ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА
2021. Т. 52. ВЫП. 2. С. 530–561

АВТОМОДЕЛЬНЫЕ ПОТЕНЦИАЛЫ В КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ И КОГЕРЕНТНЫЕ СОСТОЯНИЯ

В. П. Спиридонов *

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики», Москва

Кратко описывается связь между методом факторизации квантовой механики, автомодельными потенциалами, интегрируемыми системами и теорией специальных функций. Построены новые когерентные состояния гармонического осциллятора, связанные с преобразованием Фурье.

A brief description of the relations between the factorization method in quantum mechanics, self-similar potentials, integrable systems and the theory of special functions is given. New coherent states of the harmonic oscillator related to the Fourier transformation are constructed.

PACS: 03.65.-w; 02.30.Ik; 02.30.Gp

Светлой памяти В. Б. Приезжева

1. ЭВОЛЮЦИЯ ОПЕРАТОРОВ ШРЁДИНГЕРА В ДИСКРЕТНОМ ВРЕМЕНИ

Рассмотрим проблему решения стационарного уравнения Шрёдингера в одномерном пространстве

$$L\psi(x) = \lambda\psi(x), \quad \lambda, x \in \mathbb{R}, \tag{1.1}$$

где гамильтониан L имеет вид (в подходящей нормировке координатной переменной x и энергии λ)

$$L = -\partial_x^2 + u(x), \quad \partial_x := \frac{d}{dx}, \quad u(x) \in C^\infty.$$

*E-mail: spiridon@theor.jinr.ru

Здесь для конкретики указано, что потенциал $u(x)$ является действительной бесконечно дифференцируемой функцией. На самом деле это вовсе необязательно, потенциал может описываться разрывной функцией или даже обобщенной функцией умеренного роста. Основная физическая задача состоит в определении спектра энергий, т. е. значений λ, для которых волновые (или собственные) функции $\psi(x)$ либо квадратично интегрируемы, т. е. лежат в гильбертовом пространстве $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$, либо их рост на бесконечности ограничен степенной функцией.

С чисто математической точки зрения интересно охарактеризовать класс потенциалов $u(x)$, для которых можно построить волновые функции в «замкнутом виде» для всех λ. Это означает, что для $\psi(x)$ должно существовать выражение либо в виде какого-либо ряда с простыми коэффициентами, либо в виде определенных интегралов с явной подынтегральной функцией. Здесь «простой» и «явный» означают, что точки дивизора этих коэффициентов и подынтегральных функций известны и описываются последовательностями чисел, выражающимися через элементарные функции (например, арифметическими или геометрическими последовательностями). В рамках такой проблемы удобно использовать мощь комплексного анализа и рассматривать уравнение (1.1) в общем случае $x, \lambda \in \mathbb{C}$ и считать $u(x)$ комплексной аналитической функцией хотя бы в какой-то компактной области x.

Конструктивный подход к этой проблеме состоит в изучении симметрий уравнения Шрёдингера не для конкретного потенциала, а для пространства всех потенциалов сразу. Для этого рассмотрим эволюцию операторов Шрёдингера в условном дискретном времени $j \in \mathbb{Z}$ и построим бесконечную цепочку гамильтонианов

$$L_j = -\partial_x^2 + u_j(x), \quad L_j\psi^{(j)}(x) = \lambda\psi^{(j)}(x), \quad j \in \mathbb{Z}, \tag{1.2}$$

собственные функции которых связаны друг с другом действием дифференциальных операторов первого порядка

$$\psi^{(j+1)}(x) = A_j\psi^{(j)}(x), \quad A_j = \partial_x + f_j(x). \tag{1.3}$$

Очевидно, что для произвольных $u_j(x)$ и $f_j(x)$ пара уравнений (1.2) и (1.3) (эту пару ввел Инфельд [1], но в теории интегрируемых систем такие пары называются «парами Лакса») противоречат друг другу. Условия, при которых возникает совместимая система, имеют вид

$$L_{j+1}\psi^{(j+1)} = L_{j+1}\big[A_j\psi^{(j)}\big] = \lambda\big[A_j\psi^{(j)}\big] = A_jL_j\psi^{(j)} \tag{1.4}$$

и приводят к соотношениям сплетания в операторном виде

$$L_{j+1}A_j = A_jL_j. \tag{1.5}$$

Здесь слева и справа стоят дифференциальные операторы третьего порядка. Приравнивая функциональные коэффициенты перед разными степенями ∂_x, получаем уравнения

$$u_{j+1}(x) = u_j(x) + 2f_j'(x), \quad u_j'(x) = 2f_j(x)f_j'(x) - f_j''(x),$$

где штрихи означают производные по x. Решая их, выводим явную связь между $u_j(x)$ и $f_j(x)$:

$$u_j(x) = f_j^2(x) - f_j'(x) + \lambda_j, \quad u_{j+1}(x) = f_j^2(x) + f_j'(x) + \lambda_j, \tag{1.6}$$

где λ_j являются константами интегрирования.

Легко увидеть, что в результате разрешения условий совместности мы пришли к естественной факторизации гамильтонианов

$$L_j = A_j^+ A_j + \lambda_j, \quad L_{j+1} = A_j A_j^+ + \lambda_j, \tag{1.7}$$

где оператор A_j^+ является формальным эрмитовым сопряжением A_j:

$$A_j^+ = -\partial_x + f_j(x), \quad A_j^+ L_{j+1} = L_j A_j^+. \tag{1.8}$$

Если $\lambda_j \in \mathbb{R}$ и $f_j(x)$ не содержат сингулярностей, то $A_j^\dagger = A_j^+$ и $L_j^\dagger = L_j$.

Заменив j на $j+1$ в первом выражении в (1.6) и приравняв второму выражению, получаем факторизационную цепочку Инфельда [1]

$$A_{j+1}^+ A_{j+1} + \lambda_{j+1} = A_j A_j^+ + \lambda_j \tag{1.9}$$

или

$$f_{j+1}^2(x) - f_{j+1}'(x) + \lambda_{j+1} = f_j^2(x) + f_j'(x) + \lambda_j, \tag{1.10}$$

определяющую основное уравнение метода факторизации квантовой механики, первоначально сформулированного Шрёдингером на конкретных примерах в [2, 3].

Исторически преобразования, отображающие решения одних линейных дифференциальных уравнений в решения других линейных дифференциальных уравнений, отличных от начальных, были рассмотрены задолго до создания квантовой механики. В литературе по интегрируемым системам их принято называть преобразованиями Дарбу. Перейдем к описанию сути метода факторизации.

2. МЕТОД ФАКТОРИЗАЦИИ

Рассмотрим, как факторизация гамильтонианов на произведение дифференциальных операторов первого порядка помогает определить дискретный спектр для ряда простых операторов Шрёдингера одномерной квантовой механики. Детальное описание этого метода было представлено в хорошо известном старом обзоре [4].

Ключевым примером является одномерный квантовый гармонический осциллятор — простейшая квантово-механическая система, имеющая универсальный характер. Гамильтониан этой системы в подходящей нормировке канонических координат и единиц энергии ($\hbar = \omega = m = 1$) имеет вид

$$L = \frac{1}{2}\left(p^2 + x^2\right), \quad [x, p] = xp - px = \mathrm{i}, \quad \mathrm{i}^2 = -1. \tag{2.1}$$

Задача на собственные значения для гамильтониана, $L\psi = \lambda\psi$, определяет допустимые значения энергии систем λ. Если собственные функции ψ являются нормируемыми векторами в гильбертовом пространстве, то они описывают дискретный (или точечный) спектр. Для абсолютно непрерывного спектра ψ лежит в оснащенном гильбертовом пространстве, содержащем обобщенные функции умеренного роста (случай сингулярно непрерывного спектра мы не затрагиваем). Можно перейти в координатное представление, в котором $x \in \mathbb{R}$, $p = -\mathrm{i}\partial_x$ и $\psi = \psi(x)$. Тогда $L\psi = \lambda\psi$ переходит в уравнение Шрёдингера, имеющего вид дифференциального уравнения второго порядка, общее решение которого для оператора (2.1) находится в терминах вырожденной гипергеометрической функции. Нормируемые случаи $\psi(x) \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ легко выделяются и приводят к многочленам Эрмита.

