varphi(q_i(\tau)+w_i'(\tau-0)(t-\tau),w_i'(\tau-0))-$$
$$-\varphi(q_i(\tau)+w_i(\tau-0)(t-\tau),w_i(\tau-0))]=$$
$$=\sum_{i=1}^2\,[\varphi(q_i(t),w_i(t))-\varphi(q_i^0+w_i^0t,w_i^0)].$$

Действие правой части (9) на основную функцию $\varphi$, очевидно, дает тот же результат. Утверждение теоремы доказано в предположении, что в интервале $(0,t)$ происходит не более одного столкновения одной пары частиц.

Случай, когда в момент $\tau$ помимо частиц 1 и 2 сталкивается и какая-то другая пара частиц, разбирается аналогично, поскольку сталкивающиеся пары можно рассматривать по отдельности. Для доказательства утверждения теоремы для случая произвольного $t>0$ можно разбить интервал $(0,t)$ на интервалы, каждый из которых содержит только один момент столкновения (может быть, для нескольких пар сразу), и применить доказанное утверждение к каждому из интервалов.

Рассмотрим теперь случай $t < 0$. Снова достаточно доказать утверждения для случая столкновения одной пары частиц на интервале $(t, 0)$. Формула (11) сохраняет свою силу. Меняются лишь соотношения, связывающие скорости в моменты $\tau \pm 0$ и скорости в граничные моменты времени $0$ и $t$ ($\tau \in (t, 0)$ — по-прежнему момент столкновения шаров 1 и 2): $w_i(\tau - 0) = w_i(t)$, $w_i(\tau + 0) = w_i(0)$. Подставляя (11) в (10) (поменяем также там пределы интегрирования по $s$, поставив перед интегралом знак «минус»), получаем

$$-\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_t^0 ds \int\limits_{\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3} Q_\varepsilon(f,f)(r_1 - v_1(t-s), v_1, s)\,\varphi(r_1, v_1)\,dr_1\,dv_1 =$$

$$= -\sum_{i=1}^{2}\,[\varphi(q_i(\tau) + w_i'(\tau-0)(t-\tau), w_i'(\tau-0)) -$$

$$- \varphi(q_i(\tau) + w_i(\tau-0)(t-\tau), w_i(\tau-0))] =$$

$$= \sum_{i=1}^{2}\,[\varphi(q_i(t), w_i(t)) - \varphi(q_i^0 + w_i^0 t, w_i^0)].$$

Снова получается требуемое равенство. Теорема полностью доказана.

*Замечание 1.* Скорости $w_i(t)$ как функции времени претерпевают разрывы в моменты столкновений. Однако если мы примем $w_i(\tau) = w_i(\tau - 0)$ для положительных моментов столкновения $\tau$ и $w_i(\tau) = w_i(\tau + 0)$ для отрицательных $\tau$, то равенство (9) будет выполнено в том числе и для таких $t$, которые совпадают с моментами столкновений, т. е. будет выполнено не для почти всех, а для всех $t$. Однако такое доопределение скоростей в моменты столкновений выделяло бы начальный момент времени.

*Замечание 2.* Условия на носители $\chi_\varepsilon(\varrho)$ были наложены для краткости изложения. В действительности для доказательства теоремы важно лишь $\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\chi_\varepsilon(\varrho) = \delta(\varrho - 0)$.

*Замечание 3.* Обобщенная функция (6) при тех же предположениях на начальные условия $\{q_i^0, w_i^0\}_{i=1}^N$ удовлетворяет также и «обратному» уравнению Больцмана–Энскога: уравнению (9), в котором в интеграле столкновения вместо $(v_{21}, \omega)_+$ стоит $(v_{21}, \omega)_-$, где $x_- = \min(x, 0)$. В случае регулярных решений такое уравнение описывало бы не убывание, а возрастание $H$-функции (5) по времени. В основе необратимости уравнения Больцмана–Энскога лежит предположение, что состояния частиц перед столкновением статистически независимы [18] (см. также обсуждение в [19]). В уравнении это находит отражение в том, что $(v_{21}, \omega) > 0$ соответствует конфигурации шаров перед столкновением, и в том, что при этом двухчастичная функция плотности предполагается равной произведению одночастичных ($f(r_1, v_1, t)$). Замена в интеграле столкновений $(v_{21}, \omega)_+$ на $(v_{21}, \omega)_-$ соответствует предположению о том, что, напротив, состояния частиц после столкновения статистически независимы, что приводит к возрастанию $H$-функции. Однако микроскопическая динамика инвариантна относительно замены $t \to -t$ и $w_i^0 \to -w_i^0$, поэтому, как нетрудно показать аналогичным способом, обобщенная функция (6) удовлетворяет в том же самом смысле и «обратному» уравнению Больцмана. В частности, при подстановке в аналог равенства (10), где $(\cdot,\cdot)_+$ заменены на $(\cdot,\cdot)_-$, вклад дает, напротив, только второе слагаемое в (11).

