

ТОЧНО РЕШАЕМЫЕ МОДЕЛИ ДЛЯ ПЕРВОГО УРАВНЕНИЯ ВЛАСОВА

Е. Е. Перепёлкин^{1,2,3,4}, *А. Д. Коваленко*¹, *Б. И. Садовников*²,
Н. Г. Иноземцева^{3,4}, *А. А. Тарелкин*^{2,4}, *Р. В. Полякова*^{1,*},
*М. Б. Садовникова*², *Н. М. Андропова*⁴, *Е. Шерханов*¹

¹ Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

² Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва

³ Государственный университет «Дубна», Дубна, Россия

⁴ Московский технический университет связи и информатики, Москва

Рассматривается построение метода поиска точных решений первого уравнения из цепочки уравнений А. А. Власова, которое формально схоже с уравнением непрерывности. Исследуемое уравнение записано относительно скалярной функции f и векторного поля $\langle \mathbf{v} \rangle$. В зависимости от постановки задачи функция f может соответствовать плотности вероятностей, заряда, массы или магнитной проницаемости магнетика. Векторное поле $\langle \mathbf{v} \rangle$ может соответствовать потоку вероятностей, полю скоростей сплошной среды или напряженности магнитного поля. С математической точки зрения одно и то же уравнение применимо при описании статистических, квантовых и классических систем. Точное решение, полученное для одной физической системы, может быть отображено на точное решение для другой системы.

Наличие точных решений модельных нелинейных систем играет важную роль при проектировании сложных физических установок, таких как детектор SPD проекта NICA. Данные решения используются как тесты при написании программного кода, а также могут быть инкапсулированы в конечноразностные схемы при численном решении краевых задач для нелинейных дифференциальных уравнений.

Building a method for finding exact solutions of the first equation from the Vlasov chain of equations, which is formally similar to the continuity equation, is considered. The studied equation is written relative to the scalar function f and the vector field $\langle \mathbf{v} \rangle$. Depending on the problem formulation, the function f may correspond to the density of probabilities, charge, mass or the magnetic permeability. The vector field $\langle \mathbf{v} \rangle$ may correspond to the probability flow, the velocity field of a continuous medium, or the magnetic field strength. From the mathematical viewpoint, the same equation is applicable while describing statistical, quantum and classical systems. The exact solution obtained for one physical system can be mapped to the exact solution for another system.

*E-mail: polykovarv@mail.ru

The availability of exact solutions for model nonlinear systems plays an important role in the design of complex physical facilities, for example, such as the NICA SPD detector. Such solutions are used as tests when writing a program code and can also be encapsulated in finite difference schemes for the numerical solution of boundary value problems for nonlinear differential equations.

PACS: 52.20.-j; 05.20.Dd; 45.50.-j; 52.35.Fp

ВВЕДЕНИЕ

Предлагаемый обзор содержит описание некоторых методов построения точных решений нелинейных задач, возникающих в области ускорительной физики при моделировании динамики систем многих взаимодействующих частиц. С математической точки зрения моделирование динамики систем многих взаимодействующих частиц сводится к различным типам нелинейных начально-краевых постановок задач в сложных трехмерных геометрических областях, которые, как правило, могут быть решены только с использованием численных методов.

Для нелинейных систем вопросы сходимости, устойчивости, точности получаемых численных решений исследованы не так широко, как для линейных систем. Поэтому при написании собственного программного кода или при получении численного результата по известному стороннему программному комплексу возникает вопрос о корректности результата. В таких случаях важную роль играет наличие известных точных решений нелинейных задач, которые могут быть использованы как тесты численных алгоритмов, а также в качестве начальных приближений при поиске оптимальной конфигурации нелинейной системы.

В гидродинамическом приближении поведение системы многих частиц может быть описано функцией плотности заряда или массы, которая удовлетворяет соответствующим кинематическим уравнениям. В данной работе рассматривается кинематическая цепочка уравнений А. А. Власова, записанная для функций плотности распределения вероятностей $f_1(\mathbf{r}, t)$, $f_2(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$, $f_3(\mathbf{r}, \mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}}, t)$, ... [1–3]. Второе уравнение из цепочки уравнений Власова для функции $f_2(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ получило широкое применение в ускорительной физике, физике плазмы, задачах термоядерного синтеза, физике твердого тела, кристаллах [4–12]. С использованием аппроксимации Власова–Моэля [13] для среднего ускорения $\langle \dot{\mathbf{v}} \rangle$ второе уравнение Власова переходит в уравнение Моэля для функции Вигнера [14, 15]. Первое уравнение из цепочки Власова для функции плотности вероятностей $f_1(\mathbf{r}, t)$ формально схоже с уравнением непрерывности, описывающим поведение функции плотности вещества или заряда. Такой дуализм позволяет рассматривать первое уравнение Власова как

с позиции классического (детерминистического), так и с позиции вероятностного подхода при описании физических процессов.

Работа имеет следующую структуру.

В разд. 1 показывается математическая связь первого уравнения Власова с нерелятивистским уравнением Шредингера, позволяющая по решениям одного уравнения строить решения другого. Приводится вывод уравнений движения сплошной среды, уравнений для электромагнитных полей, описывается введение квантового потенциала, показывается связь с одной из формулировок квантовой механики — теорией «волны-пилота» де Бройля–Бома [16, 17].

В разд. 2 методом характеристик строятся точные решения первого уравнения Власова в виде ударной волны. Рассматриваются два потенциала взаимодействия: электрический и гравитационный. Точные решения для электрического потенциала могут быть использованы при рассмотрении задачи пространственного заряда в ускорительной физике [18–21]. Наличие ударной волны соответствует задаче кулоновского взрыва [22–27]. Связь первого уравнения Власова с уравнением Шредингера (см. разд. 1) дает возможность получить решения для квантовых систем с ударной волной [28–30].

В разд. 3 для гауссовой зависимости плотности вероятностей f_1 от модуля векторного поля потока вероятностей $|\langle \mathbf{v} \rangle(\mathbf{r})|$ рассматривается метод построения точных решений уравнения Шредингера (см. разд. 1). Первое уравнение Власова переписывается в виде нелинейного дифференциального уравнения для фазы волновой функции. С использованием нелинейного преобразования Лежандра уравнение для фазы отображается в линейное уравнение, частные решения которого могут быть получены в явном виде. Рассмотрены вопросы однозначности отображения, приведены примеры частных решений.

В разд. 4 рассматривается так называемая Ψ -модель [31], обладающая трехмерным вихревым полем потока вероятностей. Методом характеристик строятся решения Ψ -модели, соответствующие микро- и макросистемам. Для микросистем получены решения уравнения Шредингера с учетом электромагнитного поля. Рассмотрена аналогия с монополем Дирака. Для макросистем получены модельные решения, имеющие астрофизическую аналогию в виде «черных и белых дыр».

1. СВОЙСТВА ПЕРВОГО УРАВНЕНИЯ ИЗ ЦЕПОЧКИ УРАВНЕНИЙ ВЛАСОВА

В квантовой механике известен метод перехода от уравнения Шредингера к уравнению непрерывности. В этом разделе исходя из первых принципов будет рассмотрен обратный переход [32].

1.1. Фаза как скалярный потенциал скорости. Первое уравнение в цепочке Власова [1–3] записано для функции плотности распределения вероят-

ности $f_1(\mathbf{r}, t)$ и имеет вид

$$\frac{\partial f_1(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \operatorname{div}_r [f_1(\mathbf{r}, t)\langle \mathbf{v} \rangle(\mathbf{r}, t)] = 0, \quad (1.1)$$

где

$$\langle \mathbf{v} \rangle(\mathbf{r}, t) = \frac{\int_{(-\infty)}^{\infty} f_2(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \mathbf{v} d^3v}{f_1(\mathbf{r}, t)}. \quad (1.2)$$

Заметим, что уравнение (1.1) записано Власовым не для системы частиц, а для одной частицы, поведение которой характеризуется функцией плотности распределения вероятности $f_1(\mathbf{r}, t)$. С другой стороны, уравнение (1.1) может быть рассмотрено как уравнение сохранения массы или заряда в гидродинамическом приближении, записанное не для одной частицы, а для среды.

В дальнейших выкладках для удобства функцию $f_1(\mathbf{r}, t)$ будем также обозначать $f(\mathbf{r}, t)$, а плотность тока $f_1(\mathbf{r}, t)\langle \mathbf{v} \rangle(\mathbf{r}, t) = \mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$. Так как функция плотности вероятности $f(\mathbf{r}, t)$ по определению является положительной, ее можно представить как квадрат модуля некоторой комплексной функции $\Psi(\mathbf{r}, t)$, т. е.

$$f(\mathbf{r}, t) = |\Psi(\mathbf{r}, t)|^2 = |\bar{\Psi}(\mathbf{r}, t)|^2 = \Psi(\mathbf{r}, t)\bar{\Psi}(\mathbf{r}, t) \geq 0. \quad (1.3)$$

Подставим представление (1.3) в уравнение (1.1) и получим уравнение относительно функции $\Psi(\mathbf{r}, t)$. Заметим, что $\Psi(\mathbf{r}, t)$ — комплекснозначная функция действительных переменных \mathbf{r} и t . При подстановке (1.3) в уравнение (1.1) дифференцирование будет проводиться по действительным переменным \mathbf{r} и t .

По теореме Гельмгольца векторное поле $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ представим в виде суперпозиции полей $\mathbf{F}_1(\mathbf{r})$ и $\mathbf{F}_2(\mathbf{r})$, которые удовлетворяют условиям $\operatorname{div} \mathbf{F}_1(\mathbf{r}) = 0$ и $\operatorname{rot} \mathbf{F}_2(\mathbf{r}) = 0$. Таким образом, для векторного поля средней скорости (1.2) справедливо представление

$$\langle \mathbf{v} \rangle(\mathbf{r}, t) = -\alpha \nabla \Phi(\mathbf{r}, t) + \gamma \mathbf{A}(\mathbf{r}, t), \quad \operatorname{div} \mathbf{A} = 0, \quad (1.4)$$

где α, γ — некоторые действительные константы; $\Phi(\mathbf{r}, t)$ — скалярный потенциал скорости (1.2), а $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ — вихревая компонента скорости (1.2). Перепишем выражение (1.4) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{v} \rangle(\mathbf{r}, t) &= -\alpha \nabla \Phi(\mathbf{r}, t) + \gamma \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = i^2 \alpha \nabla \Phi + \gamma \mathbf{A} = \\ &= i\alpha \nabla(0 + i\Phi) + \gamma \mathbf{A} = i\alpha \nabla \left(\ln \left| \frac{\Psi}{\bar{\Psi}} \right| + i\Phi \right) + \gamma \mathbf{A}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Так как функция $\Psi(\mathbf{r}, t)$ является комплексной, то для нее справедлива показательная форма представления

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = |\Psi(\mathbf{r}, t)| e^{i\varphi(\mathbf{r}, t)}, \quad (1.6)$$

где $\varphi(\mathbf{r}, t)$ — фаза. С учетом представления (1.6) функция $\Psi/\bar{\Psi}$ примет вид

$$\frac{\Psi(\mathbf{r}, t)}{\bar{\Psi}(\mathbf{r}, t)} = e^{i2\varphi(\mathbf{r}, t)} \Rightarrow \arg \left[\frac{\Psi(\mathbf{r}, t)}{\bar{\Psi}(\mathbf{r}, t)} \right] = 2\varphi(\mathbf{r}, t) + 2\pi k \stackrel{\text{det}}{=} \Phi(\mathbf{r}, t). \quad (1.7)$$

Таким образом, потенциал скорости (1.2) в выражении (1.7) был определен как аргумент комплексной функции $\Psi/\bar{\Psi}$. Учитывая введенное обозначение (1.7), перепишем выражение (1.5) и получим

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{v} \rangle(\mathbf{r}, t) &= i\alpha \nabla \left(\ln \left| \frac{\Psi}{\bar{\Psi}} \right| + i \arg \left[\frac{\Psi}{\bar{\Psi}} \right] \right) + \gamma \mathbf{A} = i\alpha \nabla \ln \left[\frac{\Psi}{\bar{\Psi}} \right] + \gamma \mathbf{A} = \\ &= i\alpha \nabla [\ln(\Psi) - \ln(\bar{\Psi})] + \gamma \mathbf{A} = i\alpha \left[\frac{\nabla \Psi}{\Psi} - \frac{\nabla \bar{\Psi}}{\bar{\Psi}} \right] + \gamma \mathbf{A}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

1.2. Уравнение Шредингера. Учитывая (1.3) и (1.8), перепишем уравнение (1.1):

$$\bar{\Psi} \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \Psi \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial t} + i\alpha \operatorname{div}_r \left[\bar{\Psi} \nabla \Psi - \Psi \nabla \bar{\Psi} - i \frac{\gamma}{\alpha} \Psi \bar{\Psi} \mathbf{A} \right] = 0. \quad (1.9)$$

Преобразуем выражения $\operatorname{div}_r [\bar{\Psi} \nabla \Psi - \Psi \nabla \bar{\Psi}]$ и $\operatorname{div}_r [\Psi \bar{\Psi} \mathbf{A}]$, получим

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_r [\bar{\Psi} \nabla \Psi - \Psi \nabla \bar{\Psi}] &= \bar{\Psi} \Delta \Psi - \Psi \Delta \bar{\Psi}, \\ \operatorname{div}_r [\Psi \bar{\Psi} \mathbf{A}] &= \bar{\Psi} (\mathbf{A}, \nabla \Psi) + \Psi (\mathbf{A}, \nabla \bar{\Psi}). \end{aligned} \quad (1.10)$$

В последнем выражении (1.2) учтено (1.4). Подставим (1.2) в (1.9) и получим

$$\bar{\Psi} \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \Psi \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial t} + i\alpha (\bar{\Psi} \Delta \Psi - \Psi \Delta \bar{\Psi}) + \bar{\Psi} (\gamma \mathbf{A}, \nabla \Psi) + \Psi (\gamma \mathbf{A}, \nabla \bar{\Psi}) = 0. \quad (1.11)$$

Сгруппируем члены в выражении (1.11), получим

$$\bar{\Psi} \left[\frac{\partial \Psi}{\partial t} + i\alpha \Delta \Psi + \gamma (\mathbf{A}, \nabla \Psi) \right] + \Psi \left[\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial t} - i\alpha \Delta \bar{\Psi} + \gamma (\mathbf{A}, \nabla \bar{\Psi}) \right] = 0. \quad (1.12)$$

Введем обозначение дифференциального оператора

$$\hat{p} \stackrel{\text{det}}{=} -\frac{i}{\beta} \nabla, \quad \bar{\hat{p}} = \frac{i}{\beta} \nabla, \quad \hat{p}^2 = \bar{\hat{p}}^2 = -\frac{1}{\beta^2} \Delta, \quad (1.13)$$

где $\beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$. Тогда выражение (1.12) примет вид

$$\begin{aligned} \bar{\Psi} \left[\frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial t} - i\alpha\beta \left(\hat{p}^2 - \frac{\gamma}{\alpha\beta} (\mathbf{A}, \hat{p}) \right) \right] \Psi + \\ + \Psi \left[\frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial t} + i\alpha\beta \left(\bar{\hat{p}}^2 - \frac{\gamma}{\alpha\beta} (\mathbf{A}, \bar{\hat{p}}) \right) \right] \bar{\Psi} = 0. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Выражение (1.14) можно записать в другом виде, если учесть, что

$$\begin{aligned} \hat{p}^2 - \frac{\gamma}{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \hat{p}) &= \left(\hat{p} - \frac{\gamma}{2\alpha\beta}\mathbf{A}\right)^2 - \frac{\gamma^2}{4\alpha^2\beta^2}|\mathbf{A}|^2, \\ \bar{\hat{p}}^2 - \frac{\gamma}{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \bar{\hat{p}}) &= \left(\bar{\hat{p}} - \frac{\gamma}{2\alpha\beta}\mathbf{A}\right)^2 - \frac{\gamma^2}{4\alpha^2\beta^2}|\mathbf{A}|^2. \end{aligned} \tag{1.15}$$

Выражение (1.14) с учетом (1.15) примет вид

$$\begin{aligned} \bar{\Psi} \left[\frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial t} - i\alpha\beta \left(\hat{p} - \frac{\gamma}{2\alpha\beta}\mathbf{A} \right)^2 \right] \Psi + \\ + \Psi \left[\frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial t} + i\alpha\beta \left(\bar{\hat{p}} - \frac{\gamma}{2\alpha\beta}\mathbf{A} \right)^2 \right] \bar{\Psi} = 0. \end{aligned} \tag{1.16}$$

Таким образом, можно работать как с выражением (1.14), так и с выражением (1.16). Рассмотрим выражение (1.14). Возможны два варианта его преобразования. Рассмотрим каждый из них по отдельности. Введем обозначение линейного оператора L как

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial t} - i\alpha\beta \left(\hat{p}^2 - \frac{\gamma}{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \hat{p}) \right), \\ \bar{L} &= \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial t} + i\alpha\beta \left(\bar{\hat{p}}^2 - \frac{\gamma}{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \bar{\hat{p}}) \right), \end{aligned} \tag{1.17}$$

тогда выражение (1.14) с учетом введенного обозначения (1.17) примет вид

$$\bar{\Psi}L\Psi + \Psi\bar{L}\bar{\Psi} = 0, \quad \Lambda + \bar{\Lambda} = 0, \tag{1.18}$$

где $\Lambda = \bar{\Psi}L\Psi$. Выражение (1.18) означает, что $\text{Re } \Lambda = 0$. Если действительная часть равна нулю, значит, Λ является чисто мнимой величиной, т. е.

$$\begin{aligned} \Lambda &= iv, \quad v \in \mathbb{R}, \\ \bar{\Psi}L\Psi = iv, \quad L\Psi &= i\frac{v}{\Psi} = i\frac{v}{\Psi} \frac{\Psi}{\Psi} = i\frac{v}{|\Psi|^2}\Psi = i\mu\Psi, \quad \mu \in \mathbb{R}, \\ L\Psi &= i\mu\Psi. \end{aligned} \tag{1.19}$$

Отметим, что оператор L является антиэрмитовым. Действительно, рассмотрим скалярное произведение в гильбертовом пространстве над полем комплексных чисел и воспользуемся (1.18):

$$\begin{aligned} \langle \Psi, L\Psi \rangle &= \int \Psi \bar{L}\bar{\Psi} d\omega = - \int \bar{\Psi}L\Psi d\omega = - \int (L\Psi)\bar{\Psi} d\omega = -\langle L\Psi, \Psi \rangle, \\ \langle \Psi, L\Psi \rangle &= \langle \bar{L}\Psi, \Psi \rangle \Rightarrow \langle \bar{L}\Psi, \Psi \rangle = -\langle L\Psi, \Psi \rangle. \end{aligned} \tag{1.20}$$

Как известно, антиэрмитовый оператор имеет чисто мнимые собственные значения, что соответствует выражению (1.19).

Вернемся к выражению (1.14) и разделим его на величину i , получим

$$\bar{\Psi} \left[-\frac{i}{\beta} \frac{\partial}{\partial t} - \alpha\beta \left(\hat{p}^2 - \frac{\gamma}{\alpha\beta} (\mathbf{A}, \hat{p}) \right) \right] \Psi - \Psi \left[\frac{i}{\beta} \frac{\partial}{\partial t} - \alpha\beta \left(\bar{\hat{p}}^2 - \frac{\gamma}{\alpha\beta} (\mathbf{A}, \bar{\hat{p}}) \right) \right] \bar{\Psi} = 0. \quad (1.21)$$

Введем обозначение линейного оператора \mathcal{L} как

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{i}{\beta} \frac{\partial}{\partial t} - \alpha\beta \left(\hat{p}^2 - \frac{\gamma}{\alpha\beta} (\mathbf{A}, \hat{p}) \right), \\ \bar{\mathcal{L}} &= \frac{i}{\beta} \frac{\partial}{\partial t} - \alpha\beta \left(\bar{\hat{p}}^2 - \frac{\gamma}{\alpha\beta} (\mathbf{A}, \bar{\hat{p}}) \right). \end{aligned} \quad (1.22)$$

При использовании обозначения (1.22) уравнение (1.21) примет вид

$$\bar{\Psi} \mathcal{L} \Psi - \Psi \bar{\mathcal{L}} \bar{\Psi} = 0, \quad M - \bar{M} = 0, \quad (1.23)$$

где $M = \bar{\Psi} \mathcal{L} \Psi$. Выражение (1.23) означает, что $\text{Im} M = 0$. Если мнимая часть равна нулю, значит, M является действительной величиной, т. е.

$$\begin{aligned} M &= u, \quad u \in \mathbb{R}, \\ \bar{\Psi} \mathcal{L} \Psi = u, \quad \mathcal{L} \Psi &= \frac{u}{\Psi} = \frac{u}{\Psi} \frac{\Psi}{\Psi} = \frac{u}{|\Psi|^2} \Psi = -U \Psi, \quad U(\mathbf{r}, t) \in \mathbb{R}, \\ \mathcal{L} \Psi &= -U \Psi. \end{aligned} \quad (1.24)$$

Отметим, что оператор \mathcal{L} является эрмитовым. Действительно, рассмотрим скалярное произведение в гильбертовом пространстве над полем комплексных чисел и воспользуемся (1.23):

$$\begin{aligned} \langle \Psi, \mathcal{L} \Psi \rangle &= \int \bar{\Psi} \mathcal{L} \Psi \, d\omega = \int \bar{\Psi} \mathcal{L} \Psi \, d\omega = \int (\mathcal{L} \Psi) \bar{\Psi} \, d\omega = \langle \mathcal{L} \Psi, \bar{\Psi} \rangle, \\ \langle \Psi, \mathcal{L} \Psi \rangle &= \langle \bar{\mathcal{L}} \bar{\Psi}, \Psi \rangle \Rightarrow \langle \bar{\mathcal{L}} \bar{\Psi}, \Psi \rangle = \langle \mathcal{L} \Psi, \bar{\Psi} \rangle. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Из сравнения определений операторов L и \mathcal{L} (1.17) и (1.22) следует, что

$$L \Psi = i \mathcal{L} \Psi. \quad (1.26)$$

С учетом выражений (1.19) и (1.24) уравнение (1.22) примет вид

$$i\mu \Psi = -iU \Psi,$$

отсюда

$$\mu = -U. \quad (1.27)$$

В результате уравнения (1.19) и (1.24) с учетом (1.27) примут вид

$$\begin{aligned} L\Psi + iU\Psi &= \frac{1}{\beta} \frac{\partial \Psi}{\partial t} - i\alpha\beta \left(\hat{p}^2 - \frac{\gamma}{\alpha\beta} (\mathbf{A}, \hat{p}) \right) \Psi + iU\Psi = 0, \\ \bar{L}\Psi + U\Psi &= -\frac{i}{\beta} \frac{\partial}{\partial t} - \alpha\beta \left(\hat{p}^2 - \frac{\gamma}{\alpha\beta} (\mathbf{A}, \hat{p}) \right) + U\Psi = 0, \end{aligned}$$

соответствующий уравнению

$$\frac{i}{\beta} \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\alpha\beta \left(\hat{p}^2 - \frac{\gamma}{\alpha\beta} (\mathbf{A}, \hat{p}) \right) \Psi + U\Psi. \quad (1.28)$$

С учетом (1.15) уравнение (1.28) имеет вид

$$\frac{i}{\beta} \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\alpha\beta \left(\hat{p} - \frac{\gamma}{2\alpha\beta} \mathbf{A} \right)^2 + \frac{1}{2\alpha\beta} \frac{|\gamma \mathbf{A}|^2}{2} \Psi + U\Psi \quad (1.29)$$

или

$$\frac{i}{\beta} \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\alpha\beta \left(\hat{p} - \frac{\gamma}{2\alpha\beta} \mathbf{A} \right)^2 + V\Psi,$$

где

$$V \stackrel{\text{det}}{=} \frac{1}{2\alpha\beta} \frac{|\gamma \mathbf{A}|^2}{2} + U.$$

В результате из выражения (1.14) получилось уравнение (1.29). Получим уравнение для выражения (1.16). По аналогии вводим операторы

$$L_2 = \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial t} - i\alpha\beta \left(\hat{p} - \frac{\gamma}{2\alpha\beta} \mathbf{A} \right)^2, \quad \bar{L}_2 = \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial t} + i\alpha\beta \left(\hat{p} - \frac{\gamma}{2\alpha\beta} \mathbf{A} \right)^2, \quad (1.30)$$

тогда выражение (1.16) с учетом введенного обозначения (1.30) примет вид

$$\bar{\Psi} L_2 \Psi + \Psi \bar{L}_2 \bar{\Psi} = 0, \quad \Lambda_2 + \bar{\Lambda}_2 = 0, \quad (1.31)$$

где $\Lambda_2 = \bar{\Psi} L_2 \Psi$. Выражение (1.31) означает, что $\text{Re } \Lambda_2 = 0$. Если действительная часть равна нулю, значит, Λ_2 является чисто мнимой величиной, т. е.

$$\begin{aligned} \Lambda_2 &= iv_2, \quad v_2 \in \mathbb{R}, \\ \bar{\Psi} L_2 \Psi = iv_2, \quad L_2 \Psi &= i \frac{v_2}{\Psi} = i \frac{v_2}{\Psi} \frac{\Psi}{\Psi} = i \frac{v_2}{|\Psi|^2} \Psi = i\mu_2 \Psi, \quad \mu_2 \in \mathbb{R}, \\ L\Psi &= i\mu\Psi. \end{aligned} \quad (1.32)$$

Отметим, что оператор L_2 является антиэрмитовым. Действительно, рассмотрим скалярное произведение в гильбертовом пространстве над полем комплексных чисел и воспользуемся (1.31):

$$\begin{aligned} \langle \Psi, L_2 \Psi \rangle &= \int \Psi \bar{L}_2 \bar{\Psi} d\omega = - \int \bar{\Psi} L_2 \Psi d\omega = - \int (L_2 \Psi) \bar{\Psi} d\omega = - \langle L_2 \Psi, \Psi \rangle, \\ \langle \Psi, L_2 \Psi \rangle &= \langle \bar{L}_2 \Psi, \Psi \rangle \Rightarrow \langle \bar{L}_2 \Psi, \Psi \rangle = - \langle L_2 \Psi, \Psi \rangle. \end{aligned} \quad (1.33)$$

Как известно, антиэрмитовый оператор имеет чисто мнимые собственные значения, что соответствует выражению (1.32).

Вернемся к выражению (1.16) и разделим его на величину i , получим

$$\begin{aligned} \bar{\Psi} \left[-\frac{i}{\beta} \frac{\partial}{\partial t} - \alpha\beta \left(\hat{p} - \frac{\gamma}{2\alpha\beta} \mathbf{A} \right)^2 \right] \Psi - \\ - \Psi \left[\frac{i}{\beta} \frac{\partial}{\partial t} - \alpha\beta \left(\bar{\hat{p}} - \frac{\gamma}{2\alpha\beta} \mathbf{A} \right)^2 \right] \bar{\Psi} = 0. \end{aligned} \quad (1.34)$$

Обозначим линейный оператор \mathcal{L}_2 как

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2 &= -\frac{i}{\beta} \frac{\partial}{\partial t} - \alpha\beta \left(\hat{p} - \frac{\gamma}{2\alpha\beta} \mathbf{A} \right)^2, \\ \bar{\mathcal{L}}_2 &= \frac{i}{\beta} \frac{\partial}{\partial t} - \alpha\beta \left(\bar{\hat{p}} - \frac{\gamma}{2\alpha\beta} \mathbf{A} \right)^2. \end{aligned} \quad (1.35)$$

При использовании обозначений (1.35) уравнение (1.34) примет вид

$$\bar{\Psi} \mathcal{L}_2 \Psi - \Psi \bar{\mathcal{L}}_2 \bar{\Psi} = 0, \quad M_2 - \bar{M}_2 = 0, \quad (1.36)$$

где $M_2 = \bar{\Psi} \mathcal{L}_2 \Psi$. Выражение (1.36) означает, что $\text{Im } M_2 = 0$. Если мнимая часть равна нулю, то M_2 является действительной величиной, т. е.

$$\begin{aligned} M_2 &= u_2, \quad u_2 \in \mathbb{R}, \\ \bar{\Psi} \mathcal{L}_2 \Psi = u_2, \quad \mathcal{L}_2 \Psi &= \frac{u_2}{\Psi} = \frac{u_2}{\Psi} \frac{\Psi}{\Psi} = \frac{u_2}{|\Psi|^2} \Psi = -U_2 \Psi, \quad U_2(\mathbf{r}, t) \in \mathbb{R}, \\ \mathcal{L}_2 \Psi &= -U_2 \Psi. \end{aligned} \quad (1.37)$$

Отметим, что оператор \mathcal{L}_2 является эрмитовым. Действительно, рассмотрим скалярное произведение в гильбертовом пространстве над полем комплексных чисел и воспользуемся (1.36):

$$\begin{aligned} \langle \Psi, \mathcal{L}_2 \Psi \rangle &= \int \Psi \bar{\mathcal{L}}_2 \bar{\Psi} d\omega = \int \bar{\Psi} \mathcal{L}_2 \Psi d\omega = \int (\mathcal{L}_2 \Psi) \bar{\Psi} d\omega = \langle \mathcal{L}_2 \Psi, \Psi \rangle, \\ \langle \Psi, \mathcal{L}_2 \Psi \rangle &= \langle \bar{\mathcal{L}}_2 \Psi, \Psi \rangle \Rightarrow \langle \bar{\mathcal{L}}_2 \Psi, \Psi \rangle = \langle \mathcal{L}_2 \Psi, \Psi \rangle. \end{aligned} \quad (1.38)$$

Из сравнения определений операторов L_2 и \mathcal{L}_2 (1.30) и (1.35) следует, что

$$L_2\Psi = i\mathcal{L}_2\Psi. \quad (1.39)$$

При учете выражений (1.32) и (1.37) уравнение (1.39) примет вид

$$i\mu_2\Psi = -iU_2\Psi,$$

откуда

$$\mu_2 = -U_2. \quad (1.40)$$

В результате уравнения (1.32) и (1.37) с учетом (1.40) примут вид

$$\begin{aligned} L_2\Psi + iU_2\Psi &= \frac{1}{\beta} \frac{\partial\Psi}{\partial t} - i\alpha\beta \left(\hat{p} - \frac{\gamma}{2\alpha\beta} \mathbf{A} \right)^2 \Psi + iU_2\Psi = 0, \\ \mathcal{L}_2\Psi + U_2\Psi &= -\frac{i}{\beta} \frac{\partial}{\partial t} - \alpha\beta \left(\hat{p} - \frac{\gamma}{2\alpha\beta} \mathbf{A} \right)^2 + U_2\Psi = 0 \end{aligned}$$

или

$$\frac{i}{\beta} \frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\alpha\beta \left(\hat{p} - \frac{\gamma}{2\alpha\beta} \mathbf{A} \right)^2 \Psi + U_2\Psi. \quad (1.41)$$

Заметим, что полученное уравнение (1.41) отличается от уравнения (1.29) отсутствием члена $(1/(2\alpha\beta))(|\gamma\mathbf{A}|^2/2)\Psi$. Не ограничивая общности, можно считать, что в уравнении (1.41) функция U_2 может содержать данное слагаемое, т. е.

$$U_2 = U + \frac{1}{2\alpha\beta} \frac{|\gamma\mathbf{A}|^2}{2} = V. \quad (1.42)$$

В этом случае уравнение (1.41) переходит в (1.29). Если известно $\langle \mathbf{v} \rangle(\mathbf{r}, t)$, то из уравнения (1.1) можно найти $f(\mathbf{r}, t)$, а также потенциал скорости $\Phi(\mathbf{r}, t)$ и $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$, решая уравнения

$$\begin{aligned} \Delta\Phi(\mathbf{r}, t) &= -\frac{1}{\alpha} \operatorname{div} \langle \mathbf{v} \rangle(\mathbf{r}, t) \stackrel{\text{det}}{=} -g(\mathbf{r}, t), \\ \operatorname{rot} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{\gamma} \operatorname{rot} \langle \mathbf{v} \rangle(\mathbf{r}, t) \stackrel{\text{det}}{=} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t), \end{aligned} \quad (1.43)$$

которые получаются из (1.4). Потенциал скорости $\Phi(\mathbf{r}, t)$ с точностью до постоянной величины равен фазе $\varphi(\mathbf{r}, t)$ в соответствии с формулой (1.7). В результате получим функцию Ψ в виде

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \sqrt{f(\mathbf{r}, t)} e^{i\varphi(\mathbf{r}, t)} = (-1)^k \sqrt{f(\mathbf{r}, t)} \exp\left(i \frac{\Phi(\mathbf{r}, t)}{2}\right). \quad (1.44)$$

Зная Ψ , можно определить соответствующую ей функцию U по формуле (1.24):

$$U(\mathbf{r}, t) = -\frac{\bar{\Psi}\mathcal{L}\Psi}{f(\mathbf{r}, t)}. \quad (1.45)$$

Преобразуем выражение (1.45):

$$\begin{aligned} \Delta\Psi &= e^{i\varphi} \{ \Delta|\Psi| - |\Psi||\nabla\varphi|^2 + i[2(\nabla\varphi, \nabla|\Psi|) + |\Psi|\Delta\varphi] \}, \\ \bar{\Psi}\mathcal{L}\Psi &= -\frac{i}{\beta}|\Psi|\frac{\partial|\Psi|}{\partial t} + \frac{\alpha}{\beta}|\Psi| \{ \Delta|\Psi| - |\Psi||\nabla\varphi|^2 + i[2(\nabla\varphi, \nabla|\Psi|) + |\Psi|\Delta\varphi] \} + \\ &\quad + \frac{1}{\beta}|\Psi|^2\frac{\partial\varphi}{\partial t} - i\frac{\gamma}{\beta}|\Psi|(\mathbf{A}, \nabla|\Psi|) + \frac{\gamma}{\beta}|\Psi|^2(\mathbf{A}, \nabla\varphi), \quad (1.46) \\ U &= -\frac{\bar{\Psi}\mathcal{L}\Psi}{|\Psi|^2} = -\frac{1}{\beta}\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{\alpha}{\beta}\frac{\Delta|\Psi|}{|\Psi|} + \frac{\alpha}{\beta}|\nabla\varphi|^2 - \frac{\gamma}{\beta}(\mathbf{A}, \nabla\varphi) + \\ &\quad + i\frac{1}{|\Psi|} \left[\frac{1}{\beta}\frac{\partial|\Psi|}{\partial t} - \frac{\alpha}{\beta}2(\nabla\varphi, \nabla|\Psi|) - \frac{\alpha}{\beta}|\Psi|\Delta\varphi \right] + i\frac{\gamma}{\beta} \left(\mathbf{A}, \frac{\nabla|\Psi|}{|\Psi|} \right). \end{aligned}$$

Согласно определению (1.24) функция U является вещественной, следовательно, мнимая часть выражения (1.46) должна обращаться в нуль. Проверим это условие. Действительно, учитывая выражения (1.3), (1.4), (1.7), получаем

$$\begin{aligned} \text{Im } U &= \\ &= \frac{1}{|\Psi|^2} \left[\frac{1}{\beta}|\Psi|\frac{\partial|\Psi|}{\partial t} - \frac{\alpha}{\beta}2(\nabla\varphi, |\Psi|\nabla|\Psi|) - \frac{\alpha}{\beta}|\Psi|^2\Delta\varphi + \frac{\gamma}{\beta}|\Psi|(\mathbf{A}, \nabla|\Psi|) \right] = \\ &= \frac{1}{f} \left[\frac{1}{2\beta}\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\alpha}{\beta}(\nabla\varphi, \nabla f) - \frac{\alpha}{\beta}f\Delta\varphi + \frac{\gamma}{2\beta}(\mathbf{A}, \nabla f) \right] = \\ &= \frac{1}{2\beta f} \left[\frac{\partial f}{\partial t} + (-2\alpha\nabla\varphi + \gamma\mathbf{A}, \nabla f) + f(\nabla, -2\alpha\nabla\varphi + \gamma\mathbf{A}) \right] = \\ &= \frac{1}{2\beta f} \left[\frac{\partial f}{\partial t} + (\langle \mathbf{v} \rangle, \nabla f) + f \text{div} \langle \mathbf{v} \rangle \right] = \frac{1}{2\beta f} \left\{ \frac{\partial f}{\partial t} + \text{div} [\langle \mathbf{v} \rangle f] \right\} = 0. \end{aligned}$$

В результате для функции U получаем представление

$$U(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{\beta} \left\{ \frac{\partial\varphi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \alpha \left[\frac{\Delta\sqrt{f(\mathbf{r}, t)}}{\sqrt{f(\mathbf{r}, t)}} - |\nabla\varphi(\mathbf{r}, t)|^2 \right] + \gamma(\mathbf{A}, \nabla\varphi) \right\}. \quad (1.47)$$

В п. 1.3 будет показано, что уравнение (1.47) является уравнением Гамильтона–Якоби (1.68). Таким образом, выражения (1.43), (1.44) и (1.47) определяют соответствие между исходным уравнением (1.1) и новым уравнением (1.29). Зная решения уравнения (1.1), можно получить решения уравнения (1.29) и, наоборот, зная решения уравнения (1.29), можно получить решения уравнения (1.1).

Рассмотрим частные случаи уравнений (1.29) и (1.41). Обозначим

$$\alpha = -\frac{\hbar}{2m}, \quad \beta = \frac{1}{\hbar} \quad \text{и} \quad \gamma = -\frac{e}{m}. \quad (1.48)$$

Если векторное поле $\langle \mathbf{v} \rangle$ имеет только потенциальную часть в разложении (1.4), т. е. $\mathbf{A} = \Theta$, то уравнение (1.29) принимает вид

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \left[\frac{\hat{p}^2}{2m} + U \right] \Psi = \hat{H} \Psi.$$

Полученное уравнение совпадает с известным уравнением Шредингера для волновой функции Ψ . В случае наличия вихревой (соленоидальной) компоненты скорости в разложении (1.4) получаем уравнение (1.29), (1.41):

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \left[\frac{1}{2m} (\hat{p} - e\mathbf{A})^2 + U \right] \Psi = \hat{H} \Psi,$$

которое соответствует уравнению Шредингера для скалярной частицы с учетом электромагнитного поля ($\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$).

1.3. Уравнение движения сплошной среды. На основании уравнения (1.1) можно получить уравнение движения как для кинематических точек среды, так и для центра масс среды, определяемой функцией распределения $f(\mathbf{r}, t)$.

Получим выражение для градиента функции $U(\mathbf{r}, t)$. Учитывая выражение (1.4) и (1.7), для градиента потенциала $\nabla \varphi(\mathbf{r}, t)$ можно записать

$$\begin{aligned} \nabla \varphi(\mathbf{r}, t) &= -\frac{1}{2\alpha} \langle \mathbf{v} \rangle(\mathbf{r}, t) + \frac{\gamma}{2\alpha} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t), \\ \nabla \frac{\partial}{\partial t} \varphi(\mathbf{r}, t) &= -\frac{1}{2\alpha} \frac{\partial}{\partial t} [\langle \mathbf{v} \rangle(\mathbf{r}, t) - \gamma \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)], \\ |\nabla \varphi|^2 &= \frac{1}{4\alpha^2} \left[|\langle \mathbf{v} \rangle|^2 - 2\gamma \langle \mathbf{v} \rangle, \mathbf{A} \rangle + \gamma^2 |\mathbf{A}|^2 \right]. \end{aligned} \quad (1.49)$$

С использованием представления (1.49) градиент функции U (1.47) примет вид

$$\begin{aligned} \nabla U &= -\frac{1}{\beta} \left\{ -\frac{1}{2\alpha} \frac{\partial}{\partial t} [\langle \mathbf{v} \rangle - \gamma \mathbf{A}] + \alpha \nabla \left[\frac{\Delta \sqrt{f}}{\sqrt{f}} - \frac{1}{4\alpha^2} |\langle \mathbf{v} \rangle|^2 \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\gamma}{2\alpha} \nabla (\mathbf{A}, \langle \mathbf{v} \rangle) - \frac{\gamma^2}{4\alpha} \nabla |\mathbf{A}|^2 - \frac{\gamma}{2\alpha} \nabla (\mathbf{A}, \langle \mathbf{v} \rangle - \gamma \mathbf{A}) \right\} = \\ &= -\frac{1}{\beta} \left\{ -\frac{1}{2\alpha} \frac{\partial}{\partial t} [\langle \mathbf{v} \rangle - \gamma \mathbf{A}] + \alpha \nabla \left[\frac{\Delta \sqrt{f}}{\sqrt{f}} - \frac{1}{4\alpha^2} |\langle \mathbf{v} \rangle|^2 \right] + \frac{\gamma^2}{4\alpha} \nabla |\mathbf{A}|^2 \right\}. \end{aligned} \quad (1.50)$$

Учтем свойство (1.4) векторного поля $\langle \mathbf{v} \rangle$, т. е.

$$\text{rot } \langle \mathbf{v} \rangle = \gamma \text{rot } \mathbf{A}. \quad (1.51)$$

Из (1.51) следует, что

$$\langle \langle \mathbf{v} \rangle, \nabla \rangle \langle \mathbf{v} \rangle = \frac{1}{2} \nabla |\langle \mathbf{v} \rangle|^2 - \gamma [\langle \mathbf{v} \rangle, \text{rot } \mathbf{A}]. \quad (1.52)$$

Преобразуем (1.50) с учетом (1.52), получим

$$2\alpha\beta\nabla U = \left[\frac{\partial \langle \mathbf{v} \rangle}{\partial t} + \langle \langle \mathbf{v} \rangle, \nabla \rangle \langle \mathbf{v} \rangle \right] + \gamma [\langle \mathbf{v} \rangle, \text{rot } \mathbf{A}] - \\ - \nabla \frac{|\gamma \mathbf{A}|^2}{2} - \gamma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - 2\alpha^2 \nabla \left[\frac{\Delta \sqrt{f}}{\sqrt{f}} \right]. \quad (1.53)$$

Учтем, что полный дифференциал по времени от скорости $\langle \mathbf{v} \rangle(\mathbf{r}, t)$ имеет вид

$$\frac{d}{dt} \langle \mathbf{v} \rangle(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial \langle \mathbf{v} \rangle}{\partial t} + \langle \langle \mathbf{v} \rangle, \nabla \rangle \langle \mathbf{v} \rangle. \quad (1.54)$$

С учетом (1.54) и обозначения (1.43) выражение (1.53) принимает вид

$$-\frac{1}{\gamma} \frac{d \langle \mathbf{v} \rangle}{dt} = -\frac{2\alpha\beta}{\gamma} \nabla \left(\frac{1}{2\alpha\beta} \frac{|\gamma \mathbf{A}|^2}{2} + U + \frac{\alpha}{\beta} \frac{\Delta \sqrt{f}}{\sqrt{f}} \right) - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + [\langle \mathbf{v} \rangle, \text{rot } \mathbf{A}], \quad (1.55)$$

$$\frac{d \langle \mathbf{v} \rangle}{dt} = -\gamma (\mathbf{E} + [\langle \mathbf{v} \rangle, \mathbf{B}]),$$

где

$$\mathbf{E} \stackrel{\text{det}}{=} -\nabla \chi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad (1.56)$$

$$\chi \stackrel{\text{det}}{=} \frac{2\alpha\beta}{\gamma} (V + Q), \quad Q = \frac{\alpha}{\beta} \frac{\Delta \sqrt{f}}{\sqrt{f}};$$

здесь величина Q соответствует квантовому потенциалу из теории «волны-пилота» де Бройля–Бома [16, 17]. При этом в силу определений (1.56) и (1.43) справедливы уравнения

$$\text{div } \mathbf{B} = 0, \quad (1.57)$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \mathbf{A} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (1.58)$$

Преобразуем выражение для функции χ , учитывая (1.47), получим

$$\begin{aligned} \frac{\gamma}{2\alpha}\chi &= \frac{1}{2\alpha} \frac{|\gamma\mathbf{A}|^2}{2} - \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \alpha|\nabla\varphi|^2 - \gamma(\mathbf{A}, \nabla\varphi) = \\ &= \frac{1}{2\alpha} \frac{|\gamma\mathbf{A}|^2}{2} - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + (\langle\mathbf{v}\rangle, \nabla\varphi) + \alpha|\nabla\varphi|^2 \right), \quad (1.59) \\ \frac{\gamma}{2\alpha}\chi &= \frac{1}{2\alpha} \frac{|\gamma\mathbf{A}|^2}{2} - \left(\frac{d\varphi}{dt} + \alpha|\nabla\varphi|^2 \right). \end{aligned}$$

Для нахождения поля \mathbf{E} необходимо вычислить градиент χ . С учетом соотношения

$$\nabla \frac{d}{dt}\varphi = \frac{d}{dt}\nabla\varphi - \alpha\nabla|\nabla\varphi|^2 + \nabla(\gamma\mathbf{A}, \nabla\varphi) - (\gamma\mathbf{A}, \nabla)\nabla\varphi \quad (1.60)$$

выражение для $\nabla\chi$ (1.59) принимает вид

$$\nabla\chi = \frac{2\alpha}{\gamma} \left(\frac{1}{2\alpha} \nabla \frac{|\gamma\mathbf{A}|^2}{2} - \frac{d}{dt}\nabla\varphi - \nabla(\gamma\mathbf{A}, \nabla\varphi) + (\gamma\mathbf{A}, \nabla)\nabla\varphi \right). \quad (1.61)$$

Таким образом, поле \mathbf{E} полностью выражается через вихревую компоненту \mathbf{A} и потенциальную $\nabla\varphi$ компоненты скорости потока $\langle\mathbf{v}\rangle$, т. е.