Однако этот путь решения задачи на собственные значения выглядит чрезмерно усложненным. Ее можно решить чисто алгебраическим способом. Факторизуем гамильтониан (2.1)

$$L = a^+a + \frac{1}{2}, \quad a^+ = \frac{-\mathrm{i}p + x}{\sqrt{2}}, \quad a = \frac{\mathrm{i}p + x}{\sqrt{2}}. \tag{2.2}$$

Операторы L, a, a^+ образуют простую алгебру Ли, называемую алгеброй Гейзенберга, которая вытекает из канонических коммутационных соотношений (2.1):

$$[a, a^+] = 1, \quad [L, a] = -a, \quad [L, a^+] = a^+. \tag{2.3}$$

Обозначим $|0\rangle$ основное состояние системы, или вакуум, определяемый как нулевая мода оператора a, $a|0\rangle = 0$. Будем считать это состояние нормированным на единицу, $\langle 0|0\rangle = 1$. Тогда находим полную ортонормированную систему собственных функций гамильтониана простым последовательным действием повышающего оператора a^+:

$$L|n\rangle = \lambda_n|n\rangle, \quad \lambda_n = n + \frac{1}{2}, \quad |n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(a^+)^n\,|0\rangle, \quad \langle n|m\rangle = \delta_{nm}. \tag{2.4}$$

Действия повышающего a^+ и понижающего a операторов имеют следующий явный вид:

$$a^+|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle, \quad a|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle. \tag{2.5}$$

В координатном представлении имеем $a = \dfrac{\partial_x + x}{\sqrt{2}}$, $a^+ = \dfrac{-\partial_x + x}{\sqrt{2}}$ и, соответственно,

$$\psi_n(x) := \langle x|n\rangle = \frac{H_n(x)}{\sqrt{2^n n!\sqrt{\pi}}}\, \mathrm{e}^{-x^2/2}, \quad H_n(x) = (-1)^n\, \mathrm{e}^{-x^2} \frac{d^n}{dx^n}\, \mathrm{e}^{x^2}, \quad (2.6)$$

где $H_n(x)$ — ортогональные многочлены Эрмита.

В этом примере один и тот же оператор a переводит осциллятор с n-го уровня на уровень с номером $n-1$. В общем случае метода факторизации вид понижающего (или повышающего) оператора зависит от номера уровня. Рассмотрим нулевые моды обобщенных понижающих операторов A_j (1.3):

$$A_j\psi_{\mathrm{vac}}^{(j)} = 0 \to \psi_{\mathrm{vac}}^{(j)}(x) = \exp\left(-\int\limits_{x_0}^{x} f_j(y)\, dy\right). \quad (2.7)$$

Предположим, что все последовательные нулевые моды, начиная с $j=0$ и завершая каким-то номером $N>0$, являются нормируемыми функциями, $\psi_{\mathrm{vac}}^{(j)} \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$, т. е. описывают состояния дискретного спектра. Тогда

$$L_j\psi_{\mathrm{vac}}^{(j)} = \lambda_j\psi_{\mathrm{vac}}^{(j)}$$

и постоянные интегрирования λ_j оказываются равными энергиям основных состояний гамильтонианов L_j. Обобщенные повышающие операторы A_j^+ позволяют построить остальные возбужденные состояния системы. Рассмотрим состояние $\psi_1^{(j)} := A_j^+\psi_{\mathrm{vac}}^{(j+1)}$. Для него

$$L_j\psi_1^{(j)} = A_j^+ L_{j+1}\psi_{\mathrm{vac}}^{(j+1)} = \lambda_{j+1}A_j^+\psi_{\mathrm{vac}}^{(j+1)} = \lambda_{j+1}\psi_1^{(j)},$$

т. е. λ_{j+1} является собственным значением оператора L_j (вторым уровнем дискретного спектра).

Рассмотрим операторы эволюции, описывающие развитие в дискретном времени на $n>0$ шагов,

$$M_j^{(n)} := A_{j+n-1}\cdots A_{j+1}A_j, \quad M_j^{(n)+} := A_j^+A_{j+1}^+\cdots A_{j+n-1}^+. \quad (2.8)$$

Для них справедливы следующие сплетающие соотношения, вытекающие из равенств (1.5) и (1.8),

$$L_{j+n}M_j^{(n)} = M_j^{(n)}L_j, \quad M_j^{(n)+}L_{j+n} = L_jM_j^{(n)+}. \quad (2.9)$$

Легко вывести операторные факторизационные соотношения

$$M_j^{(n)+}M_j^{(n)} = \prod_{k=0}^{n-1}(L_j - \lambda_{j+k}), \quad M_j^{(n)}M_j^{(n)+} = \prod_{k=0}^{n-1}(L_{j+n} - \lambda_{j+k}). \quad (2.10)$$

Согласованные эволюционные уравнения вперед и назад по дискретному времени выглядят так:

$$\psi^{(j+n)} = M_j^{(n)} \psi^{(j)}, \quad \psi^{(j)} = \prod_{k=0}^{n-1} (\lambda - \lambda_{j+k})^{-1} \, M_j^{(n)+} \psi^{(j+n)}. \tag{2.11}$$

Также из алгебраических соотношений сплетания (2.9) естественным образом вытекает, что все волновые функции $\psi^{(j+k)}$ являются собственными функциями начального гамильтониана L_j после подходящего числа шагов $j \to j-1$:

$$L_j \psi_n^{(j)} = \lambda_{j+n} \psi_n^{(j)}, \quad \psi_n^{(j)} := M_j^{(n)+} \psi_{\mathrm{vac}}^{(j+n)},$$

т. е. $\lambda_j, \lambda_{j+1}, \ldots$ описывают дискретный спектр гамильтониана L_j. Для верности этого утверждения требуется нормируемость функций, $\psi_n^{(j)} \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$, $n = 0, 1, \ldots$ При этом нетрудно убедиться, что это полный дискретный спектр, т. е. что в нем нет пропусков каких-либо собственных значений. Проверка условия нормируемости требует знания асимптотик функций $f_j(x)$ и отсутствия сингулярностей потенциалов на конечной реальной оси.

Если интересоваться общими решениями уравнения Шрёдингера, то обратим внимание на тот факт, что данный формализм позволяет, исходя из полного решения какого-либо начального уравнения $L_0 \psi^{(0)} = \lambda \psi^{(0)}$, построить новые точно решаемые уравнения $L_m \psi^{(m)} = \lambda \psi^{(m)}$, $m \in \mathbb{Z}$. При этом дискретный спектр операторов L_m, $m > 0$, почти совпадает со спектром L_0 — стираются только первые m собственных значений. Очевидно, исходя из гамильтониана с заданным спектром L можно построить новые гамильтонианы не с удаленными, а, наоборот, со вставленными новыми собственными значениями — для этого достаточно обернуть процедуру перефакторизации. Если нарушить условие, что $\psi_{\mathrm{vac}}^{(j)}$ являются нормируемыми функциями, то можно строить изоспектральные гамильтонианы с отличающимися потенциалами. Более того, можно добавлять или удалять необходимое число дискретных уровней не только с наименьшими значениями энергии, но с некоторыми ограничениями и в произвольной части спектра [5]. Поэтому факторизационную цепочку Инфельда можно называть цепочкой спектральных преобразований уравнения Шрёдингера.

Очевидно, что часть решений при переходе от L_0 к L_m, соответствующих определенным значениям λ, «пропадает». Конкретно, при $\lambda = \lambda_j$, $j = 0, 1, \ldots, m-1$, только одно из независимых решений уравнения $L_m \psi^{(m)} = \lambda \psi^{(m)}$, $m > 0$, можно представить в виде $M_0^{(m)} \psi^{(0)}$, так как функции $\psi_{\mathrm{vac}}^{(0)}$, $A_0^+ \psi_{\mathrm{vac}}^{(1)}, \ldots, A_0^+ \cdots A_{m-2}^+ \psi_{\mathrm{vac}}^{(m-1)}$ описывают нулевые моды оператора эволюции $M_0^{(m)}$. Однако явный вид этих недостающих решений легко восстановить. Пусть ψ_1, ψ_2 — два независимых решения уравнения $L\psi = \lambda\psi$ для какого-то фиксированного λ, т. е. $W(\psi_1, \psi_2) = \psi_1\psi_2' - \psi_1'\psi_2 \neq 0$. Если известно только решение $\psi_1(x)$, то второе восстанавливается из уравнения первого порядка, определяемого вронскианом $W = \mathrm{const}$ по формуле

$$\psi_2(x) = \psi_1(x) \int\limits_{x_0}^{x} \frac{dy}{\psi_1^2(y)}.$$

3. АВТОМОДЕЛЬНЫЕ ПОТЕНЦИАЛЫ

Основы метода факторизации были заложены Шрёдингером, но универсальный подход к нему был разработан Инфельдом [1] благодаря формулировке факторизационной цепочки (1.10), которую удобно переписать в виде

$$f_j'(x) + f_{j+1}'(x) + f_j^2(x) - f_{j+1}^2(x) = \mu_j, \quad \mu_j := \lambda_{j+1} - \lambda_j. \tag{3.1}$$

Ключевым моментом было предложение рассмотреть в этой цепочке символ j не как дискретную переменную, а как непрерывный параметр и трактовать (3.1) как дифференциально-разностное уравнение по двум (в общем случае комплексным) переменным x и j.

Соответственно, можно искать решения цепочки (3.1) в виде конечного лорановского ряда по переменной j, $f_j(x) = \sum\limits_{n=-N}^{M} a_n(x)j^n$, для каких-то целых N и M. Оказалось, что решения такого вида существуют при конечных N и M, только если $N = M = 1$, т. е. для следующего анзаца обобщенного разделения переменных:

$$f_j(x) = \frac{a(x)}{j} + b(x) + c(x)j. \tag{3.2}$$

После подстановки этого выражения в (3.1) появляются уравнения для коэффициентов $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ и собственных значений λ_j. Эти уравнения решаются в элементарных функциях и приводят к спектрам вида $\lambda_j \propto j, j^2, \alpha j^2 + \beta/j^2$, соответствующим гармоническому осциллятору, потенциалу Пешля–Теллера, кулоновской задаче и т. д. Детальное описание возникающих систем дано Инфельдом и Халлом [4], и мы не будем здесь его повторять.