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основной результат данной работы состоит в упрощении формулировки и доказательства теоремы о существовании микроскопических решений кинетического уравнения Больцмана–Энскога по сравнению с работой [11] при сохранении той же идеи, а именно устранена необходимость в регуляризации дельта-функций, требуется лишь регуляризация интеграла столкновений. Строгое доказательство существования указанных решений говорит о том, что кинетическое уравнение Больцмана–Энскога, изначально предложенное для описания необратимой динамики газа, содержит также и точную обратимую динамику конечного числа частиц (микроскопическую динамику). Обратимость или необратимость динамики, описываемой данным уравнением, оказывается зависимой от рассматриваемого класса решений: решения в виде интегрируемых функций плотности необратимы, тогда как решения в виде сумм дельта-функций обратимы.

Автор приносит благодарность И. В. Воловичу за постоянное внимание к работе, а также В. В. Веденяпину и В. В. Козлову за полезные обсуждения.

Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 19-11-00320).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Боголюбов Н. Н.* Микроскопические решения уравнения Больцмана–Энскога в кинетической теории для упругих шаров // ТМФ. 1975. Т. 24, № 2. С. 242–247.
2. *Боголюбов Н. Н., Боголюбов Н. Н. (мл.).* Введение в квантовую статистическую механику. М.: Наука, 1984.
3. *Pulvirenti M., Simonella S.* On the Evolution of the Empirical Measure for the Hard-Sphere Dynamics // Bull. Inst. Math. Academia Sinica. 2015. V. 10, No. 2. P. 171–204.
4. *Kolokoltsov V. N.* Nonlinear Markov Processes and Kinetic Equations. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2010.
5. *Kolokoltsov V. N.* On Extension of Mollified Boltzmann and Smoluchovski Equations to Particle Systems with a $k$-Nary Interaction // Russ. J. Math. Phys. 2003. V. 10, No. 3. P. 268–295.

6. *Власов А. А.* Теория многих частиц. М.: Гостехиздат, 1950.
7. *Веденяпин В. В.* Кинетические уравнения Больцмана и Власова. М.: Физматлит, 2001.
8. *Trushechkin A. S.* Derivation of the Particle Dynamics from Kinetic Equations // $p$-Adic Numbers, Ultrametic Analysis and Applications. 2012. V. 4, No. 2. P. 130–142.
9. *Трушечкин А. С.* О строгом определении микроскопических решений уравнения Больцмана–Энскога // Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер. «Физ.-мат. науки». 2013. № 1(30). С. 270–278.
10. *Trushechkin A. S.* Microscopic and Soliton-Like Solutions of the Boltzmann–Enskog and Generalized Enskog Equations for Elastic and Inelastic Hard Spheres // Kinet. Relat. Models. 2014. V. 7, No. 4. P. 755–778.
11. *Трушечкин А. С.* Микроскопические решения кинетических уравнений и проблема необратимости // Тр. МИАН. 2014. Т. 285. С. 264–287.
12. *Pulvirenti M., Simonella S., Trushechkin A.* Microscopic Solutions of the Boltzmann–Enskog Equation in the Series Representation // Kinet. Relat. Models. 2018. V. 11, No. 4. P. 911–931.
13. *Arkeryd L., Cercignani C.* On the Convergence of Solutions of the Enskog Equation to Solutions of the Boltzmann Equation // Commun. PDE. 1989. V. 14, No. 8–9. P. 1071–1090.
14. *Arkeryd L., Cercignani C.* Global Existence in $L_1$ for the Enskog Equation and Convergence of the Solutions to Solutions of the Boltzmann Equation // J. Stat. Phys. 1990. V. 59, No. 3–4. P. 845–867.
15. *Bellomo N., Lachowicz M.* On the Asymptotic Equivalence between the Enskog and the Boltzmann Equations // J. Stat. Phys. 1988. V. 51, No. 1–2. P. 233–247.
16. *Боголюбов Н. Н.* Проблемы динамической теории в статистической физике. М.; Л.: Гостехиздат, 1946.
17. *Di Perna R., Lions P. L.* On the Cauchy Problem for Boltzmann Equations // Ann. Math. 1989. V. 130, No. 2. P. 321–366.
18. *Больцман Л.* Проблемы динамической теории в статистической физике. М.: Наука, 1984.
19. *Козлов В. В.* Тепловое равновесие по Гиббсу и Пуанкаре. М.; Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2002.