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\nabla\chi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} = \\ &= \frac{2\alpha}{\gamma} \left(-\frac{1}{2\alpha} \nabla \frac{|\gamma\mathbf{A}|^2}{2} + \frac{d}{dt}\nabla\varphi + \nabla(\gamma\mathbf{A}, \nabla\varphi) - (\gamma\mathbf{A}, \nabla)\nabla\varphi \right) - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}. \quad (1.62) \end{aligned}$$

Если ввести обозначения

$$\langle\mathbf{v}_p\rangle = -2\alpha\nabla\varphi, \quad \langle\mathbf{v}_s\rangle = \gamma\mathbf{A}, \quad \langle\mathbf{v}\rangle = \langle\mathbf{v}_p\rangle + \langle\mathbf{v}_s\rangle, \quad (1.63)$$

то выражение для поля \mathbf{E} примет вид

$$-\gamma\mathbf{E} = \nabla \frac{|\langle\mathbf{v}_s\rangle|^2}{2} + \frac{\partial\langle\mathbf{v}\rangle}{\partial t} + (\langle\mathbf{v}_p\rangle, \nabla)\langle\mathbf{v}_p\rangle + \nabla(\langle\mathbf{v}_s\rangle, \langle\mathbf{v}_p\rangle). \quad (1.64)$$

Используя выражение (1.52) для $\langle\mathbf{v}_p\rangle$, получим

$$(\langle\mathbf{v}_p\rangle, \nabla)\langle\mathbf{v}_p\rangle = \frac{1}{2}\nabla|\langle\mathbf{v}_p\rangle|^2. \quad (1.65)$$

С учетом (1.65) выражение (1.64) принимает вид

$$-\gamma\mathbf{E} = \frac{\partial\langle\mathbf{v}\rangle}{\partial t} + \nabla \frac{|\langle\mathbf{v}\rangle|^2}{2} \quad (1.66)$$

(представление (1.66) полностью совпадает с представлением из [7]).

Для функции χ помимо представления (1.56) или (1.59) можно получить представление через скорости $\langle \mathbf{v}_s \rangle$ и $\langle \mathbf{v}_p \rangle$. Воспользуемся (1.63), получим

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{\gamma} \nabla \left(\frac{|\langle \mathbf{v} \rangle|^2}{2} - 2\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \quad (1.67)$$

Сравнивая (1.67) с (1.56), получаем, что

$$\chi = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{|\langle \mathbf{v} \rangle|^2}{2} - 2\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right),$$

или, учитывая (1.48) и (1.7),

$$-\frac{\hbar}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{m}{2} |\langle \mathbf{v} \rangle|^2 + e\chi. \quad (1.68)$$

Полученное уравнение (1.68) является уравнением Гамильтона–Якоби, в котором фаза волновой функции φ соответствует действию $S = \hbar\varphi$. Если поле скоростей не имеет вихревой компоненты \mathbf{A} , то в силу (1.62)

$$\nabla \chi = -\frac{2\alpha}{\gamma} \frac{d}{dt} \nabla \varphi = \frac{1}{\gamma} \frac{d}{dt} (-2\alpha \nabla \varphi) = \frac{1}{\gamma} \frac{d \langle \mathbf{v} \rangle}{dt}, \quad \frac{d \langle \mathbf{v} \rangle}{dt} = \gamma \nabla \chi,$$

что соответствует уравнению для безвихревого поля $\langle \mathbf{v} \rangle$.

1.4. Самосогласованная задача.

Определение. Пусть функция $f(\mathbf{r}, t)$ и вектор-функция $\langle \mathbf{v} \rangle(\mathbf{r}, t)$ удовлетворяют уравнению (1.1). Будем называть эти функции сильно согласованными, если выполнены условия

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + f \langle \mathbf{v} \rangle = \text{rot } \mathbf{H}, \quad (1.69)$$

$$\text{div } \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = f(\mathbf{r}, t), \quad (1.70)$$

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \bar{\varepsilon} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \text{rot } \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \bar{\mu} \mathbf{H}(\mathbf{r}, t),$$

где $\bar{\varepsilon}$ и $\bar{\mu}$ — некоторые постоянные величины. В противном случае будем называть эти функции слабо согласованными.

Заметим, что при взятии дивергенции от уравнения (1.69) и учета (1.70) оно переходит в уравнение (1.1). В общем случае дивергенция от поля $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$ отлична от $f(\mathbf{r}, t)$ и имеет вид

$$\text{div } \mathbf{D} = \bar{\varepsilon} \text{div } \mathbf{E} = -\frac{\bar{\varepsilon}}{\gamma} \Delta \left(\frac{1}{2} |\langle \mathbf{v} \rangle|^2 - 2\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = -\bar{\varepsilon} \Delta \chi. \quad (1.71)$$

Рассмотрим примеры сильно и слабо согласованных функций $f(\mathbf{r}, t)$ и $\langle \mathbf{v} \rangle(\mathbf{r}, t)$.

Пример 1 (слабо согласованные функции). Пусть вектор-функция $\langle \mathbf{v} \rangle(\mathbf{r}, t)$ имеет вид

$$\langle \mathbf{v} \rangle(\mathbf{r}, t) = ate_x, \quad (1.72)$$

где a — постоянная величина. Из (1.72) следует, что функцию f как решение уравнения (1.1) можно найти методом характеристик. Действительно, уравнение (1.1) с учетом (1.72) принимает вид

$$f_t + atf_x = 0. \quad (1.73)$$

Следовательно,

$$\frac{dx}{dt} = at, \quad \xi(x, t) = x - x_0 - \frac{at^2}{2}. \quad (1.74)$$

Уравнения $\xi(x, t) = \text{const}$ задают характеристики, вдоль которых $f(x, t)$ будет постоянной. Действительно,

$$f(x, t) = F(\xi(x, t)),$$

$$F'\xi_t + atF'\xi_x = F'(\xi_t + at\xi_x) = F'(-at + at) = 0$$

при произвольной достаточно гладкой функции $F(\xi)$. Для определенности в качестве $F(\xi)$ возьмем

$$F(\xi) = e^{-\xi^2}, \quad f(x, t) = \exp \left[- \left(x - x_0 - \frac{at^2}{2} \right)^2 \right]. \quad (1.75)$$

Функции (1.72) и (1.75) удовлетворяют уравнению (1.1). Из (1.72) и (1.4), (1.7) следует, что

$$\varphi(x, t) = -\frac{atx}{2\alpha} + \text{const}, \quad \mathbf{A}(x, t) = \boldsymbol{\theta}. \quad (1.76)$$

Подставляя (1.75) и (1.76) в (1.47), получаем выражение для функции U :

$$\begin{aligned} -\beta U(x, t) &= \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \alpha \frac{\Delta \sqrt{f}}{\sqrt{f}} - \alpha |\nabla \varphi(\mathbf{r}, t)|^2 = \\ &= -\frac{ax}{2\alpha} - \frac{a^2 t^2}{4\alpha} - \alpha \exp \left(\frac{\xi^2}{2} \right) \exp \left(-\frac{\xi^2}{2} \right) (\xi_x^2 - \xi^2 \xi_x^2 + \xi \xi_{xx}), \end{aligned} \quad (1.77)$$

$$U(x, t) = \frac{ax}{2\alpha\beta} + \frac{a^2 t^2}{4\alpha\beta} + \frac{\alpha}{\beta} (1 - \xi(x, t)^2).$$

Функция $\Psi(x, t)$ в соответствии с (1.3), (1.6), (1.75), (1.76) имеет вид

$$\Psi(x, t) = C_0 \exp\left(-\frac{\xi(x, t)^2}{2} - i\frac{atx}{2\alpha}\right), \quad (1.78)$$

где $C_0 = \text{const}$. При этом функция (1.78) удовлетворяет уравнению (1.28), которое в данном случае принимает вид

$$\frac{i}{\beta} \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{\alpha}{\beta} \Delta \Psi + U \Psi. \quad (1.79)$$

Покажем, что функции (1.72) и (1.75) являются слабо согласованными. Проверим условие (1.70), найдя предварительно \mathbf{E} , например, по формуле (1.66):

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{\gamma} \left(\frac{\partial \langle \mathbf{v} \rangle}{\partial t} + \nabla \frac{|\langle \mathbf{v} \rangle|^2}{2} \right) = -\frac{a}{\gamma} \mathbf{e}_x, \quad (1.80)$$

или то же самое по формуле (1.56):

$$\mathbf{E} = -\frac{2\alpha\beta}{\gamma} \nabla \left(U + \frac{\alpha}{\beta} \left[\frac{\Delta \sqrt{f}}{\sqrt{f}} \right] \right) = -\frac{2\alpha\beta}{\gamma} \nabla \left(\frac{ax}{2\alpha\beta} + \frac{a^2 t^2}{4\alpha\beta} \right) = -\frac{a}{\gamma} \mathbf{e}_x. \quad (1.81)$$

В обоих случаях (1.80) и (1.81) получается один и тот же результат. Проверим условие (1.70), получим

$$\text{div } \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \bar{\varepsilon} \text{div } \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\bar{\varepsilon} \frac{a}{\gamma} \text{div } \mathbf{e}_x = 0 \neq f(x, t).$$

Таким образом, условие (1.70) не выполнено. Следовательно, функции (1.72) и (1.75) слабо согласованные.

Пример 2 (сильно согласованные функции). Рассмотрим пример эволюции функции плотности заряда однородно заряженного шара (см. разд. 2). В качестве вектор-функции $\langle \mathbf{v} \rangle(r, t)$ возьмем

$$\langle \mathbf{v} \rangle(r, t) = b(t)r \mathbf{e}_r, \quad (1.82)$$

где функция $b(t)$ подлежит определению. Из (1.82) следует, что

$$\varphi(r, t) = -\frac{b(t)}{4\alpha} r^2 + \text{const}, \quad \mathbf{A}(r, t) = \boldsymbol{\theta}. \quad (1.83)$$

В качестве функции f возьмем

$$f(r, t) = 3a(t), \quad (1.84)$$

где функция $a(t)$ подлежит определению. Подставляя представления (1.82) и (1.84) в уравнение (1.1), получим

$$\dot{a} + 3ab = 0. \quad (1.85)$$

Согласно (1.85) функция $a(t)$ может быть представлена, например, в виде

$$a(t) = C_0 \exp \left(-3 \int_{t_0}^t b d\tau \right). \quad (1.86)$$

Таким образом, зная функцию $b(t)$, можно найти функцию $a(t)$ и наоборот. В качестве поля \mathbf{D} возьмем

$$\mathbf{D}(r, t) = a(t)r \mathbf{e}_r. \quad (1.87)$$

Подставляя (1.87) в уравнение (1.69), получим уравнение (1.85). Подставляя (1.87) в условие (1.70) в силу (1.84), получаем верное тождество. Следовательно, функции (1.82) и (1.84) являются сильно согласованными. Для определения функции $a(t)$ воспользуемся уравнением (1.55), получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle \mathbf{v} \rangle}{\partial t} + (\langle \mathbf{v} \rangle, \nabla) \langle \mathbf{v} \rangle &= (\dot{b} + b^2)r \mathbf{e}_r = -\frac{\gamma}{\varepsilon} \mathbf{D} = -\frac{\gamma}{\varepsilon} a(t)r \mathbf{e}_r, \\ (\dot{b} + b^2) &= -\frac{\gamma}{\varepsilon} a. \end{aligned} \quad (1.88)$$

Выражая $b(t)$ из (1.85) и подставляя в (1.88), получим уравнение относительно $a(t)$:

$$3a\ddot{a} - 4\dot{a}^2 - 9\frac{\gamma}{\varepsilon}a^3 = 0. \quad (1.89)$$

Произведем в уравнении (1.89) замену

$$f(r, t) = 3a(t) = f_0 \left(\frac{R_0}{R(t)} \right)^3 = \frac{Q}{4\pi} \frac{1}{R(t)^3}, \quad (1.90)$$

где Q — полный заряд шара начального радиуса R_0 , а $f_0 = f(r, 0) = 3Q/(4\pi R_0^3)$ — начальная плотность заряда в шаре. При замене (1.90) уравнение (1.89) перейдет в уравнение (см. разд. 2):

$$\ddot{R} = \bar{\gamma} \frac{1}{R^2}, \quad (1.91)$$

где $\bar{\gamma} = -\gamma Q/(4\pi\varepsilon)$. Уравнение (1.91) имеет решение в виде (см. разд. 2)

$$t = \frac{R_0^{3/2}}{\sqrt{2\bar{\gamma}}} \left(\sqrt{\frac{R(t)}{R_0} \left(\frac{R(t)}{R_0} - 1 \right)} + \operatorname{arccch} \sqrt{\frac{R(t)}{R_0}} \right) \quad (1.92)$$

или

$$t = \frac{R_0^{3/2}}{\sqrt{2\bar{\gamma}}} \left(\sqrt{\left(\frac{f}{f_0}\right)^{1/3} \left(\left(\frac{f}{f_0}\right)^{1/3} - 1\right)} + \operatorname{arccch} \left(\frac{f}{f_0}\right)^{1/6} \right).$$

Заметим, что f внутри шара — постоянная величина и зависит только от времени (ср. с (1.90)). Функция $\Psi(r, t)$ представима в виде

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \sqrt{3a(t)} \exp\left(-i \frac{b(t)}{4\alpha} r^2\right) \quad (1.93)$$

и удовлетворяет уравнению (1.79), в котором U имеет вид

$$U(r, t) = -\frac{1}{\beta} \left\{ -\frac{r^2}{4\alpha} \dot{b} + \alpha \left[\frac{\Delta\sqrt{3a}}{\sqrt{3a}} - \frac{b^2 r^2}{4\alpha^2} \right] \right\} = \frac{r^2}{4\alpha\beta} (\dot{b} + b^2). \quad (1.94)$$

1.5. Уравнение движения центра масс. Усредним по пространственной координате уравнение (1.54):

$$\begin{aligned} \int f(\mathbf{r}, t) \frac{d\langle \mathbf{v} \rangle}{dt}(\mathbf{r}, t) d^3 r &= \\ &= -\gamma \int f(\mathbf{r}, t) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) d^3 r - \gamma \int f(\mathbf{r}, t) [\langle \mathbf{v} \rangle(\mathbf{r}, t), \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)] d^3 r. \end{aligned} \quad (1.95)$$

Упростим левую часть уравнения (1.95). Учитывая уравнение (1.1), распишем подынтегральную функцию, получим

$$f(\mathbf{r}, t) \frac{d\langle \mathbf{v} \rangle}{dt}(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial f\langle \mathbf{v} \rangle}{\partial t} + \langle \mathbf{v} \rangle \operatorname{div} [f\langle \mathbf{v} \rangle] + f(\langle \mathbf{v} \rangle, \nabla\langle \mathbf{v} \rangle). \quad (1.96)$$

В работах [32, 33] показано, что

$$\frac{d}{dt} [N(t)\langle\langle \mathbf{v} \rangle\rangle(t)] = N(t)\langle\langle \dot{\mathbf{v}} \rangle\rangle(t), \quad (1.97)$$

где

$$N(t) = \int f(\mathbf{r}, t) d^3 r = \int \bar{\Psi}(\mathbf{r}, t) \Psi(\mathbf{r}, t) d^3 r,$$

$$\langle \dot{\mathbf{v}} \rangle(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \frac{1}{f_2(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)} \int \dot{\mathbf{v}} f_3(\mathbf{r}, \mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}}, t) d^3 \dot{\mathbf{v}},$$

$$\begin{aligned} \langle\langle \dot{\mathbf{v}} \rangle\rangle(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{f_1(\mathbf{r}, t)} \int \dot{\mathbf{v}} f_3(\mathbf{r}, \mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}}, t) d^3 v d^3 \dot{v} = \\ &= \frac{1}{f_1(\mathbf{r}, t)} \int \langle \dot{\mathbf{v}} \rangle(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) f_2(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3 v, \end{aligned}$$

$$\langle\langle\dot{\mathbf{v}}\rangle\rangle(t) = \frac{1}{N(t)} \int \dot{\mathbf{v}} f_3(\mathbf{r}, \mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}}, t) d^3r d^3v d^3\dot{v}$$

при условии, что функции $f_1(\mathbf{r}, t)$, $f_2(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$, $f_3(\mathbf{r}, \mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}}, t)$ удовлетворяют соответствующим уравнениям из цепочки Власова. С учетом выражений (1.96)–(1.98)

$$\int \langle \mathbf{v} \rangle \operatorname{div}_r [\langle \mathbf{v} \rangle f] d^3r = - \int f(\langle \mathbf{v} \rangle, \nabla) \langle \mathbf{v} \rangle d^3r, \quad (1.98)$$

левая часть уравнения (1.95) принимает вид

$$\begin{aligned} \int f(\mathbf{r}, t) \frac{d\langle \mathbf{v} \rangle}{dt}(\mathbf{r}, t) d^3r &= \frac{\partial}{\partial t} \int f \langle \mathbf{v} \rangle d^3r + \int \langle \mathbf{v} \rangle \operatorname{div} [f \langle \mathbf{v} \rangle] d^3r + \\ &+ \int f(\langle \mathbf{v} \rangle, \nabla) \langle \mathbf{v} \rangle d^3r = \frac{d}{dt} [N(t) \langle\langle \mathbf{v} \rangle\rangle(t)] - \int f(\langle \mathbf{v} \rangle, \nabla) \langle \mathbf{v} \rangle d^3r + \\ &+ \int f(\langle \mathbf{v} \rangle, \nabla) \langle \mathbf{v} \rangle d^3r = N(t) \langle\langle \dot{\mathbf{v}} \rangle\rangle(t). \end{aligned} \quad (1.99)$$

Преобразуем правую часть уравнения (1.95), получим

$$\begin{aligned} \int f(\mathbf{r}, t) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) d^3r + \int f(\mathbf{r}, t) [\langle \mathbf{v} \rangle(\mathbf{r}, t), \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)] d^3r = \\ = N(t) (\langle \mathbf{E} \rangle(t) + \langle [\langle \mathbf{v} \rangle, \mathbf{B}] \rangle(t)). \end{aligned} \quad (1.100)$$

Таким образом, уравнение (1.95) принимает вид

$$\langle\langle \dot{\mathbf{v}} \rangle\rangle(t) = -\gamma (\langle \mathbf{E} \rangle(t) + \langle [\langle \mathbf{v} \rangle, \mathbf{B}] \rangle(t)). \quad (1.101)$$

Выражение $\langle \mathbf{E} \rangle(t)$ можно упростить. В силу (1.56) получаем

$$\begin{aligned} \int f(\mathbf{r}, t) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) d^3r = \int f \left\{ -\nabla \frac{1}{\gamma} \left[\frac{|\gamma \mathbf{A}|^2}{2} + 2\alpha\beta U \right] - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right\} d^3r - \\ - \frac{2\alpha^2}{\gamma} \int f \nabla \left(\frac{\Delta |\Psi|}{|\Psi|} \right) d^3r. \end{aligned} \quad (1.102)$$

Покажем, что второй интеграл в (1.102) равен нулю. Перепишем второй интеграл в (1.102) в виде

$$\int f \nabla \left[\frac{\Delta |\Psi|}{|\Psi|} \right] d^3r = -2 \int \Delta |\Psi| |\nabla |\Psi|| d^3r. \quad (1.103)$$

Введем обозначения $w \stackrel{\text{det}}{=} |\Psi|$, $\mathbf{Y} \stackrel{\text{det}}{=} -\nabla w$, $\sigma \stackrel{\text{det}}{=} \operatorname{div} \mathbf{Y} = -\Delta w$, тогда

$$\int \Delta |\Psi| |\nabla |\Psi|| d^3r = \int \sigma \mathbf{Y} d^3r = \int \mathbf{Y} \operatorname{div} \mathbf{Y} d^3r. \quad (1.104)$$

Покажем, что интеграл (1.104) равен нулю. Действительно, в силу определения вектора \mathbf{Y} следует, что $\text{rot } \mathbf{Y} = 0$. Тогда для интеграла (1.104) должна быть справедлива формула (1.98) при $f \equiv 1$. В формуле (1.98) воспользуемся дополнительно выражением (1.52), получим

$$\begin{aligned} (\mathbf{Y}, \nabla) \mathbf{Y} &= \frac{1}{2} \nabla |\mathbf{Y}|^2 - [\mathbf{Y}, \text{rot } \mathbf{Y}] = \frac{1}{2} \nabla |\mathbf{Y}|^2, \\ \int \mathbf{Y} \text{div } \mathbf{Y} d^3r &= -\frac{1}{2} \int \nabla Y^2 d^3r = -\frac{1}{2} \mathbf{e}_x \int \frac{\partial Y^2}{\partial x} dx \int dy \int dz - \frac{1}{2} \mathbf{e}_y \times \\ &\times \int dx \int \frac{\partial Y^2}{\partial y} dy \int dz - \frac{1}{2} \mathbf{e}_z \int dx \int dy \int \frac{\partial Y^2}{\partial z} dz = \\ &= -\frac{1}{2} \mathbf{e}_x \int dy \int dz [Y^2]_{-\infty}^{+\infty} - \frac{1}{2} \mathbf{e}_y \int dx \int dz [Y^2]_{-\infty}^{+\infty} - \frac{1}{2} \mathbf{e}_z \times \\ &\times \int dx \int dy [Y^2]_{-\infty}^{+\infty} = 0, \end{aligned} \quad (1.105)$$

что и требовалось доказать. В результате выражение (1.102) примет вид

$$\begin{aligned} \int f(\mathbf{r}, t) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) d^3r &= \int f \left\{ -\nabla \frac{2\alpha\beta}{\gamma} \left[\frac{1}{2\alpha\beta} \frac{|\gamma \mathbf{A}|^2}{2} + U \right] - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right\} d^3r, \\ N(t) \langle \mathbf{E} \rangle (t) &= \int f \left\{ -\nabla \frac{2\alpha\beta}{\gamma} V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right\} d^3r, \end{aligned} \quad (1.106)$$

т. е. квантовое давление ∇Q не вносит вклад на макроуровне. В случае безвихревого поля уравнение (1.101) имеет вид

$$-\frac{1}{2\alpha\beta} \langle \langle \dot{\mathbf{v}} \rangle \rangle (t) = -\langle \nabla V \rangle (t). \quad (1.107)$$

2. РЕШЕНИЯ В ВИДЕ УДАРНОЙ ВОЛНЫ

Построим методом характеристик точные решения задачи об эволюции функции плотности заряда или массы для областей в форме шара или бесконечного цилиндра. Начальное распределение плотности заряда или массы для области в виде шара имеет сферическую симметрию, т. е. присутствует зависимость только от радиуса r . Для области в виде бесконечного цилиндра начальное распределение плотности массы или заряда имеет азимутальную и продольную симметрию, поэтому имеется зависимость только от радиуса r .

2.1. Электрическое взаимодействие. Рассмотрим систему, состоящую из электрических зарядов q с массой m . Пусть известна начальная плотность распределения заряда $\rho_0(r)$ такой системы. Начальная скорость частиц в системе считается равной нулю. Будем решать задачу об эволюции функции плотности заряда $\rho_s(r, t)$ или $\rho_c(r, t)$ указанной системы. Индекс « s » соответствует сферически-симметричному случаю, а индекс « c » — цилиндрически-симметричному случаю.

В силу симметрии рассматриваемой системы на заряженные частицы оказывает влияние только сила кулоновского отталкивания. При решении задачи будем предполагать, что заряженные сферические слои с течением времени между собой не пересекаются. По теореме Гаусса для любого радиуса r электрическое поле на поверхности сферы радиуса r представимо в виде

$$\mathbf{D}_s(r, t) = \mathbf{e}_r \frac{1}{r^2} \int_0^r \rho_s(x, t) x^2 dx, \quad \mathbf{D}_c(r, t) = \mathbf{e}_r \frac{1}{r} \int_0^r \rho_c(x, t) x dx. \quad (2.1)$$

Запишем второй закон Ньютона для заряда, находящегося на поверхности шара (цилиндра) радиуса R :

$$\begin{aligned} \ddot{R} &= \frac{q}{m\varepsilon_0} D_s(R, t) = \frac{q}{m\varepsilon_0} \frac{1}{R^2} \int_0^R \rho_s(x, t) x^2 dx, \\ \ddot{R} &= \frac{q}{m\varepsilon_0} D_c(R, t) = \frac{q}{m\varepsilon_0} \frac{1}{R} \int_0^R \rho_c(x, t) x dx, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где ε_0 — диэлектрическая постоянная. Так как сферические (цилиндрические) слои не пересекаются, то заряд, содержащийся в шаре (цилиндре) радиуса $R_0 = R(t = 0)$, остается неизменным на протяжении всего движения. Величина такого заряда может быть найдена по формуле

$$\begin{aligned} Q_s(R_0) = Q_s(R(t)) &= 4\pi \int_0^{R_0} \rho_s(x, 0) x^2 dx = 4\pi \int_0^{R(t)} \rho_s(x, t) x^2 dx, \\ Q_c(R_0) = Q_c(R(t)) &= 2\pi \int_0^{R_0} \rho_c(x, 0) x dx = 2\pi \int_0^{R(t)} \rho_c(x, t) x dx. \end{aligned} \quad (2.3)$$

С учетом (2.3) выражения (2.2) переписутся в виде

$$\ddot{R} = \frac{q}{m\varepsilon_0} \frac{Q_s(R_0)}{4\pi R^2}, \quad \ddot{R} = \frac{q}{m\varepsilon_0} \frac{Q_c(R_0)}{2\pi R}. \quad (2.4)$$

В результате получаем задачи Коши для функции $R(t)$:

$$\begin{cases} \ddot{R} = \gamma_s \frac{1}{R^2}, & \ddot{R} = \gamma_c \frac{1}{R}, \\ R|_{t=0} = R_0, & R|_{t=0} = R_0, \\ \dot{R}|_{t=0} = 0, & \dot{R}|_{t=0} = 0, \end{cases} \quad (2.5)$$

где $\gamma_s = q/(4\pi\varepsilon_0 m) Q_s(R_0)$, $\gamma_c = q/(2\pi\varepsilon_0 m) Q_c(R_0)$ — постоянные величины.

Решение. Найдем решение задач (2.5). Для этого умножим обе части дифференциального уравнения из (2.5) на R' и проинтегрируем по t , получим

$$(\dot{R})^2 = C_1^s - \gamma_s \frac{2}{R}, \quad (\dot{R})^2 = 2\gamma_c \ln R + C_1^c, \quad (2.6)$$

где C_1 — постоянная величина. Учитывая начальное условие $R'(0) = 0$, получим $C_1^s = \gamma_s 2/R_0$, $C_1^c = -2\gamma_c \ln R_0$. В результате выражение (2.6) примет вид

$$\frac{1}{\sqrt{2\gamma_s}} \frac{dR}{\sqrt{\frac{1}{R_0} - \frac{1}{R}}} = dt, \quad \frac{1}{\sqrt{2\gamma_c}} \frac{dR}{\sqrt{\ln \frac{R}{R_0}}} = dt. \quad (2.7)$$

Интегрируя (2.7) и учитывая начальное условие $R(0) = R_0$, получаем выражения, задающие неявно зависимость радиуса сферического (цилиндрического) слоя от времени:

$$t = \frac{R_0^{3/2}}{\sqrt{2\gamma_s(R_0)}} \left(\sqrt{\frac{R}{R_0} \left(\frac{R}{R_0} - 1 \right)} + \operatorname{arccch} \sqrt{\frac{R}{R_0}} \right), \quad (2.8)$$

$$\frac{\sqrt{2\gamma_c} t}{2R_0} = \int_0^{\sqrt{\ln(R/R_0)}} e^{l^2} dl.$$

С другой стороны, выражения (2.8) могут быть рассмотрены как уравнения характеристик, соответствующих разным начальным условиям R_0 , $\gamma(R_0)$. При этом полученное решение имеет смысл, если характеристики не пересекаются, что соответствует непересекающимся сферическим (цилиндрическим) слоям. Каждый сферический (цилиндрический) слой характеризуется стартовым положением R_0 , количеством заряда $Q_s(R_0)$, $Q_c(R_0)$, содержащимся внутри сферы (цилиндра) радиуса R_0 , и характеристикой (2.8), описывающей его движение со временем.

Введем обозначения

$$F_s(x) = \sqrt{x(x-1)} + \operatorname{arccch} \sqrt{x}, \quad F_c(x) = \int_0^{\sqrt{\ln(x)}} e^{l^2} dl, \tag{2.9}$$

$$\lambda_s(R_0) = \frac{\sqrt{2\gamma_s(R_0)}}{R_0^{3/2}}, \quad \lambda_c(r) = \frac{\sqrt{2\gamma_c(r)}}{2R}.$$

Функцию, обратную к $F(x)$, обозначим $P(F) = x$, тогда выражения (2.8) с учетом обозначений (2.9) переписутся в виде

$$R(t) = R_0 P(\lambda(R_0)t). \tag{2.10}$$

Для нахождения эволюции функции плотности оценим величину $\Delta Q/\Delta R$. ΔQ — это заряд между двумя сферическими (цилиндрическими) слоями с радиусами r и $r + \Delta r$ соответственно. С течением времени слой с начальным радиусом r перейдет в слой с радиусом $R_1(t) = rP(\lambda(r)t)$, а слой с радиусом $r + \Delta r$ перейдет в слой с радиусом $R_2(t) = (r + \Delta r)P(\lambda(r + \Delta r)t)$ в соответствии с формулой (2.10). В силу того, что слои не пересекаются, величина ΔQ должна оставаться постоянной со временем, следовательно,

$$\Delta Q_s = 4\pi \int_r^{r+\Delta r} x^2 \rho_0(x) dx = 4\pi \int_{R_1(t)}^{R_2(t)} x^2 \rho_s(x, t) dx = 4\pi \rho_0(r)r^2 \Delta r + O(\Delta r^2), \tag{2.11}$$

$$\Delta Q_c = 2\pi \int_r^{r+\Delta r} x \rho_c(x) dx = 2\pi \int_{R_1(t)}^{R_2(t)} x \rho_c(x, t) dx = 2\pi \rho_0(r)r \Delta r + O(\Delta r^2).$$

Для величины ΔR справедливо соотношение

$$\begin{aligned} \Delta R(t) &= R_2(t) - R_1(t) = (r + \Delta r)P(\lambda(r + \Delta r)t) - rP(\lambda(r)t) = \\ &= \Delta r \left. \frac{d}{dx}(xP(\lambda(x)t)) \right|_{x=r} + O(\Delta r^2). \end{aligned} \tag{2.12}$$

Подставляя выражения (2.11) и (2.12) в соотношение $\Delta Q/\Delta R$ и учитывая (2.3), получим

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta R \rightarrow 0} \frac{\Delta Q_s}{\Delta R} &= \frac{dQ_s}{dR} = \frac{4\pi \rho_0(r)r^2}{P_s(\lambda_s(r)t) + rP'_s(\lambda_s(r)t)\lambda'_s(r)t} = 4\pi \rho_s(R, t) R^2(t), \\ \lim_{\Delta R \rightarrow 0} \frac{\Delta Q_c}{\Delta R} &= \frac{dQ_c}{dR} = \frac{2\pi \rho_0(r)r}{P_c(\lambda_c(r)t) + rP'_c(\lambda_c(r)t)\lambda'_c(r)t} = 2\pi \rho_c(R, t) R(t) \end{aligned} \tag{2.13}$$

или

$$\begin{aligned}\rho_s(r, t) &= \frac{1}{P_s^2(\lambda_s(r)t)} \frac{\rho_0(r)}{[P_s(\lambda_s(r)t) + rP'_s(\lambda_s(r)t)\lambda'_s(r)t]}, \\ \rho_c(r, t) &= \frac{1}{P_c(\lambda_c(r)t)} \frac{\rho_0(r)}{[P_c(\lambda_c(r)t) + rP'_c(\lambda_c(r)t)\lambda'_c(r)t]},\end{aligned}\quad (2.14)$$

где в соответствии с (2.10) величина $R(r, t) = rP(\lambda(r)t)$. Найдем производные $P'(F)$ и $\lambda'(r)$:

$$P(F) = x \Rightarrow P'(F)F'(x) = 1 \Rightarrow P'(F) = \frac{1}{F'(x)}. \quad (2.15)$$

Учитывая (2.9), находим $F'(x)$:

$$\begin{aligned}F'_s(x) &= \frac{2x-1}{2\sqrt{x(x-1)}} + \frac{1}{2\sqrt{x-1}\sqrt{x}} = \frac{x}{\sqrt{x(x-1)}} = \frac{P_s}{\sqrt{P_s(P_s-1)}}, \\ F'_c(x) &= e^{(\sqrt{\ln x})^2} (\sqrt{\ln x})' = \frac{1}{2\sqrt{\ln x}} = \frac{1}{2\sqrt{\ln P_c}}.\end{aligned}\quad (2.16)$$

В результате производная $P'(F)$ представима в виде

$$P'_s(F_s) = \sqrt{\frac{P_s(F_s) - 1}{P_s(F_s)}}, \quad P'_c(F_c) = 2\sqrt{\ln P_c(F_c)}. \quad (2.17)$$

Учитывая выражения (2.9) для $\lambda(r)$, находим производную $\lambda'(r)$:

$$\lambda'_s(r) = \frac{\gamma'_s(r)}{\sqrt{2\gamma_s(r)}} \frac{1}{r^{3/2}} - \frac{3}{2} \frac{\sqrt{2\gamma_s(r)}}{r^{5/2}}, \quad \lambda'_c(r) = -\frac{\sqrt{2\gamma_c}}{2r^2} + \frac{\gamma'_c}{2r\sqrt{2\gamma_c}}. \quad (2.18)$$

Так как производная $\gamma'(r)$ имеет вид

$$\gamma'_s(r) = \alpha \frac{r^2}{\varepsilon_0} \rho_0(r), \quad \gamma'_c(r) = \alpha \frac{r}{\varepsilon_0} \rho_0(r), \quad (2.19)$$

где $\alpha = q/m$, то для $\lambda'(r)$ окончательно получаем выражение

$$\begin{aligned}\lambda'_s(r) &= \frac{\alpha r^2 \rho_0(r)}{\varepsilon_0 \sqrt{2\gamma_s(r)}} \frac{1}{r^{3/2}} - \frac{3}{2} \frac{\sqrt{2\gamma_s(r)}}{r^{5/2}} = \frac{1}{r} \left[\frac{\alpha \rho_0(r)}{\varepsilon_0 \lambda_s(r)} - \frac{3}{2} \lambda_s(r) \right], \\ \lambda'_c(r) &= \frac{\alpha r \rho_0(r)}{\varepsilon_0 \sqrt{2\gamma_c(r)}} \frac{1}{2r^2} - \frac{\sqrt{2\gamma_c(r)}}{2r} = \frac{1}{r} \left[\frac{\alpha \rho_0(r)}{4\varepsilon_0 \lambda_c(r)} - \lambda_c(r) \right].\end{aligned}\quad (2.20)$$

Подставляя выражения (2.17) и (2.20) в (2.14), получим окончательную формулу для плотности заряда:

$$\rho_s(r, t) = \frac{1}{P_s^2(\lambda_s(r)t)} \frac{\rho_0(r)}{\left[P_s(\lambda_s(r)t) + t \sqrt{\frac{P_s(\lambda_s(r)t) - 1}{P_s(\lambda_s(r)t)} \left[\frac{\alpha \rho_0(r)}{\varepsilon_0 \lambda_s(r)} - \frac{3}{2} \lambda_s(r) \right]} \right]}, \quad (2.21)$$

$$\rho_c(R, t) = \frac{1}{P_c(\lambda_c(r)t)} \frac{\rho_0(r)}{\left[P_c(\lambda_c(r)t) + 2t \sqrt{\ln P_c(\lambda_c(r)t)} \left[\frac{\alpha \rho_0(r)}{4\varepsilon_0 \lambda_c(r)} - \lambda_c(r) \right]} \right]},$$

где $\rho(R, t) = \rho(rP(\lambda(r)t), t)$. Формула (2.21) задает эволюцию функции плотности заряда с начальным распределением $\rho_0(r)$ при условии, что сферические (цилиндрические) слои не пересекаются.

Найдем скорость распространения сферической (цилиндрической) волны. Продифференцируем выражение (2.10) по времени:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} R_s(t) &= V_s(t) = R_0 \lambda_s \sqrt{\frac{P_s(\lambda_s t) - 1}{P_s(\lambda_s t)}}, \\ \frac{d}{dt} R_c(t) &= V_c(t) = R_0 \lambda_c 2 \sqrt{\ln P_c(\lambda_c t)}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Определим максимально возможную скорость распространения фронта. Особый интерес представляют начальные распределения плотности заряда, не приводящие к пересечению характеристик, например, однородно заряженный шар (цилиндр). В этом случае полученное выражение (2.22) будет справедливо всюду. Функция $P(x)$ является монотонно возрастающей. Минимальным значением функции $P(x)$ является значение 1 в точке 0, т. е. $P(0) = 1$. Поэтому рассмотрим предел от выражения (2.22) при $t \rightarrow +\infty$:

$$\begin{aligned} V_{\max}^s &= \lim_{t \rightarrow +\infty} V_s(t) = R_0 \lambda_s \lim_{t \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{P_s(\lambda_s t) - 1}{P_s(\lambda_s t)}} = \\ &= R_0 \lambda_s \lim_{t \rightarrow +\infty} \sqrt{1 - \frac{1}{P(\lambda_s t)}} = R_0 \lambda_s, \end{aligned} \quad (2.23)$$

$$V_{\max}^c = \lim_{t \rightarrow +\infty} V_c(t) = 2R_0 \lambda_c \lim_{t \rightarrow +\infty} \sqrt{\ln P_c(\lambda_c t)} = +\infty.$$

На рис. 1 и 2 показаны зависимость скорости от времени для различных сферических и цилиндрических слоев соответственно.

Из (2.23) следует неограниченность максимальной скорости для цилиндрической волны V_{\max}^c и ограниченность максимальной скорости распространения фронта сферической волны V_{\max}^s .

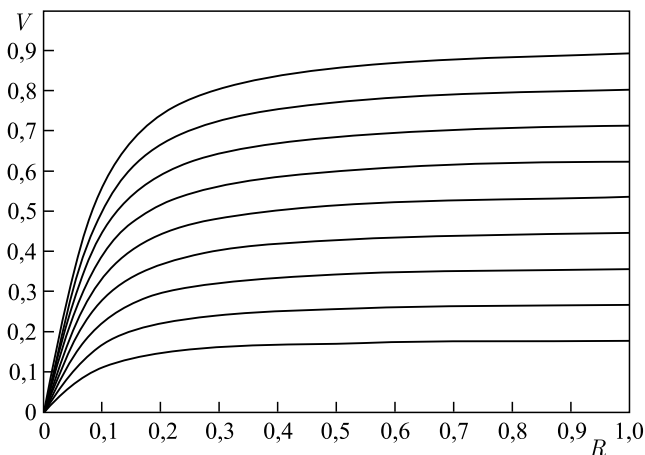


Рис. 1. Зависимость скоростей сферических слоев от времени для однородно заряженного шара

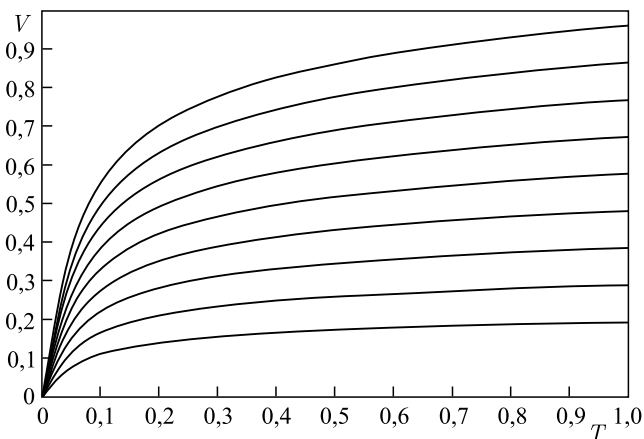


Рис. 2. Скорости цилиндрических слоев для однородно заряженного цилиндра

Такая существенная разница между цилиндрической и сферической областями вызвана тем, что сферическая область имеет скорость спада ускорения $\sim 1/R^2$, что являлось достаточным для существования ограниченности скорости распространения волны. В цилиндрической области ускорение спадает с меньшей скоростью $\sim 1/R$, что является, по всей видимости, недостаточным для существования ограниченности скорости распространения волны в двумерном случае. Порядок $\sim 1/R^2$, $\sim 1/R$, в свою очередь, определяется

размерностью пространства, в котором решается задача. Для цилиндрической области задача фактически решается для двумерного пространства. С физической точки зрения неограниченность скорости V_{\max}^c связана с ограничениями классического (нерелятивистского) приближения.