Представим другой класс решений (3.1), которые будем называть автомодельными. Рассмотрим простейшие симметрии цепочки Инфельда. Во-первых, поскольку нет явной зависимости от переменной j, имеется трансляционная инвариантность: сдвиг по дискретному времени $j \to j + N$, $N \in \mathbb{Z}$, отображает решения этой цепочки на другие ее решения. Другая простая симметрия касается координатной переменной и связана с аффинными преобразованиями $x \to qx + h$. А именно, преобразование

$$x \to qx + h, \quad f_j(x) \to qf_j(qx + h), \quad \mu_j \to q^2\mu_j$$

отображает заданные решения цепочки (3.1) на другие ее решения.

Общие глубоко нетривиальные автомодельные решения цепочки (3.1) определяются как специальные решения, которые инвариантны относительно комбинации двух приведенных тривиальных симметрий [6] (см. также [7]):

$$f_{j+N}(x) = qf_j(qx + h), \quad \mu_{j+N} = q^2\mu_j. \tag{3.3}$$

Используя свободу в определении собственных значений — возможности сдвинуть их на произвольную постоянную $\lambda \to \lambda + \mathrm{const}$, форму дискретного спектра, вытекающую из второго равенства в (3.3), можно представить в следующем виде:

$$\lambda_{kN+m} = \lambda_m q^{2k}, \quad m = 0, 1, \ldots, N - 1, \quad k = 0, 1, \ldots, \tag{3.4}$$

т. е. предполагаемый дискретный спектр состоит из суперпозиции N геометрических прогрессий с инкрементом q^2 при условии, что λ_j, $q \in \mathbb{R}$ и $\lambda_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_{N-1}$ и что потенциалы $u_j(x) = f_j^2(x) - f_j'(x) + \lambda_j$ не содержат сингулярностей при $x \in \mathbb{R}$. В принципе, истинное число геометрических прогрессий в спектре может быть и меньше N, это зависит от конкретного выбора параметров потенциалов.

Поскольку дискретный спектр λ_n не может расти быстрее, чем n^2 при $n \to \infty$, для реальной физической ситуации необходимо наложить условие $0 < q^2 < 1$. В этом случае значение спектрального параметра $\lambda = 0$ является точкой накопления дискретного спектра, а при $\lambda > 0$ должен находиться непрерывный спектр. Это все качественные рассуждения, требующие строгого доказательства путем исследования аналитической структуры функций $f_j(x)$, в том числе вычислением их асимптотики при $x \to \pm\infty$.

4. КВАНТОВЫЕ АЛГЕБРЫ (ОПЕРАТОРНАЯ АВТОМОДЕЛЬНОСТЬ)

Можно переформулировать описанную функциональную автомодельность на операторном языке. Наложим абстрактное ограничение

$$L_{j+N} = q^2 U L_j U^{-1} + \mu, \tag{4.1}$$

где U является некоторым обращаемым оператором, а q^2 и μ — некоторые постоянные. Если сделать сдвиг $L_j \to L_j + \mu/(1 - q^2)$, то при $q^2 \neq 1$

постоянную μ можно устранить из рассмотрения. Обозначим $L := L_0$, $B := U^{-1}M_0^{(N)}$, $B^+ := M_0^{(N)+}U$. Тогда из соотношений (2.9) и (2.10) вытекает

$$\begin{gathered} LB^+ = q^2B^+L + \mu B^+, \qquad BL = q^2LB + \mu B, \\ B^+B = \prod_{j=0}^{N-1}(L-\lambda_j), \qquad BB^+ = \prod_{j=0}^{N-1}(q^2L + \mu - \lambda_j). \end{gathered} \tag{4.2}$$

При $N = 1$ это не что иное, как алгебра q-гармонического осциллятора

$$\begin{gathered} AA^+ - q^2A^+A = 1, \\ A = \frac{B}{\sqrt{\mu + \lambda_0(q^2-1)}}, \quad A^+ := \frac{B^+}{\sqrt{\mu + \lambda_0(q^2-1)}}. \end{gathered} \tag{4.3}$$

Насколько известно автору, данная алгебра впервые подробно исследовалась при обсуждении довольно экзотического сюжета в статье с названием «Парастохастика» [8]. Спорадически она возникала еще в некоторых других областях [9, 10], однако стала широко популярной только после работы [11], появившейся на фоне общего интереса к квантовым группам. Представленная выше алгебраическая схема по выводу квантовых алгебр исходя из метода факторизации была построена в [12–14].

Для алгебры (4.3) естественно определение гамильтониана в виде

$$H = A^+A - \frac{1}{1-q^2} = \frac{L - \frac{\mu}{1-q^2}}{\mu + \lambda_0(q^2-1)}, \quad L = B^+B + \lambda_0, \tag{4.4}$$

который удовлетворяет соотношениям $HA^+ = q^2A^+H$ и $AH = q^2HA$. В общей ситуации можно рассмотреть и неунитарный случай, когда $A^+ \neq A^\dagger$. В частности, это происходит для произвольных комплексных $q \in \mathbb{C}$, включающих в себя наиболее интересные арифметические системы, когда q является примитивным корнем единицы, $q^m = 1$, $m \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$.

Если взять формальное вакуумное состояние $A|0\rangle = 0$, $\langle 0|0\rangle = 1$, то q-аналогом связанных состояний гармонического осциллятора являются следующие формальные векторы гильбертова пространства:

$$|n\rangle = \frac{(A^+)^n}{\sqrt{[n]_{q^2}!}}|0\rangle, \quad [n]_{q^2} = \frac{1-q^{2n}}{1-q^2}, \quad [n]_{q^2}! = [1]_{q^2}[2]_{q^2}\cdots[n]_{q^2}, \tag{4.5}$$

со спектром, который выводится чисто алгебраически,

$$H|n\rangle = \lambda_n|n\rangle, \quad \lambda_n = \frac{q^{2n}}{q^2-1}, \quad \langle n|m\rangle = \delta_{nm}. \tag{4.6}$$

При этом допустимы оба случая: $0 < q^2 < 1$ и $q^2 > 1$. Однако конкретные реализации операторной алгебры накладывают определенные ограничения на реальный спектр состояний гамильтониана H. В частности, для обычного уравнения Шрёдингера допустим только выбор $0 < q^2 < 1$.

5. СПЕЦИАЛЬНЫЕ СЛУЧАИ

Рассмотрим частные случаи автомодельных потенциалов, для которых известно либо полное решение спектральной задачи, либо имеется хоть какая-то полезная информация о них.

Пусть
$$q = 1, \quad \mu = 0, \quad U = 1, \quad [L, B] = [L, B^+] = 0. \tag{5.1}$$

Эти ограничения, требующие существования нетривиального интеграла движения в виде дифференциального оператора N-го порядка, приводят (для нечетных N и, при определенных условиях, для четных N) к конечнозонным потенциалам, описываемым гиперэллиптическими функциями. Полагая $N = 2n + 1$ или $N = 2n$, имеем

$$\begin{gathered} u_j(x) = -2\partial_x^2 \log \Theta(x), \\ \Theta(x) = \sum_{m_1,\ldots,m_n \in \mathbb{Z}} \exp\left[2\pi \mathrm{i}\left(\sum_{k,\ell=1}^{n} A_{k\ell} m_k m_\ell + \sum_{k=1}^{n} B_k(x) m_k\right)\right]. \end{gathered} \tag{5.2}$$

Матрица квазипериодов A_{ij} тета-функции Римана рода n и переменные $B_k(x)$, линейно зависящие от x, определяют форму потенциала и спектр гамильтониана [15].

Рассмотрение этих потенциалов на основе периодической редукции цепочки Инфельда и анализа соответствующей системы дифференциальных уравнений как вполне интегрируемой системы дано в работах [16] при $\mu_j = 0$ и в [17] при произвольных $\lambda_{j+N} = \lambda_j$. Потенциал (5.2) называется «конечнозонным», поскольку подразумевается решение спектральной задачи с периодическими или квазипериодическими несингулярными потенциалами, спектр которых содержит конечное число разрешенных (или запрещенных) зон непрерывного спектра. Спектральная задача другого типа, связанная с граничными условиями в сингулярных точках потенциала, для которой спектр является чисто дискретным, обсуждалась в работе [18].

Уже случай выбора U в виде оператора четности $U = P$, $Pg(x) = g(-x)$, что соответствует оператору дилатации $Ug(x) = g(qx)$ при $q = -1$, вызывает определенные трудности в описании явного вида потенциалов. Очевидно, что в этом случае B^2 и $(B^+)^2$ будут дифференциальными операторами $2N$-го порядка, коммутирующими с гамильтонианом. Если взять некоторые четные конечнозонные потенциалы, соответствующие антисимметричным функциям $f_j(-x) = -f_j(x)$, то это дает решение задачи, но вопрос о существовании других решений остается открытым.

Пусть

$$q = 1, \quad \mu \neq 0, \quad U = 1, \quad [L, B^+] = \mu B^+, \quad [L, B] = -\mu B. \tag{5.3}$$

Соответствующие потенциалы обобщают потенциал гармонического осциллятора, возникающий при $N = 1$. Тот факт, что коммутаторные алгебры типа (5.3) связаны с трансцендентными функциями Пенлеве, был установлен в работе [19]. В описанной нами ситуации при периодическом замыкании с $N = 3$ потенциал выражается через функцию Пенлеве-IV [20], а для $N = 4$ уже требуется функция Пенлеве-V с небольшим ограничением [21]. Формально спектр связных состояний для соответствующих гамильтонианов состоит из суперпозиции N арифметических прогрессий. Однако это утверждение зависит от граничных условий, и уже при $N = 2$ оно неверно из-за сингулярности возникающего потенциала. Такой же спектр соответствует выбору $q = -1$, т. е. когда U есть оператор четности, $Uf(x) = f(-x)$, но теперь надо уметь выделять решения с определенными свойствами четности среди функций типа Пенлеве, возникающих из условия замыкания с периодом $2N$ [7].

Пусть $h \in \mathbb{R}$ и

$$q = 1, \quad U = \mathrm{e}^{h\partial_x}, \quad Uf(x) = f(x+h), \quad U^\dagger = U^{-1} = \mathrm{e}^{-h\partial_x}. \tag{5.4}$$

Общее решение в каком-либо явном виде неизвестно. Очевидно, что при этом возникает трансляционная h-деформация трансцендентов Пенлеве и их обобщений. Например, при $N = 1$ имеем следующее уравнение для функции $f(x) := f_0(x)$:

$$f'(x) + f'(x+h) + f^2(x) - f^2(x+h) = \mu. \tag{5.5}$$

При $\mu = 0$ получаем формулу сложения для эллиптической функции Вейерштрасса $\wp(x)$:

$$f(x) = -\frac{1}{2}\frac{\wp'(x - x_0) - \wp'(h)}{\wp(x - x_0) - \wp(h)}.$$

Отметим, что эта функция не определена в пределе $h \to 0$, что демонстрирует тонкости конкретных функциональных реализаций операторных алгебр, не переходящих друг в друга, как это предполагают наивно взятые пределы. Для случая $\mu \neq 0$ в работе [22] было показано, что для подходящих граничных условий $f(x)$ является аналитической функцией, мероморфной на всей комплексной плоскости, что является большой редкостью для нелинейных дифференциально-разностных уравнений.

При произвольных N и $\mu = 0$ возникает любопытная деформация общих гиперэллиптических функций, до сих пор не исследованная должным образом, поскольку интегралом движения является не дифференциальный, а дифференциально-разностный оператор.

Пусть $U = q^{x\partial_x}$ и $q^m = 1$ (неунитарный случай). Тогда

$$U^m = 1, \quad [L, B^m] = [L, (B^+)^m] = 0. \tag{5.6}$$

В результате мы получаем специальный класс конечнозонных потенциалов (поскольку B^m, $(B^+)^m$ являются дифференциальными операторами), характеризующийся наличием осей симметрии m-го порядка [23].

Пусть $q \in \mathbb{C}^\times$ принимает произвольные значения, тогда существует тривиальное частное решение вида $f_j(x) = \mathrm{const}$, а именно:

$$\begin{gathered} U^{\pm 1} = q^{\pm x\partial_x}, \quad U^{\pm 1} f(x) = f(q^{\pm 1}x), \\ f_j^2 = -\lambda_j, \quad u_j(x) = 0, \quad L_j = -\partial_x^2. \end{gathered} \tag{5.7}$$

В результате мы получили тривиальную свободную квантовую частицу, для которой имеется глубоко нетривиальная полиномиальная алгебра симметрии, совпадающая при $N = 1$ с алгеброй q-гармонического осциллятора.

Другой случай простых явно известных потенциалов соответствует кристальному базису в квантовых алгебрах $q = 0$. Для несингулярных автомодельных потенциалов это соответствует случаю $f_N(x) = 0$, что вовсе не означает, что функции $f_j(x)$, $j = 0, \ldots, N-1$, тривиальны. На самом деле в этом случае функции $f_{N-n}(x)$ приводят к хорошо известным n-солитонным потенциалам уравнения Кортевега–де Фриза (КдФ), рассмотренным ниже.

Общий случай автомодельных потенциалов

$$U^{\pm 1} = q^{\pm x\partial_x}, \quad U^{\pm 1} f(x) = f(q^{\pm 1}x), \quad q \neq 0, \quad q^m \neq 1,$$

соответствует (непрерывным) q-деформированным функциям Пенлеве (при $N = 3, 4$) и их обобщениям на трансценденты более высокого порядка. При $N = 1$, $h = 0$ условия (3.3) эквивалентны редукции $f_j(x) = q^j f(q^j x)$, $\lambda_j = \lambda_0 q^{2j}$, впервые построенной в [24]. В этой ситуации практически полностью отсутствует информация о глобальных аналитических свойствах функций $f_j(x)$. При $N = 1$ можно показать, что при определенных граничных условиях функция $f(x)$ является мероморфной на всей комплексной плоскости, аналогично решениям уравнения (5.5). Отметим, что общий оператор U не является унитарным. Только оператор $Uf(x) = |q|^{1/2} f(qx)$ будет унитарным при $0 < q < 1$ и $-1 < q < 0$.

6. КОГЕРЕНТНЫЕ СОСТОЯНИЯ

В работе [25] Шрёдингер построил переполненную систему состояний гармонического осциллятора, названных когерентными, которые являются нормированными собственными функциями понижающего оператора

$$A|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle, \quad \alpha \in \mathbb{C}, \quad \langle\alpha|\alpha\rangle = 1. \tag{6.1}$$

В алгебраическом представлении

$$|\alpha\rangle = \mathrm{e}^{\alpha a^\dagger - \alpha^* a}|0\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle. \tag{6.2}$$

В координатном представлении эти состояния описываются банально сдвинутой формой вакуумной волновой функции

$$\psi_\alpha(x) := \langle x|\alpha\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2 - \frac{1}{2}\alpha^2 + \sqrt{2}\alpha x - \frac{1}{2}x^2\right). \tag{6.3}$$

Факторизация гамильтониана (2.2) является принципиально важной в представленных формулах. Однако, как замечено в [6, 12], эта факторизация глубоко неоднозначна. В частности, можно определить операторные множители в (2.2), приводящие к тому же самому гамильтониану, следующим образом:

$$A^+ = \frac{-\mathrm{i}p + x}{\sqrt{2}}U(p,x), \quad A = V(p,x)\frac{\mathrm{i}p + x}{\sqrt{2}}, \quad U(p,x)V(p,x) = 1.$$

Если потребовать, чтобы операторы A и A^+ были эрмитово сопряжены друг к другу, то тогда $V(p,x) = U(p,x)^\dagger$ и $U(p,x)U(p,x)^\dagger = 1$, т. е. $U(p,x)$ является унитарным оператором. В принципе, U может иметь произвольную допустимую форму, например быть конечно-разностным или интегральным оператором. Ключевой вопрос — какой явный вид будет иметь оператор $AA^+ = U(p,x)^\dagger(L+1/2)U(p,x)$? Потребуем, чтобы алгебра Гейзенберга (2.3) сохранилась, т. е. чтобы наше преобразование было каноническим, $[A, A^+] = 1$. Это приводит к следующему уравнению:

$$U(p,x)^\dagger(p^2+x^2)\,U(p,x) = p^2 + x^2.$$

Опишем два простейших примера нетривиальных операторов $U(p,x)$, удовлетворяющих данному равенству. Во-первых, это оператор четности P,

$$U(p,x) = U(p,x)^\dagger = P, \quad Px = -xP, \quad Pp = -pP, \quad P^2 = 1, \tag{6.4}$$

который соответствует автомодельному потенциалу, рассмотренному выше при $N = 1$, $q = -1$, $\mu = 1$. Во-вторых, это оператор преобразования Фурье $U^\dagger = \mathcal{F}$, $U = \mathcal{F}^{-1}$,

$$[\mathcal{F}f](y) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}yx} f(x)\,dx, \quad \mathcal{F}^2 = P, \quad \mathcal{F}^4 = 1, \tag{6.5}$$

приводящий к симплектическому отражению,

$$\mathcal{F}x\mathcal{F}^{-1} = p, \quad \mathcal{F}p\mathcal{F}^{-1} = -x, \tag{6.6}$$

и сохраняющий каноническое коммутационное соотношение $xp - px = \mathrm{i}$. Выбор обратного преобразования Фурье $U^\dagger = \mathcal{F}^{-1}$,

$$[\mathcal{F}^{-1}f](y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}yx} f(x)\,dx, \tag{6.7}$$

приводит к другому симплектическому отражению (комбинации прямого преобразования Фурье и четности)

$$\mathcal{F}^{-1}x\mathcal{F} = -p, \quad \mathcal{F}^{-1}p\mathcal{F} = x.$$

Когерентные состояния, ассоциированные с понижающим оператором $A = U^{-1}a$, определяются уравнением

$$A|\alpha\rangle_U = \alpha|\alpha\rangle_U \quad \text{или} \quad a|\alpha\rangle_U = \alpha U|\alpha\rangle_U. \tag{6.8}$$