Перепишем выражение (2.23) для сферического случая в виде

$$V_s(t) = V_{\max}^s \sqrt{\frac{P_s(\lambda_s t) - 1}{P_s(\lambda_s t)}}. \quad (2.24)$$

Выразим из (2.24) функцию P_s через V_s и V_{\max}^s , получим

$$P_s(\lambda_s t) = \frac{1}{1 - \beta^2}, \quad \beta = \frac{V_s}{V_{\max}^s}. \quad (2.25)$$

Подставив выражение (2.25) в (2.10), получим

$$R_s(t) = \frac{R_0}{1 - \left[\frac{V_s(t)}{V_{\max}^s} \right]^2}. \quad (2.26)$$

Отметим, что максимально возможную скорость можно определить исходя из закона сохранения энергии. В начальный момент времени система находится в состоянии покоя, поэтому существует только потенциальная энергия электрического поля заряженной системы. Такая потенциальная энергия может быть найдена как работа электрического поля по переносу заряда q с минимального расстояния r_{\min} на бесконечность:

$$U = A = \int_{r_{\min}}^{+\infty} F dr = \int_{r_{\min}}^{+\infty} \frac{qQ}{r^2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} dr = -\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \Big|_{r_{\min}}^{+\infty} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_{\min}}, \quad (2.27)$$

где Q — заряд, содержащийся в сфере радиуса R_0 . Здесь специально предполагается, что $r_{\min} \neq R_0$ по причине, которая будет описана ниже. При $t \rightarrow +\infty$ вся потенциальная энергия должна переходить в кинетическую $T = (m_q [V_{\max}^s]^2)/2$. Приравнивая кинетическую и потенциальную энергию, получим формулу для максимальной скорости V_{\max}^s , выраженную через начальное минимальное расстояние r_{\min} :

$$\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_{\min}} = \frac{m_q [V_{\max}^s]^2}{2} \Rightarrow V_{\max}^s = \sqrt{\frac{qQ}{2\pi\epsilon_0 m_q r_{\min}}}. \quad (2.28)$$

Рассмотрим вопрос о минимально возможном расстоянии r_{\min} . В классической электродинамике есть понятие «классического радиуса электрона»

(КРЭ). Как известно, эта величина имеет вид

$$r_0 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e c^2}, \quad (2.29)$$

где c — скорость света в вакууме. Формула (2.29) получается из приравнивания потенциальной энергии электрического поля электрона к энергии покоя электрона $m_e c^2$.

Если размер сферы R_0 , в которой содержится заряд Q , значительно превышает КРЭ, т. е. $R_0 \gg r_0$, то в формуле (2.29) можно взять $r_{\min} = R_0$. Рассмотрим случай, когда $R_0 = r_0$ и $Q = q = e$, тогда логично в качестве минимального расстояния r_{\min} взять $2r_0$, так как минимальное расстояние между центрами двух одинаковых сфер — два их радиуса. Подставляя $r_{\min} = 2r_0$ в формулу (2.29) для максимальной скорости V_{\max}^s , получим

$$V_{\max}^s = c. \quad (2.30)$$

Если формально подставить (2.30) в (2.26), то получим

$$R_s = \frac{R_0}{1 - V_s^2/c^2}. \quad (2.31)$$

Конечно, выражение (2.31) получено в предположениях классики без учета релятивизма. Тем не менее факт существования максимальной скорости распространения фронта волны является корректным. С физической точки зрения картина выглядит следующим образом. В начальный момент времени плотность заряда в шаре является максимальной. Если плотность заряда велика, значит, и создаваемое электрическое поле также велико. Если электрическое поле велико, следовательно, и сила Кулона, действующая на заряды, максимальна. Сила напрямую связана с ускорением через второй закон Ньютона. Поэтому в начальный момент времени заряженные частицы имеют максимальное ускорение. Ускорение приводит к росту скорости. По мере расширения шара плотность заряда в нем падает, следовательно, уменьшается сила Кулона и ускорение стремится к нулю. В результате скорость выходит на постоянное значение V_{\max}^s , так как ускорения уже почти нет.

Проиллюстрируем полученные результаты для сферически-симметрично-го начального распределения плотности заряда $\rho_0(r)$.

2.1.1. Однородное распределение начальной плотности заряда. Пусть плотность $\rho_0(r) = \text{const}$. Найдем $\lambda_s(r)$ при $\rho_s(R, 0) = \rho_0 = \text{const}$ (здесь учтено, что $R|_{t=0} = rP_s(\lambda(r)t)|_{t=0} = r$), получим

$$\gamma_s(r) = \frac{Q(r)}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{m} = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \frac{q}{m} \int_0^r x^2 dx = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \frac{\alpha r^3}{3}, \quad (2.32)$$

$$\lambda_s(r) = \frac{\sqrt{2\gamma_s(r)}}{r^{3/2}} = \sqrt{\frac{2}{3} \frac{\alpha\rho_0}{\varepsilon_0}}. \quad (2.33)$$

Из выражения (2.33) видно, что $\lambda_s(r)$ не зависит от r , т.е. является постоянной величиной. Подставив (2.33) в (2.21), получим

$$\rho_s(r, t) = \frac{\rho_0}{P_s^3 \left(\sqrt{\frac{2}{3} \frac{\alpha\rho_0}{\varepsilon_0}} t \right)}. \quad (2.34)$$

Выражение (2.34) задает эволюцию функции плотности однородно заряженного в начальный момент шара. Как видно из (2.34), плотность заряда внутри шара остается однородной (постоянной), т.е. не зависит от координаты, а зависит только от времени. На рис.3 показана эволюция функции плотности заряда (2.34).

Графики характеристик (2.10) для случая однородно заряженного шара представлены на рис.4. Характеристики не пересекаются, что соответствует

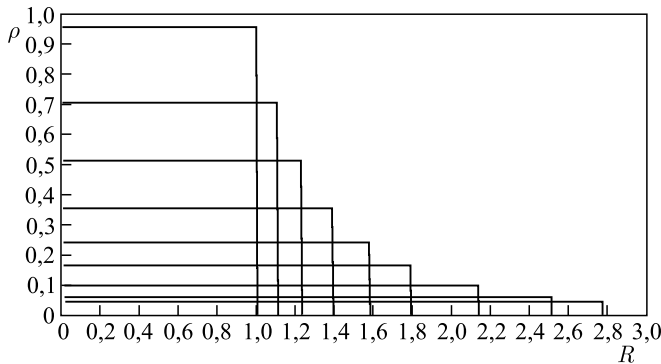


Рис. 3. Эволюция функции плотности заряда для случая однородно заряженного шара

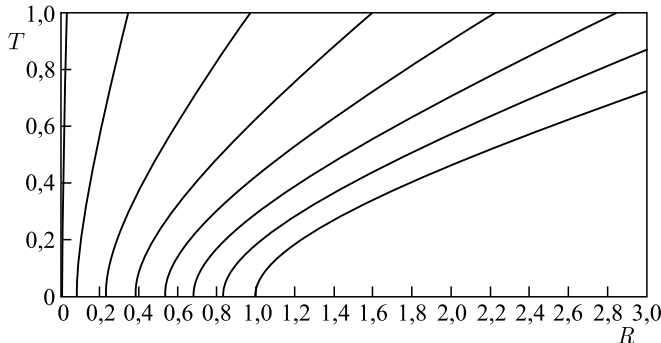


Рис. 4. Характеристики для случая однородно заряженного шара

сделанному предположению о непересечении сферических слоев заряженного шара.

Уравнение характеристик (2.10) можно переписать без функции P в виде

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\alpha \rho_0}{\varepsilon_0} t &= \left(\sqrt{\left(\frac{\rho_0}{\rho_s}\right)^{1/3} \left(\left(\frac{\rho_0}{\rho_s}\right)^{1/3} - 1 \right)} + \operatorname{arcch} \left(\frac{\rho_0}{\rho_s}\right)^{1/6} \right) = \\ &= F \left(\left(\frac{\rho_0}{\rho_s}\right)^{1/3} \right). \end{aligned} \quad (2.35)$$

Выражение (2.35) дает в явном виде зависимость между временем и плотностью заряда шара.

2.1.2. *Логнормальное распределение начальной плотности заряда.* Рассмотрим распределение плотности заряда по закону

$$\rho_0(r) = \frac{Q_{\text{tot}}}{2\pi r^2} \rho_n(2r), \quad \rho_n(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma r} \exp \left[-\frac{(\ln(r) - \mu)^2}{2\sigma^2} \right], \quad (2.36)$$

где μ , σ , Q_{tot} — постоянные величины. Найдем $Q_s(R_0)$, для этого проинтегрируем выражение (2.26) по объему шара радиуса R_0 , получим

$$\begin{aligned} Q_s(R_0) &= 4\pi \int_0^{R_0} x^2 \frac{Q_{\text{tot}}}{2\pi x^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma 2x} \exp \left[-\frac{(\ln(2x) - \mu)^2}{2\sigma^2} \right] dx = \\ &= \frac{Q_{\text{tot}}}{2} \left(1 + \operatorname{erf} \left(\frac{\ln(2R_0) - \mu}{\sigma\sqrt{2}} \right) \right), \end{aligned} \quad (2.37)$$

где $\operatorname{erf}(x) = 2/\sqrt{\pi} \int_0^x e^{-l^2} dl$. Используя (2.37), получим выражение для $\lambda_s(r)$:

$$\lambda_s(r) = \frac{\sqrt{2\gamma_s(r)}}{r^{3/2}} = \sqrt{\frac{\alpha Q_{\text{tot}}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \left(1 + \operatorname{erf} \left(\frac{\ln(2r) - \mu}{\sigma\sqrt{2}} \right) \right)}. \quad (2.38)$$

Подставляя выражения (2.38) и (2.36) в формулу (2.31), получим окончательное выражение, описывающее эволюцию функции плотности заряда, для случая начального распределения плотности заряда в виде нормального логарифмического распределения.

Уравнение характеристик (2.10) примет вид

$$t = \frac{R_0^{3/2}}{\sqrt{\frac{\alpha Q_{\text{tot}}}{4\pi\varepsilon_0} \left(1 + \operatorname{erf} \left(\frac{\ln(2R_0) - \mu}{\sigma\sqrt{2}} \right) \right)}} \left(\sqrt{\frac{R}{R_0} \left(\frac{R}{R_0} - 1 \right)} + \operatorname{arcch} \sqrt{\frac{R}{R_0}} \right). \quad (2.39)$$

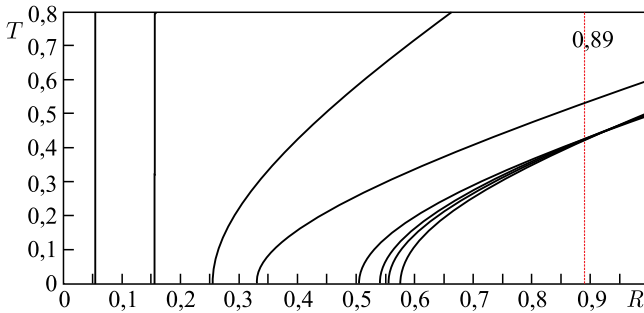


Рис. 5. Характеристики для случая нормального логарифмического распределения

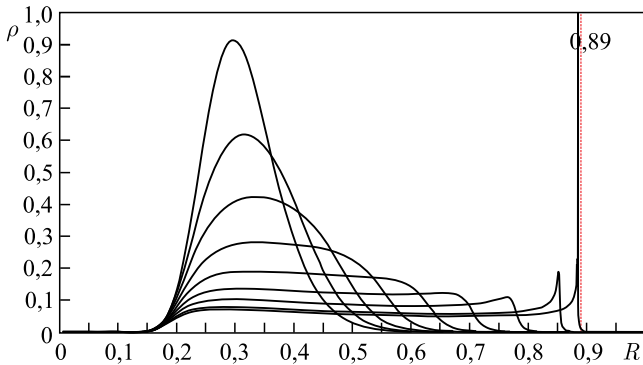


Рис. 6. Эволюция функции плотности заряда для случая нормального логарифмического распределения

На рис. 5 представлены графики характеристик (2.39). Из сравнения рис. 4 и 5 видно принципиальное отличие в поведении характеристик, а именно, на рис. 5 характеристики пересекаются. На рис. 6 представлены графики плотности заряда в различные моменты времени. Пересечение характеристик приводит к бесконечному увеличению плотности заряда и к возможному появлению ударной волны.

Поэтому решение (2.31), полученное в предположении непересечения сферических слоев (или характеристик (2.10)), имеет смысл до момента возникновения пересечения характеристик (см. рис. 5). Отметим, что похожие графики (см. рис. 3–6) получаются и для цилиндрически-симметричных распределений.

2.2. Гравитационное взаимодействие. Рассмотрим систему, состоящую из частиц с массой m . Пусть известна начальная плотность распределения

массы $\rho_0(r)$ такой системы. Начальная скорость частиц в системе считается равной нулю. Будем решать задачу об эволюции функции плотности массы $\rho(r, t)$ указанной системы. В силу симметрии рассматриваемой системы на частицы, обладающие массой, оказывает влияние только гравитационная сила притяжения, направленная по радиусу. При решении задачи будем предполагать, что массовые сферические (цилиндрические) слои с течением времени между собой не пересекаются. Запишем аналог теоремы Гаусса для гравитационного поля. В качестве напряженности гравитационного поля будет выступать ускорение \mathbf{g} :

$$\operatorname{div} \mathbf{G} = -\rho, \quad \mathbf{G} = v_0 \mathbf{g}, \quad v_0 = \frac{1}{4\pi k_g}, \quad (2.40)$$

где k_g — гравитационная постоянная Ньютона. Интегрируя (2.40) по объему V с поверхностью S и применяя теорему Остроградского–Гаусса, получим теорему Гаусса для гравитационного поля:

$$\int_S \mathbf{G} \, ds = - \int_V \rho \, d\omega = -M, \quad (2.41)$$

где M — масса, содержащаяся в объеме V , ограниченном поверхностью S . В случае сферически-симметричного распределения плотности массы $\rho_s(r, t)$ вектор \mathbf{G} будет перпендикулярным к сферической поверхности S , ограничивающей некоторую массу M . В результате формула (2.41) примет вид

$$G_s(r, t) = \frac{1}{r^2} \int_0^r \rho_s(x, t) x^2 \, dx, \quad G_c(r, t) = \frac{1}{r} \int_0^r \rho_c(x, t) x \, dx. \quad (2.42)$$

Запишем второй закон Ньютона для массы m , находящейся на поверхности шара радиуса R :

$$R_{tt} = -\frac{G_s(r, t)}{v_0} = -\frac{1}{v_0 R^2} \int_0^R \rho_s(x, t) x^2 \, dx, \quad (2.43)$$

$$R_{tt} = -\frac{G_c(r, t)}{v_0} = -\frac{1}{v_0 R} \int_0^R \rho_c(x, t) x \, dx.$$

Знак « \leftarrow » указывает на движение к началу координат. Так как сферические (цилиндрические) слои не пересекаются, то масса, содержащаяся в шаре (цилиндре) радиуса $R_0 = R(t = 0)$, остается неизменной на протяжении всего

движения. Величина такой массы может быть найдена по формуле

$$M_s(R_0) = 4\pi \int_0^{R_0} \rho_s(x, 0) x^2 dx = 4\pi \int_0^{R(t)} \rho_s(x, t) x^2 dx, \quad (2.44)$$

$$M_c(R_0) = 2\pi \int_0^{R_0} \rho_c(x, 0) x dx = 2\pi \int_0^{R(t)} \rho_c(x, t) x dx.$$

Учитывая (2.44), выражения (2.43) перепишем в виде

$$\ddot{R} = -\frac{M_s(R_0)}{4\pi v_0} \frac{1}{R^2}, \quad \ddot{R} = -\frac{M_c(R_0)}{2\pi v_0} \frac{1}{R}. \quad (2.45)$$

В результате получаем задачи Коши для функций $R(t)$:

$$\begin{cases} \ddot{R} = -\gamma_s \frac{1}{R^2}, \\ R|_{t=0} = R_0, \\ \dot{R}|_{t=0} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \ddot{R} = -\gamma_c \frac{1}{R}, \\ R|_{t=0} = R_0, \\ \dot{R}|_{t=0} = 0, \end{cases} \quad (2.46)$$

где $\gamma_s = M_s(R_0)/(4\pi v_0)$, $\gamma_c = M_c(R_0)/(2\pi v_0)$ — постоянные величины. Решение задач (2.46) ищется аналогично, как для случая электрического поля. В результате получаем уравнения характеристик вида (2.10), где функции F и λ имеют вид

$$F_s(x) = \sqrt{x(1-x)} + \arccos \sqrt{x}, \quad F_c(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erf} \left(\sqrt{\ln \frac{1}{x}} \right), \quad (2.47)$$

$$\lambda_s(R_0) = \frac{\sqrt{2\gamma_s(R_0)}}{R_0^{3/2}}, \quad \lambda_c(r) = \frac{\sqrt{2\gamma_c(r)}}{2R}.$$

Для нахождения эволюции функции плотности по аналогии с электрическим полем оценим величину $\Delta M/\Delta R$. ΔM — это масса между двумя сферическими (цилиндрическими) слоями с радиусами r и $r + \Delta r$ соответственно. В результате получим

$$\rho_s(r, t) = \frac{1}{P_s^2(\lambda_s(r)t)} \frac{\rho_0(r)}{\left[P_s(\lambda_s(r)t) - t \sqrt{d \frac{1-P_s(\lambda_s(r)t)}{P_s(\lambda_s(r)t)} \left[\frac{\rho_0(r)}{v_0 \lambda_s(r)} - \frac{3}{2} \lambda_s(r) \right]} \right]}, \quad (2.48)$$

$$\rho_c(r, t) = \frac{1}{P_c(\lambda_c(r)t)} \frac{\rho_0(r)}{\left[P_c(\lambda_c(r)t) - 2t \sqrt{\ln \frac{1}{P_c(\lambda_c(r)t)} \left[\frac{\rho_0(r)}{4v_0 \lambda_c(r)} - \lambda_c(r) \right]} \right]},$$

где $\rho(r, t) = \rho(rP(\lambda(r)t), t)$. Формула (2.48) задает эволюцию функции плотности массы с начальным распределением $\rho_0(r)$ при условии, что сферические (цилиндрические) слои не пересекаются.

Для скорости справедливы аналогичные (2.22) соотношения

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}R_s(t) = V_s(t) &= -R_0\lambda_s\sqrt{\frac{1 - P_s(\lambda_s t)}{P_s(\lambda_s t)}}, \\ \frac{d}{dt}R_c(t) = V_c(t) &= -R_0\lambda_c2\sqrt{\ln\frac{1}{P_c(\lambda_c t)}}. \end{aligned} \tag{2.49}$$

Рассмотрим частные случаи начальных распределений плотности массы $\rho_0(r)$, и получим для них эволюцию функции плотности $\rho_s(r, t)$.

2.2.1. *Однородное распределение начальной плотности массы.* Пусть плотность $\rho_0 = \text{const}$. Найдём $\lambda_s(r)$ при $\rho_s(r, 0) = \rho_0 = \text{const}$ (здесь учтено, что $R|_{t=0} = rP_s(\lambda_s(r)t)|_{t=0} = r$), получим

$$\gamma_s(r) = \frac{M(r)}{4\pi v_0} = \frac{\rho_0}{v_0} \int_0^r x^2 dx = \frac{\rho_0}{v_0} \frac{r^3}{3}, \quad \lambda_s(r) = \frac{\sqrt{2\gamma_s(r)}}{3/2} = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\rho_0}{v_0}. \tag{2.50}$$

Из выражения (2.50) видно, что $\lambda_s(r)$ не зависит от r , т.е. является постоянной величиной. Подставив (2.50) в (2.9), получим

$$\rho_s(r, t) = \frac{\rho_0(r)}{P_s^3\left(\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\rho_0}{v_0} t\right)}. \tag{2.51}$$

Выражение (2.51) задает эволюцию функции плотности массы шара с начальным распределением $\rho_0 = \text{const}$. Как видно из (2.51), плотность массы внутри шара остается однородной (постоянной), т.е. не зависит от координаты, а зависит только от времени. На рис. 7 показана эволюция плотности массы (2.51).

Графики характеристик для случая однородного шара представлены на рис. 8. Видно, что существует некоторый момент времени $T_0 = \pi/2\sqrt{3}v_0/2\rho_0$, когда все слои соберутся в центре шара. До момента T_0 слои между собой не пересекаются и решение (2.12) имеет смысл.

Уравнение характеристик можно переписать без функции P в виде

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\rho_0}{v_0} t &= \left(\sqrt{\left(\frac{\rho_0}{\rho_s}\right)^{1/3} \left(1 - \left(\frac{\rho_0}{\rho_s}\right)^{1/3}\right)} + \arccos\left(\frac{\rho_0}{\rho_s}\right)^{1/6} \right) = \\ &= F\left(\left(\frac{\rho_0}{\rho_s}\right)^{1/3}\right). \end{aligned} \tag{2.52}$$

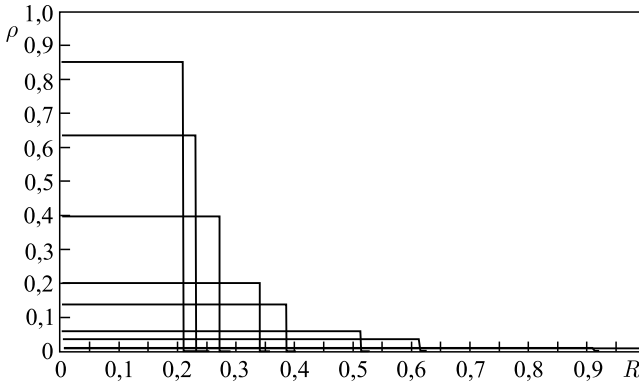


Рис. 7. Эволюция функции плотности массы для случая однородного шара

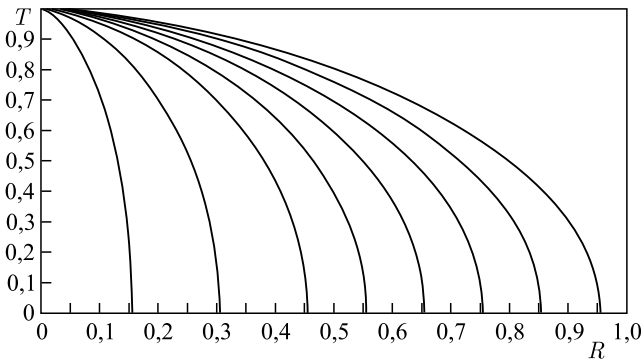


Рис. 8. Характеристики для случая однородного шара

Выражение (2.52) дает в явном виде зависимость между временем и плотностью массы шара.

2.2.2. Логнормальное распределение начальной плотности массы. Рассмотрим распределение плотности массы внутри шара по закону

$$\rho_0(r) = \frac{M_{\text{tot}}}{2\pi r^2} \rho_n(2r), \quad \rho_n(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma r} \exp\left[-\frac{(\ln(r) - \mu)^2}{2\sigma^2}\right], \quad (2.53)$$

где $\mu, \sigma, M_{\text{tot}}$ — постоянные величины. Найдем $M_s(R_0)$, для этого проинтегрируем выражение (2.53) по объему шара радиуса R_0 , получим

$$\begin{aligned} M_s(R_0) &= 4\pi \int_0^{R_0} x^2 \frac{M_{\text{tot}}}{2\pi x^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma 2x} \exp\left[-\frac{(\ln(2x) - \mu)^2}{2\sigma^2}\right] dx = \\ &= \frac{M_{\text{tot}}}{2} \left(1 + \operatorname{erf}\left(\frac{\ln(2R_0) - \mu}{\sigma\sqrt{2}}\right)\right), \quad (2.54) \end{aligned}$$

где $\operatorname{erf}(x) = 2/\sqrt{\pi} \int_0^x e^{-l^2} dl$. Используя (2.54), получим выражение для $\lambda_s(r)$:

$$\lambda_s(r) = \frac{\sqrt{2\gamma_s(r)}}{r^{3/2}} = \sqrt{\frac{M_{\text{tot}}}{4\pi v_0 r^3} \left(1 + \operatorname{erf} \left(\frac{\ln(2r) - \mu}{\sigma\sqrt{2}} \right) \right)}. \quad (2.55)$$

Подставляя (2.55) и (2.53) в формулу (2.48), получим окончательное выражение, описывающее эволюцию функции плотности массы, для случая начального распределения плотности в виде нормального логарифмического распределения. Уравнение характеристик примет вид

$$t = \frac{R_0^{3/2}}{\sqrt{\frac{M_{\text{tot}}}{4\pi v_0} \left(1 + \operatorname{erf} \left(\frac{\ln(2R_0) - \mu}{\sigma\sqrt{2}} \right) \right)}} \left(\sqrt{\frac{R}{R_0} \left(1 - \frac{R}{R_0} \right)} + \arccos \sqrt{\frac{R}{R_0}} \right). \quad (2.56)$$

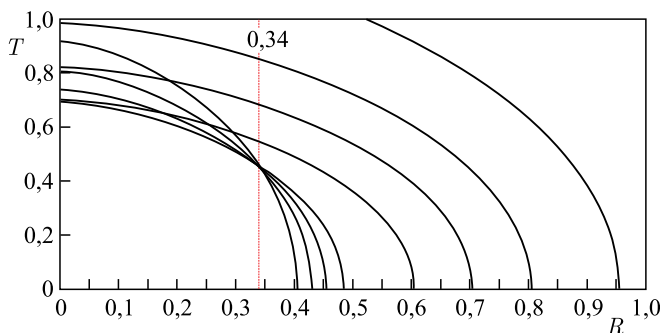


Рис. 9. Характеристики для случая нормального логарифмического распределения

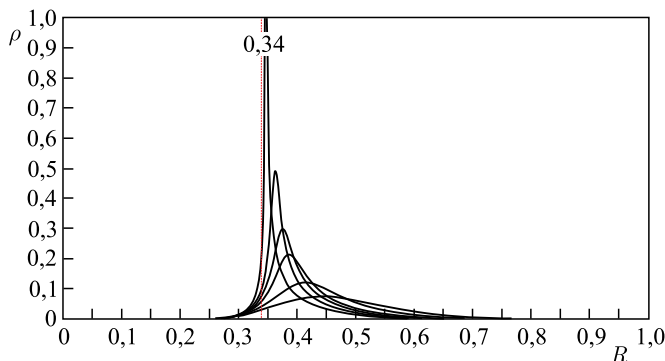


Рис. 10. Эволюция функции плотности массы для случая нормального логарифмического распределения

На рис. 9 представлены графики характеристик (2.56). Из сравнения рис. 8 и 9 виден разный характер поведения характеристик. На рис. 9 характеристики пересекаются не в центре шара, а на некотором радиусе.

На рис. 10 представлены графики плотности массы в различные моменты времени. Пересечение характеристик приводит к бесконечному увеличению плотности массы на некотором сферическом слое. Поэтому решение (2.9), полученное в предположении непересечения сферических слоев, имеет смысл до момента возникновения пересечения характеристик (см. рис. 9).

2.3. Решение в виде ударной волны для уравнения Шредингера. Функции плотности заряда/массы (2.21), (2.48) и соответствующие им функции скоростей (2.22), (2.49), полученные в предыдущем подразделе, как было сказано ранее [1], являются решениями первого уравнения в цепочке Власова (2.2). Функции плотности $\rho(r, t)$ заряда/массы приобретают смысл функций плотности распределения вероятностей $f(r, t)$. Функции заряда $Q(r, t)$ и массы $M(r, t)$ приобретают смысл функций распределения вероятностей $F(r, t)$. В рассмотренных примерах необходимо положить величину полного заряда/массы $Q_{\text{tot}}/M_{\text{tot}}$ равной единице, что для квантовых систем соответствует условию нормировки волновой функции $\Psi(r, t)$.

Скорости течения заряда/массы получают трактовку скорости потока вероятностей $\langle \mathbf{v} \rangle(r, t)$ в первом уравнении Власова. Скорости $V(t)$ соответствуют концентрическим слоям, траектория движения которых описывается уравнениями характеристик (2.10). Зная $V(t)$ и уравнения характеристик $R(t)$, можно найти поле скоростей $\langle \mathbf{v} \rangle(r, t)$. Например, для сферически-симметричного распределения с электрическим взаимодействием (2.10), (2.22)

$$\begin{aligned} r(R_0, t) &= R_0 P(\lambda(R_0)t) \Rightarrow G(r, t) \stackrel{\text{det}}{=} R_0, \\ u(R_0, t) &\stackrel{\text{det}}{=} R_0 \lambda_s(R_0) \sqrt{\frac{P_s(\lambda_s(R_0)t) - 1}{P_s(\lambda_s(R_0)t)}}, \\ \langle \mathbf{v} \rangle(r, t) &= u(G(r, t), t) \mathbf{e}_r. \end{aligned} \quad (2.57)$$

Так как в рассматриваемом примере поток заряда является безвихревым, то в представлении (2.1) будет отсутствовать вихревая компонента скорости \mathbf{A} . Следовательно, из (2.1), (2.5) для скорости $\langle \mathbf{v} \rangle(r, t)$ справедливо представление

$$\langle \mathbf{v} \rangle(r, t) = -\alpha \nabla \Phi(r, t) = -2\alpha \nabla \varphi(r, t). \quad (2.58)$$

Учитывая (2.57) и интегрируя (2.58) по радиусу, можно определить фазу волновой функции $\varphi(r, t)$, которая является скалярным потенциалом скорости вероятностного потока $\langle \mathbf{v} \rangle(r, t)$. На рис. 11 показано найденное по формуле (2.57) распределение скорости потока вероятностей $\langle \mathbf{v} \rangle(r, t)$ вдоль радиуса внутри шара в различные моменты времени. Начальное распределение плотности вероятности $f_0(r) = \rho_0(r)$ и соответствует случаю с ударной

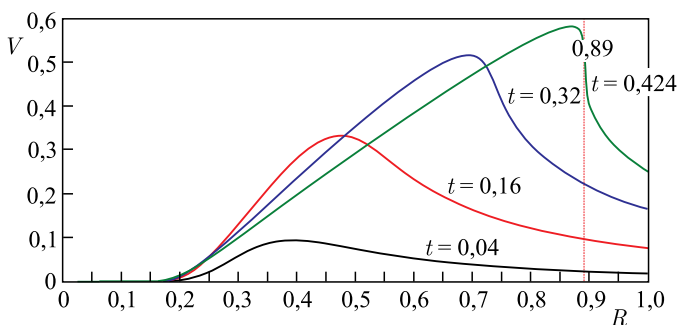


Рис. 11. Скорость потока вероятностей

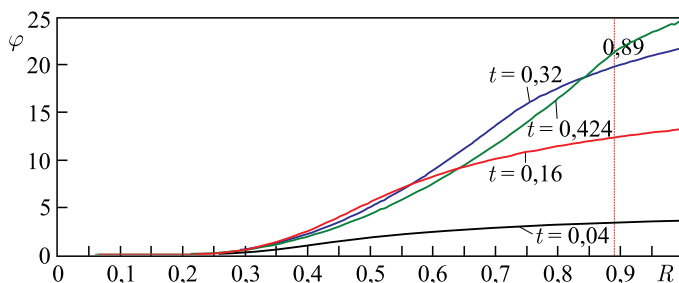


Рис. 12. Скалярный потенциал скорости вероятностного потока

волной (2.36). Видно, что с течением времени фронт становится вертикальным, что является характерным для ударной волны.

На рис. 12 показано соответствующее распределение фазы $\varphi(r, t)$ волновой функции или с точностью до коэффициента скалярного потенциала скорости $\langle \mathbf{v} \rangle(r, t)$.

Зная фазу $\varphi(r, t)$ и функцию плотности вероятностей $f(r, t) \equiv \rho(r, t)$, можно найти волновую функцию $\Psi(r, t)$ как $\Psi(r, t) = \sqrt{f(r, t)} e^{i\varphi(r, t)}$. На рис. 13 показан график волновой функции до момента возникновения ударной волны. Отметим, что функция $\Psi(r, t)$ не является однолистной.

По формуле (2.4) можно определить потенциал $U(r, t)$, входящий в уравнение Шредингера (2.3). На рис. 14 показано распределение $U(r, t)$ вдоль радиуса в различные моменты времени.

На рис. 15, 16 представлены функции распределения вероятностей $F(r, t)$ для двух случаев начальной плотности распределения вероятностей $f_0(r)$. Рис. 15 соответствует начальному распределению $f_0(r) = \text{const}$ без ударной волны, а рис. 16 — начальному распределению (2.36) с ударной волной. Рис. 15, 16 иллюстрируют эволюцию функции распределения вероятно-

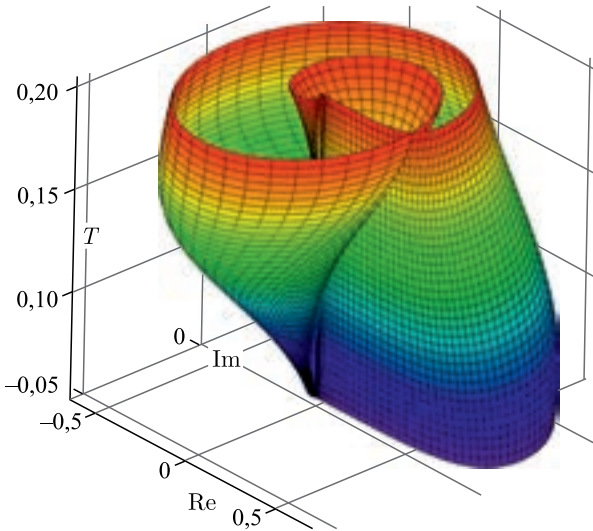


Рис. 13. Эволюция волновой функции

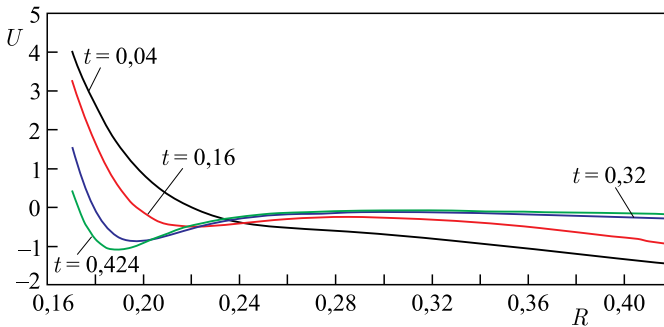


Рис. 14. Эволюция потенциала

стей от времени. На обоих рисунках сплошными линиями показаны графики характеристик (2.10), соответствующие различным концентрическим слоям.

Отметим, что кривые, соответствующие характеристикам, полностью принадлежат поверхности функции распределения вероятностей $F(r, t)$. Тем самым поверхность функции распределения вероятностей полностью «состоит» из таких кривых [12].

С физической точки зрения уравнения характеристик являются классическими уравнениями движения концентрических слоев. С геометрической точки зрения из таких кривых образована поверхность функции распределения вероятностей. Получается, что, с одной стороны, представлено детерми-

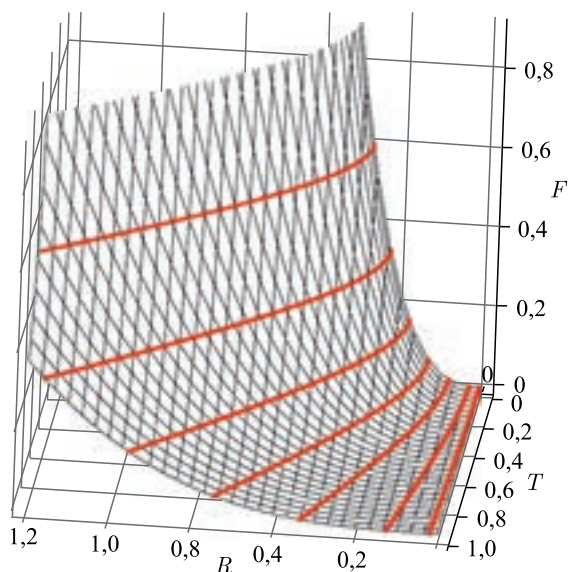


Рис. 15. Функция распределения вероятностей. Случай без ударной волны

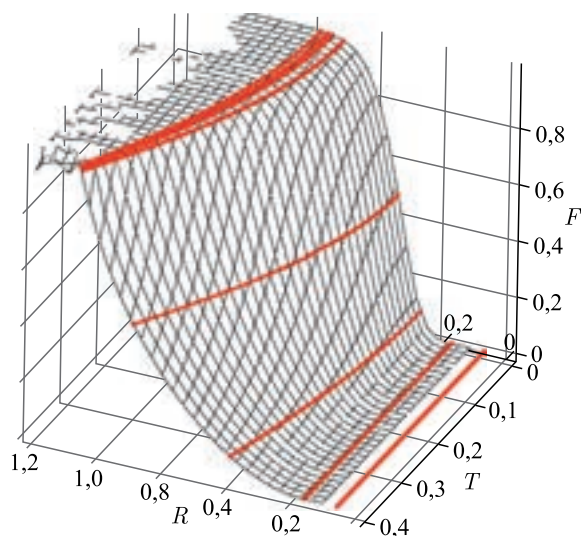


Рис. 16. Функция распределения вероятностей. Случай с ударной волной

нистическое описание эволюции плотности заряда/массы с использованием классических уравнений движения. С другой стороны, использовано вероятностное описание через функцию распределения вероятностей. Однако и

в том, и в другом случае с точки зрения геометрии имеется одна и та же поверхность, которую можно трактовать либо как функцию распределения вероятностей, либо как набор классических траекторий движения (характеристик).

Отметим, что функция распределения вероятности $F(r, t)$ (или заряда/массы) удовлетворяет следующей начально-краевой задаче:

$$\begin{cases} \frac{\partial F(r, t)}{\partial t} + v(r, t) \frac{\partial F(r, t)}{\partial r} = 0, \\ \frac{\partial v(r, t)}{\partial t} + v(r, t) \frac{\partial v(r, t)}{\partial r} = \kappa \cdot S(r) \cdot F(r, t), \\ v(r, t)|_{t=0} = 0, \\ F(r, t)|_{t=0} = F_0(r), \end{cases} \quad (2.59)$$

где

$$\begin{aligned} S(r) &= \begin{cases} \frac{1}{r^2}, & \text{сфера,} \\ \frac{1}{r}, & \text{бесконечный цилиндр,} \end{cases} \\ F(r, t) &= \begin{cases} 4\pi \int_0^r x^2 f(x, t) dx, & \text{сфера,} \\ 2\pi \int_0^r x f(x, t) dx, & \text{бесконечный цилиндр.} \end{cases} \end{aligned} \quad (2.60)$$

В зависимости от типа физической задачи постоянная величина κ принимает значения:

$$\kappa = \begin{cases} \frac{\alpha^2}{\varepsilon_0}, & \text{случай а (электрическое поле),} \\ -\frac{1}{v_0} = -4\pi k_g, & \text{случай б (гравитационное поле),} \\ \frac{\alpha^2}{\varepsilon_0} - \frac{1}{v_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}(\alpha^2 - \alpha_0^2), & \alpha_0 = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{v_0}}, \text{случай в (электрическое} \\ & \text{и гравитационное поля).} \end{cases}$$

3. МЕТОД НЕЛИНЕЙНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ ЛЕЖАНДРА

В разд. 1 между первым уравнением Власова и уравнением Шредингера была установлена строгая математическая связь. В этом разделе рассматривается нелинейное отображение уравнения Власова в линейное уравнение,

решения которого можно найти в явном виде. Такой подход позволяет построить точные решения уравнения Шредингера.

3.1. Метод построения решения. Как правило, уравнение Шредингера используется для описания квантовых систем [34]. Однако тот факт, что уравнение Шредингера может быть сведено к уравнению непрерывности для функции плотности вероятности $f(\mathbf{r}, t)$, говорит о возможности использовать его при описании классических систем механики сплошных сред [31, 32, 35].

При рассмотрении квантовых систем обычно выполняется следующая последовательность действий [36–39]:

— задается потенциал $U(\mathbf{r}, t)$, входящий в уравнение Шредингера, а также начальные и граничные условия для волновой функции $\Psi(\mathbf{r}, t)$;

— решается уравнение Шредингера и находится волновая функция, которая дает функцию плотности вероятностей $f(\mathbf{r}, t) = |\Psi(\mathbf{r}, t)|^2$;

— зная волновую функцию $\Psi = |\Psi| e^{i\varphi}$, можно построить векторное поле плотности потока вероятностей $\mathbf{J} = f\langle\mathbf{v}\rangle = (-i\hbar/2m)(\Psi\nabla\Psi - \Psi\nabla\Psi)$;

— определяется квантовый потенциал $Q(\mathbf{r}, t) = -\hbar^2/2m\Delta|\Psi|/|\Psi|$, используемый в теории «волны-пилота» де Бройля–Бома [16, 17];

— находится «классический» потенциал $e\chi = U + Q$, входящий в уравнение Гамильтона–Якоби $-\hbar\varphi_t = (m|\langle\mathbf{v}\rangle|^2/2) + e\chi$ (см. разд. 1).

В результате можно найти уравнения движения для «классического аналога» квантовой системы (см. разд. 1).

В разд. 1 рассмотрена обратная задача, т. е. построение решения уравнения Шредингера из решений уравнения непрерывности. Изначально задается векторное поле скоростей сплошной среды $\langle\mathbf{v}\rangle(\mathbf{r}, t)$ и функция плотности вероятностей $f_0(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r}, t_0)$ только в начальный момент времени t_0 . По данной информации находятся потенциалы U и Q , фаза волновой функции φ и сама волновая функция Ψ . Тем самым получается «квантовый аналог» классической системы.

В данном разделе рассматривается похожая обратная задача, но при этом задано не векторное поле $\langle\mathbf{v}\rangle$, а зависимость функции плотности вероятности f от модуля поля скоростей $|\langle\mathbf{v}\rangle|$, т. е. $f = f(|\langle\mathbf{v}\rangle|)$. Само же поле скоростей $\langle\mathbf{v}\rangle$ считается неизвестным. Векторное поле $\langle\mathbf{v}\rangle$ предполагается стационарным и двумерным, т. е. $\langle\mathbf{v}\rangle = \langle\mathbf{v}\rangle(x, y)$.