Выбор $U = P$ был рассмотрен в [7], и он приводит к следующей суперпозиции канонических когерентных состояний («шрёдингеровскому коту»):

$$|\alpha\rangle_P = \frac{\mathrm{e}^{-\pi\mathrm{i}/4}\,|\mathrm{i}\alpha\rangle + \mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}/4}\,|-\mathrm{i}\alpha\rangle}{\sqrt{2}}. \tag{6.9}$$

В координатном представлении $\psi_\alpha^{(U)}(x) := \langle x|\alpha\rangle_U$ имеем

$$\psi_\alpha^{(P)}(x) = \frac{\sqrt{2}}{\pi^{1/4}} \exp\left(\frac{\alpha^2 - |\alpha|^2 - x^2}{2}\right) \cos\left(\sqrt{2}\alpha x - \frac{\pi}{4}\right). \tag{6.10}$$

Подробное обсуждение подобных суперпозиций когерентных состояний, а также список соответствующей литературы приведены в статье [7]. Отметим, что в этой работе построено однопараметрическое обобщение состояний (6.9), также связанное с оператором четности посредством выбора $U = \cos\varphi + \mathrm{i}P\sin\varphi$, но мы не будем его здесь рассматривать.

Выбор $U = \mathcal{F}^{\pm 1}$ соответствует интегродифференциальным уравнениям

$$\left(\frac{d}{dx} + x\right) \psi_\alpha^{(\mathcal{F}^{\pm 1})}(x) = \frac{\alpha}{\pi^{1/2}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i} xy} \psi_\alpha^{(\mathcal{F}^{\pm 1})}(y)\, dy, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \alpha \in \mathbb{C}, \tag{6.11}$$

которые ранее не рассматривались в литературе. Нормируемые решения этих уравнений находятся с помощью хорошо известного факта, что собственными функциями преобразования Фурье являются волновые функции гармонического осциллятора (2.6)

$$L|n\rangle = \left(n + \frac{1}{2}\right) |n\rangle, \quad \mathcal{F}|n\rangle = \varepsilon_n |n\rangle, \quad \varepsilon_n = \mathrm{e}^{\pi \mathrm{i}\, n/2} = \mathrm{i}^n. \tag{6.12}$$

Разложим $|\alpha\rangle_{\mathcal{F}^{\pm 1}}$ в ряд по состояниям $|n\rangle$, образующим базис гильбертова пространства, $|\alpha\rangle_{\mathcal{F}^{\pm 1}} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n^{\pm} |n\rangle$. Подставляя это выражение в уравнения (6.11), получаем рекуррентные соотношения первого порядка на коэффициенты $c_n^{\pm}$, которые легко решаются. В результате находим

$$|\alpha\rangle_{\mathcal{F}^{\pm 1}} = \mathrm{e}^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\, \mathrm{e}^{\pm \pi \mathrm{i} n(n-1)/4} |n\rangle, \quad {}_{\mathcal{F}^{\pm 1}}\langle \alpha | \alpha \rangle_{\mathcal{F}^{\pm 1}} = 1.$$

Эти волновые функции также можно представить в виде конечной суперпозиции канонических когерентных состояний

$$\begin{gathered} |\alpha\rangle_{\mathcal{F}} = \frac{1}{2}\big(|\mathrm{e}^{\pi \mathrm{i}/4}\alpha\rangle - \mathrm{e}^{\pi \mathrm{i}/4} |\, \mathrm{e}^{3\pi \mathrm{i}/4}\alpha\rangle + |\, \mathrm{e}^{5\pi \mathrm{i}/4}\alpha\rangle + \mathrm{e}^{\pi \mathrm{i}/4} |\, \mathrm{e}^{7\pi \mathrm{i}/4}\alpha\rangle\big), \\ \psi_\alpha^{(\mathcal{F})}(x) = \exp\left[-\frac{1}{2}(|\alpha|^2 + x^2)\right] \Big(\exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{2}\alpha^2\right) \cosh\big((1+\mathrm{i})\alpha x\big) + \\ + \exp\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\alpha^2 + \frac{\pi \mathrm{i}}{4}\right) \sinh\big((1-\mathrm{i})\alpha x\big)\Big) \end{gathered} \tag{6.13}$$

и

$$\begin{gathered} |\alpha\rangle_{\mathcal{F}^{-1}} = \frac{1}{2}\big(\mathrm{e}^{-\pi \mathrm{i}/4} |\, \mathrm{e}^{\pi \mathrm{i}/4}\alpha\rangle + |\, \mathrm{e}^{3\pi \mathrm{i}/4}\alpha\rangle - \mathrm{e}^{-\pi \mathrm{i}/4} |\, \mathrm{e}^{5\pi \mathrm{i}/4}\alpha\rangle + |\, \mathrm{e}^{7\pi \mathrm{i}/4}\alpha\rangle\big), \\ \psi_\alpha^{(\mathcal{F}^{-1})}(x) = \exp\left[-\frac{1}{2}(|\alpha|^2 + x^2)\right] \Big(\exp{(\mathrm{i}/2)\alpha^2} \cosh\big((1-\mathrm{i})\alpha x\big) + \\ + \exp{(-\mathrm{i}/2)\alpha^2} - \frac{\pi \mathrm{i}}{4} \sinh\big((1+\mathrm{i})\alpha x\big)\Big). \end{gathered} \tag{6.14}$$

Отметим, что $\psi_\alpha^{(\mathcal{F}^{-1})}(x) = (\psi_{\alpha^*}^{(\mathcal{F})}(x))^*$, где звездочка обозначает комплексное сопряжение.

Таким образом, мы нашли все решения интегродифференциальных уравнений (6.11), принадлежащие $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$. Интересно было бы охарактеризовать другие решения этих уравнений, лежащие в более общих функциональных пространствах, или найти их (а также уравнения (6.18) ниже) общее решение, аналогичное функциям параболического цилиндра (или вырожденным гипергеометрическим функциям), характеризующим общее решение уравнения Шрёдингера для потенциала гармонического осциллятора.

Когерентные состояния (6.9) описывают суперпозиции «макроскопических» состояний, имеющих определенные чисто квантово-механические экспериментальные проявления. Насколько автору известно, состояния «шрёдингеровских котов» (6.13) и (6.14), связанные с преобразованиями Фурье, еще не обсуждались в литературе. Поэтому любопытно было бы проанализировать их возможное экспериментальное проявление.

Общим преобразованием симметрии $U(p,x)$ в (6.4), включающим в себя приведенные выше случаи, является поворот в фазовом пространстве на произвольный угол $\varphi \in \mathbb{R}$,

$$U(\varphi)^\dagger x U(\varphi) = x\cos\varphi + p\sin\varphi, \quad U(\varphi)^\dagger p U(\varphi) = -x\sin\varphi + p\cos\varphi. \tag{6.15}$$

Это не что иное, как эволюция в искусственном времени φ согласно уравнению Шрёдингера

$$\mathrm{i}\partial_t\psi(t) = L\psi(t), \quad \psi(t) = U(t)\psi(0), \quad U(t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}tL}, \quad t = \varphi. \tag{6.16}$$

Справедливость (6.15) очень легко доказать на уровне операторов рождения и уничтожения. Действительно, поскольку $U^\dagger = U^{-1} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}tL}$,

$$a(\varphi) := \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi L} a\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi L}, \quad \partial_\varphi a(\varphi) = \mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi L}[L,a]\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi L} = -\mathrm{i}a(\varphi). \tag{6.17}$$

Решая это уравнение с начальным условием $a(0) := a$, находим $a(\varphi) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}a$. Аналогично, $a^+(\varphi) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi L}a^+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi L} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}a^+$, что в комбинации дает (6.15).

Для этого общего случая уравнение (6.8), определяющее когерентные состояния, принимает максимально сложный интегродифференциальный вид:

$$\left(\frac{d}{dx} + x\right)\psi_\alpha^{(U)}(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi L}\,\psi_\alpha^{(U)}(x) = \sqrt{2}\alpha \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{K}(x,y;\varphi)\,\psi_\alpha^{(U)}(y)\,dy, \tag{6.18}$$

где ядро интегрального оператора в правой части имеет следующий явный вид:

$$\mathcal{K}(x,y;\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\mathrm{i}\sin\varphi}}\exp\left[\mathrm{i}\frac{(x^2+y^2)\cos\varphi - 2xy}{2\sin\varphi}\right]. \tag{6.19}$$

Это ядро было построено Мехлером за 60 лет до открытия квантовой механики в терминах переменной, соответствующей замене $\varphi \to -\mathrm{i}\varphi$. Само интегральное преобразование, стоящее в правой части равенства (6.18), можно интерпретировать как «дробное» обобщение стандартного преобразования Фурье, соответствующего выбору параметра $\varphi = \pm\pi/2$ (см., например, [28]).

Нормируемое решение уравнения (6.18) однозначно находится разложением по базису собственных функций оператора L и решением соответствующего рекуррентного соотношения для коэффициентов разложения, что приводит к выражению

$$|\alpha\rangle_U = \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\exp\left[-\mathrm{i}\varphi\frac{n(n-1)}{2}\right]|n\rangle, \quad U = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi L}. \tag{6.20}$$

Для произвольных значений параметра φ эти волновые функции уже нельзя записать в виде конечной комбинации канонических когерентных состояний — они представляют собой пример обобщенных когерентных состояний Титулаера–Глаубера, обсуждавшихся в [7]. Подчеркнем, что здесь φ — это не реальное время в уравнении Шрёдингера, а обычный параметр, характеризующий волновую функцию (6.20). Если рассмотреть эволюцию в реальном времени, то она выглядит следующим образом:

$$|\alpha, t\rangle_U := \mathrm{e}^{-\mathrm{i}tL}\,|\alpha\rangle_U = \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\times$$
$$\times\exp\left[-\mathrm{i}\varphi\frac{n(n-1)}{2}\right]\exp\left[-\mathrm{i}t\left(n+\frac{1}{2}\right)\right]|n\rangle = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(t/2)}|\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}\alpha\rangle_U.$$

Рассмотрим теперь кратко когерентные состояния общего класса автомодельных потенциалов. Предположим, что $0 < q^2 < 1$. Тогда для негативных значений энергии, $\lambda < 0$, понижающим оператором является B. Соответствующие когерентные состояния определяются стандартным образом [7]:

$$B|\alpha\rangle_-^{(k)} = \alpha|\alpha\rangle_-^{(k)}, \quad \langle x|\alpha\rangle_-^{(k)} \propto {}_0\varphi_{N-1}(\ldots; q^2, z)\psi_k(x), \tag{6.21}$$

где $\psi_k(x)$, $k = 0, \ldots, N-1$, являются первыми N собственными функциями L, а операторный аргумент z пропорционален повышающему оператору B^+. Эти состояния описываются обычными базисными гипергеометрическими рядами ${}_0\varphi_{N-1}$ [26].

При $\lambda > 0$ понижающим оператором является B^+, что приводит к когерентным состояниям принципиально нового типа [7]:

$$B^+|\alpha\rangle_+^{(s)} = \alpha|\alpha\rangle_+^{(s)}, \quad s \in \mathbb{Z}. \tag{6.22}$$

Эти состояния описываются двусторонними базисными гипергеометрическими рядами ${}_0\psi_{N-1}$ или интегралами Рамануджана.

Пусть $N = 1$, $u(x) = 0$, $0 < q < 1$ и

$$U = q^{1/2+x\partial_x}, \quad U^\dagger = U^{-1} = q^{-1/2-x\partial_x}.$$

Тогда операторы

$$\begin{aligned} A &= q^{-x\partial_x-1/2}\left(\partial_x + \frac{1}{\sqrt{1-q^2}}\right), \\ A^+ &= \left(-\partial_x + \frac{1}{\sqrt{1-q^2}}\right) q^{x\partial_x+1/2} \end{aligned} \tag{6.23}$$

удовлетворяют q-осцилляторной алгебре $AA^+ - q^2A^+A = 1$. Для этой тривиальной системы — свободной нерелятивистской квантовой частицы — существуют нормируемые когерентные состояния $A^+\psi_\alpha^+(x) = \alpha\psi_\alpha^+(x)$, $\psi_\alpha^+(x) \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$. Они определяются как решения опережающего уравнения пантографа [27]

$$\partial_x\psi_\alpha^+(x) = -\alpha q^{-3/2}\psi_\alpha^+(q^{-1}x) + \frac{q^{-1}}{\sqrt{1-q^2}}\psi_\alpha^+(x), \tag{6.24}$$

допускающего бесконечное число решений, принадлежащих $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$. Обсуждение явного вида этих когерентных состояний и ряда их свойств приведено в [7]. Насколько известно автору, возможное физическое проявление этих состояний в квантовой оптике еще не обсуждалось.

7. СОЛИТОНЫ

Рассмотрим теперь эволюцию потенциалов в другом непрерывном времени $u_j(x) \to u_j(x,t)$, не имеющую отношения к временной эволюции в уравнении Шрёдингера и определяемую следующим дифференциальным законом:

$$\partial_t\psi^{(j)}(x,t) = D_j\psi^{(j)}(x,t), \quad D_j := -4\partial_x^3 + 6u_j(x,t)\partial_x + 3\partial_x u_j(x,t). \tag{7.1}$$

С точки зрения квантовой механики здесь t — это просто параметр потенциала. Совместимость (7.1) с уравнением Шрёдингера приводит к операторному соотношению $\partial_t L_j = [D_j, L_j]$, которое эквивалентно уравнению Кортевега–де Фриза [29]

$$\partial_t u_j(x,t) - 6u_j(x,t)\partial_x u_j(x,t) + \partial_x^3 u_j(x,t) = 0. \tag{7.2}$$

Отметим, что закон эволюции (7.1) может быть получен с помощью предельного перехода по дискретному времени j в цепочке Инфельда. Для этого достаточно рассмотреть эволюцию по j на три шага по времени $j \to j+3$, определить $t = jh$ и рассмотреть предел $h \to 0$ при фиксированном t в эволюции $\psi^{(t/h+3)} = M^{(3)}_{t/h}\psi^{(t/h)}$. При специальном подборе дифференциального оператора третьего порядка $M^{(3)}_{t/h}$ возникает соотношение (7.1).

Сделаем подстановку $f_j = -\partial_x \log \phi_0^{(j)}$ в определении потенциалов $u_j = f_j^2 - f_j' + \lambda_j$. Это приводит к линейному дифференциальному уравнению

$$-\partial_x^2 \phi_0^{(j)} + u_j \phi_0^{(j)} = \lambda_j \phi_0^{(j)}, \tag{7.3}$$

т. е. $\phi_0^{(j)}$ есть собственная функция L_j для $\lambda = \lambda_j$ и

$$\psi^{(j+1)} = \frac{\phi_0^{(j)}\partial_x\psi^{(j)} - \psi^{(j)}\partial_x\phi_0^{(j)}}{\phi_0^{(j)}} = \frac{W(\phi_0^{(j)}, \psi^{(j)})}{\phi_0^{(j)}}. \tag{7.4}$$

Пусть $\phi_k^{(j)}$, $k = 0, \ldots, n-1$, являются формальными собственными функциями оператора L_j с собственными значениями λ_{j+k}, т. е. $L_j\phi_k^{(j)} = \lambda_{j+k}\phi_k^{(j)}$. Тогда согласно работе [30]

$$u_{j+n}(x,t) = u_j(x,t) - 2\partial_x^2 \log W(\phi_0^{(j)}, \ldots, \phi_{n-1}^{(j)}), \tag{7.5}$$

где $W(\phi_0, \ldots, \phi_{n-1}) = \det(\partial_x^i \phi_k)$ есть вронскиан n функций $\phi_k(x)$. Аналогично можно записать в явном виде

$$f_{j+n}(x,t) = -\partial_x \log \frac{W\left(\phi_0^{(j)}, \ldots, \phi_n^{(j)}\right)}{W\left(\phi_0^{(j)}, \ldots, \phi_{n-1}^{(j)}\right)}, \tag{7.6}$$

$$\psi^{(j+n+1)}(x,t) = \frac{W\left(\phi_0^{(j)}, \ldots, \phi_n^{(j)}, \psi^{(j)}\right)}{W\left(\phi_0^{(j)}, \ldots, \phi_n^{(j)}\right)} = M_j^{(n+1)}\psi^{(j)}(x,t). \tag{7.7}$$

Переменная t не играет какой-либо роли в рассмотрении преобразований Дарбу (7.5), т. е. она полностью независима от дискретного времени, использованного в факторизационной цепочке Инфельда. Поэтому, если $u_j(x,t)$ удовлетворяет КдФ-уравнению, то $u_{j+n}(x,t)$ также будет решением этого уравнения. Соответственно, начиная с простого решения этого уравнения, можно строить все более и более сложные решения.

Наиболее рафинированное описание интегрируемых систем достигается в терминах так называемой тау-функции, которая уже появлялась выше в неявном виде. Она вводится следующим образом:

$$u_j(x,t) = -2\partial_x^2 \log \tau_j(x,t). \tag{7.8}$$

Эта функция весьма удобна, поскольку ее нули определяют полюсы второго порядка потенциала по x. Если $\tau_j(x,t)$ является голоморфной функцией своих аргументов x и t, как это было в случае конечнозонных потенциалов (5.2), то потенциалы являются мероморфными функциями на всей комплексной плоскости, что является сильным ограничением на класс рассматриваемых потенциалов. Соотношения (7.6) и (7.7) принимают существенно более компактный вид в терминах τ-функции:

$$\tau_{j+n} = W(\phi_0^{(j)}, \ldots, \phi_{n-1}^{(j)})\tau_j, \quad f_j = -\partial_x \log \tau_{j+1}/\tau_j. \tag{7.9}$$

В терминах другой удобной зависимой переменной можно записать

$$\rho_j := -\partial_x \log \tau_j, \quad u_j = 2\partial_x \rho_j, \quad f_j = \rho_{j+1} - \rho_j. \tag{7.10}$$

В результате такой замены роль факторизационной цепочки принимает на себя связь между $u_j(x)$ и $f_j(x)$:

$$\frac{d}{dx}(\rho_{j+1} + \rho_j) - (\rho_{j+1} - \rho_j)^2 = \lambda_j. \tag{7.11}$$

Отметим, что у этого уравнения существует простая сдвиговая симметрия $\rho_j(x) \to \rho_j(x) + cx + \mathrm{const}$, $\lambda_j \to \lambda_j + 2c$.