Рассмотрим функцию плотности вероятности вида

$$f(x, y) = C \exp\left(-\frac{|\langle\mathbf{v}\rangle(x, y)|^2}{2\sigma^2}\right) \stackrel{\det}{=} f(|\langle\mathbf{v}\rangle(x, y)|), \quad (3.1)$$

$$S(x, y) = \ln f(x, y) = \ln f(|\langle\mathbf{v}\rangle|) \stackrel{\det}{=} S(|\langle\mathbf{v}\rangle|) = c - \frac{|\langle\mathbf{v}\rangle(x, y)|^2}{2\sigma^2},$$

где c, C, σ — постоянные величины. Будем предполагать отсутствие вихревого потока \mathbf{A} в представлении (1.4), т. е.

$$\langle \mathbf{v} \rangle(x, y) = -\alpha \nabla \Phi(x, y). \quad (3.2)$$

С учетом (3.1) и (3.2) уравнение (1.1) примет вид

$$\operatorname{div} [f(|\alpha \nabla \Phi(x, y)|) \nabla \Phi(x, y)] = 0,$$

$$\begin{aligned} & [|\nabla \Phi| + |\alpha| \Phi_x^2 S'(|\alpha \nabla \Phi|)] \Phi_{xx} + 2|\alpha| \Phi_x \Phi_y S'(|\alpha \nabla \Phi|) \Phi_{xy} + \\ & + [|\nabla \Phi| + |\alpha| \Phi_y^2 S'(|\alpha \nabla \Phi|)] \Phi_{yy} = 0; \end{aligned}$$

учитывая, что $S'(|\alpha \nabla \Phi|) = (-|\alpha|/\sigma^2) |\nabla \Phi|$, получаем

$$\left[1 - \frac{\alpha^2}{\sigma^2} \Phi_x^2 \right] \Phi_{xx} - 2 \frac{\alpha^2}{\sigma^2} \Phi_x \Phi_y \Phi_{xy} + \left[1 - \frac{\alpha^2}{\sigma^2} \Phi_y^2 \right] \Phi_{yy} = 0. \quad (3.3)$$

Уравнение (3.3) является нелинейным уравнением в частных производных относительно фазы волновой функции (1.7). В случае, когда

$$\frac{|\alpha|}{\sigma} = \frac{\hbar^2}{2m\sigma} \ll 1, \quad (3.4)$$

уравнение (3.3) можно рассматривать как линейное уравнение Лапласа $\Delta \Phi = 0$. В этом случае фаза φ волновой функции Ψ является гармонической функцией.

Если условие (3.4) не выполнено, то необходимо решать нелинейное уравнение (3.3). С помощью преобразования Лежандра [40–42] уравнение (3.3) можно отобразить в линейное уравнение. Преобразование Лежандра основано на том, что некоторая поверхность $\Phi(x, y)$ задается не как множество точек (Φ, x, y) , а как множество касательных к ней плоскостей. Такое отображение отличается от простого преобразования координат тем, что оно ставит в соответствие не точке точку, а элементу поверхности $(x, y, \Phi, \Phi_x, \Phi_y)$ элемент поверхности $(\xi, \eta, \omega, \omega_\xi, \omega_\eta)$:

$$\begin{aligned} \omega(\xi, \eta) + \Phi(x, y) &= x\xi + y\eta, \\ \xi &= \Phi_x, \quad \eta = \Phi_y, \quad x = \omega_\xi, \quad y = \omega_\eta, \\ \Phi_{xx} &= \rho\omega_{\eta\eta}, \quad \Phi_{xy} = -\rho\omega_{\xi\eta}, \quad \Phi_{yy} = \rho\omega_{\xi\xi}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

где $\rho = \Phi_{xx}\Phi_{yy} - \Phi_{xy}^2 = 1/(\omega_{\xi\xi}\omega_{\eta\eta} - \omega_{\xi\eta}^2)$ является якобианом преобразования Лежандра. С геометрической точки зрения функция ω представляет собой набор касательных плоскостей к поверхности фазы волновой функции. Заметим, что с физической точки зрения фаза волновой функции может трактоваться как действие.

Применяя преобразование Лежандра (3.5) к уравнению (3.3), получим линейное уравнение относительно функции ω

$$\left(1 - \frac{\alpha^2}{\sigma^2}\xi^2\right)\omega_{\eta\eta} + 2\frac{\alpha^2}{\sigma^2}\xi\eta\omega_{\xi\eta} + \left(1 - \frac{\alpha^2}{\sigma^2}\eta^2\right)\omega_{\xi\xi} = 0. \quad (3.6)$$

В уравнении (3.6) удобно сделать замену переменных

$$\begin{aligned} \bar{\xi} &= \frac{\alpha}{\sigma}\xi, & \bar{\eta} &= \frac{\alpha}{\sigma}\eta, & \bar{\omega}(\bar{\xi}, \bar{\eta}) &= \omega(\xi, \eta), \\ \omega_{\xi\xi} &= \frac{\alpha^2}{\sigma^2}\bar{\omega}_{\bar{\xi}\bar{\xi}}, & \omega_{\xi\eta} &= \frac{\alpha^2}{\sigma^2}\bar{\omega}_{\bar{\xi}\bar{\eta}}, & \omega_{\eta\eta} &= \frac{\alpha^2}{\sigma^2}\bar{\omega}_{\bar{\eta}\bar{\eta}}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

С использованием замены (3.7) уравнение (3.6) примет вид

$$(1 - \bar{\xi}^2)\bar{\omega}_{\bar{\eta}\bar{\eta}} + 2\bar{\xi}\bar{\eta}\bar{\omega}_{\bar{\xi}\bar{\eta}} + (1 - \bar{\eta}^2)\bar{\omega}_{\bar{\xi}\bar{\xi}} = 0. \quad (3.8)$$

Перейдем в уравнении (3.8) из декартовой системы координат $(\bar{\xi}, \bar{\eta})$ в полярную систему координат (τ, θ) :

$$\begin{aligned} \bar{\xi} &= \tau \cos \theta, & \bar{\eta} &= \tau \sin \theta, & \bar{\omega}(\bar{\xi}, \bar{\eta}) &\stackrel{\text{det}}{=} \tilde{\omega}(\tau, \theta), \\ \bar{\omega}_{\bar{\xi}\bar{\xi}} &= \tilde{\omega}_{\tau\tau} \cos^2 \theta + \tilde{\omega}_{\theta\theta} \frac{\sin^2 \theta}{\tau^2} - \tilde{\omega}_{\tau\theta} \frac{\sin 2\theta}{\tau} + \tilde{\omega}_{\tau} \frac{\sin^2 \theta}{\tau} + \tilde{\omega}_{\theta} \frac{\sin 2\theta}{\tau^2}, \\ \bar{\omega}_{\bar{\xi}\bar{\eta}} &= \tilde{\omega}_{\tau\tau} \frac{\sin 2\theta}{2} - \tilde{\omega}_{\theta\theta} \frac{\sin 2\theta}{2\tau^2} + \tilde{\omega}_{\tau\theta} \frac{\cos 2\theta}{\tau^2} - \tilde{\omega}_{\tau} \frac{\sin 2\theta}{2\tau} - \tilde{\omega}_{\theta} \frac{\cos 2\theta}{\tau^2}, \\ \bar{\omega}_{\bar{\eta}\bar{\eta}} &= \tilde{\omega}_{\tau\tau} \sin^2 \theta + \tilde{\omega}_{\theta\theta} \frac{\cos^2 \theta}{\tau^2} + \tilde{\omega}_{\tau\theta} \frac{\sin 2\theta}{\tau} + \tilde{\omega}_{\tau} \frac{\cos^2 \theta}{\tau} - \tilde{\omega}_{\theta} \frac{\sin 2\theta}{\tau^2}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Подставляя (3.9) в уравнение (3.8), получим

$$\tilde{\omega}_{\tau\tau} + a(\tau) \left[\frac{1}{\tau}\tilde{\omega}_{\tau} + \frac{1}{\tau^2}\tilde{\omega}_{\theta\theta} \right] = 0, \quad a(\tau) \stackrel{\text{det}}{=} 1 - \tau^2. \quad (3.10)$$

Найдем частные решения уравнения (3.10) методом разделения переменных. Подставляя $\tilde{\omega} \sim T(\tau)\Theta(\theta)$ в уравнение (3.10), получим

$$T'' + a(\tau) \left[\frac{1}{\tau}T' - \frac{\lambda^2}{\tau^2}T \right] = 0, \quad (3.11)$$

$$\Theta'' + \lambda^2\Theta = 0, \quad (3.12)$$

где λ — постоянная величина. Решение уравнения (3.12) для функции $\Theta(\theta)$ представимо в виде системы функций $\sin \lambda\theta$ и $\cos \lambda\theta$. Решение уравнения (3.11) для функции $T(\tau)$ можно представить в виде разложения в ряд в окрестности особой точки $\tau_0 = 0$.

3.2. Представление решения в виде ряда. Будем искать решение уравнения (3.11) в виде разложения в окрестности особой точки $\tau_0 = 0$:

$$T(\tau) = \tau^\nu \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \tau^k. \quad (3.13)$$

Подставляя (3.13) в уравнение (3.11) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях τ , получим

$$\begin{aligned} T'(\tau) &= \sum_k a_k (k + \nu) \tau^{k+\nu-1}, \quad T''(\tau) = \sum_k a_k (k + \nu)(k + \nu - 1) \tau^{k+\nu-2}, \\ \sum_k a_k [(k + \nu)^2 - \lambda^2] \tau^{k+\nu-2} - \sum_k a_k [(k + \nu) - \lambda^2] \tau^{k+\nu} &= 0. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Приравнивание коэффициентов при $\tau^{\nu-2}$ дает выражение для ν :

$$\nu = \pm |\lambda|, \quad (3.15)$$

при условии, что $a_0 \neq 0$. При степени $\tau^{\nu-1}$ получим

$$a_1 [(1 + \nu)^2 - \nu^2] = 0 \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 0, \\ \nu = -\frac{1}{2}. \end{cases} \quad (3.16)$$

В случае $\nu = -1/2$ будут получаться сингулярные решения (3.11) в точке $\tau = 0$, поэтому далее рассмотрим случай, когда $a_1 = 0$.

Для произвольного коэффициента a_k с индексом $k \geq 2$ из выражения (3.14) можно получить рекуррентное соотношение. Произведя замену переменной $s = k - 2$, получим

$$\sum_{s=0}^{+\infty} a_{s+2} [(s + 2 + \nu)^2 - \lambda^2] \tau^{s+\nu} - \sum_{k=0}^{+\infty} a_k [(k + \nu) - \lambda^2] \tau^{k+\nu} = 0, \quad (3.17)$$

$$a_{k+2} = a_k \frac{k + \nu - \nu^2}{(k + 2)(k + 2(\nu + 1))}, \quad k \geq 2.$$

Так как коэффициент $a_1 = 0$, то из (3.17) следует, что нечетные коэффициенты равны нулю:

$$a_1 = a_3 = a_5 = \dots = a_{2s+1} = 0, \quad s = 0, 1, 2, \dots \quad (3.18)$$

Из (3.18) следует, что в ряде (3.13) останутся только четные коэффициенты a_{2s} , $s = 0, 1, 2, \dots$, так как $a_0 \neq 0$ (3.15). В результате выражение (3.17) для четных коэффициентов примет вид

$$a_{2s+2} = a_{2s} \frac{2s + \nu - \nu^2}{4(s + 1)(s + \nu + 1)}, \quad s = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.19)$$

или с введением нового обозначения

$$b_0 = \text{const} \neq 0, \quad b_{s+1} = b_s \frac{2s + \nu - \nu^2}{4(s+1)(s+\nu+1)}, \quad s = 0, 1, 2, \dots \quad (3.20)$$

Выражение (3.13) с учетом (3.20) примет вид

$$T(\tau) = \tau^\nu \sum_{s=0}^{+\infty} b_s \tau^{2s} = \tau^\nu \sum_{s=0}^{+\infty} b_s \tau^{2s}. \quad (3.21)$$

Получим из (3.20) рекуррентное соотношение для коэффициента b_s через коэффициент b_0 :

$$\begin{aligned} b_1 &= b_0 \frac{\nu - \nu^2}{4(1 + \nu)}, \\ b_2 &= b_1 \frac{2 + \nu - \nu^2}{2 \cdot 4(2 + \nu)} = b_0 \frac{(\nu - \nu^2)(2 + \nu - \nu^2)}{4^2 2(1 + \nu)(2 + \nu)}, \\ b_3 &= b_2 \frac{4 + \nu - \nu^2}{4 \cdot 3(3 + \nu)} = b_0 \frac{(\nu - \nu^2)(2 + \nu - \nu^2)(4 + \nu - \nu^2)}{4^3 (1 + \nu)(2 + \nu)(3 + \nu) 2 \cdot 3}, \\ b_4 &= b_3 \frac{6 + \nu - \nu^2}{4 \cdot 4(4 + \nu)} = b_0 \frac{(\nu - \nu^2)(2 + \nu - \nu^2)(4 + \nu - \nu^2)(6 + \nu - \nu^2)}{4^4 (1 + \nu)(2 + \nu)(3 + \nu)(4 + \nu) 2 \cdot 3 \cdot 4}, \\ &\dots \\ b_s &= \frac{b_0 \nu}{4^s (\nu)_{s+1} s!} \prod_{k=0}^{s-1} (2k + \nu - \nu^2), \quad s \geq 1, \\ b_s &= \frac{b_0}{4^s s!} \prod_{k=0}^{s-1} \frac{2k + \nu - \nu^2}{\nu + k + 1}, \quad s \geq 1. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Величина b_0 в выражении (3.22) может быть взята равной единице или выбрана, например, из условия нормировки. Таким образом, решение уравнения (3.11) представимо в виде суперпозиции решений типа (3.11) с $\nu_{1,2} = \pm|\lambda|$:

$$T^{(1,2)}(\tau) = \tau^{\nu_{1,2}} b_0 + \tau^{\nu_{1,2}} \sum_{s=1}^{+\infty} \frac{b_0}{s!} \left(\frac{\tau}{2}\right)^{2s} \prod_{k=0}^{s-1} \frac{2k + \nu_{1,2} - \nu_{1,2}^2}{\nu_{1,2} + k + 1}. \quad (3.23)$$

Найдем радиус сходимости ряда (3.23) при фиксированном ν . По признаку д'Аламбера имеем

$$q = \lim_{s \rightarrow +\infty} \left| \frac{b_{s+1} \tau^{2s+2}}{b_s \tau^{2s}} \right| = \frac{\tau^2}{2} \lim_{s \rightarrow +\infty} \left| \frac{2 + \frac{\nu - \nu^2}{s}}{s \left(1 + \frac{1}{s}\right) \left(1 + \frac{\nu + 1}{s}\right)} \right| = 0 < 1.$$

Таким образом, радиус сходимости ряда (3.23) имеет вид

$$0 \leq \tau < +\infty. \quad (3.24)$$

Замечание 3.1. Точное решение (3.23) уравнения (3.11) справедливо для любого $\lambda = \pm|\nu_{1,2}|$. Решение (3.23) можно выразить через гипергеометрическую функцию

$$\begin{aligned} T^{(1,2)}(\tau) &= \tau^{\nu_{1,2}} b_0 + \tau^{\nu_{1,2}} \sum_{s=1}^{+\infty} \frac{b_0}{s!} \left(\frac{\tau}{2}\right)^{2s} \prod_{k=0}^{s-1} \frac{2k + \nu_{1,2} - \nu_{1,2}^2}{\nu_{1,2} + k + 1} = \\ &= \tau^{\nu_{1,2}} b_0 \left\{ 1 + \sum_{s=1}^{+\infty} \frac{\tau^{2s}}{s!} \frac{2^s}{2^{2s}} \prod_{k=0}^{s-1} \frac{k + \frac{\nu_{1,2}}{2} - \frac{\nu_{1,2}^2}{2}}{\nu_{1,2} + k + 1} \right\} = \\ &= \tau^{\nu_{1,2}} b_0 \left\{ 1 + \sum_{s=1}^{+\infty} \frac{1}{s!} \left(\frac{\tau^2}{2}\right)^s \frac{\left(\frac{\nu_{1,2}}{2} - \frac{\nu_{1,2}^2}{2}\right)_s}{(\nu_{1,2} + 1)_s} \right\}, \quad (3.25) \\ T^{(1,2)}(\tau) &= \tau^{\nu_{1,2}} b_0 {}_1F_1\left(\frac{\nu_{1,2}}{2} - \frac{\nu_{1,2}^2}{2}; \nu_{1,2} + 1; \frac{\tau^2}{2}\right), \end{aligned}$$

где

$${}_1F_1(a, b, z) \stackrel{\text{det}}{=} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(a)_k}{(b)_k} z^k,$$

$$(a)_k \stackrel{\text{det}}{=} \begin{cases} 1, & k = 0, \\ a \cdot (a+1)(a+2) \dots (a+k-1), & k > 0. \end{cases}$$

Гипергеометрическая функция ${}_1F_1$ (как и решение (3.23)) представляется в виде бесконечного ряда. В общем случае суммирование бесконечного ряда производится численно и является специальной задачей численных методов.

Для целых значений λ ряд (3.23) (как и ${}_1F_1$) содержит конечное число членов. В этом случае решение представимо в виде обобщенных полиномов Лагерра (см. п. 3.3).

3.3. Частные решения. Рассмотрим частные решения уравнения (3.10). Функция $\Theta(\theta)$ удовлетворяет уравнению

$$\Theta'' + \lambda^2 \Theta = 0. \quad (3.26)$$

В вырожденном случае при $\lambda = 0$ решения (3.26) и (3.23) имеют вид

$$\Theta(\theta) = c_1 \theta + c_2, \quad T(\tau) = b_0, \quad (3.27)$$

где c_1, c_2 — постоянные величины. Следовательно, функция $\tilde{\omega}(\tau, \theta)$ примет вид

$$\tilde{\omega}(\tau, \theta) = C_1\theta + C_2. \quad (3.28)$$

При $\lambda \neq 0$ решение (3.26) представимо в виде суперпозиции

$$\Theta(\theta) = \left\{ \begin{array}{l} \sin \lambda\theta \\ \cos \lambda\theta \end{array} \right\}, \quad (3.29)$$

где λ определяется из граничных условий. Рассмотрим различные виды граничных условий.

3.3.1. Периодические граничные условия. Пусть выполнено условие

$$\Theta(0) = \Theta(2\pi), \quad (3.30)$$

тогда

$$\lambda_n = n, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3.31)$$

Рассматривая ограниченные решения ($\nu_1 = |\lambda|$) из (3.30) и (3.23), получаем

$$T_n(\tau) = b_0\tau^n + \tau^n \sum_{s=1}^{+\infty} \frac{b_0}{s!} \left(\frac{\tau}{2}\right)^{2s} \prod_{k=0}^{s-1} \frac{2k+n-n^2}{n+k+1},$$

$$\tilde{\omega}_n(\tau, \theta) = T_n(\tau)(A_n \sin n\theta + B_n \cos n\theta). \quad (3.32)$$

При $n = 1$ выражение (3.32) имеет вид

$$T_1(\tau) = b_0\tau. \quad (3.33)$$

Замечание 3.2. Следовательно, функция $\tilde{\omega}_1(\tau, \theta)$ «соответствует» уравнению плоскости

$$\tilde{\omega}_1(\tau, \theta) = A\tau \sin \theta + B\tau \cos \theta = A\bar{\eta} + B\bar{\xi} = \frac{\alpha}{\sigma}(A\eta + B\xi), \quad (3.34)$$

для которой невозможно преобразование Лежандра, так как якобиан преобразования (3.5) неограничен.

При $n = 2$ выражение (3.32) принимает вид

$$T_2(\tau) = b_0\tau^2 + \tau^2 \sum_{s=1}^{+\infty} \frac{b_0}{s!} \left(\frac{\tau}{2}\right)^{2s} \prod_{k=0}^{s-1} \frac{2k-2}{k+3},$$

$$T_2(\tau) = b_0\tau^2 - \frac{b_0}{6}\tau^4 = b_0\tau^2 \left(1 - \frac{\tau^2}{6}\right). \quad (3.35)$$

Функция $T_2(\tau)$ имеет два нуля при $\tau = 0$ и $\tau = \sqrt{6}$.

При $n = 3$

$$T_3(\tau) = b_0\tau^3 + \tau^3 \sum_{s=1}^{+\infty} \frac{b_0}{s!} \left(\frac{\tau}{2}\right)^{2s} \prod_{k=0}^{s-1} \frac{2k-6}{k+4} =$$

$$= b_0\tau^3 - \tau^3 \frac{3b_0}{2} \left(\frac{\tau}{2}\right)^2 + \tau^3 \frac{3b_0}{5} \left(\frac{\tau}{2}\right)^4 - \tau^3 \frac{b_0}{15} \left(\frac{\tau}{2}\right)^6, \quad (3.36)$$

$$T_3(\tau) = b_0\tau^3 \left(1 - \frac{3}{8}\tau^2 + \frac{3}{80}\tau^4 - \frac{1}{960}\tau^6\right).$$

Аналогичным способом можно получить следующие решения $T_n(\tau)$.

Существует и другой способ нахождения решений уравнения (3.11) в случае (3.30). Решения (3.23), (3.25) можно представить через обобщенные полиномы Лагерра [43, 44]. Будем искать решение уравнения (3.11) в виде

$$T(\tau) = \tau^\lambda G(t) = \tau^\lambda G\left(\frac{\tau^2}{2}\right). \quad (3.37)$$

Подставим (3.37) в (3.11), получим

$$T'(\tau) = \lambda\tau^{\lambda-1}G(t) + G'(t)\tau^{\lambda+1} = \lambda(\sqrt{2t})^{\lambda-1}G(t) + (\sqrt{2t})^{\lambda+1}G'(t),$$

$$T''(\tau) = \lambda(\lambda-1)(\sqrt{2t})^{\lambda-2}G(t) + (2\lambda+1)G'(t)(\sqrt{2t})^\lambda + G''(t)(\sqrt{2t})^{\lambda+2},$$

$$T'' + a(\tau) \left[\frac{1}{\tau}T' - \frac{\lambda^2}{\tau^2}T \right] = \lambda(\lambda-1)(\sqrt{2t})^{\lambda-2}G + (2\lambda+1)G'(\sqrt{2t})^\lambda +$$

$$+ G''(\sqrt{2t})^{\lambda+2} + (1-2t) \left(\frac{1}{\sqrt{2t}} \left(\lambda(\sqrt{2t})^{\lambda-1}G + (\sqrt{2t})^{\lambda+1}G' \right) - \right. \quad (3.38)$$

$$\left. - \frac{\lambda^2}{2t}(\sqrt{2t})^\lambda G \right) = 0,$$

$$tG'' + (1 + \lambda - t)G' + \frac{\lambda(\lambda-1)}{2}G = 0.$$

При условии (3.30) решением уравнения (3.38) будут обобщенные полиномы Лагерра

$$G(t) = L_{(n(n-1))/2}^{(n)}(t). \quad (3.39)$$

В результате решение уравнения (3.11) при условии (3.30) примет вид

$$T_n(\tau) = \tau^n L_{(n(n-1))/2}^{(n)}\left(\frac{\tau^2}{2}\right). \quad (3.40)$$

Полученное решение (3.40) совпадает с решением (3.23) при условии (3.30). Действительно,

$$\begin{aligned}
 n = 1: T_1(\tau) &= \tau L_0^{(1)}\left(\frac{\tau^2}{2}\right) = \tau, \\
 n = 2: T_2(\tau) &= \tau^2 L_1^{(2)}\left(\frac{\tau^2}{2}\right) = 3\tau^2\left(1 - \frac{\tau^2}{6}\right), \\
 n = 3: T_3(\tau) &= \tau^3 L_3^{(3)}\left(\frac{\tau^2}{2}\right) = 20\tau^3\left(1 - \frac{3}{8}\tau^2 + \frac{3}{80}\tau^4 - \frac{\tau^6}{960}\right), \\
 &\dots\dots\dots
 \end{aligned}
 \tag{3.41}$$

Так как решение $T_n(\tau)$ определено с точностью до постоянного множителя, например $c_n = (1/b_0)L_{(n(n-1))/2}^{(n)}(0)$, то выражения (3.41) соответствуют полученным выражениям (3.33), (3.35), (3.36).

На рис. 17 для различных значений n и $b_0 = 1$ приведены графики функций (3.40), нормированных на величину c_n .

Таким образом, решение $\tilde{\omega}_n(\tau, \theta)$ имеет вид

$$\tilde{\omega}_n(\tau, \theta) = \tau^n L_{(n(n-1))/2}^{(n)}\left(\frac{\tau^2}{2}\right) (A_n \sin n\theta + B_n \cos n\theta).
 \tag{3.42}$$

3.3.2. Непериодические граничные условия. Рассмотрим случай, когда λ не является целым числом. Пусть выполнено условие

$$\lambda_j^{(\pm)} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 8j}}{2}, \quad j = 0, 1, 2, \dots
 \tag{3.43}$$

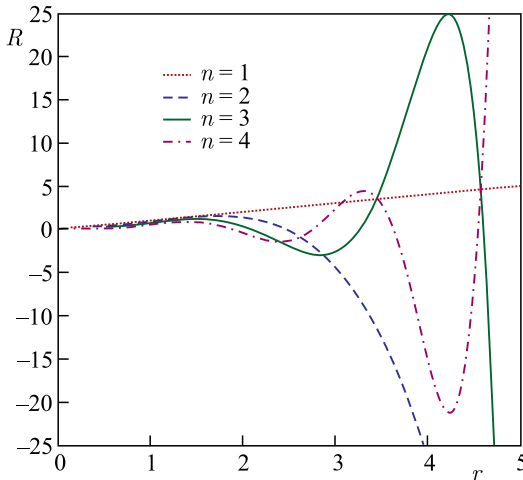


Рис. 17. Графики функций $T_n(\tau)$

Величины λ_j являются корнями уравнения $2j - \lambda_j^2 + \lambda_j = 0$. Следовательно, произведение, стоящее в (3.23), будет удовлетворять условию

$$\prod_{k=0}^{s-1} \frac{2k + \lambda_j - \lambda_j^2}{\lambda_j + k + 1} = 0 \quad \text{при} \quad s \geq j + 1. \quad (3.44)$$

При выполнении условия (3.43), (3.44) количество членов в рядах (3.23) будет конечным, а величина $(\lambda_j(\lambda_j - 1))/2$ — целой. Таким образом, уравнение (3.11) будет иметь решения в виде обобщенных полиномов Лагерра, т. е.

$$T_j(\tau) = \tau^{\lambda_j} L_j^{(\lambda_j)} \left(\frac{\tau^2}{2} \right). \quad (3.45)$$

При значениях $j = 0, 1, 3, 6, 10, \dots$ величины λ_j будут целыми и решения (3.45) совпадут с соответствующими решениями (3.40). Но при значениях $j = 2, 4, 5, 7, 8, 9, \dots$ величины λ_j будут нецелыми и получатся новые решения, выраженные через обобщенные полиномы Лагерра (3.45).

На рис. 18 приведены решения (3.45), соответствующие $\lambda_j^{(+)}$, $j = 2, 4, 5$, а на рис. 19 — решения (3.45), соответствующие $\lambda_j^{(-)}$, $j = 2, 4, 5$.

Если λ не удовлетворяет условию (3.43), то количество членов в ряде (3.23) будет бесконечным. Согласно (3.24) ряд (3.23) будет сходиться абсолютно во всем пространстве и равномерно на любом замкнутом круге и выражаться через гипергеометрическую функцию (3.25). На рис. 20, 21 приве-

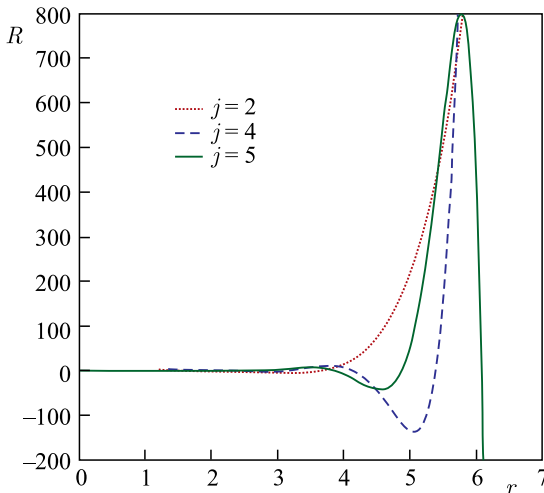
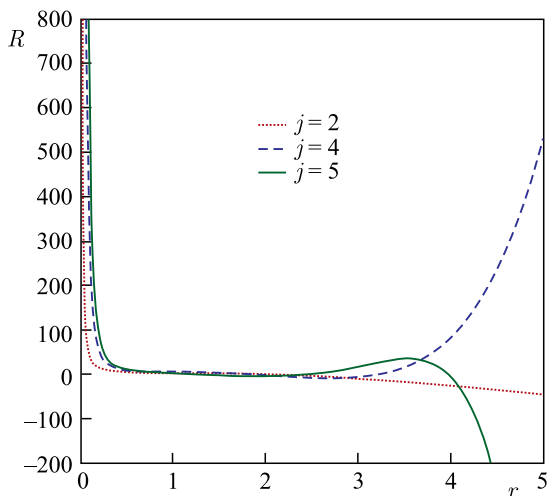
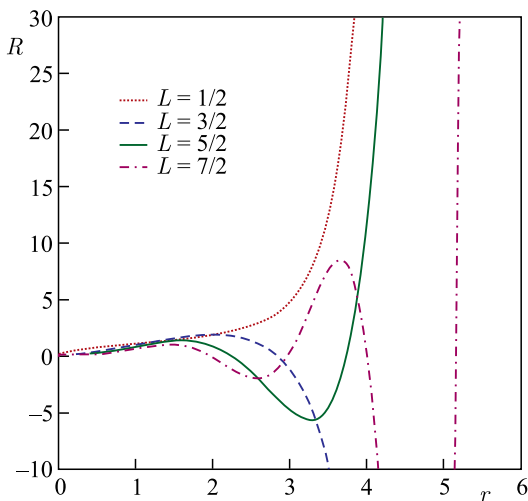


Рис. 18. Графики функций $T_j^{(+)}(\tau)$

Рис. 19. Графики функций $T_j^{(-)}(\tau)$ Рис. 20. Графики функций $T_\lambda(\tau)$ при $\lambda = 1/2, 3/2, 5/2, 7/2$

дены графики решений $T_\lambda(\tau)$ (3.23), (3.25) для случаев $\lambda = 1/2, 3/2, 5/2, 7/2$ и $\lambda = -1/2, -3/2, -5/2, -7/2$ соответственно.

3.4. Обратное преобразование Лежандра. Полученные в пп. 3.2, 3.3 решения $\omega(\xi, \eta)$ необходимо отобразить обратно согласно преобразованию Ле-

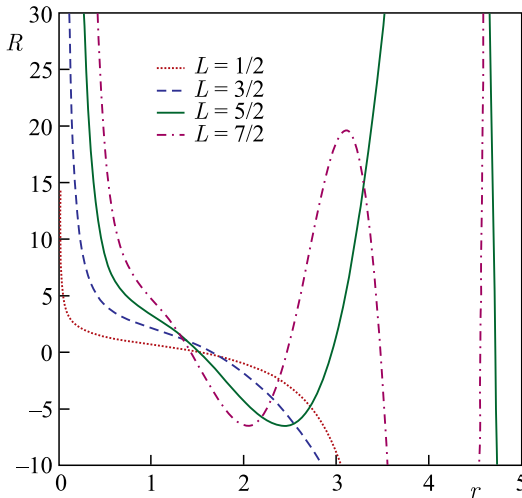


Рис. 21. Графики функций $T_\lambda(\tau)$ при $\lambda = -1/2, -3/2, -5/2, -7/2$

жандра (3.5) и получить решения $\Phi(x, y)$, соответствующие фазе волновой функции (1.6), (1.7). Зная функцию $\Phi(x, y)$, по формуле (3.2) можно определить поле скоростей $\langle \mathbf{v} \rangle(x, y)$. Из выражения (3.1), зная $\langle \mathbf{v} \rangle(x, y)$, можно найти функцию плотности вероятностей $f(x, y)$. Подставляя плотность вероятностей $f(x, y)$ в выражения (1.56) и (1.47), найдем квантовый потенциал $Q(x, y)$ и потенциал $U(x, y)$, входящий в уравнение Шредингера (1.29).

В результате все необходимые величины из п. 3.1 будут определены.

3.4.1. Преобразование фазы и плотности вероятностей. Для осуществления обратного преобразования Лежандра для фазы волновой функции необходимо найти производные от решения ω . Не ограничивая общности, рассмотрим решения $\tilde{\omega}_n(\tau, \theta)$ (3.40):

$$\nabla \tilde{\omega}_n(\tau, \theta) = \Theta_n(\theta) T'_n(\tau) \mathbf{e}_\tau + \Theta'_n(\theta) \frac{T_n(\tau)}{\tau} \mathbf{e}_\theta. \tag{3.46}$$

Вычислим $T'_n(\tau)$, учитывая соотношение для производных от обобщенных многочленов Лагерра [43, 44]:

$$\frac{d^k}{dt^k} L_n^{(\vartheta)}(t) = (-1)^k L_{n-k}^{(\vartheta+k)}(t), \quad k \leq n, \tag{3.47}$$

$$T'_n(\tau) = n\tau^{n-1} L_{(n(n-1))/2}^{(n)} \left(\frac{\tau^2}{2} \right) - \tau^{n+1} L_{((n-2)(n+1))/2}^{(n+1)} \left(\frac{\tau^2}{2} \right).$$

Подставляя (3.47) в (3.46), получим

$$\begin{aligned} \nabla \tilde{\omega}_n(\tau, \theta) = & \left(n\tau^{n-1} L_{(n(n-1))/2}^{(n)} \left(\frac{\tau^2}{2} \right) - \tau^{n+1} L_{((n-2)(n+1))/2}^{(n+1)} \left(\frac{\tau^2}{2} \right) \right) \times \\ & \times (A_n \sin n\theta + B_n \cos n\theta) \mathbf{e}_\tau + \left(\tau^n L_{(n(n-1))/2}^{(n)} \left(\frac{\tau^2}{2} \right) \right) \times \\ & \times (A_n \cos n\theta - B_n \sin n\theta) \mathbf{e}_\theta. \end{aligned} \quad (3.48)$$

В соответствии с преобразованием Лежандра (3.5) и выражениями (3.7), (3.9) функция Φ представима в виде

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{\sigma}{\alpha} \tau \cos \theta, \quad \eta = \frac{\sigma}{\alpha} \tau \sin \theta, \\ \tau_\xi &= \frac{\alpha}{\sigma} \cos \theta, \quad \tau_\eta = \frac{\alpha}{\sigma} \sin \theta, \quad \theta_\xi = -\frac{\alpha \sin \theta}{\sigma \tau}, \quad \theta_\eta = \frac{\alpha \cos \theta}{\sigma \tau}, \quad (3.49) \\ \frac{\sigma}{\alpha} x &= \frac{\sigma}{\alpha} \omega_\xi = \tilde{\omega}_\tau \cos \theta - \tilde{\omega}_\theta \frac{\sin \theta}{\tau}, \quad \frac{\sigma}{\alpha} y = \frac{\sigma}{\alpha} \omega_\eta = \tilde{\omega}_\tau \sin \theta + \tilde{\omega}_\theta \frac{\cos \theta}{\tau}. \end{aligned}$$

В результате

$$\begin{aligned} \Phi(x, y) &= -\tilde{\omega}(\tau, \theta) + x\xi + y\eta = \\ &= \tilde{\omega} + \tau \tilde{\omega}_\tau \cos^2 \theta - \tilde{\omega}_\theta \sin \theta \cos \theta + \tau \tilde{\omega}_\tau \sin^2 \theta + \tilde{\omega}_\theta \cos \theta \sin \theta, \end{aligned} \quad (3.50)$$

$$\Phi = -\tilde{\omega} + \tau \tilde{\omega}_\tau = -T(\tau)\Theta(\theta) + \tau T'(\tau)\Theta(\theta) = \Theta(\theta)(\tau T'(\tau) - T(\tau)).$$

Подставляя выражения (3.29), (3.47) в (3.50), получим

$$\tau T'_n(\tau) - T_n(\tau) = (n-1) \tau^n L_{(n(n-1))/2}^{(n)} \left(\frac{\tau^2}{2} \right) - \tau^{n+2} L_{((n-2)(n+1))/2}^{(n+1)} \left(\frac{\tau^2}{2} \right), \quad (3.51)$$

$$\begin{aligned} \Phi_n = \tau^n \left[(n-1) L_{(n(n-1))/2}^{(n)} \left(\frac{\tau^2}{2} \right) - \tau^2 L_{((n-2)(n+1))/2}^{(n+1)} \left(\frac{\tau^2}{2} \right) \right] \times \\ \times (A_n \sin n\theta + B_n \cos n\theta). \end{aligned}$$

Согласно преобразованию Лежандра и выражениям (3.2) и (3.1)

$$|\langle \mathbf{v} \rangle|^2 = |\alpha \nabla \Phi|^2 = \alpha^2 (\xi^2 + \eta^2) = \sigma^2 \tau^2, \quad (3.52)$$

$$f_n(x, y) = f(x_n(\tau, \theta), y_n(\tau, \theta)) = C e^{-\tau^2/2},$$

где согласно (3.49)

$$x_n(\tau, \theta) = \frac{\alpha}{\sigma} \left[T'_n(\tau) \Theta_n(\theta) \cos \theta - T_n(\tau) \Theta'_n(\theta) \frac{\sin \theta}{\tau} \right],$$

$$y_n(\tau, \theta) = \frac{\alpha}{\sigma} \left[T'_n(\tau) \Theta_n(\theta) \sin \theta + T_n(\tau) \Theta'_n(\theta) \frac{\cos \theta}{\tau} \right].$$
(3.53)

Построение графика плотности вероятностей $f_n(x, y)$ для фиксированного n осуществляется по следующему алгоритму:

- берем точку (τ, θ) и находим для нее по формулам (3.53) значение координат (x, y) и значение функции f по формуле (3.52);
- берем следующую точку (τ, θ) .

При $n = 1$ преобразование Лежандра невозможно (см. замечание), поэтому начнем со случая $n = 2$. В качестве области отображения возьмем круг радиуса $\tau_0 = 2$ и $\sigma = 1$, $b_0 = 1$, $A_n = 1$, $B_n = 0$, т. е. $\tilde{\Omega}_{\tau_0, 2\pi}$, где

$$\tilde{\Omega}_{\tau_0, \theta_0} = \{(\tau, \theta) : 0 < \tau < \tau_0, 0 \leq \theta < \theta_0\}.$$
(3.54)

На рис. 22–24 приведены графики функции $\Phi_2(x, y)$, $|\nabla\Phi_2(x, y)|$ и $f_2(x, y)$ соответственно.

Видно, что функции являются неоднозначными при отображении области $\tilde{\Omega}_{2, 2\pi}$. Если уменьшить радиус круга до $\tau_0 = 0,8$, то получим однозначные функции (рис. 25–27).

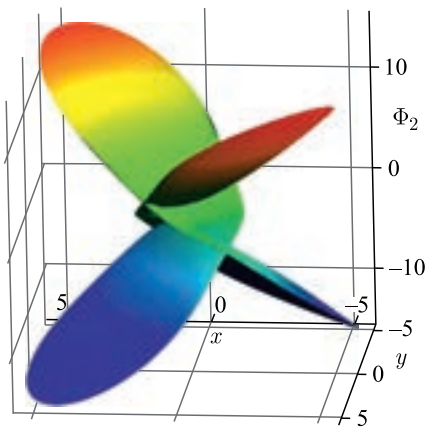


Рис. 22. Графики функций $\Phi_2(x, y)$ для $\tilde{\Omega}_{2, 2\pi}$

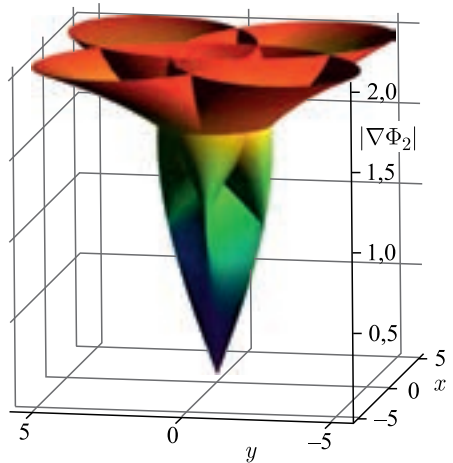


Рис. 23. Графики функций $|\nabla\Phi_2(x, y)|$ для $\tilde{\Omega}_{2, 2\pi}$

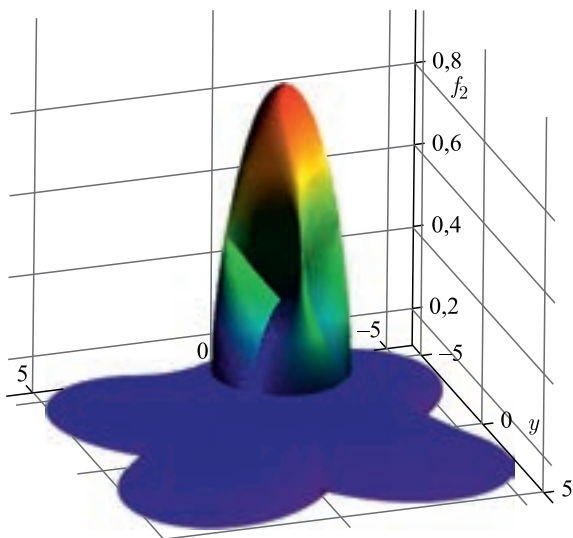


Рис. 24. Графики функций $f_2(x, y)$ для $\tilde{\Omega}_{2, 2\pi}$

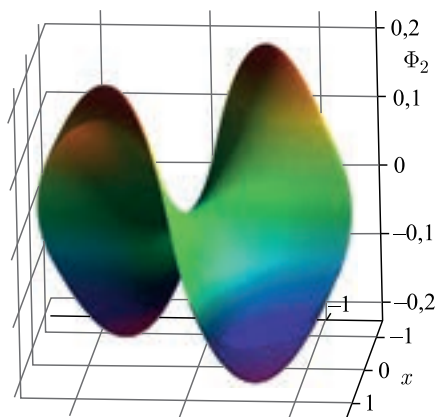


Рис. 25. Графики функций $\Phi_2(x, y)$ для $\tilde{\Omega}_{0, 8, 2\pi}$

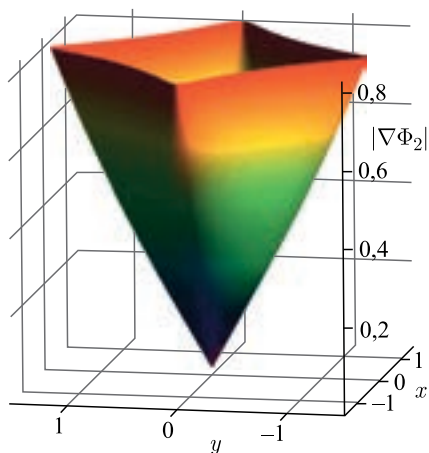


Рис. 26. Графики функций $|\nabla\Phi_2(x, y)|$ для $\tilde{\Omega}_{0, 8, 2\pi}$

В случае $n = 3$ отображение области круга $\tilde{\Omega}_{\tau_0, 2\pi}$ также дает неоднозначную функцию (рис. 28, 29). Для выделения области однозначности необходимо отображать не область круга, а область сектора $\tilde{\Omega}_{\tau_0, \pi}$ с углом $\theta_0 = \pi$ (рис. 30, 31).