Автомодельные потенциалы характеризуются очень простыми ограничениями на τ-функцию, $\tau_{j+N}(x,t) = \tau_j(qx, q^3t)$, или $\rho_{j+N}(x,t) = q\rho_j(qx, q^3t)$, и на спектральные постоянные $\lambda_{j+N} = q^2\lambda_j$. При $N = 1$ это приводит к смешанному дифференциальному и q-разностному нелинейному уравнению вида

$$\frac{d\rho(x)}{dx} + q\frac{d\rho(qx)}{dx} - (q\rho(qx) - \rho(x))^2 = \mu, \tag{7.12}$$

где $\rho(x) := \rho_0(x)$ и $\mu := \lambda_0$.

При $u_0(x,t) = 0$ возьмем $\lambda_j = -k_j^2/4$, $\theta_j := k_j x - k_j^3 t + \theta_j^{(0)}$, k_j, $\theta_j^{(0)} \in \mathbb{R}$, и

$$\phi_{2j}^{(0)} = \cosh \frac{1}{2}\theta_{2j}(x,t), \quad \phi_{2j+1}^{(0)} = \sinh \frac{1}{2}\theta_{2j+1}(x,t), \quad j = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{7.13}$$

Этот выбор приводит к тому, что $u_n(x,t)$ является несингулярным безотражательным потенциалом, называемым n-солитонным решением КдФ-уравнения и описывающим уединенные волны на мелкой воде [31]. При этом k_j^2 пропорциональны амплитудам и скоростям солитонов, а $\theta_j^{(0)}$ описывают фазы солитонов (т. е. их взаимное расположение при $t = 0$). Помимо приведенного выше вронскианного представления существуют другие явные выражения для n-солитонных решений нелинейных интегрируемых уравнений. Например, для КдФ-уравнения можно записать

$$u_n(x,t) = -\,2\partial_x^2 \log \tau_n(x,t), \quad \tau_n(x,t) = \det C,$$
$$C_{ij} = \delta_{ij} + \frac{2\sqrt{k_i k_j}}{k_i + k_j}\, \mathrm{e}^{(\theta_i+\theta_j)/2}. \tag{7.14}$$

В следующем разделе приводится другое представление, имеющее яркую физическую интерпретацию.

8. ЦЕПОЧКИ ИЗИНГА И РЕШЕТОЧНЫЙ КУЛОНОВСКИЙ ГАЗ

В 1971 г. Р. Хирота [32] нашел следующее представление для n-солитонной тау-функции (7.14):

$$\tau_n = \sum_{\sigma_i=0,1} \exp\left(\sum_{0\leqslant i<j\leqslant n-1} A_{ij}\sigma_i\sigma_j + \sum_{i=0}^{n-1} \theta_i\sigma_i \right), \quad \mathrm{e}^{A_{ij}} = \frac{(k_i-k_j)^2}{(k_i+k_j)^2}, \tag{8.1}$$

где переменные A_{ij} описывают фазы рассеяния солитонов. Для специалистов по статистической механике не составляет труда увидеть в выражении (8.1) статистическую сумму одномерного решеточного газа. При этом переменные σ_i являются числами заполнения ячеек решетки с номером i. При $\sigma_i = 0$ ячейка свободна, а при $\sigma_i = 1$ ячейка занята молекулой. При этом коэффициенты A_{ij} пропорциональны потенциалу взаимодействия i-й и j-й молекул друг с другом, а переменные θ_i являются локальными химическими потенциалами. Несмотря на очевидность такой интерпретации, эту прямую связь между солитонными решениями нелинейных интегрируемых уравнений и статистическими суммами обнаружили только в 1997 г. в работе [33] (см. также [34]).

Сделаем замену переменных $s_i = 2\sigma_i - 1 = \pm 1$ в выражении (8.1). Это приводит к одномерной модели Изинга с нелокальным обменным взаимодействием:

$$\tau_n = \mathrm{e}^{\varphi} Z_n, \quad \varphi = \frac{1}{4}\sum_{i<j} A_{ij} + \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n-1}\theta_j,$$
$$Z_n = \sum_{s_i=\pm 1} \mathrm{e}^{-\beta E}, \quad E = \sum_{0\leqslant i<j\leqslant n-1} J_{ij}s_is_j - \sum_{0\leqslant i=\leqslant n-1} H_i s_i, \tag{8.2}$$
$$\beta J_{ij} = -\frac{1}{4}\, A_{ij}, \quad \beta H_i = \frac{1}{2}\theta_i + \frac{1}{4}\sum_{0\leqslant j\neq i\leqslant n-1} A_{ij}, \quad \beta = \frac{1}{kT}.$$

В этой картине переменная s_i является спином, расположенным в ячейке с номером i, J_{ij} — это обменные константы, а H_i — это неоднородное (т. е.

зависящее от i) внешнее магнитное поле. При этом из явного вида межмолекулярного потенциала $\propto A_{ij}$ или обменных констант J_{ij} следует существенное ограничение на приведенную интерпретацию солитонной тау-функции как большой канонической статистической суммы решеточного газа или статистической суммы нелокальной модели Изинга во внешнем магнитном поле. А именно — температура системы является фиксированной.

Рассмотрим теперь автомодельную бесконечно-солитонную систему, т. е. предел $n \to \infty$, при следующем автомодельном ограничении на параметры солитонов:

$$\theta_{j+N}(x,t) = \theta_j(qx, q^3 t), \quad \text{или} \quad k_{j+N} = qk_j, \quad \theta_{j+N}^{(0)} = \theta_j^{(0)}. \tag{8.3}$$

При таких условиях имеем $\tau_{j+N}(x,t) = \tau_j(qx, q^3 t)$. Возьмем предельный бесконечно-солитонный потенциал $u_\infty(x,t)$. Он обладает таким очевидным свойством, что преобразование растяжения координат $x \to qx$ и времени $t \to q^3 t$ индуцирует преобразование потенциала $u_\infty(x,t) \to q^2 u_\infty(qx, q^3 t)$, которое стирает N солитонов, соответствующих N нижним собственным значениям гамильтониана.

С точки зрения модели Изинга, представленной выше, автомодельность спектра гамильтониана эквивалентна трансляционной инвариантности обменного взаимодействия спинов $J_{i+N,j+N} = J_{ij}$ и внешнего магнитного поля $H_{j+N} = H_i$. Это ограничение приводит к возможности точно вычислить свободную энергию на ячейку в термодинамическом пределе, т. е. асимптотику статистической суммы Z_n при $n \to \infty$. В частности, при минимальном периоде $N = 1$, приводящем к однородному магнитному полю $H_i = H$, возникает выражение [33]

$$\begin{aligned} m(H) &= \partial_{\beta H} \log Z_n = \lim_{n\to\infty} n^{-1} \sum_{i=0}^{n-1} \langle s_i \rangle = \lim_{n\to\infty} n^{-1} \partial_{\beta H} \log Z_n = \\ &= \left(1 - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\theta_1^2(\nu, q^2)\, d\nu}{\theta_4^2(\nu, q^2) \cosh^2 \beta H - \theta_1^2(\nu, q^2) \sinh^2 \beta H} \right) \tanh \beta H, \end{aligned} \tag{8.4}$$

где $\theta_{1,4}(\nu, q^2)$ — тета-функции Якоби. Аналогичная картина имеет место с солитонными решениями уравнения Кадомцева–Петвиашвили (КП) и ряда других интегрируемых уравнений. Несмотря на одномерность модели, за счет нелокальности взаимодействия в термодинамическом пределе возникает нетривиальный фазовый переход, соответствующий эффективной температуре $T = 0$, индуцированной в пределе $q \to 1$ [35].

Самая общая картина, связанная с вышеприведенной физической интерпретацией, — это связь с двумерным кулоновским газом на плоскости с различными граничными условиями. Действительно, рассмотрим большую каноническую статистическую сумму n заряженных частиц на плоскости, которые могут находиться только в дискретном наборе точек на некоторой решетке Γ,

$$Z_n = \sum_{\sigma(z_i)=0,1} \exp\left(\frac{1}{2}\sum_{i\neq j} W(z_i,z_j)\sigma(z_i)\sigma(z_j) + \sum_{z_i\in\Gamma}\theta(z_i)\sigma(z_i)\right), \qquad (8.5)$$

где $z_j = x_j + \mathrm{i}y_j$ — координаты узлов решетки Γ, $\sigma(z_i)=1$, если в точке z_i находится кулоновская частица с зарядом $q(z_i)$, и $\sigma(z_i)=0$, если эта точка на решетке свободна. При этом

$$\begin{gathered} W(z,z') = -\beta E_n, \quad E_n = q(z)\,q(z')\,V(z,z'), \\ V(z,z') = -\ln|z-z'|, \end{gathered} \qquad (8.6)$$

где E_n есть энергия взаимодействия n кулоновских частиц на плоскости. Кроме того,

$$\theta(z) = \mu(z) - \beta\left(q(z)v(z) + q(z)\phi(z)\right), \qquad (8.7)$$

где $v(z)$ описывает взаимодействие зарядов с их искусственными образами, возникающими из-за граничных условий (проводящая граничная поверхность или диэлектрик), $\phi(z)$ — внешнее электрическое поле, а $\mu(z)$ есть локальный химический потенциал.