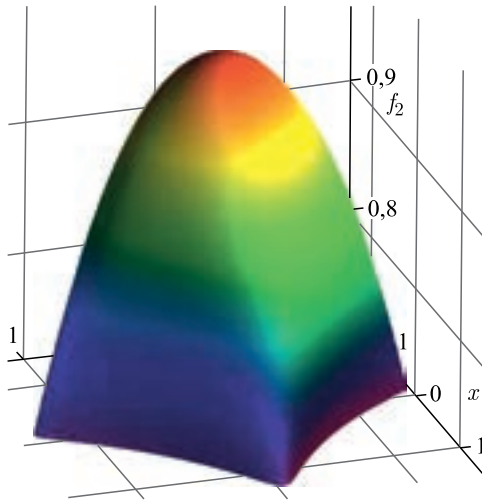


Рис. 27. Графики функций $f_2(x, y)$ для $\tilde{\Omega}_{0,8;2\pi}$

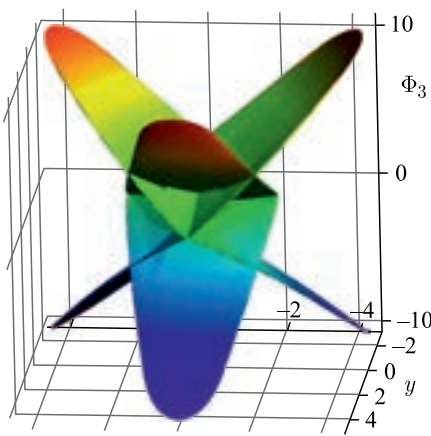


Рис. 28. Графики функций $\Phi_3(x, y)$ для $\tilde{\Omega}_{2,2\pi}$

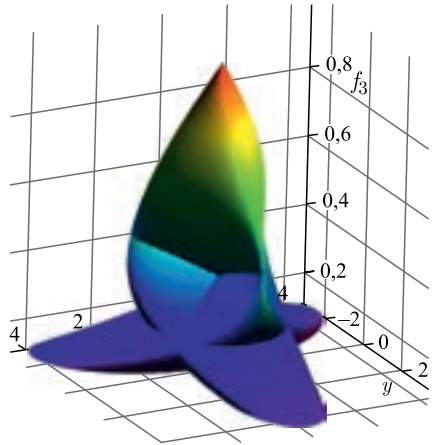


Рис. 29. Графики функций $f_3(x, y)$ для $\tilde{\Omega}_{2,2\pi}$

На рис. 30 видно, что функция $\Phi_3(x, y)$ не является гладкой при $\theta = 0$, но является непрерывной и однозначной. При последующих значениях $n \geq 4$ функция $\Phi_n(x, y)$ может иметь два основных вида. Первый вариант, когда $\Phi_n(x, y)$ является однозначной, но при этом имеет разрыв при $\theta = 0$. Вторым вариантом, когда $\Phi_n(x, y)$ является неоднозначной, но при этом — непре-

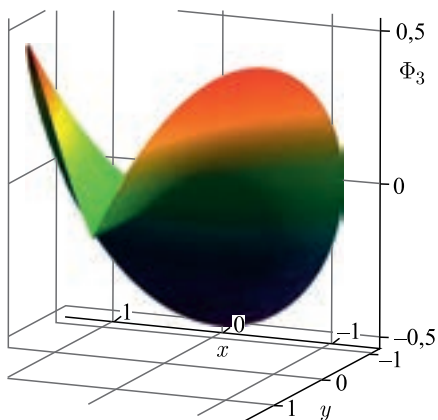


Рис. 30. Графики функций $\Phi_3(x, y)$ для $\tilde{\Omega}_{0,8,\pi}$

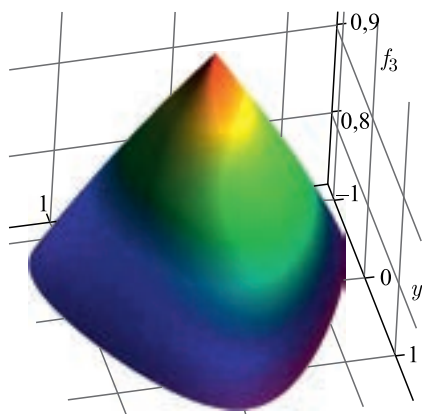


Рис. 31. Графики функций $f_3(x, y)$ для $\tilde{\Omega}_{0,8,\pi}$

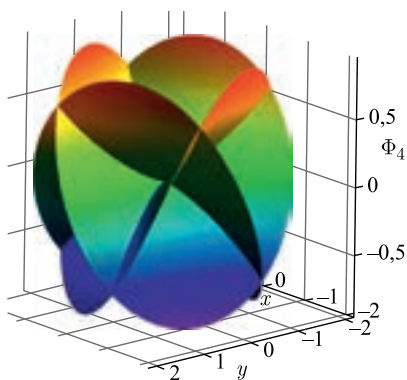


Рис. 32. Графики функций $\Phi_4(x, y)$ для $\tilde{\Omega}_{1,2\pi}$

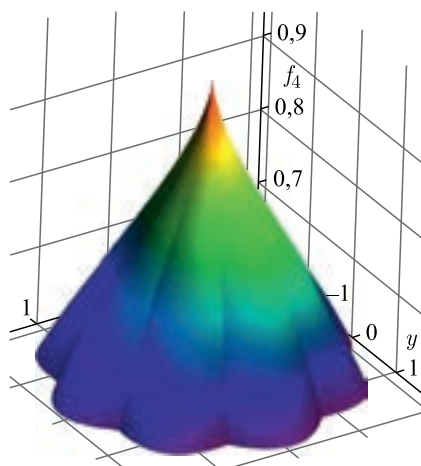


Рис. 33. Графики функций $f_4(x, y)$ для $\tilde{\Omega}_{1,2\pi}$

рывна. На рис. 32, 33 приведены графики $\Phi_4(x, y)$ и $f_4(x, y)$, соответствующие области $\tilde{\Omega}_{1,2\pi}$, а на рис. 34 приведен график $f_4(x, y)$, соответствующий области $\tilde{\Omega}_{2,2\pi}$.

3.4.2. *Преобразование квантового потенциала.* Получим выражение для обратного преобразования квантового потенциала Q (1.56):

$$Q = \frac{\alpha}{2\beta} \left(\Delta_r S + \frac{1}{2} |\nabla_r S|^2 \right) = -\frac{\alpha}{4\beta} \left(\Delta_r \tau^2 - \frac{1}{4} |\nabla_r \tau^2|^2 \right). \quad (3.55)$$

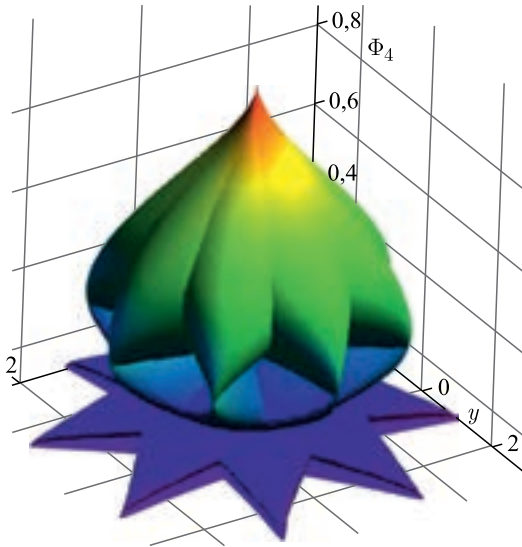


Рис. 34. Графики функций $\Phi_4(x, y)$ для $\tilde{\Omega}_{2, 2\pi}$

Вычислим $\nabla_r \tau^2$:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma^2}{\alpha^2} \nabla_r \tau^2 &= 2(\xi \xi_x + \eta \eta_x) \mathbf{e}_x + 2(\xi \xi_y + \eta \eta_y) \mathbf{e}_y = \\ &= 2(\xi \Phi_{xx} + \eta \Phi_{yx}) \mathbf{e}_x + 2(\xi \Phi_{xy} + \eta \Phi_{yy}) \mathbf{e}_y = \\ &= 2\rho(\xi \omega_{\eta\eta} - \eta \omega_{\xi\xi}) \mathbf{e}_x + 2\rho(\eta \omega_{\xi\xi} - \xi \omega_{\xi\eta}) \mathbf{e}_y, \end{aligned} \tag{3.56}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\rho^2} \frac{\sigma^4}{\alpha^4} |\nabla_r \tau^2|^2 &= (\xi \omega_{\eta\eta} - \eta \omega_{\xi\xi})^2 + (\eta \omega_{\xi\xi} - \xi \omega_{\xi\eta})^2 = \\ &= \xi^2 \omega_{\eta\eta}^2 - 2\xi \eta \omega_{\eta\eta} \omega_{\xi\xi} + \eta^2 \omega_{\xi\xi}^2 + \eta^2 \omega_{\xi\xi}^2 - 2\xi \eta \omega_{\xi\xi} \omega_{\xi\eta} + \xi^2 \omega_{\xi\eta}^2 = \\ &= \xi^2 \omega_{\eta\eta}^2 + \eta^2 \omega_{\xi\xi}^2 - 2\xi \eta \omega_{\xi\eta} (\omega_{\xi\xi} + \omega_{\eta\eta}) + \omega_{\xi\eta}^2 (\xi^2 + \eta^2), \end{aligned}$$

$$\frac{1}{4} |\nabla_r \tau^2|^2 = \frac{\alpha^4}{\sigma^4} \rho^2 [\xi^2 \omega_{\eta\eta}^2 + \eta^2 \omega_{\xi\xi}^2 - 2\xi \eta \omega_{\xi\eta} (\omega_{\xi\xi} + \omega_{\eta\eta}) + \omega_{\xi\eta}^2 (\xi^2 + \eta^2)].$$

Вычислим $\Delta_r \tau^2$:

$$\frac{\sigma^2}{\alpha^2} \Delta_r \tau^2 = [2\rho(\xi \omega_{\eta\eta} - \eta \omega_{\xi\xi})]_x + [2\rho(\eta \omega_{\xi\xi} - \xi \omega_{\xi\eta})]_y. \tag{3.57}$$

Каждое слагаемое в выражении (3.57) найдем по отдельности. Для первого слагаемого получим

$$[\rho(\xi \omega_{\eta\eta} - \eta \omega_{\xi\xi})]_x = \rho_x (\xi \omega_{\eta\eta} - \eta \omega_{\xi\xi}) + \rho (\xi \omega_{\eta\eta} - \eta \omega_{\xi\xi})_x, \tag{3.58}$$

$$\begin{aligned} \rho_x = & \\ = - \frac{(\omega_{\xi\xi\xi}\xi_x + \omega_{\xi\xi\eta}\eta_x) \omega_{\eta\eta} + \omega_{\xi\xi} (\omega_{\eta\eta\xi}\xi_x + \omega_{\eta\eta\eta}\eta_x) - 2\omega_{\xi\eta} (\omega_{\xi\eta\xi}\xi_x + \omega_{\xi\eta\eta}\eta_x)}{(\omega_{\xi\xi}\omega_{\eta\eta} - \omega_{\xi\eta}^2)^2} = & \\ = -\rho^3 [(\omega_{\xi\xi\xi}\omega_{\eta\eta} - \omega_{\xi\xi\eta}\omega_{\xi\eta}) \omega_{\eta\eta} + \omega_{\xi\xi} (\omega_{\eta\eta\xi}\omega_{\eta\eta} - \omega_{\eta\eta\eta}\omega_{\xi\eta}) - & \\ - 2\omega_{\xi\eta} (\omega_{\xi\eta\xi}\omega_{\eta\eta} - \omega_{\xi\eta\eta}\omega_{\xi\eta})]. & \quad (3.59) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\xi\omega_{\eta\eta} - \eta\omega_{\xi\eta})_x = \xi_x\omega_{\eta\eta} + \xi (\omega_{\eta\eta\xi}\xi_x + \omega_{\eta\eta\eta}\eta_x) - & \\ - \eta_x\omega_{\xi\eta} - \eta (\omega_{\xi\eta\xi}\xi_x + \omega_{\xi\eta\eta}\eta_x) = & \\ = \rho [\omega_{\eta\eta}^2 + \omega_{\xi\eta}^2 + \xi (\omega_{\eta\eta\xi}\omega_{\eta\eta} - \omega_{\eta\eta\eta}\omega_{\eta\xi}) - \eta (\omega_{\xi\eta\xi}\omega_{\eta\eta} - \omega_{\xi\eta\eta}\omega_{\eta\xi})]. & \quad (3.60) \end{aligned}$$

Подставляя (3.59) и (3.60) в (3.58), получим

$$\begin{aligned} [\rho (\xi\omega_{\eta\eta} - \eta\omega_{\xi\eta})]_x = & \\ = \rho^2 [\omega_{\eta\eta}^2 + \omega_{\xi\eta}^2 + \xi (\omega_{\eta\eta\xi}\omega_{\eta\eta} - \omega_{\eta\eta\eta}\omega_{\eta\xi}) - \eta (\omega_{\xi\eta\xi}\omega_{\eta\eta} - \omega_{\xi\eta\eta}\omega_{\eta\xi})] - & \\ - \rho^3 [(\omega_{\xi\xi\xi}\omega_{\eta\eta} - \omega_{\xi\xi\eta}\omega_{\xi\eta}) \omega_{\eta\eta} + \omega_{\xi\xi} (\omega_{\eta\eta\xi}\omega_{\eta\eta} - \omega_{\eta\eta\eta}\omega_{\xi\eta}) - & \\ - 2\omega_{\xi\eta} (\omega_{\xi\eta\xi}\omega_{\eta\eta} - \omega_{\xi\eta\eta}\omega_{\xi\eta})] (\xi\omega_{\eta\eta} - \eta\omega_{\xi\eta}). & \quad (3.61) \end{aligned}$$

Аналогично для второго слагаемого из (3.57) получаем

$$[\rho (\eta\omega_{\xi\xi} - \xi\omega_{\xi\eta})]_y = \rho_y (\eta\omega_{\xi\xi} - \xi\omega_{\xi\eta}) + \rho (\eta\omega_{\xi\xi} - \xi\omega_{\xi\eta})_y, \quad (3.62)$$

$$\begin{aligned} \rho_y = & \\ = - \frac{(\omega_{\xi\xi\xi}\xi_y + \omega_{\xi\xi\eta}\eta_y) \omega_{\eta\eta} + \omega_{\xi\xi} (\omega_{\eta\eta\xi}\xi_y + \omega_{\eta\eta\eta}\eta_y) - 2\omega_{\xi\eta} (\omega_{\xi\eta\xi}\xi_y + \omega_{\xi\eta\eta}\eta_y)}{(\omega_{\xi\xi}\omega_{\eta\eta} - \omega_{\xi\eta}^2)^2} = & \\ = -\rho^3 [(\omega_{\xi\xi\xi}\omega_{\eta\eta} - \omega_{\xi\xi\eta}\omega_{\xi\eta}) \omega_{\eta\eta} + \omega_{\xi\xi} (\omega_{\eta\eta\xi}\omega_{\eta\eta} - \omega_{\eta\eta\eta}\omega_{\xi\eta}) - & \\ - 2\omega_{\xi\eta} (\omega_{\xi\eta\xi}\omega_{\eta\eta} - \omega_{\xi\eta\eta}\omega_{\xi\eta})], & \quad (3.63) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\eta\omega_{\xi\xi} - \xi\omega_{\xi\eta})_y = u_{yy}\omega_{\xi\xi} + \eta(\omega_{\xi\xi\xi}u_{xy} + \omega_{\xi\xi\eta}u_{yy}) - & \\ - u_{xy}\omega_{\xi\eta} - \xi(\omega_{\xi\eta\xi}u_{xy} + \omega_{\xi\eta\eta}u_{yy}) = & \\ = \rho [\omega_{\xi\xi}^2 + \omega_{\xi\eta}^2 + \eta(\omega_{\xi\xi\xi}\omega_{\eta\eta} - \omega_{\xi\xi\eta}\omega_{\xi\eta}) - \xi(\omega_{\xi\eta\xi}\omega_{\eta\eta} - \omega_{\xi\eta\eta}\omega_{\xi\eta})]. & \quad (3.64) \end{aligned}$$

Подставляя (3.63) и (3.64) в (3.62), получим

$$\begin{aligned} [\rho (\eta\omega_{\xi\xi} - \xi\omega_{\xi\eta})]_y = & \\ = \rho^2 [\omega_{\xi\xi}^2 + \omega_{\xi\eta}^2 + \eta(\omega_{\xi\xi\xi}\omega_{\eta\eta} - \omega_{\xi\xi\eta}\omega_{\xi\eta}) - \xi(\omega_{\xi\eta\xi}\omega_{\eta\eta} - \omega_{\xi\eta\eta}\omega_{\xi\eta})] - & \\ - \rho^3 [(\omega_{\xi\xi\xi}\omega_{\eta\eta} - \omega_{\xi\xi\eta}\omega_{\xi\eta}) \omega_{\eta\eta} + \omega_{\xi\xi} (\omega_{\eta\eta\xi}\omega_{\eta\eta} - \omega_{\eta\eta\eta}\omega_{\xi\eta}) - & \\ - 2\omega_{\xi\eta} (\omega_{\xi\eta\xi}\omega_{\eta\eta} - \omega_{\xi\eta\eta}\omega_{\xi\eta})] (\eta\omega_{\xi\xi} - \xi\omega_{\xi\eta}). & \quad (3.65) \end{aligned}$$

В результате оба слагаемых для выражения (3.57) найдены. Подставим (3.61) и (3.65) в (3.57), получим

$$\begin{aligned} \frac{\sigma^2}{2\alpha^2} \Delta_r \tau^2 &= [\rho(\xi\omega_{\eta\eta} - \eta\omega_{\xi\eta})]_x + [\rho(\eta\omega_{\xi\xi} - \xi\omega_{\xi\eta})]_y = \\ &= \rho^2 [\omega_{\eta\eta}^2 + \omega_{\xi\eta}^2 + \xi(\omega_{\eta\eta\xi}\omega_{\eta\eta} - \omega_{\eta\eta\eta}\omega_{\eta\xi}) - \eta(\omega_{\xi\eta\xi}\omega_{\eta\eta} - \omega_{\xi\eta\eta}\omega_{\eta\xi})] + \\ &+ \rho^2 [\omega_{\xi\xi}^2 + \omega_{\xi\eta}^2 + \eta(\omega_{\xi\xi\eta}\omega_{\xi\xi} - \omega_{\xi\xi\xi}\omega_{\xi\eta}) - \xi(\omega_{\xi\eta\eta}\omega_{\xi\xi} - \omega_{\xi\eta\xi}\omega_{\xi\eta})] - \\ &- \rho^3 [(\omega_{\xi\xi\xi}\omega_{\eta\eta} - \omega_{\xi\xi\eta}\omega_{\xi\eta})\omega_{\eta\eta} + \omega_{\xi\xi}(\omega_{\eta\eta\xi}\omega_{\eta\eta} - \omega_{\eta\eta\eta}\omega_{\xi\eta}) - \\ &- 2\omega_{\xi\eta}(\omega_{\xi\eta\xi}\omega_{\eta\eta} - \omega_{\xi\eta\eta}\omega_{\xi\eta})] (\xi\omega_{\eta\eta} - \eta\omega_{\xi\eta}) - \rho^3 (\eta\omega_{\xi\xi} - \xi\omega_{\xi\eta}) \times \\ &\times [(\omega_{\xi\xi\eta}\omega_{\xi\xi} - \omega_{\xi\xi\xi}\omega_{\xi\eta})\omega_{\eta\eta} + \omega_{\xi\xi}(\omega_{\eta\eta\eta}\omega_{\xi\xi} - \omega_{\eta\eta\xi}\omega_{\xi\eta}) - \\ &- 2\omega_{\xi\eta}(\omega_{\xi\eta\eta}\omega_{\xi\xi} - \omega_{\xi\eta\xi}\omega_{\xi\eta})], \end{aligned}$$

в результате

$$\begin{aligned} \frac{\sigma^2}{2\alpha^2\rho^2} \Delta_r \tau^2 &= (\omega_{\eta\eta}^2 + 2\omega_{\xi\eta}^2 + \omega_{\xi\xi}^2) + \\ &+ \xi [\omega_{\xi\eta\eta} (\omega_{\eta\eta} - \omega_{\xi\xi}) + \omega_{\xi\eta} (\omega_{\xi\xi\eta} - \omega_{\eta\eta\eta})] + \\ &+ \eta [\omega_{\xi\xi\eta} (\omega_{\xi\xi} - \omega_{\eta\eta}) + \omega_{\xi\eta} (\omega_{\xi\eta\eta} - \omega_{\xi\xi\xi})] + \\ &+ \rho\xi (\omega_{\eta\eta\eta}\omega_{\xi\xi} + \omega_{\xi\xi\eta}\omega_{\eta\eta} - 2\omega_{\xi\eta}\omega_{\xi\eta\eta}) \omega_{\xi\eta} \Delta\omega + \\ &+ \rho\eta (\omega_{\xi\xi\xi}\omega_{\eta\eta} + \omega_{\xi\eta\eta}\omega_{\xi\xi} - 2\omega_{\xi\eta}\omega_{\xi\xi\eta}) \omega_{\xi\eta} \Delta\omega - \\ &- \rho\xi (\omega_{\xi\xi\xi}\omega_{\eta\eta} + \omega_{\xi\eta\eta}\omega_{\xi\xi} - 2\omega_{\xi\eta}\omega_{\xi\xi\eta}) (\omega_{\eta\eta}^2 + \omega_{\xi\eta}^2) + \\ &- \rho\eta (\omega_{\eta\eta\eta}\omega_{\xi\xi} + \omega_{\xi\xi\eta}\omega_{\eta\eta} - 2\omega_{\xi\eta}\omega_{\xi\eta\eta}) (\omega_{\xi\xi}^2 + \omega_{\xi\eta}^2). \quad (3.66) \end{aligned}$$

Подставляя (3.66) и (3.56) в (3.55), получим выражение для квантового потенциала

$$\begin{aligned} -\frac{2\beta\sigma^2}{\alpha^3\rho^2} Q &= \frac{\sigma^2}{2\alpha^2\rho^2} \Delta_r \tau^2 - \frac{1}{2} \frac{\alpha^2}{\sigma^2} \frac{\sigma^4}{4\alpha^4\rho^2} |\nabla_r \tau^2|^2 = \omega_{\eta\eta}^2 + 2\omega_{\xi\eta}^2 + \omega_{\xi\xi}^2 + \\ &+ \xi [\omega_{\xi\eta\eta} (\omega_{\eta\eta} - \omega_{\xi\xi}) + \omega_{\xi\eta} (\omega_{\xi\xi\eta} - \omega_{\eta\eta\eta})] + \\ &+ \eta [\omega_{\xi\xi\eta} (\omega_{\xi\xi} - \omega_{\eta\eta}) + \omega_{\xi\eta} (\omega_{\xi\eta\eta} - \omega_{\xi\xi\xi})] + \\ &+ \left[\xi (\omega_{\eta\eta\eta}\omega_{\xi\xi} + \omega_{\xi\xi\eta}\omega_{\eta\eta} - 2\omega_{\xi\eta}\omega_{\xi\eta\eta}) + \frac{\alpha^2}{\sigma^2\rho} \xi\eta + \right. \\ &+ \left. \eta (\omega_{\xi\xi\xi}\omega_{\eta\eta} + \omega_{\xi\eta\eta}\omega_{\xi\xi} - 2\omega_{\xi\eta}\omega_{\xi\xi\eta}) \right] \rho\omega_{\xi\eta} \Delta\omega - \\ &- \rho\xi \left(\omega_{\xi\xi\xi}\omega_{\eta\eta} + \omega_{\xi\eta\eta}\omega_{\xi\xi} - 2\omega_{\xi\eta}\omega_{\xi\xi\eta} + \frac{\alpha^2}{2\sigma^2\rho} \xi \right) (\omega_{\eta\eta}^2 + \omega_{\xi\eta}^2) + \\ &- \rho\eta \left(\omega_{\eta\eta\eta}\omega_{\xi\xi} + \omega_{\xi\xi\eta}\omega_{\eta\eta} - 2\omega_{\xi\eta}\omega_{\xi\eta\eta} + \frac{\alpha^2}{2\sigma^2\rho} \eta \right) (\omega_{\xi\xi}^2 + \omega_{\xi\eta}^2). \quad (3.67) \end{aligned}$$

Слагаемые, стоящие в (3.67), выражены через переменные (ξ, η) , а решение $\tilde{\omega}(\tau, \theta)$ (3.32) — через переменные (τ, θ) . Для производных $\omega_{\xi\xi}$, $\omega_{\xi\eta}$ и $\omega_{\eta\eta}$ ранее были получены выражения (3.9) через производные от решения $\tilde{\omega}_{\tau\tau}$, $\tilde{\omega}_{\theta\theta}$, $\tilde{\omega}_{\tau\theta}$, $\tilde{\omega}_\tau$ и $\tilde{\omega}_\theta$. В выражении (3.67) помимо производных второго порядка присутствуют производные третьего порядка $\omega_{\xi\xi\xi}$, $\omega_{\xi\eta\eta}\omega_{\xi\xi\eta}$, $\omega_{\eta\eta\eta}$, которые также необходимо выразить через производные от решения $\tilde{\omega}(\tau, \theta)$. Получим выражения для производных третьего порядка:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma^3}{\alpha^3}\omega_{\xi\xi\xi} = & \tilde{\omega}_{\tau\tau\tau}\cos^3\theta - \tilde{\omega}_{\theta\theta\theta}\frac{\sin^3\theta}{\tau^3} - 3\tilde{\omega}_{\tau\tau\theta}\frac{\cos^2\theta\sin\theta}{\tau} + 3\tilde{\omega}_{\tau\theta\theta}\frac{\cos\theta\sin^2\theta}{\tau^2} + \\ & + 3\tilde{\omega}_{\tau\tau}\frac{\cos\theta\sin^2\theta}{\tau} - 6\tilde{\omega}_{\theta\theta}\frac{\sin^2\theta\cos\theta}{\tau^3} + 3\tilde{\omega}_{\tau\theta}\frac{\sin\theta(3\cos^2\theta-1)}{\tau^2} - \\ & - 3\tilde{\omega}_\tau\frac{\sin^2\theta\cos\theta}{\tau^2} - 2\tilde{\omega}_\theta\frac{\sin\theta(4\cos^2\theta-1)}{\tau^3}, \quad (3.68) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\sigma^3}{\alpha^3}\omega_{\eta\eta\eta} = & \tilde{\omega}_{\tau\tau\tau}\sin^3\theta + \tilde{\omega}_{\theta\theta\theta}\frac{\cos^3\theta}{\tau^3} + 3\tilde{\omega}_{\tau\tau\theta}\frac{\sin^2\theta\cos\theta}{\tau} + 3\tilde{\omega}_{\tau\theta\theta}\frac{\sin\theta\cos^2\theta}{\tau^2} + \\ & + 3\tilde{\omega}_{\tau\tau}\frac{\sin\theta\cos^2\theta}{\tau} - 6\tilde{\omega}_{\theta\theta}\frac{\cos^2\theta\sin\theta}{\tau^3} - 3\tilde{\omega}_{\tau\theta}\frac{\cos\theta(3\sin^2\theta-1)}{\tau^2} - \\ & - 3\tilde{\omega}_\tau\frac{\cos^2\theta\sin\theta}{\tau^2} + 2\tilde{\omega}_\theta\frac{\cos\theta(4\sin^2\theta-1)}{\tau^3}, \quad (3.69) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\sigma^3}{\alpha^3}\omega_{\xi\xi\eta} = & \tilde{\omega}_{\tau\tau\tau}\sin\theta\cos^2\theta + \tilde{\omega}_{\theta\theta\theta}\frac{\sin^2\theta\cos\theta}{\tau^3} + \tilde{\omega}_{\tau\tau\theta}\frac{\cos\theta(1-3\sin^2\theta)}{\tau} + \\ & + \tilde{\omega}_{\tau\theta\theta}\frac{\sin\theta(1-3\cos^2\theta)}{\tau^2} + \tilde{\omega}_{\tau\tau}\frac{\sin\theta(1-3\cos^2\theta)}{\tau} + 2\tilde{\omega}_{\theta\theta}\frac{\sin\theta(3\cos^2\theta-1)}{\tau^3} + \\ & + \tilde{\omega}_\tau\frac{\cos\theta(9\sin^2\theta-1)}{\tau^2} + \tilde{\omega}_\theta\frac{\sin\theta(3\cos^2\theta-1)}{\tau^2} - 2\tilde{\omega}_\theta\frac{\cos\theta(4\sin^2\theta-1)}{\tau^3}, \quad (3.70) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\sigma^3}{\alpha^3}\omega_{\eta\eta\xi} = & \tilde{\omega}_{\tau\tau\tau}\cos\theta\sin^2\theta - \tilde{\omega}_{\theta\theta\theta}\frac{\cos^2\theta\sin\theta}{\tau^3} - \tilde{\omega}_{\tau\tau\theta}\frac{\sin\theta(1-3\cos^2\theta)}{\tau} + \\ & + \tilde{\omega}_{\tau\theta\theta}\frac{\cos\theta(1-3\sin^2\theta)}{\tau^2} + \tilde{\omega}_{\tau\tau}\frac{\cos\theta(1-3\sin^2\theta)}{\tau} + 2\tilde{\omega}_{\theta\theta}\frac{\cos\theta(3\sin^2\theta-1)}{\tau^3} - \\ & - \tilde{\omega}_\tau\frac{\sin\theta(9\cos^2\theta-1)}{\tau^2} + \tilde{\omega}_\theta\frac{\cos\theta(3\sin^2\theta-1)}{\tau^2} + 2\tilde{\omega}_\theta\frac{\sin\theta(4\cos^2\theta-1)}{\tau^3}. \quad (3.71) \end{aligned}$$

Подставляя (3.68)–(3.71), (3.32) в (3.67), получим выражение для квантового потенциала через переменные (τ, θ) . Используя выражения (3.67),

(3.68)–(3.71), (3.32), можно построить график квантового потенциала Q и потенциала U (1.47), (1.56), входящего в уравнение Шредингера. Зная потенциалы Q и U , можно построить график классического потенциала $e\chi$ (1.56).

3.5. Частные случаи потенциалов. Построим графики потенциалов Q , U , кинетической энергии T и поля скоростей $\langle \mathbf{v} \rangle$ при условии (3.30). При построении будем использовать алгоритм, описанный в п. 3.4.1, и выражения для потенциалов, полученные в п. 3.4.3. Рассмотрим два предельных случая: $\sigma = |\alpha|$ и $\sigma = 10|\alpha|$. Для каждого случая рассмотрим два значения параметра: $n = 2$ и $n = 3$. Начнем со случая $\sigma = |\alpha|$ и $n = 2$.

На рис. 35 приведено распределение векторного поля скоростей $\langle \mathbf{v} \rangle_2(x, y)$. Видно четыре потока: два входящих и два исходящих. В результате рис. 35 демонстрирует рассеяние двух встречных потоков на классическом потенциале $e\chi = U + Q = W - T$. Величина W соответствует полной энергии и является постоянной величиной. Величина T соответствует кинетической энергии и изображена на рис. 36. Таким образом, классический потенциал с точностью до константы W совпадает с $-T$. График распределения для классического потенциала $e\chi$, как и график распределения кинетической энергии T , будет иметь «угловатую» форму (прямоугольное основание пирамиды, см. рис. 36). Такая форма потенциала приводит к соответствующему перераспределению векторного поля скоростей $\langle \mathbf{v} \rangle$ при рассеянии на таком потенциале. На рис. 35 видна прямоугольная форма линий уровней модуля скоростей. В центральной области из-за столкновения потоков скорость близка к нулю (см. рис. 35, 36).

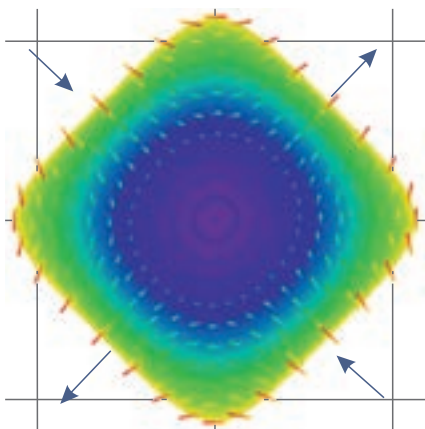


Рис. 35. Векторное поле скоростей $\langle \mathbf{v} \rangle_2(x, y)$ при $\sigma = |\alpha|$

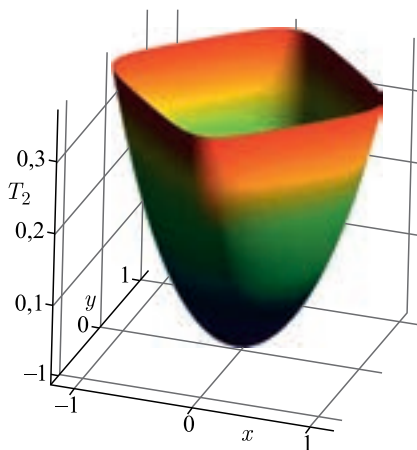


Рис. 36. Кинетическая энергия $T_2(x, y)$ при $\sigma = |\alpha|$

Квантовый потенциал Q имеет множитель $|\alpha|/\beta = \hbar^2/2m \ll 1$ и обычно малый вклад в классический потенциал $e\chi$. В рассматриваемом случае величина $\sigma = |\alpha| = \hbar/2m$, что приводит к близости форм потенциалов Q и U (рис. 37, 38).

На рис. 39–42 показан случай $\sigma = 10|\alpha|$ и $n = 2$. На рис. 41, 42 приведены распределения для потенциалов U и Q соответственно. За счет увеличения σ вклад квантового потенциала стал незначительным. Действительно, из сравнения графика потенциала U (см. рис. 41) и графика кинетической энергии T (см. рис. 40) видно, что они с точностью до знака очень близки. Разницу

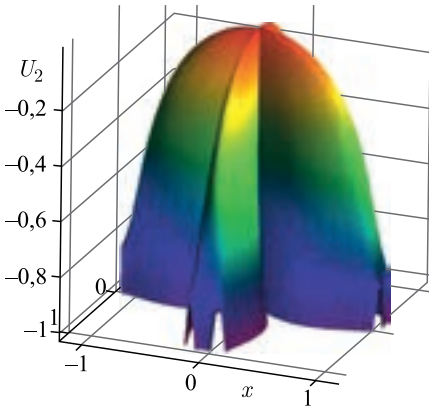


Рис. 37. Потенциал $U_2(x, y)$ при $\sigma = |\alpha|$

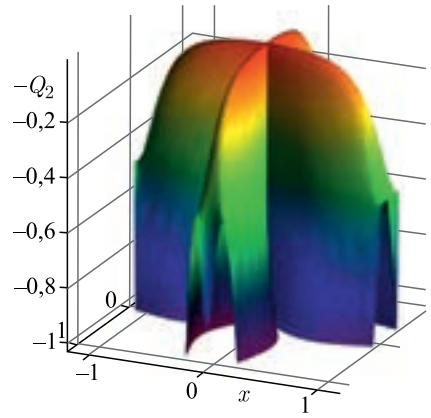


Рис. 38. Потенциал $-Q_2(x, y)$ при $\sigma = |\alpha|$

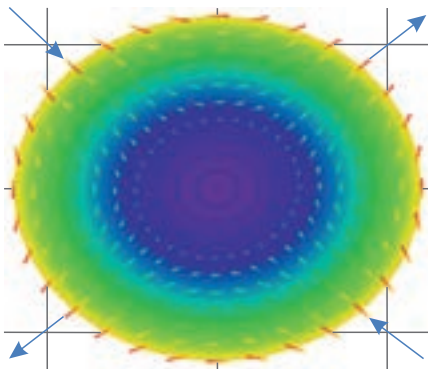


Рис. 39. Векторное поле скоростей $\langle \mathbf{v} \rangle_2(x, y)$ при $\sigma = 10|\alpha|$

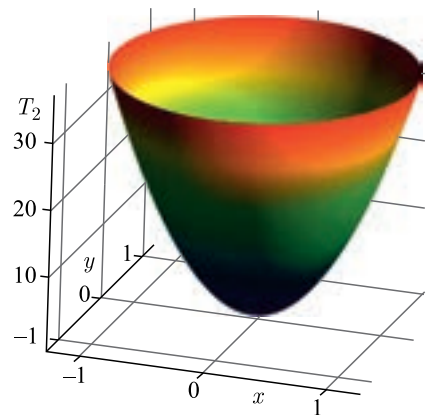


Рис. 40. Кинетическая энергия $T_2(x, y)$ при $\sigma = 10|\alpha|$

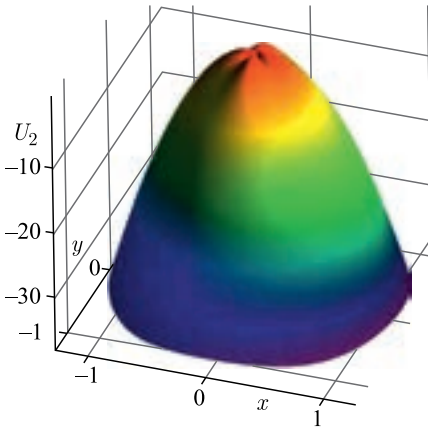


Рис. 41. Потенциал $U_2(x, y)$ при $\sigma = 10|\alpha|$

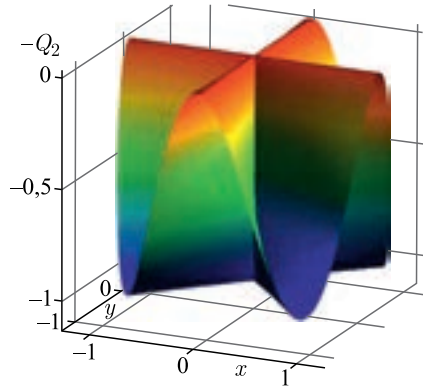


Рис. 42. Потенциал $-Q_2(x, y)$ при $\sigma = 10|\alpha|$

между ними с точностью до константы W составляет квантовый потенциал Q (см. рис. 42).

На рис. 39 показано распределение векторного поля скоростей для случая $\sigma = 10|\alpha|$ и $n = 2$. Как и в предыдущем случае, здесь имеются два входящих и два исходящих потока. Также здесь происходит процесс рассеяния двух встречных потоков на потенциале $e\chi$. Однако в отличие от предыдущего случая форма потенциала стала более «округлой» (основание — окружность конуса). Такая форма потенциала повлияла на перераспределение векторного поля скоростей $\langle \mathbf{v} \rangle$ (см. рис. 39). При сравнении векторного поля из предыдущего случая (см. рис. 35) с векторным полем, изображенным на рис. 39, видно, что линии уровня стали близки к окружностям.

Перейдем к рассмотрению случая $n = 3$, который существенно отличается от случая $n = 2$. Данное отличие было заметно при построении графиков фаз волновых функций (см. рис. 25, 30). На рис. 25 приведено распределение фазы Φ_2 волновой функции при $n = 2$. Функция Φ_2 является непрерывно дифференцируемой на всей отображаемой области (см. рис. 25).

На рис. 30 приведено распределение фазы Φ_3 волновой функции при $n = 3$. В отличие от функции Φ_2 функция Φ_3 не является дифференцируемой на луче при $\theta = 0$. Векторное поле скоростей $\langle \mathbf{v} \rangle$ согласно представлению (3.2) $\langle \mathbf{v} \rangle_3 = -\alpha \nabla \Phi_3$ будет иметь разрыв на луче $\theta = 0$. На рис. 43, 47 приведены распределения векторных полей $\langle \mathbf{v} \rangle_3$ при $\sigma = |\alpha|$ и $\sigma = 10|\alpha|$ соответственно. В обоих случаях виден разрыв в направлениях скоростей слева и справа от вертикальной линии, соответствующей углу $\theta = 0$ (см. рис. 43, 47). В предыдущем случае при $n = 2$ в силу дифференцируемости функции Φ_2 таких разрывов скоростей не наблюдалось. На рис. 43, 47 присутствуют три

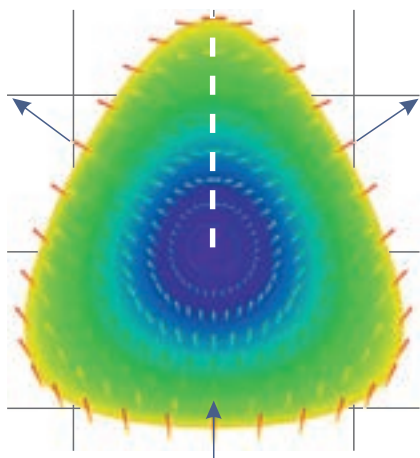


Рис. 43. Векторное поле скоростей $T_3(x, y)$ при $\sigma = |\alpha|$

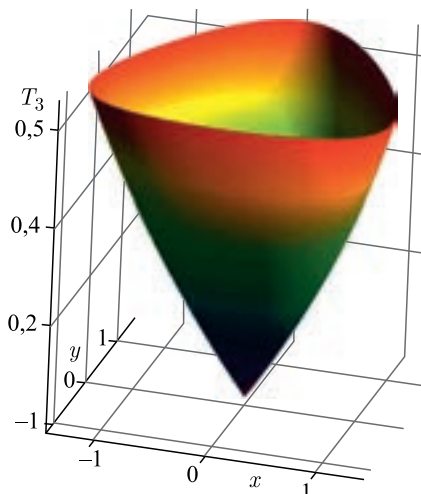


Рис. 44. Кинетическая энергия $T_3(x, y)$ при $\sigma = |\alpha|$

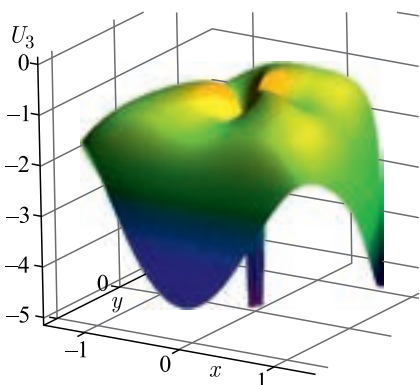


Рис. 45. Потенциал $U_3(x, y)$ при $\sigma = |\alpha|$

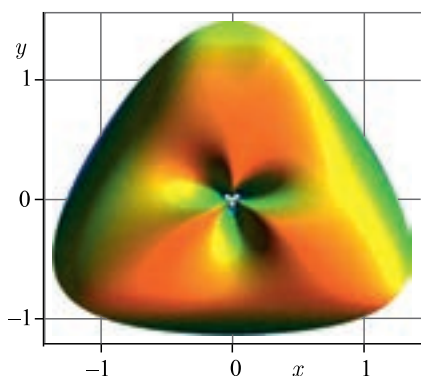


Рис. 46. Потенциал $-Q_3(x, y)$ при $\sigma = |\alpha|$

потока. Существуют один входящий поток и два исходящих. Можно сказать, что внутри области вдоль линии $\theta = 0$ присутствует внутренний источник потока, вызванный негладкостью фазы Φ_3 .

Как и в предыдущем случае ($\sigma = |\alpha|$), здесь наблюдается «угловая» форма распределения кинетической энергии (треугольное основание пирамиды (рис. 44)). Квантовый потенциал при $\sigma = |\alpha|$ имеет существенный вклад (рис. 46), поэтому графики U и Q близки по форме (рис. 45). В случае $\sigma = 10|\alpha|$ влияние квантового потенциала незначительно (рис. 50) и форма

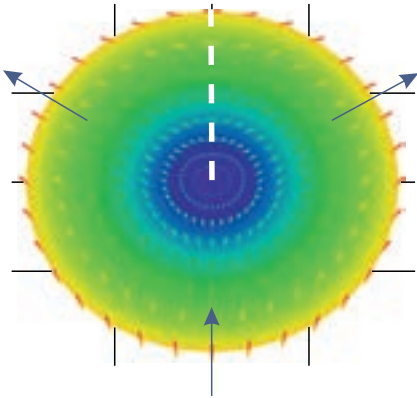


Рис. 47. Векторное поле скоростей $T_3(x, y)$ при $\sigma = 10|\alpha|$

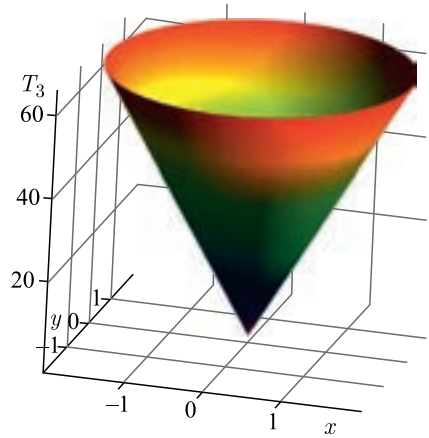


Рис. 48. Кинетическая энергия $T_3(x, y)$ при $\sigma = 10|\alpha|$

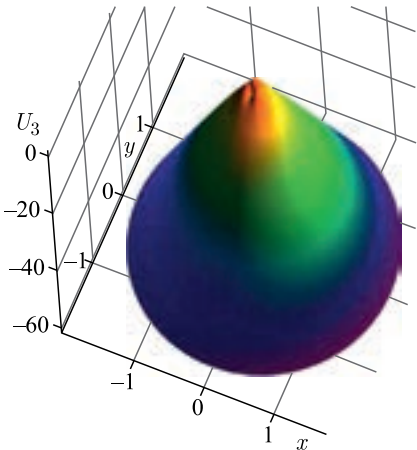


Рис. 49. Потенциал $U_3(x, y)$ при $\sigma = 10|\alpha|$

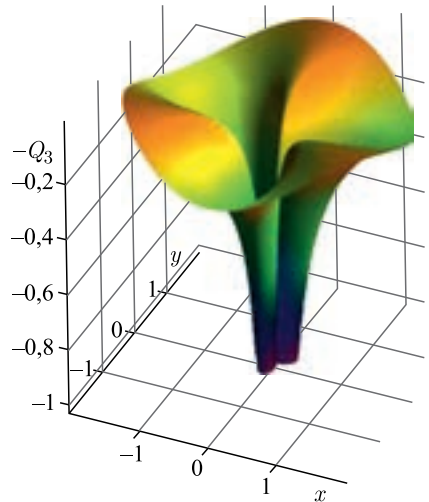


Рис. 50. Потенциал $-Q_3(x, y)$ при $\sigma = 10|\alpha|$

графика потенциала U (рис. 49) близка к форме графика кинетической энергии T (рис. 48). Распределение модуля векторного поля имеет «округлую» форму (рис. 47), что связано со слабым влиянием квантового потенциала.

Замечание 3.3. В результате был рассмотрен пример микро- и макросистем в рамках единой математической модели. Как правило, при переходах между микро- и макрорассмотрением делаются некие предположения, выбра-

сывание величин «более высокого порядка малости» и т. д. В данном подходе таких «упрощений» не производилось. Переход между микро- и макросистемой осуществлялся путем непрерывного изменения параметра σ , входящего в модельное распределение Гаусса (3.1). Хотя рассматривалось распределение (3.1), изложенный подход применим для любого распределения типа $f = f(|\langle \mathbf{v} \rangle|)$.

Несмотря на громоздкость формул при обратном преобразовании Лешандра, полученные выражения для плотности вероятностей, потенциалов, фаз, волновых функций, векторных полей скоростей являются точными.

4. Ψ -МОДЕЛЬ МИКРО- И МАКРОСИСТЕМ

По аналогии с разд. 3 рассмотрим построение точных решений уравнения Шредингера по точным решениям первого уравнения Власова, используя фиксированное (известное) поле потока вероятностей $\langle \mathbf{v} \rangle$. В качестве примера рассмотрим трехмерное вихревое поле $\langle \mathbf{v} \rangle$ [31], соответствующее фазе волновой функции $\varphi(\theta, \phi) = n\theta + k\phi + c_0$, где k, n, c_0 — постоянные значения.

4.1. Построение точного решения. Рассмотрим частные решения для уравнения непрерывности (4.1) и, как следствие, для уравнения Шредингера:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \operatorname{div} [f \langle \mathbf{v} \rangle] = 0, \quad (4.1)$$

$$\frac{dS}{dt} = S_t + (\langle \mathbf{v} \rangle, \nabla S) = \operatorname{div} \langle \mathbf{v} \rangle = Q, \quad (4.2)$$

где $S \stackrel{\text{det}}{=} -\ln f$. Скорость потока вероятностей $\langle \mathbf{v} \rangle$ в соответствии с разд. 1 представим в виде

$$\langle \mathbf{v} \rangle = -\alpha \nabla \Phi + \gamma \mathbf{A}, \quad (4.3)$$

где \mathbf{A} соответствует вихревой компоненте поля скоростей.

В работе [45] показано, что в случае негладкого скалярного потенциала Φ поле $\nabla \Phi$ также может быть вихревым, например:

$$\begin{aligned} \Phi &= 2\varphi = c_1\phi + c_2, \\ \nabla \Phi &= \frac{c_1}{\rho} \mathbf{e}_\phi = \frac{c_1}{r \sin \theta} \mathbf{e}_\phi, \quad \operatorname{rot} [\nabla \Phi] \neq \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (4.4)$$

где ϕ — полярный угол; $\rho = r \sin \theta$ — полярный радиус, а c_1, c_2 — постоянные значения. Заметим, что поле $\operatorname{rot} [\nabla \Phi]$ отлично от нуля только на оси OZ [45].

Рассмотрим расширенный вид потенциала (4.4) для 3-мерного случая:

$$\varphi(\theta, \phi) = n\theta + k\phi + c_0, \quad (4.5)$$

где k, n, c_0 — постоянные значения. В частном случае при $n = 0$ выражение (4.5) переходит в (4.4). Скорость потока вероятностей (4.3) в сферической системе координат с учетом (4.5) принимает вид

$$\langle \mathbf{v} \rangle = -\alpha \nabla \Phi = -2\alpha \left(\frac{k}{r \sin \theta} \mathbf{e}_\phi + \frac{n}{r} \mathbf{e}_\theta \right). \quad (4.6)$$

Вычислим дивергенцию поля скоростей Q (4.2), получим

$$Q = -\frac{2\alpha n}{r^2} \operatorname{ctg} \theta. \quad (4.7)$$

С физической точки зрения величина Q соответствует плотности источников поля $\langle \mathbf{v} \rangle$, а так как Q в общем случае отлична от нуля (4.7), то такие источники существуют. Выражение (4.7) обращается в нуль при $\theta = \pi/2$ и стремится к нулю на бесконечности при $r \rightarrow \infty$. Заметим, что по полярному углу ϕ плотность (4.7) является симметричной.

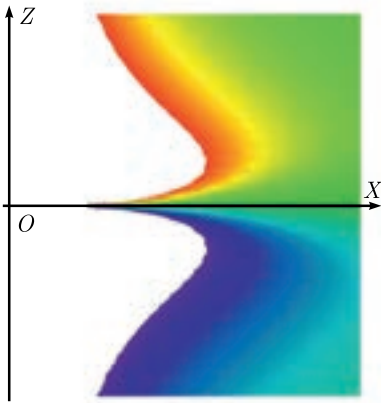


Рис. 51. Распределение Q

На рис.51 показано распределение плотности источников Q в плоскости XOZ , т. е. при $\phi = 0$. Из рисунка видно, что при переходе через угол $\theta = \pi/2$ источники поля меняют свой знак на противоположный. Таким образом, векторное поле $\langle \mathbf{v} \rangle$ соответствует потоку из одной части полупространства $Z < 0$ в другую часть полупространства $Z > 0$. Направление потока определяется знаком констант в выражении (4.7).

Покажем, что поле $\langle \mathbf{v} \rangle$ является вихревым. Вычислим ротор от выражения (4.6), получим

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \langle \mathbf{v} \rangle = & \frac{-2\alpha}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{k}{r} \right) - \frac{\partial}{\partial \phi} \frac{n}{r} \right] \mathbf{e}_r + \\ & + \frac{2\alpha}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{k}{\sin \theta} \right) \mathbf{e}_\theta - \frac{2\alpha}{r} \frac{\partial n}{\partial r} \mathbf{e}_\phi = \boldsymbol{\theta}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Из (4.8) следует, что $\operatorname{rot} \langle \mathbf{v} \rangle = \boldsymbol{\theta}$ почти всюду, за исключением множества точек меры нуль. Покажем, что на оси OZ $\operatorname{rot} \langle \mathbf{v} \rangle$ отличен от нуля, для этого вычислим $\oint_\gamma \langle \mathbf{v} \rangle \cdot d\mathbf{l}$ — циркуляцию вектора $\langle \mathbf{v} \rangle$ по замкнутому контуру γ в виде

окружности, принадлежащей сфере радиуса r (рис. 52):

$$d\mathbf{l} = \mathbf{e}_{\theta} r d\theta + \mathbf{e}_{\phi} r \sin \theta d\phi, \tag{4.9}$$

$$\oint_{\gamma} \langle \mathbf{v} \rangle d\mathbf{l} = -2\alpha k \int_{\phi_0}^{\phi_0+2\pi} \frac{r \sin \theta}{r \sin \theta} d\phi - 2\alpha n \left(\int_{\theta_0}^{\pi-\theta_0} \frac{r}{r} d\theta + \int_{\pi-\theta_0}^{\theta_0} \frac{r}{r} d\theta \right) = -4\pi\alpha k,$$

что в соответствии с теоремой Стокса дает

$$\int_{\Sigma_{\gamma}} \text{rot} \langle \mathbf{v} \rangle d\boldsymbol{\sigma} = -4\pi\alpha k. \tag{4.10}$$

Правая часть выражения (4.10) не содержит информации о величине площади Σ_{γ} . Таким образом, контур γ можно сколь угодно стягивать вокруг оси OZ , при этом значение интеграла (4.10) не изменится.

Из (4.9) видно, что интеграл по $d\phi$ отличен от нуля, а интеграл по $d\theta$ дает нуль, поэтому вычисление $\text{rot} \langle \mathbf{v} \rangle$ аналогично процедуре, описанной в работе [45]. В результате получаем

$$\begin{aligned} \text{rot} \langle \mathbf{v} \rangle &= \gamma \text{rot} \mathbf{A} = \gamma \mathbf{B} = \\ &= -4\pi\alpha k \delta^2(\rho, \phi) \mathbf{e}_z, \end{aligned}$$

$$\mathbf{B} = -\frac{2\alpha k}{\gamma} \frac{\delta(\rho)}{\rho} \mathbf{e}_z$$

или

$$\mathbf{B} = -\frac{q_m^{(Wb)} \delta(\rho)}{2\pi\rho} \mathbf{e}_z, \tag{4.11}$$

где

$$\delta^2(\rho, \phi) = \frac{\delta(\rho)}{2\pi\rho}, \quad \int_{\Sigma} \delta^2(\rho, \phi) d\boldsymbol{\sigma} = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^R \frac{\delta(\rho)}{2\pi\rho} \rho d\rho = 1, \quad q_m^{(Wb)} = \frac{2\pi\hbar k}{q_e}.$$

Величина $q_m^{(Wb)}$ совпадает с известным выражением для магнитного заряда и удовлетворяет правилу квантования [46].

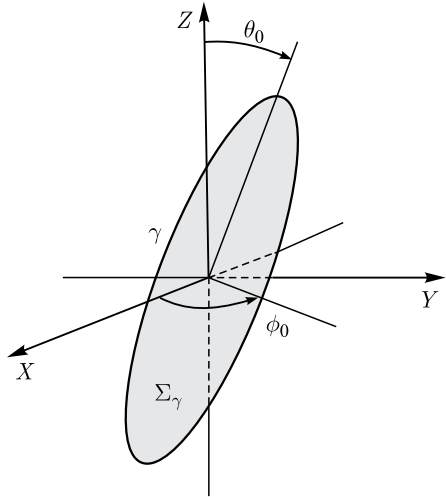


Рис. 52. Контур интегрирования

Замечание 4.1. Полученная система (4.11) не является монополем Дирака, хотя и обладает «зарядом», численно равным магнитному заряду $q_m^{(Wb)}$. Во-первых, в отличие от монополя Дирака «магнитный» заряд $q_m^{(Wb)}$ в (4.11) имеет только **одну** силовую линию, совпадающую с осью OZ , и $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$. Во-вторых, магнитное поле монополя Дирака $\sim 1/r^2$, а в выражении (4.11) магнитное поле $\sim 1/r$, что соответствует классическому поведению магнитного поля.

Если имеется совокупность N таких «магнитных» зарядов $q_m^{(Wb)}$, центры которых расположены, например, в одной плоскости с координатами ρ_i , $i = 1, \dots, N$, то суммарное магнитное поле \mathbf{B} , создаваемое такой системой, в соответствии с (4.11) формально может быть представлено в виде

$$\mathbf{B}(\rho) = - \sum_{i=1}^N \frac{q_m^{(Wb)} \delta(|\rho - \rho_i|)}{2\pi |\rho - \rho_i|} \mathbf{e}_z. \quad (4.12)$$

Таким образом, поле $\langle \mathbf{v} \rangle$ имеет источники Q и \mathbf{B} , которые в общем случае отличны от нуля. Из (4.7) следует, что источники невихревого поля Q существуют, если $n \neq 0$, а из (4.11) следует, что источники вихревого поля \mathbf{B} существуют, когда $k \neq 0$. Следовательно, первое слагаемое $n\theta$ в (4.5) отвечает за безвихревую компоненту, а второе слагаемое $k\phi$ — за вихревую компоненту векторного поля потока вероятностей $\langle \mathbf{v} \rangle$.

В силу сказанного для скорости $\langle \mathbf{v} \rangle$ в соответствии с теоремой Гельмгольца можно использовать представление

$$\langle \mathbf{v} \rangle = -\alpha \nabla \Phi + \gamma \mathbf{A} = -2\alpha \frac{n}{r} \mathbf{e}_\theta - \frac{2\alpha k}{r \sin \theta} \mathbf{e}_\phi,$$

где

$$\Phi = 2\varphi, \quad \varphi = n\theta + c_0, \quad \mathbf{A} = -\frac{2\alpha}{\gamma} \frac{k}{r \sin \theta} \mathbf{e}_\phi, \quad (4.13)$$

c_0 — некоторая функция, не зависящая от координаты. При этом согласно (4.7) и (4.11) выполнены условия $\operatorname{rot} \nabla \Phi = 0$, $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$.

Выражение для вихревого поля \mathbf{A} согласно (4.11) можно переписать в виде

$$\mathbf{A} = -\frac{q_m^{(Wb)}}{2\pi\rho} \mathbf{e}_\phi, \quad \oint_{\gamma_\rho} \mathbf{A} \, d\mathbf{l} = -q_m^{(Wb)}.$$

Замечание 4.2. В качестве функции c_0 может быть выбрана некоторая функция, зависящая только от времени, например $c_0(t) = -\omega t$, где $\omega = E/\hbar$. Как будет видно далее, величина E соответствует полной энергии. В случае неконсервативных систем полная энергия может зависеть от времени, поэтому линейная зависимость $c_0(t) = (-E/\hbar)t$ является лишь частным представлением для функции $c_0(t)$.

Найдем функцию плотности вероятностей $f(\mathbf{r}, t)$, соответствующую векторному полю (4.6). Подставляя (4.6), (4.7) в (4.2), получим уравнение для определения $f(\mathbf{r}, t)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial t} - 2\alpha \left(\frac{k}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial S}{\partial \phi} + \frac{n}{r^2} \frac{\partial S}{\partial \theta} \right) &= -\frac{2\alpha n}{r^2} \operatorname{ctg} \theta, \\ -\frac{r^2}{2\alpha} \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{k}{\sin^2 \theta} \frac{\partial S}{\partial \phi} + n \frac{\partial S}{\partial \theta} &= n \operatorname{ctg} \theta. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Уравнение (4.14) является линейным неоднородным в частных производных относительно функции $S(r, \phi, \theta, t)$, поэтому решение (4.14) будем искать в виде суперпозиции общего однородного $S_{o.o}$ и частного неоднородного $S_{ч.н}$

$$S_{o.n} = S_{o.o} + S_{ч.н}. \quad (4.15)$$

Решение $S_{ч.н}$ будем искать в виде $S_{ч.н} = S_{ч.н}(\theta)$, тогда уравнение (4.14) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_{ч.н}}{\partial \theta} &= \operatorname{ctg} \theta, \\ S_{ч.н} &= \int \operatorname{ctg} \theta \, d\theta = \ln |\sin \theta| + c, \quad S_{ч.н} = \ln (c_1 \sin \theta). \end{aligned} \quad (4.16)$$

Найдем решение $S_{o.o}$, которое должно удовлетворять однородному уравнению

$$-\frac{r^2}{2\alpha} \frac{\partial S_{o.o}}{\partial t} + n \frac{\partial S_{o.o}}{\partial \theta} + \frac{k}{\sin^2 \theta} \frac{\partial S_{o.o}}{\partial \phi} = 0. \quad (4.17)$$

Уравнение (4.17) является уравнением гиперболического типа, следовательно, допускает решение в виде характеристик. Так как в уравнении (4.17) присутствуют три переменные t, θ, ϕ , то существуют два интеграла движения $\xi = c_1$ и $\eta = c_2$, вдоль которых должно быть выполнено условие

$$S_{o.o}(\xi, \eta) = \operatorname{const}. \quad (4.18)$$

Вводя параметризацию $\theta = \theta(\tau)$, $\phi = \phi(\tau)$, $t = t(\tau)$ для полного дифференциала от $S_{o.o}$ вдоль характеристик (ξ, η) , в соответствии с (4.18) получаем

$$\frac{dS_{o.o}}{d\tau} = \frac{\partial S_{o.o}}{\partial t} \frac{dt}{d\tau} + \frac{\partial S_{o.o}}{\partial \theta} \frac{d\theta}{d\tau} + \frac{\partial S_{o.o}}{\partial \phi} \frac{d\phi}{d\tau} = 0. \quad (4.19)$$

Сравнивая (4.19) и (4.17), получаем

$$\frac{dt}{d\tau} = -\frac{r^2}{2\alpha}, \quad \frac{d\theta}{d\tau} = n, \quad \frac{d\phi}{d\tau} = \frac{k}{\sin^2 \theta}, \quad (4.20)$$

что приводит к характеристическим уравнениям

$$\frac{d\theta}{d\phi} = \frac{n}{k} \sin^2 \theta, \quad \frac{d\theta}{dt} = -\frac{2\alpha n}{r^2}. \quad (4.21)$$

Решения характеристических уравнений (4.21) имеют вид

$$\phi = -\frac{k}{n} \operatorname{ctg} \theta + c_1, \quad \theta = -\frac{2\alpha n}{r^2} t + c_2, \quad (4.22)$$

где c_1, c_2 — постоянные величины. Выражения (4.22) задают уравнения интегралов движения, вдоль которых $S_{0,0}$ является постоянной величиной (4.18)

$$\xi(\theta, \phi) = \phi + \frac{k}{n} \operatorname{ctg} \theta, \quad \eta(r, \theta, t) = \theta + \frac{2\alpha n}{r^2} t. \quad (4.23)$$

Заметим, что в уравнении (4.17) отсутствуют производные по r , хотя само решение $S_{0,0}$ может зависеть от r . Если $S_{0,0} = S_{0,0}(r, \phi, \theta, t)$, то решение уравнения (4.17) в силу (4.23) может быть представлено в виде

$$S_{0,0}(r, \theta, \phi, t) = G(r, \xi, \eta) = G\left(r, \phi + \frac{k}{n} \operatorname{ctg} \theta, \theta + \frac{2\alpha n}{r^2} t\right), \quad (4.24)$$

где $G(r, \xi, \eta)$ — некоторая дифференцируемая функция, определяемая из начальных или граничных условий. Если задано начальное условие

$$S_{0,0}(r, \phi, \theta, t)|_{t=0} = G_0(r, \phi, \theta), \quad (4.25)$$

то из (4.25) с учетом (4.24) следует

$$G_0(r, \phi, \theta) = G\left(r, \phi + \frac{k}{n} \operatorname{ctg} \theta, \theta\right) = G(r, \tilde{\xi}, \tilde{\eta}), \quad (4.26)$$

где введено обозначение

$$\tilde{\xi} \stackrel{\text{det}}{=} \phi + \frac{k}{n} \operatorname{ctg} \theta, \quad \tilde{\eta} \stackrel{\text{det}}{=} \theta,$$

отсюда

$$\theta = \tilde{\eta}, \quad \phi = \tilde{\xi} - \frac{k}{n} \operatorname{ctg} \tilde{\eta}. \quad (4.27)$$

Подставляя (4.27) в (4.26), получим

$$G(r, \tilde{\xi}, \tilde{\eta}) = G_0\left(r, \tilde{\xi} - \frac{k}{n} \operatorname{ctg} \tilde{\eta}, \tilde{\eta}\right). \quad (4.28)$$

Таким образом, исходя из (4.28) и (4.23) решение (4.24), удовлетворяющее начальному условию (4.25), примет вид

$$\begin{aligned} S_{0,0}(r, \phi, \theta, t) &= G_0 \left(r, \xi - \frac{k}{n} \operatorname{ctg} \eta, \eta \right) = \\ &= G_0 \left(r, \phi + \frac{k}{n} \left(\operatorname{ctg} \theta - \operatorname{ctg} \left(\theta + \frac{2\alpha n}{r^2} t \right) \right), \theta + \frac{2\alpha n}{r^2} t \right). \end{aligned} \quad (4.29)$$

В силу (4.15), (4.16), (4.29) общее решение неоднородного уравнения (4.14) имеет вид

$$\begin{aligned} S_{0,n}(r, \phi, \theta, t) &= \\ &= G_0 \left(r, \phi + \frac{k}{n} \left(\operatorname{ctg} \theta - \operatorname{ctg} \left(\theta + \frac{2\alpha n}{r^2} t \right) \right), \theta + \frac{2\alpha n}{r^2} t \right) + \ln \sin \theta. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Решение (4.30) в отличие от (4.29) не является постоянным вдоль характеристик (4.23), так как (4.30) содержит слагаемое $S_{\text{ч.н}}$. Таким образом, неоднородность уравнения (4.14) приводит к изменению $S_{0,n}$ вдоль характеристики. С другой стороны, неоднородность уравнения (4.14) вызвана наличием источников Q безвихревого поля (4.2), (4.7). Если $Q = 0$, например при $n = 0$, то исходная задача будет сведена к задаче, рассмотренной в статье [45].

В результате для функции плотности вероятности $f(r, \phi, \theta, t)$ получаем

$$\begin{aligned} f(r, \phi, \theta, t) &= e^{-S_{0,n}(r, \phi, \theta, t)} = \\ &= \frac{1}{\sin \theta} \exp \left[-G_0 \left(r, \phi + \frac{k}{n} \left(\operatorname{ctg} \theta - \operatorname{ctg} \left(\theta + \frac{2\alpha n}{r^2} t \right) \right), \theta + \frac{2\alpha n}{r^2} t \right) \right] \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} f(r, \phi, \theta, t) &= \\ &= \frac{1}{\sin \theta} F_0 \left(r, \phi + \frac{k}{n} \left(\operatorname{ctg} \theta - \operatorname{ctg} \left(\theta + \frac{2\alpha n}{r^2} t \right) \right), \theta + \frac{2\alpha n}{r^2} t \right), \end{aligned} \quad (4.31)$$

где $F_0 \stackrel{\text{det}}{=} e^{-G_0}$. При этом функция f_0 определяется из начальных условий

$$\begin{aligned} f(r, \phi, \theta, t)|_{t=0} &= \frac{F_0(r, \phi, \theta)}{\sin \theta} = f_0(r, \phi, \theta), \\ F_0(r, \phi, \theta) &= \sin \theta f_0(r, \phi, \theta), \end{aligned} \quad (4.32)$$

где $f_0(r, \phi, \theta)$ — известная функция начального распределения плотности вероятности.

Замечание 4.3. Полученное решение (4.31) является периодическим по второму аргументу на сфере. Действительно, второй аргумент

$$\phi + \frac{k}{n} \left[\operatorname{ctg} \theta - \operatorname{ctg} \left(\theta + \frac{2\alpha n}{r^2} t \right) \right] = \phi + \frac{k}{n} [\operatorname{ctg} \theta - \operatorname{ctg} (\theta + \omega_n t)]$$

содержит слагаемое $\omega_n t$, где

$$\omega_n(r) \stackrel{\text{det}}{=} \frac{2\alpha n}{r^2} = -\frac{\hbar n}{m r^2}.$$

Частота ω_n является постоянной на сфере, т. е. при фиксированном радиусе. Так как функция ctg периодична с периодом $T_1 = \pi$, решение (4.31) будет периодично на сфере по второму аргументу с периодом T_1 :

$$T_1 \stackrel{\text{det}}{=} \frac{m}{\hbar n} T_1 r^2 = \frac{m}{\hbar n} \pi r^2 \stackrel{\text{det}}{=} \frac{m}{\hbar n} \frac{\sigma}{4},$$

где $\sigma = 4\pi r^2$ — площадь сферы радиуса r .

Если третий аргумент решения (4.31) является аргументом некоторой периодической функции периода T_2 , то решение (4.31) будет иметь второй период T_2 на сфере

$$T_2 \stackrel{\text{det}}{=} \frac{m}{\hbar n} T_2 r^2.$$

При наличии двух периодов T_1 и T_2 решение (4.31) формально может быть рассмотрено как эллиптическая функция на сфере.

Период T_1 зависит от радиуса сферы r и увеличивается с увеличением радиуса. Рассматривая концентрические сферы, получаем, что в начале координат при $r \rightarrow 0$ период $T_1 \rightarrow 0$, а частота $\omega_n \rightarrow \infty$, на больших радиусах $r \rightarrow \infty$ период $T_1 \rightarrow \infty$ и частота $\omega_n \rightarrow 0$.

Заметим, что похожая аналогия встречается при сравнении микро- и макромира. В микромире (атом) периоды осцилляторов малы ($\sim 10^{-8}$ с), а в макромире (Солнечная система) периоды велики (~ 1 год).

Покажем, что векторное поле $\langle \mathbf{v} \rangle$ потока вероятности (4.6) направлено по касательной к характеристикам (4.22). Пусть \mathbf{u} — касательный вектор вдоль характеристики (4.22), тогда компоненты \mathbf{u} в соответствии с (4.20) имеют вид

$$\begin{aligned} x &= \sin \theta \cos \phi, & y &= \sin \theta \sin \phi, & z &= \cos \theta, \\ \mathbf{u} &= \begin{pmatrix} x'_\tau \\ y'_\tau \\ z'_\tau \end{pmatrix} = \frac{1}{\sin \theta} \begin{pmatrix} n \sin \theta \cos \theta \cos \phi - k \sin \phi \\ n \sin \theta \cos \theta \sin \phi + k \cos \phi \\ -n \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Векторное поле $\langle \mathbf{v} \rangle$ (4.6) в декартовой системе координат примет вид

$$\mathbf{e}_r = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \phi \\ \cos \theta \sin \phi \\ -\sin \theta \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_\phi = \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (4.34)$$

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{v} \rangle &= -\frac{2\alpha}{r \sin \theta} (k\mathbf{e}_\phi + n \sin \theta \mathbf{e}_\theta) = \\ &= -\frac{2\alpha}{r \sin \theta} \begin{pmatrix} n \sin \theta \cos \theta \cos \phi - k \sin \phi \\ n \sin \theta \cos \theta \sin \phi + k \cos \phi \\ -n \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Сравнивая (4.1) и (4.35), получаем

$$\langle \mathbf{v} \rangle = -\frac{2\alpha}{r} \mathbf{u}, \quad (4.36)$$

что и требовалось доказать.

На рис. 53–55 приведены графики характеристик (4.22) для различных значений n и k . Так как азимутальный угол ϕ определен с точностью до 2π , постоянную величину c_1 в выражении (4.22) имеет смысл брать в диапазоне $0 \leq c_1 < 2\pi$. На каждом рисунке изображены шесть характеристик, соответствующих шести различным значениям константы c_1^i , $i = 0, \dots, 5$ (4.22):

$$c_1^i = \frac{2\pi}{6} i. \quad (4.37)$$

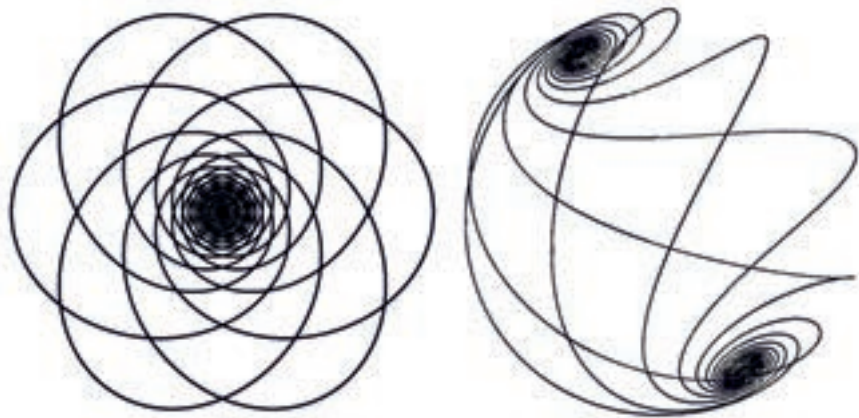
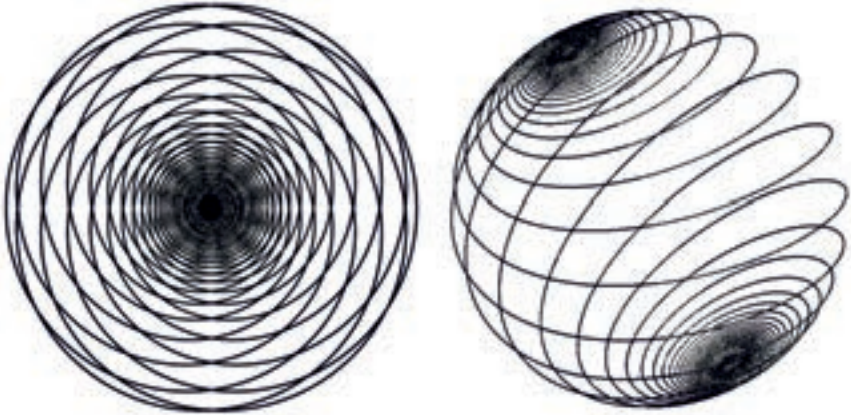
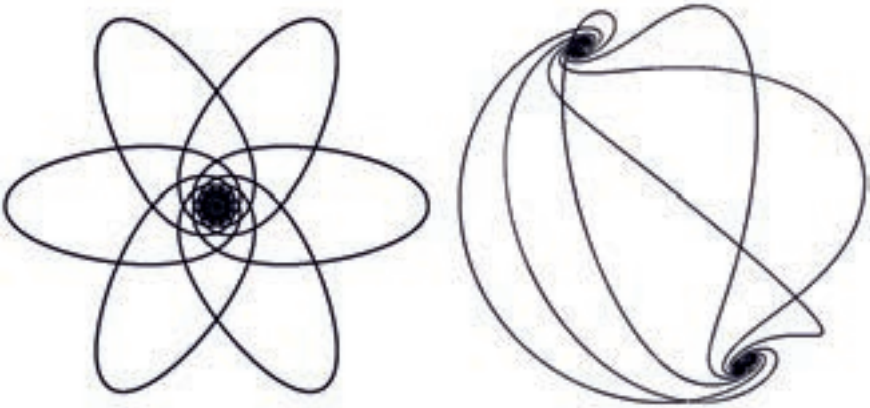


Рис. 53. Графики характеристик при $n = 1$ и $k = 1$

Рис. 54. Графики характеристик при $n = 1$ и $k = 3$ Рис. 55. Графики характеристик при $n = 3$ и $k = 1$

На всех графиках видно, что характеристики «соединяют» два противоположных полюса сферы ($\theta = 0$ и $\theta = \pi$).

Замечание 4.4. Заметим, что поведение характеристик (4.22) в окрестности полюсов формально схоже с существованием ударных волн сжатия и разряжения. То есть при $z > 0$ ударная волна разряжения $Q > 0$, а при $z < 0$ ударная волна сжатия $Q < 0$. Из выражения (4.22) следует, что характеристики не достигают полюсов сферы (см. рис. 53–55), т. е. не существует конечного значения азимутального угла ϕ_{end} , при котором $\theta = 0$ или $\theta = \pi$.

Функция плотности вероятностей (4.31) имеет особенность в полюсах сферы ($\theta = 0$ и $\theta = \pi$) и может стремиться к бесконечности, поэтому найдем

ее норму (полную вероятность):

$$\int_{(\infty)} f d\omega = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \int_0^{+\infty} r^2 f dr = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\theta \times \\ \times \int_0^{+\infty} r^2 F_0 \left(r, \phi + \frac{k}{n} \left(\text{ctg } \theta - \text{ctg} \left(\theta + \frac{2\alpha n}{r^2} t \right) \right), \theta + \frac{2\alpha n}{r^2} t \right) dr. \quad (4.38)$$

Таким образом, вопрос ограниченности нормы для функции f сводится к вопросу об ограниченности интеграла (4.38) от функции F_0 , входящей в граничное условие (4.32) краевой задачи для уравнения (4.2).

Выражение для волновой функции Ψ согласно выражениям (1.44), (4.13), (4.31) и замечанию 4.3 примет вид

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{\sin \theta}} \sqrt{F_0 \left(r, \phi + \frac{k}{n} [\text{ctg } \theta - \text{ctg} (\theta + \omega_n(r)t)], \theta + \omega_n(r)t \right)} \times \\ \times \exp \left[i \left(n\theta - \frac{E}{\hbar} t \right) \right]. \quad (4.39)$$

Найдем соответствующий потенциал U для волновой функции (4.39). Из выражений (1.47) и (4.13) получим

$$U(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{\beta} \left\{ \frac{\partial \varphi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \alpha \left[\frac{\Delta \sqrt{f(\mathbf{r}, t)}}{\sqrt{f(\mathbf{r}, t)}} - |\nabla \varphi(\mathbf{r}, t)|^2 \right] + \gamma(\mathbf{A}, \nabla \varphi) \right\},$$

$$U(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{\beta} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\alpha}{\beta} \left[|\nabla \varphi|^2 - \frac{\Delta |\Psi|}{|\Psi|} \right]$$

или

$$U = -\frac{1}{\beta} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\alpha}{\beta} |\nabla \varphi|^2 - Q, \quad (4.40)$$

где выражение

$$Q \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\alpha \Delta |\Psi|}{\beta |\Psi|} = -\frac{\hbar^2 \Delta |\Psi|}{2m |\Psi|} \quad (4.41)$$

известно как квантовый потенциал в теории «волны-пилота» [41, 42]. Квантовый потенциал связан с классическим потенциалом $e\chi$ соотношением (1.56):

$$\chi = \frac{2\alpha\beta}{\gamma} \left(\frac{1}{2\alpha\beta} \frac{|\gamma \mathbf{A}|^2}{2} + U + Q \right). \quad (4.42)$$

Подставляя (4.13) и (4.40) в (4.42), получаем выражение для потенциала $e\chi$:

$$\begin{aligned} e\chi &= -\frac{m}{2} |\gamma\mathbf{A}|^2 + U + Q = -\frac{m}{2} |\gamma\mathbf{A}|^2 - \frac{\hbar^2}{2m} |\nabla\varphi|^2 + E = \\ &= -\frac{(\hbar k)^2}{2m\rho} - \frac{(\hbar kn)^2}{2mr^2} + E, \end{aligned} \quad (4.43)$$

$$-e\chi = \frac{M_\phi^2}{2m\rho^2} + \frac{M_\theta^2}{2mr^2} - E = \frac{P_\phi^2}{2m} + \frac{P_\theta^2}{2m} - E = \frac{P^2}{2m} - E,$$

$$E = \frac{P^2}{2m} + e\chi = \text{const},$$

где

$$M_\theta \stackrel{\text{det}}{=} \hbar n, \quad M_\phi \stackrel{\text{det}}{=} \hbar k. \quad (4.44)$$

Величину M_θ можно трактовать как угловой момент импульса, связанный с углом θ , относительно начала координат, а величину M_ϕ — как угловой момент импульса, связанный с углом ϕ , относительно оси OZ .

Из выражения (4.44) следует, что моменты импульса M_θ и M_ϕ квантуются.

Волновая функция должна удовлетворять уравнению Шредингера вида (1.29):

$$\frac{i}{\beta} \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\alpha\beta \left(\hat{p} - \frac{\gamma}{2\alpha\beta} \mathbf{A} \right)^2 \Psi + \frac{1}{2\alpha\beta} \frac{|\gamma\mathbf{A}|^2}{2} \Psi + U\Psi.$$

Учитывая выражение (4.43), получим

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{1}{2m} (\hat{p} - e\mathbf{A})^2 \Psi + (e\chi - Q) \Psi. \quad (4.45)$$

При $k = 0$ согласно (4.13), (4.40) уравнение (4.45) переходит в классическое уравнение Шредингера для скалярной частицы

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{\hat{p}^2}{2m} \Psi + U\Psi. \quad (4.46)$$

Классические уравнения движения согласно (1.55) имеют вид

$$\frac{d\langle \mathbf{v} \rangle}{dt} = -\gamma (\mathbf{E} + [\langle \mathbf{v} \rangle, \mathbf{B}]), \quad (4.47)$$

где

$$\mathbf{E} \stackrel{\text{det}}{=} -\nabla\chi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}.$$

Покажем, что (4.47) выполнено для поля скоростей $\langle \mathbf{v} \rangle$ (4.13) и потенциала χ (4.43). Используя (4.31), вычислим $d\langle \mathbf{v} \rangle/dt$. Величина t является физическим временем, а величина τ в (4.20) используется для параметризации характеристики (4.22), поэтому

$$\frac{d\langle \mathbf{v} \rangle}{dt} = \frac{d\langle \mathbf{v} \rangle}{d\tau} \frac{d\tau}{dt}. \quad (4.48)$$

Найдем $d\langle \mathbf{v} \rangle/d\tau$, получим

$$\begin{aligned} \frac{d\langle \mathbf{v} \rangle}{d\tau} &= -\frac{2\alpha}{r} \frac{d}{d\tau} \begin{pmatrix} n \cos \theta \cos \phi - k \frac{\sin \phi}{\sin \theta} \\ n \cos \theta \sin \phi + k \frac{\cos \phi}{\sin \theta} \\ -n \sin \theta \end{pmatrix} = \\ &= -\frac{2\alpha}{r} \begin{pmatrix} -n^2 \sin \theta \cos \phi - nk \frac{\cos \theta \sin \phi}{\sin^2 \theta} - k \frac{k \cos \phi - n \sin \phi \cos \theta \sin \theta}{\sin^3 \theta} \\ -n^2 \sin \theta \sin \phi + nk \frac{\cos \theta \cos \phi}{\sin^2 \theta} + k \frac{-k \sin \phi - n \cos \phi \cos \theta \sin \theta}{\sin^3 \theta} \\ -n^2 \cos \theta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

В результате

$$\frac{d\langle \mathbf{v} \rangle}{d\tau} = \frac{2\alpha}{r \sin^3 \theta} \begin{pmatrix} n^2 \sin^4 \theta \cos \phi + k^2 \cos \phi \\ n^2 \sin^4 \theta \sin \phi + k^2 \sin \phi \\ n^2 \cos \phi \sin^3 \theta \end{pmatrix}. \quad (4.49)$$

Из выражения (4.20) следует, что

$$\frac{d\tau}{dt} = -\frac{2\alpha}{r^2} = \frac{\hbar}{mr^2}. \quad (4.50)$$

Подставляя (4.49), (4.50) в (4.48) получим выражение для ускорения $d\langle \mathbf{v} \rangle/dt$:

$$\frac{d\langle \mathbf{v} \rangle}{dt} = -\frac{\hbar^2}{m^2 r^3 \sin^3 \theta} \begin{pmatrix} n^2 \sin^4 \theta \cos \phi + k^2 \cos \phi \\ n^2 \sin^4 \theta \sin \phi + k^2 \sin \phi \\ n^2 \cos \phi \sin^3 \theta \end{pmatrix}. \quad (4.51)$$

Вычислим правую часть уравнения (4.47). В соответствии с (4.43) получим

$$-e\nabla\chi = -\frac{\hbar^2}{mr^3} \left(n^2 + \frac{k^2}{\sin^2 \theta} \right) \mathbf{e}_r - \frac{\hbar^2 k^2 \cos \theta}{mr^3 \sin^3 \theta} \mathbf{e}_\theta.$$

Переходя в декартову систему координат согласно (4.34), получаем

$$-e\nabla\chi = -\frac{\hbar^2}{mr^3} \begin{pmatrix} \left(n^2 + \frac{k^2}{\sin^2\theta}\right) \sin\theta \cos\phi + \frac{k^2 \cos^2\theta \cos\phi}{\sin^3\theta} \\ \left(n^2 + \frac{k^2}{\sin^2\theta}\right) \sin\theta \sin\phi + \frac{k^2 \cos^2\theta \sin\phi}{\sin^3\theta} \\ \left(n^2 + \frac{k^2}{\sin^2\theta}\right) \cos\theta - \frac{k^2 \cos\theta \sin\phi}{\sin^3\theta} \end{pmatrix}, \quad (4.52)$$

$$-e\nabla\chi = -\frac{\hbar^2}{mr^3 \sin^3\theta} \begin{pmatrix} n^2 \sin^4\theta \cos\phi + k^2 \cos\phi \\ n^2 \sin^4\theta \sin\phi + k^2 \sin\phi \\ n^2 \cos\phi \sin^3\theta \end{pmatrix}.$$

В силу (4.11) поле \mathbf{V} отлично от нуля только на оси OZ , т. е. на полюсах сферы. Из замечания 4.4 следует, что траектория (характеристика) не достигает полюсов сферы, следовательно,

$$[\langle \mathbf{v} \rangle, \mathbf{V}] = \theta. \quad (4.53)$$

Подставляя (4.51), (4.52) и (4.53) в уравнение движения (4.47), получаем верное тождество, что и требовалось доказать.

Замечание 4.5. В классической механике сплошных сред, если задать векторное поле $\langle \mathbf{v} \rangle$ скоростей среды (потока вероятностей в случае квантовой механики) в соответствии с уравнением движения (4.47), то определяется классический потенциал χ (4.42), (4.43). Таким образом, распределение потенциала χ связано с распределением поля скоростей $\langle \mathbf{v} \rangle$. При этом в сплошной среде существует бесконечное множество траекторий (характеристик), удовлетворяющих уравнению движения (4.47) с различными начальными условиями (задача Коши). Вычисляя полную энергию для некоторой траектории в соответствии с (4.43) и уравнением Гамильтона–Якоби (1.68), получаем

$$-\frac{\partial\Phi}{\partial t} = \frac{2}{\hbar}W = \frac{2}{\hbar} \left(\frac{m}{2} |\langle \mathbf{v} \rangle|^2 + e\chi \right) = E. \quad (4.54)$$

Функции распределения кинетической и потенциальной энергии в (4.54) согласно (4.35) и (4.43) имеют одинаковый закон распределения

$$\frac{m}{2} |\langle \mathbf{v} \rangle|^2 = \frac{\hbar^2}{2mr^2} \left(n^2 + \frac{k^2}{\sin^2\theta} \right), \quad (4.55)$$

$$e\chi = -\frac{\hbar^2}{2mr^2} \left(n^2 + \frac{k^2}{\sin^2\theta} \right) + E.$$

Согласованность (4.55) поля скоростей $\langle \mathbf{v} \rangle$ и потенциала χ является характерной для классической механики сплошных сред. Результатом согласованности (4.55) является наличие континуума траекторий и энергий E . Такие распределения будем называть согласованными (см. разд. 1).

При переходе к квантовой механике согласованность (4.55) нарушается. В качестве примера нарушения согласованности (4.55) в п. 4.4 рассмотрим движение в модифицированном кулоновском потенциальном поле.

4.2. Собственный магнитный момент. Найдем собственный магнитный момент рассмотренного шара. Собственный магнитный момент шара будет создаваться плотностью электрических токов

$$\mathbf{J} \stackrel{\text{det}}{=} ef\langle \mathbf{v} \rangle, \quad (4.56)$$

текущих вдоль характеристик со скоростями $\langle \mathbf{v} \rangle$ (4.35), (4.36). Магнитный момент области Ω может быть вычислен по формуле

$$\boldsymbol{\mu}_s = \frac{1}{2} \int_{\Omega} [\mathbf{r}, \mathbf{J}] d\omega. \quad (4.57)$$

Подставляя выражение для скорости $\langle \mathbf{v} \rangle$ (4.35) в (4.56), получим

$$\mathbf{J} = ef\langle \mathbf{v} \rangle = f \frac{e\hbar}{m} \left(\frac{n}{r} \mathbf{e}_\theta + \frac{k}{r \sin \theta} \mathbf{e}_\phi \right) = 2\mu_B f \left(\frac{n}{r} \mathbf{e}_\theta + \frac{k}{r \sin \theta} \mathbf{e}_\phi \right), \quad (4.58)$$

где $\mu_B \stackrel{\text{det}}{=} e\hbar/2m$ — магнетон Бора. Рассмотрим простейшую модель распределения плотности $f = f(r)$. Заметим, что $S(r) = -\ln f(r)$ является решением уравнения (4.14) при $n = 0$.

С переходом в сферическую систему координат и с учетом (4.58) выражение для собственного магнитного момента шара (4.57) примет вид

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mu}_s &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi r^2 \sin \theta d\theta \int_0^{+\infty} 2\mu_B r f(r) \left(\frac{k}{r \sin \theta} [\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\phi] + \frac{n}{r} [\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta] \right) dr = \\ &= \mu_B \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{+\infty} r^2 f(r) \left(\frac{k}{\sin \theta} \mathbf{e}_\theta + n \mathbf{e}_\phi \right) dr = \\ &= \mu_B k \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \mathbf{e}_\theta d\theta \int_0^{+\infty} r^2 f(r) dr + \mu_B n \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \mathbf{e}_\phi \sin \theta d\theta \times \\ &\quad \times \int_0^{+\infty} r^2 f(r) dr = \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2. \quad (4.59) \end{aligned}$$

Вычислим интегралы \mathbf{I}_1 и \mathbf{I}_2 по отдельности, воспользовавшись декартовыми представлениями (4.34) сферических базисных векторов \mathbf{e}_θ и \mathbf{e}_ϕ :

$$\mathbf{I}_1 \stackrel{\text{det}}{=} \mu_B k \begin{pmatrix} \int_0^{2\pi} \cos \phi d\phi \int_0^\pi \cos \theta d\theta \\ \int_0^{2\pi} \sin \phi d\phi \int_0^\pi \cos \theta d\theta \\ - \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \end{pmatrix} \int_0^{+\infty} r^2 f(r) dr =$$

$$= \mu_B k \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4\pi \end{pmatrix} \int_0^{+\infty} r^2 f(r) dr,$$

$$\mathbf{I}_1 = \mu_B k 4\pi \int_0^{+\infty} r^2 f(r) dr \mathbf{e}_z,$$

так как в силу нормировки функция $f(r)$ удовлетворяет условию $4\pi \int_0^{+\infty} r^2 f(r) dr = 1$, получаем

$$\mathbf{I}_1 = \mu_B k \mathbf{e}_z. \quad (4.60)$$

$$\mathbf{I}_2 \stackrel{\text{det}}{=} \frac{\mu_B n}{V} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \mathbf{e}_\phi \sin \theta d\theta \int_0^{+\infty} r^2 f(r) dr = \mu_B n \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} \times$$

$$\times d\phi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{+\infty} r^2 f(r) dr = \mu_B n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{I}_2 = \boldsymbol{\theta}. \quad (4.61)$$

Подставляя (4.60) и (4.61) в (4.59), получаем выражение для собственного магнитного момента шара

$$\boldsymbol{\mu}_s = \mu_B k \mathbf{e}_z. \quad (4.62)$$

При $k = \pm 1$ (см. рис. 53–55) выражение (4.62) совпадает с собственным магнитным моментом электрона со спином $s = \pm 1/2$ и g -фактором, $g = 2$:

$$\boldsymbol{\mu}_s = s \mu_B g = \pm \mu_B. \quad (4.62^*)$$

Собственный магнитный момент (4.62) $\boldsymbol{\mu}_s$ связан с наличием магнитного поля (4.11), которое определяется «магнитным зарядом» $q_m^{(Wb)}$:

$$\mathbf{B} = -\frac{q_m^{(Wb)} \delta(\rho)}{2\pi\rho} \mathbf{e}_z. \quad (4.11^*)$$

Говоря о «магнитном заряде», имеем в виду не реальный физический магнитный заряд (см. замечание 4.1), а удобное с математической точки зрения обозначение, которое позволяет записать выражение (4.11*) в компактной форме. Особенностью поля (4.11*) является наличие только одной силовой линии.

Квантование «магнитного заряда» $q_m^{(Wb)} q_e = 2\pi\hbar k$ является естественным, так как магнитное поле, создаваемое им (4.11*), связано с собственным магнитным моментом (4.62) μ_s , который тоже квантуется.

Величина собственного магнитного момента μ_s найдена из классических представлений механики сплошных сред с использованием вихревого поля $\langle \mathbf{v} \rangle$ (4.6) и имеет трактовку вращательного движения, т. е. «спина» (spin).

Как известно, на начальных этапах построения квантовой механики существовало предположение, что спин связан с собственным вращением электрона вокруг своей оси. Однако при оценке касательной скорости, с которой должна вращаться «поверхность электрона», получилась величина, превышающая скорость света [45–47].

В рассмотренном случае скорость $\langle \mathbf{v} \rangle$ имеет полюс на оси OZ , но в силу замечания 4.3 и $n = 0$ (для $f = f(r)$) этот полюс характеристиками не достигается.

Покажем, что проблема превышения скоростью вращения $\langle v \rangle$ скорости света с может быть решена для скорости (4.6) путем выбора функции плотности f .

Так как вращение вокруг оси OZ задает выделенное направление в пространстве, то естественным видится рассмотрение не сферически-симметричного распределения плотности $f = f(r)$, а цилиндрически-симметричного распределения $f = f(\rho, z)$ [48]. Функция $S(\rho, z) = -\ln f(\rho, z)$ в силу (4.7) удовлетворяет уравнению (4.2) при $n = 0$.

Продельвая выкладки, аналогичные (4.59)–(4.62), получим

$$\begin{aligned} \mu_s &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dz \int_0^{2\pi} \rho d\phi \int_0^{+\infty} 2\mu_B r f(\rho, z) \frac{k}{r \sin \theta} [\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\phi] d\rho = \\ &= \mu_B k \int_{-\infty}^{+\infty} dz \int_0^{2\pi} \rho d\phi \int_0^{+\infty} \frac{f(\rho, z)}{\sin \theta} \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \phi \\ \cos \theta \sin \phi \\ -\sin \theta \end{pmatrix} d\rho = \\ &= -2\pi\mu_B k \mathbf{e}_z \int_{-\infty}^{+\infty} dz \int_0^{+\infty} \rho \frac{f(\rho, z)}{\sin \theta} \sin \theta d\rho = \\ &= -2\pi\mu_B k \mathbf{e}_z \int_{-\infty}^{+\infty} dz \int_0^{+\infty} \rho f(\rho, z) d\rho, \quad \mu_s = \mu_B k \mathbf{e}_z, \quad (4.62^{**}) \end{aligned}$$

где в силу нормировки $f = f(\rho, z)$ учтено

$$2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} dz \int_0^{+\infty} \rho f(\rho, z) d\rho = 1. \quad (4.63)$$

В результате для цилиндрически-симметричного распределения $f = f(\rho, z)$ получилось выражение, аналогичное (4.62). В обоих случаях (4.62) и (4.62**) собственный магнитный момент μ_s в явном виде *не зависит* от вида функции плотности f . Заметим, что выражение (4.62**) для собственного магнитного момента μ_s получено аналитически строго на основании представления скорости $\langle \mathbf{v} \rangle$ (4.6), которая также приводит к принципу квантования Бора–Зоммерфельда при рассмотрении многолистной римановой поверхности [45]. При этом не пришлось модифицировать g -фактор, как это делается в уравнении Дирака и Паули.

Чтобы скорость потока $\langle v \rangle$ не превышала скорости света c , необходимо, чтобы функция плотности $f = f(\rho, z)$ компенсировала полюс $\langle v \rangle \sim 1/\rho$. В качестве $f = f(\rho, z)$, обладающей таким свойством, могут быть выбраны, например, функции

$$f_1(\rho, z) = C_1 \frac{1}{\rho^2} \exp \left[-\frac{(\ln(\kappa\rho) - \mu)^2}{2\sigma^2} \right] \exp \left(-\frac{z^2}{2\gamma^2} \right), \quad (4.64)$$

$$f_2(\rho, z) = C_2 \rho^\alpha e^{-\beta\rho} \exp \left(-\frac{z^2}{2\gamma^2} \right),$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \kappa, \mu, \sigma$ — некоторые постоянные величины, а C_1, C_2 выбираются из условия нормировки (4.63):

$$\begin{aligned} 1 &= 2\pi C_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left(-\frac{z^2}{2\gamma^2} \right) dz \int_0^{+\infty} \exp \left[-\frac{(\ln(\kappa\rho) - \mu)^2}{2\sigma^2} \right] \frac{d\rho}{\rho} = \\ &= 2\pi \sqrt{2\pi} \gamma \sqrt{2\pi} \sigma C_1 = 4\pi^2 \gamma \sigma C_1, \end{aligned} \quad (4.65)$$

$$1 = 2\pi C_2 \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left(-\frac{z^2}{2\gamma^2} \right) dz \int_0^{+\infty} \rho^{\alpha+1} e^{-\beta\rho} d\rho = 2\pi C_2 \frac{\Gamma(\alpha+2)}{\beta^{\alpha+2}} \sqrt{2\pi} \gamma,$$

$$C_1 = \frac{1}{4\pi^2 \gamma \sigma}, \quad C_2 = \frac{\beta^{\alpha+2}}{(2\pi)^{3/2} \gamma \Gamma(\alpha+2)}.$$

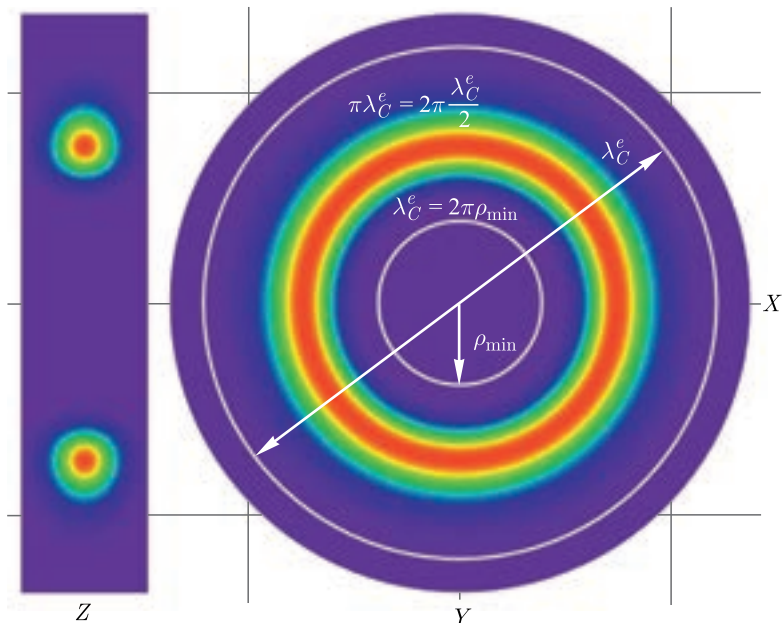


Рис. 56. Пример распределения плотности $f_1 = f_1(\rho, z)$

На рис.56 показано распределение плотности $f_1(\rho, z)$ (4.64) в двух сечениях XOZ и XOY . Распределение $f_1(\rho, z)$ (4.64) является азимутально-симметричным и имеет форму тора (см. рис.56). Как видно, плотность распределения f_1 сфокусирована внутри тора, а на оси OZ плотность равна нулю.

Следовательно, выбирая величины κ, μ, σ , можно добиться отсутствия скоростей выше скорости света; покажем это. Минимальный радиус ρ_{\min} , начиная с которого $\rho > \rho_{\min}$, скорость $\langle v \rangle(\rho, \phi) < c$, в соответствии с (4.13) имеет вид

$$\langle v \rangle = \gamma A = \frac{\hbar}{m\rho_{\min}} = c, \quad \rho_{\min} = \frac{\hbar}{mc}. \tag{4.66}$$

Численное значение $\rho_{\min} \approx 3,862 \cdot 10^{-13}m$. Заметим, что комптоновская длина волны электрона λ_C^e имеет значение

$$\lambda_C^e = \frac{2\pi\hbar}{mc} = 2\pi\rho_{\min},$$

т.е. λ_C^e равна длине окружности с минимальным радиусом ρ_{\min} . На рис.57 показано распределение плотности (4.64) в медианной плоскости ($z = 0$)

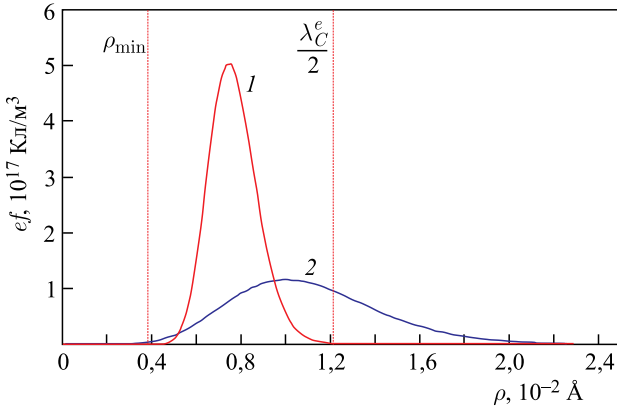


Рис. 57. Распределение плотности $f_1 = f_1(\rho, 0)$ (1) и $f_2 = f_2(\rho, 0)$ (2) вдоль радиуса ρ

вдоль радиуса ρ . Постоянные величины $\alpha, \beta, \gamma, \kappa, \mu, \sigma$ на рис. 57 имеют значения $\alpha = 10, 1/\beta = 100$ фм, $\gamma = 100$ фм, $\kappa = \pi/\lambda_C^e, \mu = 0, \sigma = 0,14$. Значения величин $\alpha, \beta, \gamma, \kappa, \mu, \sigma$ могут быть отличными от выбранных. Вариации значений α, β приводят к изменению максимальной плотности заряда ef и ее сдвигу вдоль радиуса (для f_2), а вариация γ определяет среднеквадратичную ширину распределения плотности по оси OZ (для f_1) (см. рис. 56, 57).

Вариация κ сдвигает пик распределения f_1 . Как видно на рис. 57, все скорости являются меньшими скорости света $\langle v \rangle < c$, так как плотность, отличная от нуля, расположена дальше минимального радиуса ρ_{\min} (4.66).

Таким образом, рассмотренная «модель тора» имеет электрический заряд, массу и собственный магнитный момент электрона, т. е. у нее совпадают все квантовые числа с квантовыми числами электрона, она не противоречит теории относительности, следовательно, ее можно рассматривать как «модель электрона».

4.3. H_1 -функция Больцмана для Ψ -модели. H_1 -функция Больцмана случайной непрерывной величины имеет вид [49]

$$H_1(t) \stackrel{\text{det}}{=} - \int_{(\infty)} f_1(\mathbf{r}, t) \ln f_1(\mathbf{r}, t) d^3r, \tag{4.67}$$

или, учитывая обозначение $S_1 = -\ln f_1$ (4.2),

$$H_1(t) = \int_{(\infty)} f_1(\mathbf{r}, t) S_1(\mathbf{r}, t) d^3r = N(t) \langle S_1 \rangle (t), \tag{4.68}$$

где

$$N(t) = \int_{(\infty)} f_1(\mathbf{r}, t) d^3r.$$

Если выполнена нормировка для полной вероятности, то $N(t) = 1$ и $H_1(t) = \langle S_1 \rangle(t)$. Функция $S_1(\mathbf{r}, t)$ удовлетворяет уравнению (4.2), поэтому получим уравнение для $\langle S_1 \rangle$ вида (4.2). Умножим уравнение (4.1) на $(1 + \ln f_1)$ и проинтегрируем по d^3r :

$$(1 + \ln f_1) \frac{\partial f_1}{\partial t} + (1 + \ln f_1) \operatorname{div}_r [\langle \mathbf{v} \rangle f_1] = 0, \quad (4.69)$$

$$\int_{(\infty)} \frac{\partial}{\partial t} (f_1 \ln f_1) d^3r + \int_{(\infty)} (1 + \ln f_1) \operatorname{div}_r [\langle \mathbf{v} \rangle f_1] d^3r = 0.$$

Первый интеграл в (4.69) имеет вид

$$\begin{aligned} \int_{(\infty)} (1 + \ln f_1) \frac{\partial f_1}{\partial t} d^3r &= \int_{(\infty)} \frac{\partial}{\partial t} (f_1 \ln f_1) d^3r = \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} \int_{(\infty)} f_1 S_1 d^3r = -\frac{d}{dt} [N(t) \langle S_1 \rangle(t)]. \end{aligned} \quad (4.70)$$

Второй интеграл в (67)

$$\begin{aligned} \int_{(\infty)} (1 + \ln f_1) \operatorname{div}_r [\langle \mathbf{v} \rangle f_1] d^3r &= \int_{(\infty)} (\langle \mathbf{v} \rangle, (1 + \ln f_1) \nabla_r f_1) d^3r + \\ + \int_{(\infty)} (1 + \ln f_1) f \operatorname{div}_r \langle \mathbf{v} \rangle d^3r &= \int_{(\infty)} (\langle \mathbf{v} \rangle, \nabla_r (f_1 \ln f_1)) d^3r + \int_{(\infty)} f_1 \operatorname{div}_r \langle \mathbf{v} \rangle d^3r + \\ + \int_{(\infty)} f_1 \ln f_1 \operatorname{div}_r \langle \mathbf{v} \rangle d^3r &= - \int_{(\infty)} (\langle \mathbf{v} \rangle, \nabla_r (f_1 S_1)) d^3r - \int_{(\infty)} f_1 S_1 \operatorname{div}_r \langle \mathbf{v} \rangle d^3r + \\ + \int_{(\infty)} f_1 \operatorname{div}_r \langle \mathbf{v} \rangle d^3r &= - \int_{(\infty)} \operatorname{div}_r [f_1 S_1 \langle \mathbf{v} \rangle] d^3r + \int_{(\infty)} f_1 \operatorname{div}_r \langle \mathbf{v} \rangle d^3r = \\ &= \int_{(\infty)} f_1 Q d^3r = N(t) \langle Q_1 \rangle(t), \end{aligned} \quad (4.71)$$

где предполагается выполненным условие

$$\int_{(\infty)} \operatorname{div}_r [f_1 S_1 \langle \mathbf{v} \rangle] d^3r = \int_{\Sigma_\infty^r} f_1 S_1 \langle \mathbf{v} \rangle d\sigma_r = 0.$$

Подставляя (4.70) и (4.71) в (4.69), окончательно получаем

$$\frac{d}{dt}[N(t)\langle S_1 \rangle(t)] = N(t)\langle Q_1 \rangle(t). \quad (4.72)$$

Если число частиц является постоянным или выполнена нормировка для полной вероятности, то $N(t) = N_0 = \text{const}$ (или $N(t) = N_0 = 1$) и выражение (4.72) принимает вид

$$\frac{d\langle S_1 \rangle}{dt} = \langle Q_1 \rangle. \quad (4.73)$$

Полученное уравнение (4.73) является усредненным аналогом исходного уравнения (4.2) для функции S . В силу (4.68) функция $\langle S_1 \rangle$ связана с H_1 -энтропией, поэтому для H_1 справедливо уравнение

$$\frac{d}{dt}H_1(t) = \frac{d}{dt}\langle S_1 \rangle(t) = \langle Q_1 \rangle, \quad \frac{dH_1}{dt} = \langle Q_1 \rangle. \quad (4.74)$$

Уравнение (4.74) выражает изменение H_1 -энтропии со временем. Если величина $\langle Q_1 \rangle(t)$ является положительной, то H_1 -энтропия растет, если отрицательной, то H_1 -энтропия уменьшается, а если равна нулю, то H_1 -энтропия — постоянная величина. Учитывая выражения (4.7) и (4.31), получаем представление для $\langle Q_1 \rangle(t)$

$$\begin{aligned} \langle Q_1 \rangle(t) &= \frac{\hbar n}{m} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} r^2 \sin \theta d\theta \int_0^{+\infty} \frac{\text{ctg } \theta}{r^2} f_1(r, \phi, \theta, t) dr = \\ &= \frac{\hbar n}{m} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \cos \theta d\theta \int_0^{+\infty} f_1(r, \phi, \theta, t) dr = \\ &= \frac{\hbar n}{m} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \text{ctg } \theta d\theta \int_0^{+\infty} F_0(r, \phi, \theta) dr, \quad (4.75) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle Q_1 \rangle(t) &= \frac{\hbar n}{m} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \text{ctg } \theta d\theta \times \\ &\times \int_0^{+\infty} F_0 \left(r, \phi + \frac{k}{n} \left(\text{ctg } \theta - \text{ctg } \left(\theta + \frac{2\alpha n}{r^2} t \right) \right), \theta + \frac{2\alpha n}{r^2} t \right) dr. \end{aligned}$$

Таким образом, функция $S_1(\mathbf{r}, t)$ удовлетворяет уравнению (4.2), а H_1 -энтропия $H_1(t) = \langle S_1 \rangle(t)$ удовлетворяет уравнениям (4.73), (4.74). Поведение H_1 -энтропии со временем определяется правой частью $\langle Q_1 \rangle$ уравнения (4.74) соответственно. Значение Q_1 вычислено (4.7), а ее распределение

представлено на рис. 51. Значение $\langle Q_1 \rangle$ может быть вычислено по формуле (4.75). В п. 4.5 рассмотрен пример вычисления H_1 -энтропии (4.75) для моделей «черной» и «белой» дыр.

4.4. Частные решения. Рассмотрим примеры применения построенной в п. 4.1 математической модели (« Ψ -модели») для микро- и макросистем.

4.4.1. Движение в модифицированном кулоновском потенциале. Рассмотрим пример нарушения условия согласованности (4.55). В качестве примера рассмотрим решение уравнения Шредингера (4.45)

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{1}{2m} (\hat{p} - e\mathbf{A})^2 \Psi + \tilde{U}\Psi. \quad (4.76)$$

Согласно (4.11), (4.13) векторный потенциал \mathbf{A} и магнитное поле \mathbf{B} имеют вид

$$e\mathbf{A} = -\frac{\hbar}{\rho} \mathbf{e}_\phi, \quad \mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} = -\frac{q_m^{(Wb)}}{2\pi\rho} \delta(\rho) \mathbf{e}_z, \quad (4.77)$$

где $q_m^{(Wb)} q_e = 2\pi\hbar$, $\rho = r \sin \theta$. В качестве потенциала \tilde{U} возьмем модифицированный кулоновский потенциал вида (рис. 58)

$$\tilde{U}(r, \theta) = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} - \frac{\hbar^2 \kappa}{2m} \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta}, \quad (4.78)$$

где κ — постоянная величина.

Решение уравнения (4.76) согласно (4.13), (4.39) будем искать в виде

$$\Psi = |\Psi| e^{i\varphi} = \frac{R(r)}{\sqrt{\sin \theta}} \exp\left(in\theta - i\frac{E}{\hbar}t\right) \stackrel{\text{det}}{=} \Psi_0(r, \theta) \exp\left(-i\frac{E}{\hbar}t\right). \quad (4.79)$$

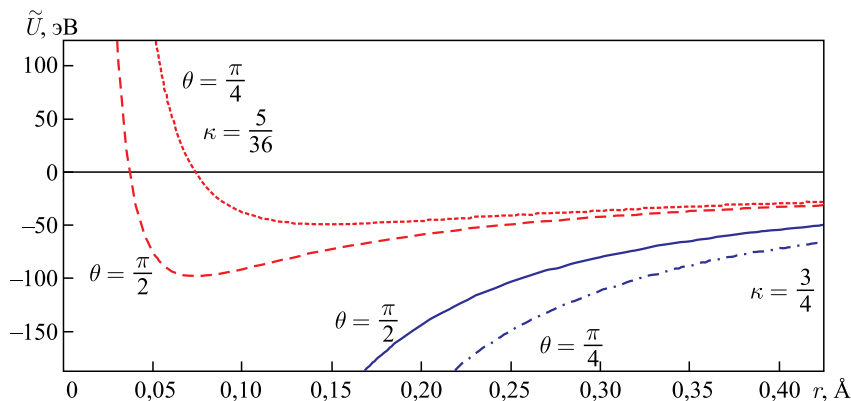


Рис. 58. Распределение потенциала $\tilde{U}(r, \theta)$ при $Z = 1$

Подставляя (4.78) и (4.79) в уравнение (4.76), получаем

$$\begin{aligned} (\hat{p} - e\mathbf{A})^2\Psi &= \hat{p}^2\Psi - e(\hat{p}, \mathbf{A}\Psi) - e(\mathbf{A}, \hat{p}\Psi) + e^2|\mathbf{A}|^2\Psi = \\ &= -\hbar^2\Delta\Psi + i\hbar e\Psi(\nabla, \mathbf{A}) + i\hbar e(\nabla\Psi, \mathbf{A}) + i\hbar e(\mathbf{A}, \nabla\Psi) + e^2|\mathbf{A}|^2\Psi; \end{aligned}$$

учитывая, что $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$ и $\mathbf{A} \perp \nabla\Psi$ (в силу (4.77), (4.79)), получаем

$$\begin{aligned} (\hat{p} - e\mathbf{A})^2\Psi &= -\hbar^2\Delta\Psi + \frac{\hbar^2 k^2}{r^2 \sin^2 \theta} \Psi, \\ E\Psi &= -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi + \frac{\hbar^2 k^2}{2mr^2 \sin^2 \theta} \Psi - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} \Psi - \frac{\hbar^2 \kappa}{2mr^2 \sin^2 \theta} \Psi, \end{aligned}$$

или, учитывая (4.79),

$$\frac{\Delta\Psi_0}{\Psi_0} = -\frac{2mE}{\hbar^2} + \frac{k^2 - \kappa}{r^2 \sin^2 \theta} - \frac{2m}{\hbar^2} \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (4.80)$$

Вычислим $\Delta\Psi_0/\Psi_0$:

$$\begin{aligned} \Delta\Psi_0 &= \frac{e^{in\theta}}{\sqrt{\sin \theta}} \Delta_r R + \frac{R}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{e^{in\theta}}{\sqrt{\sin \theta}}, \\ \frac{\Delta\Psi_0}{\Psi_0} &= \frac{\Delta_r R}{R} + \frac{1}{r^2} \left(\frac{1 + \sin^2 \theta}{4 \sin^2 \theta} - n^2 \right). \end{aligned} \quad (4.81)$$

Подставляя (4.81) в (4.80), получим

$$\begin{aligned} \frac{\Delta_r R}{R} + \frac{1}{r^2} \left(\frac{1 + \sin^2 \theta}{4 \sin^2 \theta} - n^2 \right) &= -\frac{2mE}{\hbar^2} + \frac{k^2 - \kappa}{r^2 \sin^2 \theta} - \frac{2m}{\hbar^2} \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}, \\ R'' + \frac{2}{r} R' + \left(\frac{2mE}{\hbar^2} - \frac{4(k^2 - \kappa) - 1 - \sin^2 \theta}{4r^2 \sin^2 \theta} - \frac{n^2}{r^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right) R &= 0. \end{aligned} \quad (4.82)$$

Выберем параметр k так, чтобы $4(k^2 - \kappa) - 1 = 0$, т. е.

$$k^2 = \kappa + \frac{1}{4}, \quad (4.83)$$

тогда уравнение (4.82) примет вид

$$R'' + \frac{2}{r} R' + \left(\frac{2mE}{\hbar^2} - \frac{n^2 - \frac{1}{4}}{r^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right) R = 0. \quad (4.84)$$

Производя замену переменной $s = \lambda r$, $R(r) \stackrel{\text{det}}{=} R_0(s)$, где $\lambda = 2/\hbar\sqrt{-2mE}$, уравнение (4.84) запишем в виде

$$R_0'' + \frac{2}{s}R_0' + \left(-\frac{1}{4} + \frac{\nu}{s} - \frac{l(l+1)}{s^2}\right)R_0 = 0, \quad (4.85)$$

где

$$\nu \stackrel{\text{det}}{=} \frac{2m}{\hbar^2\lambda} \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} = \frac{1}{\hbar} \sqrt{\frac{m}{-2E}} \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0}, \quad n^2 - \frac{1}{4} \stackrel{\text{det}}{=} l(l+1)$$

или

$$E_\nu = -\frac{Z^2e^4m}{32\pi^2\epsilon_0^2\hbar^2\nu^2}, \quad n = l + \frac{1}{2}. \quad (4.86)$$

Решение уравнения (4.85) выражается через гипергеометрическую функцию F:

$$R_0(s) = s^l e^{-s/2} F(-\nu + l + 1, 2l + 2, s), \quad (4.87)$$

где в силу условия нормировки $-\nu + l + 1$ является отрицательной целой величиной или равной нулю, т.е. $\nu \geq l + 1$. Подставляя (4.87) в (4.79), получим решение уравнения (4.76)

$$\begin{aligned} \Psi_{l\nu}(r, \theta) = C_0 \frac{\exp\left[i\left(l + \frac{1}{2}\right)\theta\right]}{\sqrt{\sin\theta}} (r\lambda_\nu)^l \times \\ \times e^{-r\lambda_\nu/2} F(-\nu + l + 1, 2l + 2, r\lambda_\nu) \exp\left(-i\frac{E_\nu}{\hbar}t\right), \quad (4.88) \end{aligned}$$

где $\lambda_\nu = 2/\hbar\sqrt{-2mE_\nu}$; C_0 — постоянная величина, выбираемая из условия нормировки.

В результате нарушения условия (4.55) в виде потенциала $\sim 1/r$ (4.78) вместо $\sim 1/r^2$ для векторного поля $\langle \mathbf{v} \rangle$ (4.13) привело к существованию дискретного набора траекторий и энергий (4.83), (4.86), что и требовалось доказать.

Замечание 4.6. Для кулоновского потенциала $\sim 1/r$ можно выбрать векторное поле скоростей $\langle \mathbf{v} \rangle$, отличное от (4.13), так, чтобы условия согласованности (4.55) не нарушались. Например, поле скоростей можно выбрать $|\langle \mathbf{v} \rangle| \sim 1/\sqrt{r}$, тогда кинетическая и потенциальная энергии будут иметь одинаковый порядок. Например, потенциал гравитационного взаимодействия, как и кулоновский потенциал, имеет порядок $\sim 1/r$. Поле скоростей кругового вращения некоторого точечного тела вокруг Земли имеет зависимости вида $\langle \mathbf{v} \rangle = \sqrt{MG/re_\phi}$, где M — масса Земли, а G — гравитационная постоянная. В результате условия согласованности кинетической и потенциальной энергий будут выполнены.

4.4.2. *Движение в согласованном поле.* Рассмотрим стационарный случай уравнения (4.14)

$$\frac{k}{\sin^2 \theta} \frac{\partial S}{\partial \phi} + n \frac{\partial S}{\partial \theta} = n \operatorname{ctg} \theta. \quad (4.89)$$

Решение уравнения (4.89) в соответствии с (4.20)–(4.22) и (4.30) будет иметь вид

$$S_{\text{о.н}}(r, \phi, \theta) = G_0 \left(r, \phi + \frac{k}{n} \operatorname{ctg} \theta \right) + \ln \sin \theta. \quad (4.90)$$

Аналогично преобразованиям (4.31), (4.32) для функции плотности вероятности получим

$$f(r, \phi, \theta) = \frac{1}{\sin \theta} F_0 \left(r, \phi + \frac{k}{n} \operatorname{ctg} \theta \right), \quad (4.91)$$

где функция F_0 определяется из граничных условий, например, при $\theta = \pi/2$:

$$f(r, \phi, \theta)|_{\theta=\pi/2} = F_0 \left(r, \phi, \frac{\pi}{2} \right) = f_0(r, \phi). \quad (4.92)$$

Функция $f_0(r, \phi)$ задает распределение плотности вероятностей в медианной плоскости XOY . С учетом (4.92) решение (4.91) принимает вид

$$f(r, \phi, \theta) = \frac{1}{\sin \theta} f_0 \left(r, \phi + \frac{k}{n} \operatorname{ctg} \theta \right). \quad (4.93)$$

Пусть граничная функция $f_0(r, \phi)$ допускает факторизованное представление на радиальную и угловую части

$$f_0(r, \phi) = R^2(r)Y^2(\phi). \quad (4.94)$$

В этом случае решение (4.93) примет вид

$$f(r, \theta, \phi) = \frac{1}{\sin \theta} R^2(r)Y^2 \left(\phi + \frac{k}{n} \operatorname{ctg} \theta \right). \quad (4.95)$$

Для волновой функции Ψ в силу (4.39), (4.95) будет справедливо представление

$$\Psi(\mathbf{r}) = \frac{R(r)}{\sqrt{\sin \theta}} Y \left(\phi + \frac{k}{n} \operatorname{ctg} \theta \right) e^{in\theta}. \quad (4.96)$$

Найдем соответствующий потенциал U (4.40) для волновой функции (4.96). Вычислим $\Delta|\Psi|$. Для удобства выкладок обозначим

$$\Lambda(\theta, \phi) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{\sin \theta}} Y \left(\phi + \frac{k}{n} \operatorname{ctg} \theta \right), \quad (4.97)$$

получим

$$\frac{\Delta|\Psi|}{|\Psi|} = \frac{\Delta[R(r)\Lambda(\theta, \phi)]}{R(r)\Lambda(\theta, \phi)} = \frac{\Lambda\Delta_r R + \frac{R}{r^2}\Delta_{\theta, \phi}\Lambda}{R\Lambda} = \frac{\Delta_r R}{R} + \frac{1}{r^2} \frac{\Delta_{\theta, \phi}\Lambda}{\Lambda}. \quad (4.98)$$

Подставляя (4.98) в (4.40), получаем

$$U(\mathbf{r}) = \frac{\alpha}{\beta} \left[\frac{1}{r^2} \left(n^2 - \frac{\Delta_{\theta, \phi}\Lambda}{\Lambda} \right) - \frac{\Delta_r R}{R} \right]. \quad (4.99)$$

Выражение для $\Delta_r R/R$ имеет вид

$$\frac{\Delta_r R}{R} = \frac{R''}{R} + \frac{2}{r} \frac{R'}{R}. \quad (4.100)$$

Преобразуем выражение для $\Delta_{\theta, \phi}\Lambda$:

$$\begin{aligned} \Delta_{\theta, \phi}\Lambda &= \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{Y}{\sqrt{\sin \theta}} + \frac{1}{\sin^2 \theta \sqrt{\sin \theta}} \frac{\partial^2 Y}{\partial \phi^2} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\sin \theta}} \left(Y''_{\theta\theta} + Y \frac{1 + \sin^2 \theta}{4 \sin^2 \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} Y''_{\phi\phi} \right). \end{aligned}$$

В результате

$$\frac{\Delta_{\theta, \phi}\Lambda}{\Lambda} = \frac{Y''_{\theta\theta}}{Y} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{Y''_{\phi\phi}}{Y} + \frac{1 + \sin^2 \theta}{4 \sin^2 \theta}. \quad (4.101)$$

Так как $Y(\xi)$ — функция одной переменной, необходимо преобразовать частные производные $Y''_{\phi\phi}$ и $Y''_{\theta\theta}$ в выражении (4.101). С учетом представления (4.23) выражение (4.101) примет вид

$$Y''_{\phi\phi} = Y, \quad Y'_\theta = -\frac{k}{n \sin^2 \theta} Y', \quad Y''_{\theta\theta} = \frac{k^2}{n^2 \sin^4 \theta} Y'' + 2 \frac{k \operatorname{ctg} \theta}{n \sin^2 \theta} Y', \quad (4.102)$$

$$\frac{\Delta_{\theta, \phi}\Lambda}{\Lambda} = \left(1 + \frac{k^2}{n^2 \sin^2 \theta} \right) \frac{Y''}{Y \sin^2 \theta} + 2 \frac{k \operatorname{ctg} \theta}{n \sin^2 \theta} \frac{Y'}{Y} + \frac{1 + \sin^2 \theta}{4 \sin^2 \theta}.$$

Выражения (4.100), (4.102) необходимо использовать при нахождении потенциала (4.99). Рассмотрим в качестве примера граничное условие (4.94) вида

$$\begin{aligned} f_0(r, \phi) &= C^2 r^{2\nu} e^{-2\kappa r} \sin^4(l\phi), \\ R(r) &= C r^\nu e^{-\kappa r}, \quad Y(\phi) = \sin^2(l\phi). \end{aligned} \quad (4.103)$$

Решение (4.95) примет вид

$$f(r, \theta, \phi) = \frac{C^2 r^{2\nu} e^{-2\kappa r}}{\sin \theta} \sin^4 \left[l \left(\phi + \frac{k}{n} \operatorname{ctg} \theta \right) \right]. \quad (4.104)$$

Для определенности возьмем $k = 1$ и $n = 3$. Вероятность нахождения в объеме пространства $d\omega = r^2 \sin \theta d\theta d\phi dr$ с центром в точке (r, θ, ϕ) будет $dP = f(r, \theta, \phi) d\omega$. На рис. 59–61 показано угловое распределение вероятности dP на сферическом слое фиксированного радиуса при $l = 1, 2, 3$. Поверхность, изображенная на рис. 59–61, описывается радиусом-вектором

$$\mathbf{r} = \{x^1, x^2, x^3\}, \quad (4.105)$$

$$x^1 = dP \sin \theta \cos \phi, \quad x^2 = dP \sin \theta \sin \phi, \quad x^3 = dP \cos \theta.$$

Так как граничное условие (4.103) (при $\theta = \pi/2$) задает периодическое угловое распределение вероятности dP в соответствии с функцией $\sin^4(l\phi)$, максимальная вероятность получается на «хребтах», количество которых определяется числом $2l$. Спиральная структура хребтов (при $0 < \theta < \pi/2$) вызвана спиральной структурой характеристик (4.23) (см. рис. 55).

Найдем потенциал U , соответствующий волновой функции (4.95) при заданных граничных условиях (4.103). В соответствии с выражениями (4.100)

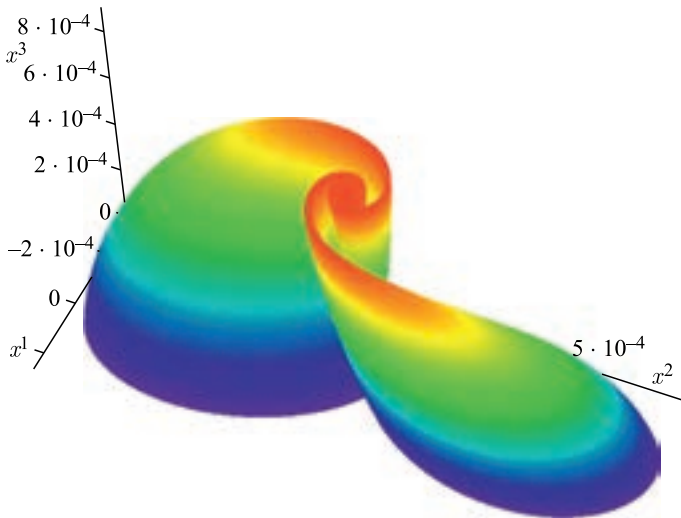


Рис. 59. Угловое распределение вероятности при $l = 1$

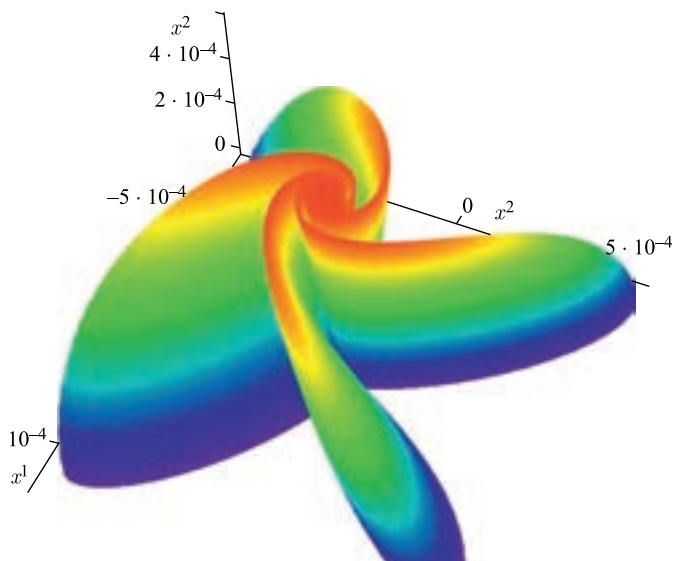


Рис. 60. Угловое распределение вероятности при $l = 2$

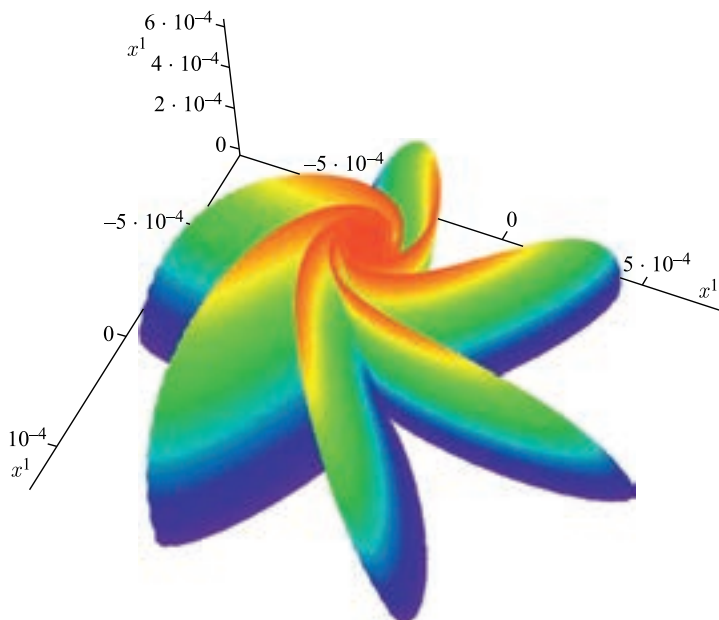


Рис. 61. Угловое распределение вероятности при $l = 3$

и (4.102) получаем

$$\begin{aligned} \frac{\Delta_r R}{R} &= \kappa^2 - \frac{2\kappa(v+1)}{r} + \frac{v(v+1)}{r^2}, \\ \frac{\Delta_{\theta, \phi} \Lambda}{\Lambda} &= \left(1 + \frac{k^2}{n^2 \sin^2 \theta}\right) \left(\frac{1}{\sin^2(m\xi)} - 2\right) \frac{2m^2}{\sin^2 \theta} + \\ &\quad + 4m \frac{k \operatorname{ctg} \theta}{n \sin^2 \theta} \operatorname{ctg}(m\xi) + \frac{1 + \sin^2 \theta}{4 \sin^2 \theta}. \end{aligned} \tag{4.106}$$

Подставляя (4.106) в (4.99), построим распределение потенциала $U(r, \theta, \phi)$ на горизонтальных слоях (параллельных плоскости XOY при $\theta = \pi/2, \pi/4$) для случаев $l = 1, 2, 3$. Из выражения (4.106) следует, что значение потенциала $U(r, \theta, \phi)$ может стремиться к бесконечности, при $\sin^2(m\xi) \rightarrow 0$ такие области соответствуют потенциальным ямам. Так как значение потенциала может менять знак, помимо потенциальных ям будут и потенциальные барьеры.

В силу наличия потенциальных ям и потенциальных барьеров для наглядности изображения значения потенциалов будем «обрезать» максимальным U_{\max} и минимальным U_{\min} значениями. Поэтому значения потенциала $U < U_{\min}$ (потенциальная яма) и $U > U_{\max}$ (потенциальный барьер) изображать не будем. На рисунке областям потенциальных ям и барьеров будет соответствовать пустое место.

На рис. 62–64 приведены распределения потенциалов $U(r, \phi)$, соответствующих $l = 1, 2, 3$. На каждом рисунке показаны два распределения $U(r, \phi)$, которые соответствуют $\theta = \pi/2$ (слева) и $\theta = \pi/4$ (справа). На рис. 62

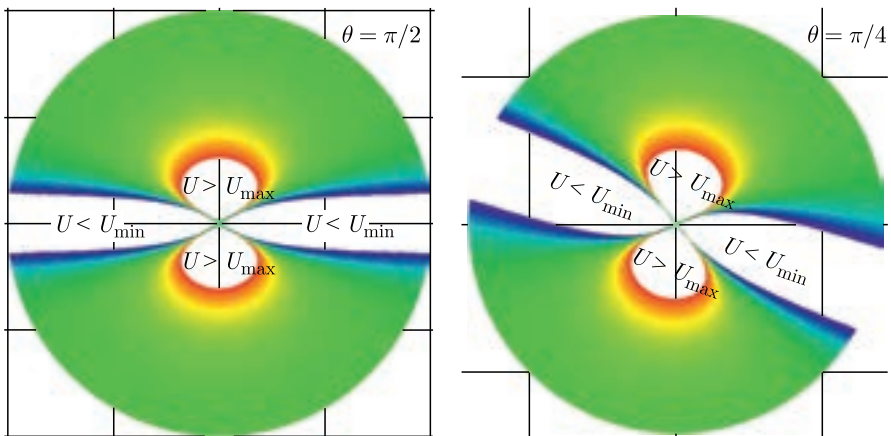
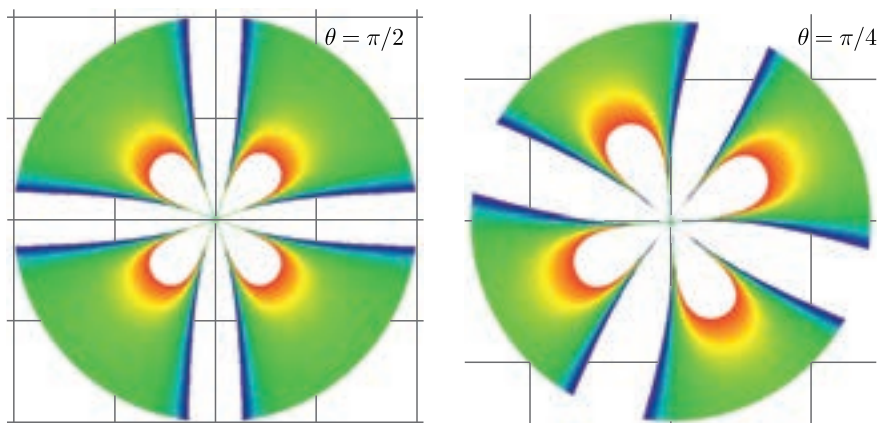
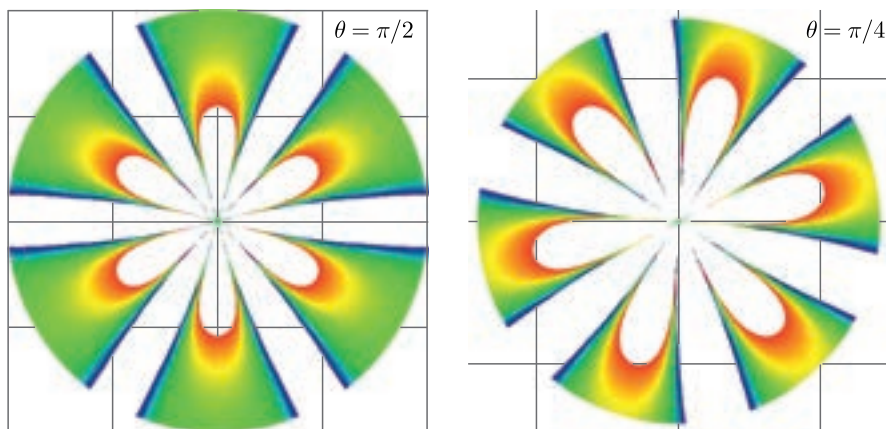


Рис. 62. Распределение потенциала $U(r, \phi)$ в случае $l = 1$

Рис. 63. Распределение потенциала $U(r, \phi)$ в случае $l = 2$ Рис. 64. Распределение потенциала $U(r, \phi)$ в случае $l = 3$

в явном виде указаны области потенциальных ям и барьеров, поэтому на рис. 63, 64, чтобы не загромождать изображение, аналогичные обозначения опущены. На рис. 62–64 видно, что потенциальные ямы отделены друг от друга потенциальными барьерами.

Из сравнения распределений вероятностей dP (см. рис. 59–61) с распределениями потенциалов $U(r, \phi)$ (см. рис. 62–64), соответствующих одним и тем же значениям параметра l , видно, что области максимальной вероятности (хребты) совпадают с областями потенциальных ям.

В результате максимальная вероятность dP сфокусирована в спиральных потенциальных ямах, а ее поток $\langle v \rangle$ (4.6) в силу (4.36) направлен по касательным к характеристикам (4.23) и перетекает с одного полюса сферы на противоположный (см. рис. 53–55).

4.5. Астрофизическая модель. Так как полученная в п. 4.1 математическая модель имеет общий результат не только для квантовой механики, но и для гидродинамики, функция плотности вероятностей f может трактоваться как функция плотности вещества или заряда, а скорость потока вероятностей $\langle v \rangle$ — как скорость течения жидкости, газа или заряда. Естественным видится применение построенной модели в области астрофизики.

Отметим, что используемые в этом пункте астрофизические термины «черная» и «белая» дыры, «голая сингулярность», «кротовая нора» являются не более чем наглядной аналогией, иллюстрирующей свойства получаемых решений.

Спиральная структура галактики имеет рукава, сходящиеся к ее центру. Теоретически центром спиральной галактики (антигалактики) может быть черная (белая) дыра. Белые дыры на данный момент не обнаружены. Однако полное решение Шварцшильда содержит как черную, так и белую дыру [47].

Представленные на рис. 53–55, 65 графики характеристики (траекторий, являющихся решением уравнений движения (4.47)) так же, как и рукава спиральных галактик, имеют спиральную структуру. При этом вектор скорости $\langle v \rangle$ направлен по касательной к спиральным траекториям (4.36). Спиральные траектории направлены от одного полюса сферы к противоположному

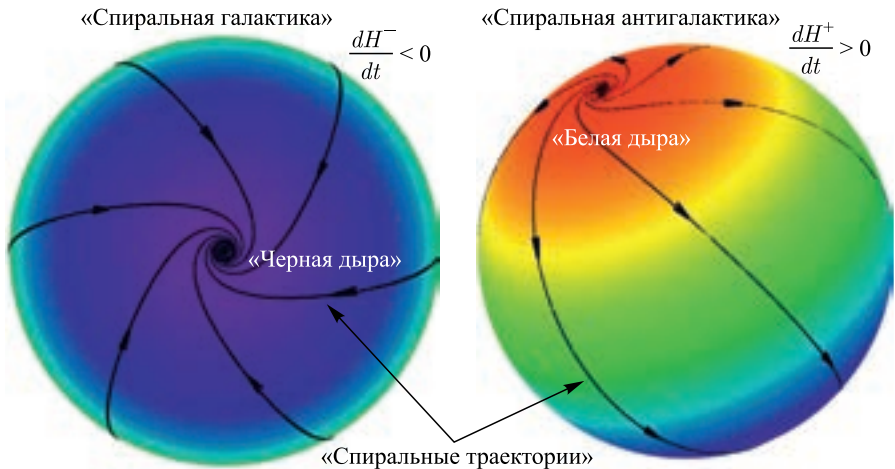


Рис. 65. Астрофизическая аналогия

полюсу и при этом стремятся к полюсам бесконечно долго (см. замечание 4.4, рис. 58).

На полюсах сферы ($\theta = 0$ и $\theta = \pi$) плотность f стремится к бесконечности (4.31), что может соответствовать массивным дырам (см. рис. 53–55, 65). Таким образом, полюс, в который входят спиральные траектории, можно трактовать как «черную дыру», а полюс, из которого выходят спиральные траектории, как «белую дыру» (см. рис. 65).

На оси, соединяющей противоположные полюсы («черную» и «белую» дыры) векторное поле скоростей $\langle \mathbf{v} \rangle$ является неопределенным, так как вектор с бесконечной скоростью крутится вокруг оси OZ и не имеет конкретного направления, а модуль скорости $|\langle \mathbf{v} \rangle|$ стремится к бесконечности. Вдоль оси OZ направлен собственный момент μ_s системы. Как заметил Б. Картер (1968), решение Керра–Ньюмена обладает двойным гиромангнитным отношением $g = 2$, таким же, как у электрона согласно уравнению Дирака [48–51]. В Ψ -модели гиромангнитное отношение g также равно 2 (4.62).

Ось, соединяющую противоположные полюсы, можно трактовать как «кратовую нору» (червоточину, wormhole). На рис. 66 приведена геометрическая интерпретация «кратовой норы» с позиции общей теории относительности [52]. Как известно, «кратовые норы» делятся на «внутримировые» (intra-universe) и «межмировые» (inter-universe) в зависимости от того, можно ли соединить ее входы кривой, не пересекающей горловину (см. рис. 66). Из сравнения рис. 65 и 66 видно, что существуют два способа соединить полюсы сферы (дыры): по оси и по поверхности сферы.

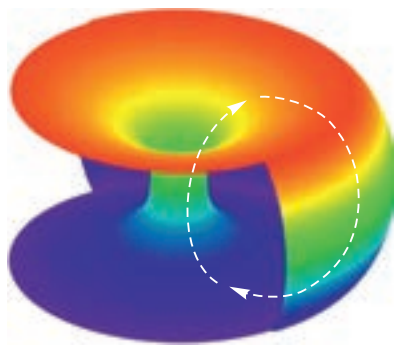


Рис. 66. Двумерное сечение простой «кратовой норы»

Как известно, вращение «черной дыры» приводит к уменьшению радиуса горизонта событий (решение Керра). В Ψ -модели скорость вращения в полюсах (на оси OZ) стремится к бесконечности, поэтому радиус горизонта событий стремится к нулю, т. е. переходит в ось OZ (см. рис. 65, 71), а плотность стремится к бесконечности (4.31). В общей теории относительности такой эффект известен как «голая сингулярность» (naked singularity) [53–57].

Источником поля скоростей $\langle \mathbf{v} \rangle$ является величина Q (4.7) (см. рис. 51), которая стремится к бесконечности на оси, соединяющей «черную» и «белую» дыры (полюсы сферы). Верхняя часть шара имеет положительные источники ($Q > 0$), а нижняя — отрицательные ($Q < 0$). Таким образом, нижняя часть шара соответствует спиральной галактике, втягивающей массу ($Q < 0$), а верхняя часть — «антигалактике», выбрасывающей массу ($Q > 0$).

Рассмотрим поведение H_1 -энтропии в окрестности полюсов сферы («черной» и «белой» дыр). В соответствии с уравнениями (4.2) и (4.73) поведение H_1 -энтропии определяется источниками $\langle Q \rangle$. Величина Q известна (4.7), поэтому вычислим $\langle Q \rangle$ (4.75). Так как $\langle Q \rangle$ зависит от начальной (при $t = 0$) плотности распределения F_0 (4.74), в качестве примера возьмем

$$F_0(r, \phi, \theta) = R^2(r) \sin^2(l\phi), \quad l \in \mathbb{N}. \quad (4.107)$$

Подставляя (4.107) в (4.75), получим

$$\langle Q \rangle(t) = \frac{\hbar n}{m} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \operatorname{ctg} \theta \, d\theta \int_0^{+\infty} R^2(r) \sin^2 l(\phi + \bar{\omega}_{k,n}) \, dr, \quad (4.108)$$

где введено обозначение

$$\bar{\omega}_{k,n}(r, \theta) \stackrel{\text{det}}{=} \frac{k}{n} (\operatorname{ctg} \theta - \operatorname{ctg}(\theta + \omega_n(r)t)). \quad (4.109)$$

Так как $\bar{\omega}_{k,n}(r, \theta)$ не зависит от ϕ , интеграл (4.108) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \langle Q \rangle(t) &= \frac{\hbar n}{m} \int_0^{2\pi} \sin^2 l(\phi + \bar{\omega}_{k,n}) \, d\phi \int_0^\pi \operatorname{ctg} \theta \, d\theta \int_0^{+\infty} R^2(r) \, dr = \\ &= \frac{\hbar n}{2m} \int_0^{2\pi} (1 - \cos[2l(\phi + \bar{\omega}_{k,n})]) \, d\phi \int_0^\pi \operatorname{ctg} \theta \, d\theta \int_0^{+\infty} R^2(r) \, dr = \\ &= \frac{\pi \hbar n}{m} \int_0^\pi \operatorname{ctg} \theta \, d\theta \int_0^{+\infty} R^2(r) \, dr, \end{aligned}$$

т. е.

$$\langle Q \rangle(t) = 0. \quad (4.110)$$

Следовательно, в соответствии с уравнением (4.73) относительная H_1 -энтропия во всем пространстве является постоянной

$$H_1 = \text{const}. \quad (4.111)$$

Отметим, что если усреднение в интеграле (4.75) производить только по верхней полусфере ($\varepsilon \leq \theta \leq \pi/2$)

$$\langle Q \rangle^+ \stackrel{\text{det}}{=} \frac{\pi \hbar n}{m} \int_\varepsilon^{\pi/2} \operatorname{ctg} \theta \, d\theta \int_0^{+\infty} R^2(r) \, dr, \quad (4.112)$$

где ε — некоторая малая величина, то $\langle Q \rangle^+ > 0$ и H_1^+ -энтропия растет (см. рис. 58). При $\varepsilon \rightarrow 0$ величина $\langle Q \rangle^+ \rightarrow +\infty$, так как значение $\theta = 0$ соответствует оси OZ , соединяющей полюсы (wormhole) сферы («черную» и «белую» дыры). Область увеличения H_1 -энтропии соответствует внешности «белой дыры» (см. рис. 58).

При усреднении в интеграле (4.75) по нижней полусфере ($\pi/2 \leq \theta \leq \pi - \varepsilon$)

$$\langle Q \rangle^- \stackrel{\text{дет}}{=} \frac{\pi \hbar n}{m} \int_{\pi/2}^{\pi-\varepsilon} \text{ctg } \theta \, d\theta \int_0^{+\infty} R^2(r) \, dr \quad (4.113)$$

получается значение $\langle Q \rangle^- < 0$ и H_1^- -энтропия уменьшается (см. рис. 65). При $\varepsilon \rightarrow 0$ величина $\langle Q \rangle^- \rightarrow -\infty$, так как значение $\theta = \pi$ соответствует оси OZ , соединяющей полюсы (wormhole) сферы («черную» и «белую» дыры). Область уменьшения H_1 -энтропии соответствует внешности «черной дыры» (см. рис. 65).

Полное усреднение по всему пространству в соответствии с (4.110) дает $\langle Q \rangle = 0$ и энтропия $H = \text{const}$ (4.111). В результате при симметричном по θ начальном распределении плотности (4.107) вклады от верхней полусферы $\langle Q \rangle^+$ (4.112) и нижней полусферы $\langle Q \rangle^-$ (4.113) взаимно компенсируются и получается $\langle Q \rangle = 0$ (4.111).

На рис. 67–70 показано распределение вероятности для нестационарного решения (4.31) в случае начального распределения плотности (4.107). В замечании 3 было показано, что решение (4.31) является периодическим на каж-

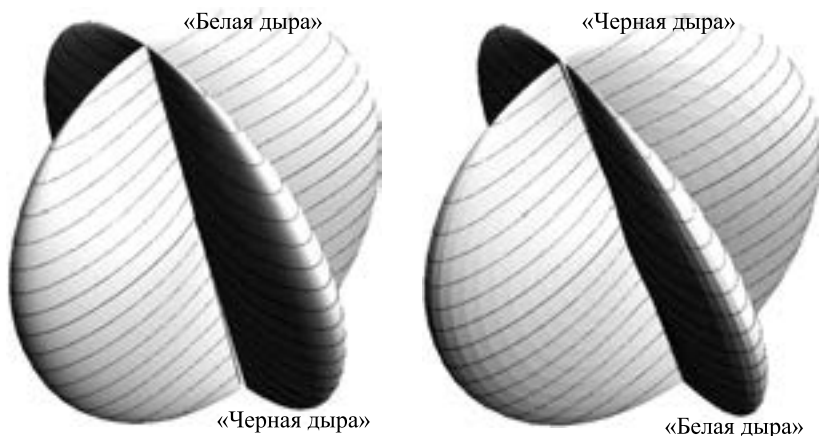


Рис. 67. Распределение вероятности на поверхности сферы в момент $t = 0$

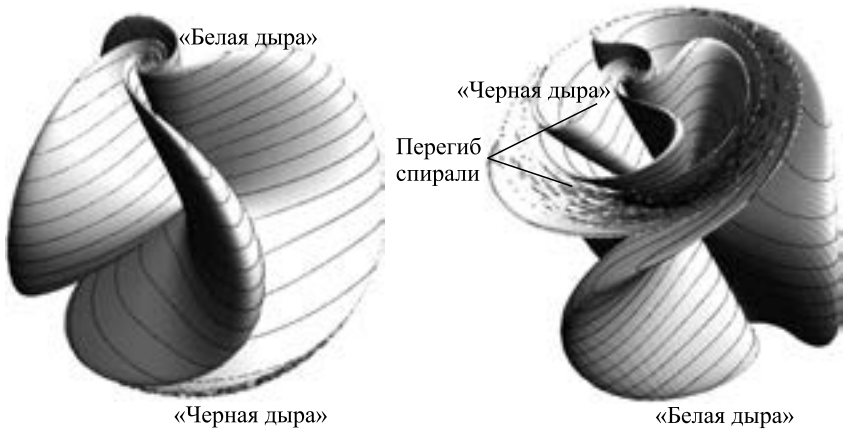


Рис. 68. Распределение вероятности на поверхности сферы в момент $t = T/4$

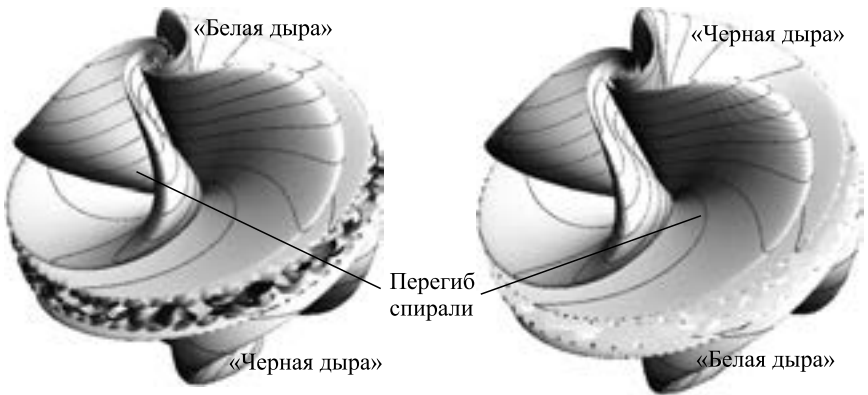


Рис. 69. Распределение вероятности на поверхности сферы в момент $t = T/2$

дой концентрической сфере радиуса r с периодом T и частотой $\omega_n(r)$:

$$T = \frac{m}{\hbar n} \pi r^2 = \frac{m \sigma}{\hbar n 4}, \quad \omega_n(r) = \frac{\hbar n}{m r^2}, \quad (4.114)$$

где $\sigma = 4\pi r^2$ — площадь сферы радиуса r . На рис. 67–70 показаны распределения, соответствующие различным моментам времени периода T , т. е. $t = 0, T/4, T/2, 3T/4$. Так как процесс перераспределения плотности является периодическим, распределение в момент времени $t = 0$ (см. рис. 67) совпадает с моментом времени $t = T$.

На каждом рис. 67–70 изображены два ракурса одного и того же распределения, но при взгляде с двух противоположных полюсов («черных» и

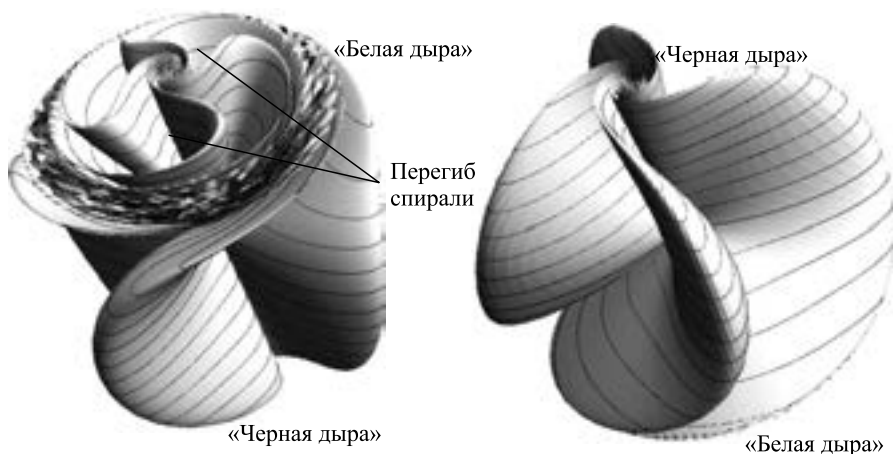


Рис. 70. Распределение вероятности на поверхности сферы в момент $t = (3/4)T$

«белых» дыр). Левый рисунок соответствует взгляду со стороны полусферы с $Q > 0$ («белая дыра», «антигалактика»), правый рисунок соответствует взгляду со стороны полусферы с $Q < 0$ («черная дыра», «галактика»).

Из сравнения рис. 67–70 видно, что распределения в общем случае не являются симметричными, за исключением моментов времени $t = 0, T/2, T$, однако H_1 -энтропия в соответствии с (4.111) остается постоянной в течение всего периода.

На рис. 71 показано распределение плотности вероятностей в сечении ROZ в различные моменты времени $t = T_0, 5T_0, 10T_0, 20T_0$.

Неизменными остаются рост и убывание H_1^+ -энтропии (4.112) и H_1^- -энтропии (4.113) в окрестностях «белой» и «черной» дыр соответственно.

Спиральное закручивание распределений плотности начинается одновременно на обоих полюсах сферы, но с разной скоростью. На рис. 67–70 видно, что спиральное закручивание распределений плотности вначале (см. рис. 68) идет быстрее на полюсе, соответствующем «черной дыре». Постепенно образованный вихрь движется к противоположному полюсу, соответствующему «белой дыре» (см. рис. 69, 70). В момент $t = T/2$ скорости закручивания в обоих полюсах становятся одинаковыми (см. рис. 69). При $T/2 < t < T$ процесс закручивания в области «черной дыры» замедляется, а процесс закручивания в области «белой дыры» ускоряется.

Указанная неравномерность в скоростях закручивания полюсов приводит к появлению перегибов спиральных распределений плотности (см. рис. 68–70).

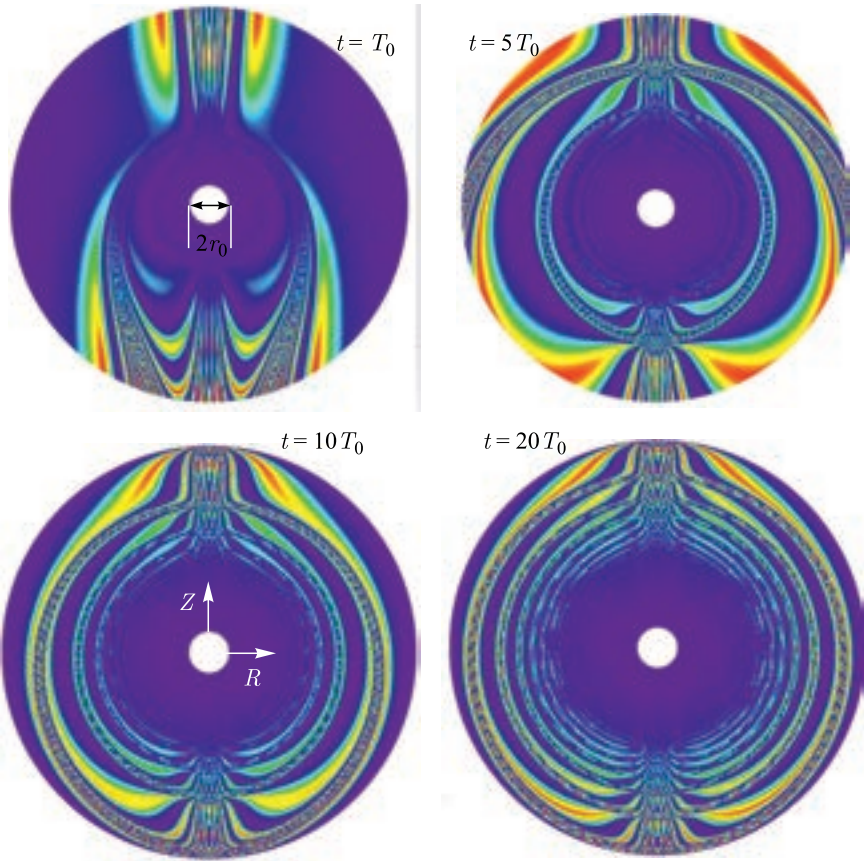


Рис. 71. Распределение плотности вероятности в сечении ROZ

Перераспределение плотности происходит периодически на каждой концентрической сфере, но с различными периодами (4.114).

Отметим, что описанные аналогии со спиральными траекториями, полюсами справедливы для всех концентрических сфер с общей осью OZ (рис. 72). Метрику Керра–Ньюмена (Керра, Рейснера–Нордстрема) можно аналитически продолжить также через горизонт событий таким образом, чтобы соединить в «черной дыре» бесконечно много «независимых» пространств. Это могут быть как «другие» вселенные, так и удаленные части нашей Вселенной [58].

Концентрические сферы разных радиусов можно трактовать как различные «вложенные вселенные», т. е. «вложенные» друг в друга и соединенные

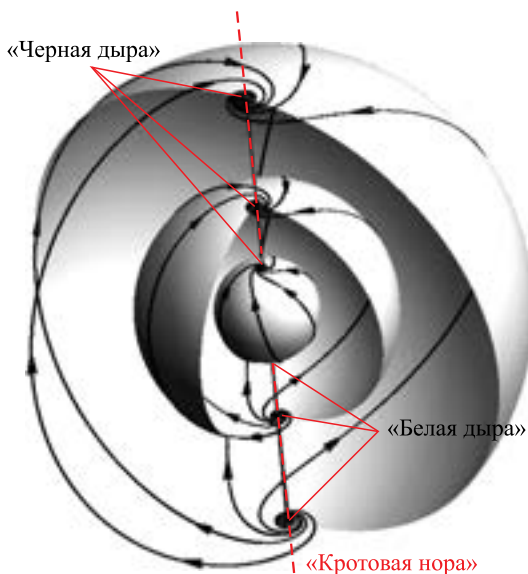


Рис. 72. Модель «вложенных вселенных»

общей осью OZ («кротовой норой»). При этом в силу замечания 4.3 характерные времена (периоды) увеличиваются при переходе на сферу большего радиуса и уменьшаются при переходе на сферу меньшего радиуса. Такой временной масштаб характерен для микро- и макросистем. Например, на атомном уровне период обращения электрона вокруг ядра $\sim 10^{-8}$ с, а период обращения Земли вокруг Солнца — 1 год.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-29-10014 мк и Фонда развития теоретической физики и математики «БАЗИС».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Vlasov A. A.* Many-Particle Theory and Its Application to Plasma. New York: Gordon and Breach, 1961.
2. *Vlasov A. A.* On the Vibrational Properties of an Electronic Gas // *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* 1938. V. 8. P. 291.
3. *Власов А. А.* Статистические функции распределения. М.: Наука, 1966. 356 с.
4. *Camporeale E., Delzanno G. L., Bergen B. K., Moulton J. D.* On the Velocity Space Discretization for the Vlasov–Poisson System: Comparison between Implicit Hermite Spectral and Particle-in-Cell Methods // *Comp. Phys. Commun.* 2016. V. 198. P. 47–58.

5. *Dorr M. R., Colella P., Dorf M. A., Ghosh D., Hittinger J., Schwartz P. O.* High-Order Discretization of a Gyrokinetic Vlasov Model in Edge Plasma Geometry // *J. Comp. Phys.* 2018. V. 373. P. 605–630.
6. *Fijalkow E.* A Numerical Solution to the Vlasov Equation // *Comp. Phys. Commun.* 1999. V. 116, Iss. 2–3. P. 319–328.
7. *Filbet F., Sonnendrucker E., Bertrandz P.* Conservative Numerical Schemes for the Vlasov Equation // *J. Comp. Phys.* 2001. V. 172. P. 166–187.
8. *Sonnendrucker E., Roche J., Bertrand P., Ghizzoy A.* The Semi-Lagrangian Method for the Numerical Resolution of the Vlasov Equation // *J. Comp. Phys.* 1999. V. 149, Iss. 2. P. 201–220.
9. *Valentini F., Travnicek P., Califano F., Hellinger P., Mangeney A.* A Hybrid-Vlasov Model Based on the Current Advance Method for the Simulation of Collisionless Magnetized Plasma // *J. Comp. Phys.* 2007. V. 225. P. 753–770.
10. *Власов А. А., Иноземцева Н. Г.* О существовании четырех типов акустических волн в статистической модели кристалла // *Вестн. Моск. гос. ун-та. Сер. 3.* 1976. Т. 17, № 2. С. 151–159.
11. *Власов А. А.* Нитевидные и пластинчатые структуры в кристаллах и жидкостях // *ТМФ.* 1970. Т. 5, № 3. С. 388–405.
12. *Власов А. А., Иноземцева Н. Г.* Основные типы упругих волн, переносящих акустические спины в кристаллах // *Докл. АН СССР.* 1975. Т. 225, № 2. С. 276–279.
13. *Perpelkin E. E., Sadovnikov B. I., Inozemtseva N. G., Burlakov E. V.* Wigner Function of a Quantum System with Polynomial Potential // *J. Stat. Mech.* 2020. V. 2020. P. 053105.
14. *Moyal E.* Quantum Mechanics as a Statistical Theory // *Proc. of the Cambridge Philos. Soc.* 1949. V. 245. P. 99–124.
15. *Schleich W. P.* Quantum Optics in Phase Space. Wiley-VCH, 2001.
16. *Bohm D., Hiley B. J., Kaloyerou P. N.* An Ontological Basis for the Quantum Theory // *Phys. Rep.* 1987. V. 144. P. 321–375.
17. *Bohm D., Hiley B. J.* The Undivided Universe: An Ontological Interpretation of Quantum Theory. London: Routledge, 1993.
18. *Koltenbah B. E. C., Parazzoli C. G.* Space Charge Calculations of Elliptical Cross-Section Electron Pulses in PARMELA // *Nucl. Instr. Meth. A.* 1999. V. 429. P. 281–286.
19. *Poplau G., van Rienen U., van der Geer S. B., de Loos M. J.* Multigrid Algorithms for the Fast Calculation of Space-Charge Effects in Accelerator Design // *IEEE Trans. Magnetics.* 2004. V. 40, No. 2. P. 714–717.
20. *van der Geer S. B., de Loos M. J., Luiten O. J., Poplau G., van Rienen U.* 3D Space-Charge Model for GPT Simulations of High-Brightness Electron Bunches. TESLA-Report 2003-04. DESY, 2003.
21. *Humphries S., Jr.* Numerical Modeling of Space-Charge-Limited Charged-Particle Emission on a Conformal Triangular Mesh // *J. Comp. Phys.* 1996. V. 125. P. 488–497.
22. *Kaplan A. E., Dubetsky B. Y., Shkolnikov P. L.* // *Phys. Rev. Lett.* 2003. V. 91. P. 143401.

23. *Ditmire T., Donnelly T., Rubenchik A. M. et al.* // Phys. Rev. A. 1996. V. 53. P. 3379.
24. *Krainov V. P., Smirnov M. B.* // Phys. Rep. 2002. V. 370. P. 237.
25. *Nishihara K., Amitani H., Murakami M. et al.* // Nucl. Instr. Meth. A. 2001. V. 464. P. 98.
26. *Kaplan A. E., Dubetsky B. Y., Shkolnikov P. L.* // Phys. Rev. Lett. 2003. V. 91. P. 143401.
27. *Kovalev V. F., Popov K. I., Bychenkov V. Yu., Rozmus W.* // Phys. Plasmas. 2007. V. 14. P. 053103.
28. *Bulgac A., Luo Yu.-L., Roche K. J.* Quantum Shock Waves and Domain Walls in the Real-Time Dynamics of a Superfluid Unitary Fermi Gas // Phys. Rev. Lett. 2012. V. 108. P. 150401.
29. *Bettelheim E., Abanov A. G., Wiegmann P.* Nonlinear Quantum Shock Waves in Fractional Quantum Hall Edge States // Phys. Rev. Lett. 2006. V. 97. P. 246401.
30. *Dutton Z., Budde M., Slowe Ch., Vestergaard Hau L.* Observation of Quantum Shock Waves Created with Ultra-Compressed Slow Light Pulses in a Bose–Einstein Condensate // Science. 2001. V. 293, Iss. 5530. P. 663–668.
31. *Perepelkin E. E., Sadovnikov B. I., Inozemtseva N. G.* PSI-Model of Micro- and Macro-systems // Ann. Phys. 2017. V. 383. P. 511–544.
32. *Perepelkin E. E., Sadovnikov B. I., Inozemtseva N. G.* The Properties of the First Equation of the Vlasov Chain of Equations // J. Stat. Mech. 2015. V. 2015. P. P05019.
33. *Perepelkin E. E., Sadovnikov B. I., Inozemtseva N. G.* The New Modified Vlasov Equation for the Systems with Dissipative Processes // J. Stat. Mech. 2017. V. 2017. P. 053207.
34. *Styer D. F., Balkin M. S., Becker K. M., Burns M. R., Dudley Ch. E., Forth S. T., Gaurmer J. S., Kramer M. A., Oertel D. C., Park L. H., Rinkoski M. T., Smith C. T., Wotherpoon T. D.* Nine Formulations of Quantum Mechanics // Am. J. Phys. 2002. V. 70, No. 3. P. 288–297.
35. *Landau L. D., Lifshitz E. M.* Quantum Mechanics. Oxford: Pergamon Press, 1977. V. 3. P. 677.
36. *Scott T. C., Zhang W.* Efficient Hybrid-Symbolic Methods for Quantum Mechanical Calculations // Comp. Phys. Commun. 2015. V. 191. P. 221–234.
37. *Busch T.* Two Cold Atoms in a Harmonic Trap // Found. Phys. 1998. V. 27, No. 4. P. 549–559.
38. *Simpao V. A.* Real Wave Function from Generalized Hamiltonian Schrödinger Equation in Quantum Phase Space via HOA (Heaviside Operational Ansatz): Exact Analytical Results // J. Math. Chem. 2014. V. 52, No. 4. P. 1137–1155.
39. *Biedenharn L. C., Rinker G. A., Solem J. C.* A Solvable Approximate Model for the Response of Atoms Subjected to Strong Oscillatory Electric Fields // J. Opt. Soc. Am. B. 1989. V. 6, No. 2. P. 221–227.
40. *Courant R., Hilbert D.* Methods of Mathematical Physics // Partial Differential Equation. New York: Wiley, 1962. V. 2.
41. *Zhidkov E. P., Perepelkin E. E.* An Analytical Approach for Quasi-Linear Equation in Secondary Order // CMAM. 2001. V. 1, No. 3. P. 285–297.

42. *Perepelkin E. E., Sadovnikov B. I., Inozemtseva N. G.* Solutions of Nonlinear Equations of Divergence Type in Domains Having Corner Points // *J. Elliptic Parabol. Equ.* 2018. V. 4. P. 107–139.
43. *Al-Salam W. A.* Operational Representations for Laguerre and Other Polynomials // *Duke Math J.* 1964. V. 31, No. 1. P. 127–142.
44. *Koepf W.* Identities for Families of Orthogonal Polynomials and Special Functions // *Integral Transforms Spec. Funct.* 1997. V. 5. P. 69–102.
45. *Perepelkin E. E., Sadovnikov B. I., Inozemtseva N. G.* Riemann Surface and Quantization // *Ann. Phys.* 2017. V. 376. P. 194–217.
46. *Jackson J. D.* Classical Electrodynamics. 3rd ed. New York; London; Sydney: John Wiley & Sons, 1962. 832 p.
47. *Carroll S. M.* Spacetime and Geometry. Addison Wesley, 2004.
48. *Carter B.* // *Phys. Rev.* 1968. V. 174. P. 1559.
49. *Kerr R. P.* // *Phys. Rev. Lett.* 1963. V. 11. P. 237.
50. *Newman E. T., Couch E., Chinnapared K., Exton A., Prakash A., Torrence R.* // *J. Math. Phys.* 1965. V. 6. P. 918.
51. *Burinskii A.* Stringlike Structures in the Real and Complex Kerr–Schild Geometry // *J. Phys. Conf. Ser.* 2014. V. 532. P. 012004.
52. *Misner Ch. W., Thorne K. S., Wheeler J. A.* Gravitation. San Francisco: W. H. Freeman, 1973.
53. *Bojowald M.* // *Living Rev. Rel.* 2005. V. 8. P. 11.
54. *Goswami R., Joshi P.* // *Phys. Rev. D.* 2007. V. 76. P. 084026.
55. *Goswami R., Joshi P., Singh P.* // *Phys. Rev. Lett.* 2006. V. 96. P. 031302.
56. *Eardley D., Smarr L.* // *Phys. Rev. D.* 1979. V. 19. P. 2239.
57. *Krolak A.* // *Prog. Theor. Phys. Supp.* 1999. V. 136. P. 45.
58. *Droz S., Israel W., Morsink S. M.* Black Holes: The Inside Story // *Phys. World.* 1996. V. 9, No. 1. P. 34–37.