Специальным подбором решетки Γ, типа граничных условий и внешних полей, связи между комплексными спектральными параметрами k_i и координатами z_i можно воспроизвести n-солитонные тау-функции, $Z_n = \tau_n$, различных нелинейных интегрируемых уравнений, включающих уравнения КдФ, КП, цепочки Тоды и т. д. Детальное описание этой связи дано в работе [36].

Имеются другие важные применения солитонов, показывающие их многоликий характер. Например, соответствующие потенциалы дают частичное решение проблемы Адамара о построении волновых операторов, удовлетворяющих принципу Гюйгенса [37]. Их вырожденная форма описывает решение электростатических проблем для частиц с различными зарядами на плоскости [38, 39]. Вложение метода факторизации в двумерные уравнения Шрёдингера полезно для построения точных решений некоторых редуцированных задач динамики жидкостей (проблемы Хеле–Шоу с варьируемыми коэффициентами) [40]. Упомянем также, что солитонные системы двумерного кулоновского газа, описанные выше, связаны с лапласовским ростом [41].

9. ДИСКРЕТНОЕ УРАВНЕНИЕ ШРЁДИНГЕРА

Эволюция во времени (1.3) нарушает нормировку волновых функций, т. е. если начальные волновые функции нормированы на единицу, то сдвиг по времени нарушает это свойство. Для устранения этого недостатка необходимо перенормировать закон эволюции

$$\psi^{(j+1)}(x) = \frac{A_j}{\sqrt{\lambda - \lambda_j}}\psi^{(j)}(x), \quad \psi^{(j)}(x) = \frac{A_j^+}{\sqrt{\lambda - \lambda_j}}\psi^{(j+1)}(x). \tag{9.1}$$

Теперь легко проверить, что нормировка собственных функций гамильтонианов не меняется:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi^{(j+N)}(x)|^2\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi^{(j)}(x)|^2\, dx = 1,$$

при условии, что не рассматриваются нулевые моды операторов эволюции. Рассматривая сдвиг по времени на два шага

$$\psi^{(j+1)}(x) = \frac{A_j}{\sqrt{\lambda - \lambda_j}}\frac{A_{j-1}}{\sqrt{\lambda - \lambda_{j-1}}}\psi^{(j-1)}(x)$$

и устраняя производные волновых функций в правой части либо с помощью уравнения Шрёдингера, либо с помощью соотношений (9.1), получаем трехчленное рекуррентное соотношение

$$\sqrt{\lambda - \lambda_j}\psi^{(j+1)}(x) - (f_j(x) + f_{j-1}(x))\psi^{(j)}(x) + \\ + \sqrt{\lambda - \lambda_{j-1}}\psi^{(j-1)}(x) = 0, \tag{9.2}$$

в котором координата x входит как фиксированный параметр, а λ по-прежнему остается спектральным параметром. Таким образом, для произвольного начального потенциала $u_0(x)$ решения факторизационной цепочки Инфельда с аналитической зависимостью от дискретного времени j приводят к конечно-разностному уравнению второго порядка по j, которое, в свою очередь, можно рассматривать как разностный аналог уравнения Шрёдингера.

Гармонический осциллятор дает самый простой пример, когда волновые функции дискретного спектра описываются ортогональными многочленами. Все ортогональные многочлены удовлетворяют трехчленному рекуррентному соотношению, которое можно представить в виде [43]

$$\begin{gathered} p_{n+1}(x) + u_n p_{n-1}(x) + b_n p_n(x) = x p_n(x), \\ n \geqslant 0, \quad p_{-1} = 0, \quad p_0 = 1, \end{gathered} \tag{9.3}$$

порождающем монические многочлены $p_n(x) = x^n + \ldots$ Мера ортогональности будет положительно определенной, если рекуррентные коэффициенты принимают конечные значения и удовлетворяют ограничениям $u_n, b_n \in \mathbb{R}$, $u_n > 0$.

Если отказаться от граничных условий в (9.3) и, соответственно, полиномиальности собственных функций $p_n(x)$, $n \in \mathbb{Z}$, то мы получаем дискретное уравнение Шрёдингера на решетке всех целых чисел. Применение метода факторизации к разностным уравнениям второго порядка на основе «старых» ортогональных многочленов впервые рассмотрено в работе [42]. Однако это делалось в духе Шрёдингера, т. е. с помощью конкретных известных решаемых уравнений. Подход в духе Инфельда рассматривался значительно позднее с точки зрения цепочки Тоды и других дискретных интегрируемых систем.

Рассмотрим следующие разностные уравнения по двум дискретным переменным n и j:

$$p_n^{j+1}(x) = \frac{p_{n+1}^j(x) + C_n^{j+1} p_n^j(x)}{x - \lambda_{j+1}}, \tag{9.4}$$

$$p_n^{j-1}(x) = p_n^j(x) + A_n^j p_{n-1}^j(x), \tag{9.5}$$

где A_n^j, C_n^{j+1} — некоторые неопределенные коэффициенты. Эти уравнения являются дискретными аналогами эволюционных законов для обычного уравнения Шрёдингера (2.11) при сдвигах $j \to j \pm 1$. Условие совместимости законов (9.4) и (9.5) приводит к трехчленному соотношению (9.3), в котором всем переменным, за исключением x, необходимо добавить одинаковый верхний индекс j. При этом устанавливается следующая связь между рекуррентными коэффициентами:

$$u_n^j = A_n^j C_n^j, \quad b_n^j = A_{n+1}^j + C_n^j + \lambda_j. \tag{9.6}$$

Аналог факторизационной цепочки Инфельда имеет вид системы двух уравнений

$$\begin{gathered} A_n^{j+1} C_{n-1}^{j+1} = A_n^j C_n^j, \\ A_n^{j+1} + C_n^{j+1} + \lambda_{j+1} = A_{n+1}^j + C_n^j + \lambda_j, \end{gathered} \tag{9.7}$$

которые называются цепочкой Тоды с дискретным временем. Можно переформулировать приведенные выше соотношения и на операторном языке, когда L_j являются не операторами Шрёдингера, а трехдиагональными матрицами Якоби. Тогда уравнения (9.6) и (9.7) будут эквивалентны тем же операторным соотношениям (1.9), но мы опускаем это описание.

В рамках теории ортогональных многочленов соотношения (9.4) называются спектральными преобразованиями Кристоффеля, поскольку они порождают ядерные многочлены Кристоффеля (т. е. они отображают многочлены в многочлены) [43]. Соотношения (9.5) называются преобразованиями Геронимуса [44], и при некоторых обстоятельствах они являются обратными к преобразованиям Кристоффеля. Часто все эти преобразования называются дискретными преобразованиями Дарбу, хотя исторически как раз преобразования Дарбу должны называться непрерывными преобразованиями Кристоффеля (что отражено в названии статьи М. Г. Крейна [5]). Отметим также, что изоспектральная версия $\lambda_j = \mathrm{const}$ уравнений (9.7) была построена задолго до всплеска интереса к теории интегрируемых систем в рамках численных методов прикладного анализа [45].

Дискретный аналог анзаца (3.2) для факторизационной цепочки Инфельда был построен в работах [46, 47]. Мы не будем приводить его здесь, как и дискретные аналоги автомодельных потенциалов (3.3), так как это потребует много дополнительных объяснений. Отметим только, что этот анзац воспроизводит наиболее общую систему классических ортогональных многочленов, построенную Аски и Вильсоном, и, помимо этого, он порождает некоторую другую систему ортогональных многочленов. Систематическое рассмотрение спектральных преобразований для ортогональных многочленов на основе функции Стилтьеса дано в статье [48].

В работе [49] построена наиболее общая факторизационная цепочка, связанная с полиномиальными системами или, эквивалентно, с биортогональными рациональными функциями. Там же для нее был найден анзац обобщенного разделения переменных, который привел к принципиально новому семейству классических биортогональных функций, выражающихся через эллиптические гипергеометрические функции [50]. Представление этого нового класса специальных функций математической физики, нашедшего важнейшее применение в квантовой теории поля [51], также выходит за рамки данного обзора.

10. АВТОМОДЕЛЬНОСТЬ И СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

Точно решаемые модели физических явлений играют важную методологическую роль. Они позволяют как определить область применимости самих моделей, так и математически строго обосновать их предсказания. Расширение круга таких примеров является центральной задачей математической физики. При этом необходимо пояснить, что означает термин «точное решение», можно ли придать ему математически осмысленное определение, не предполагающее ссылок на интуитивные представления? Ключевыми объектами здесь служат элементарные функции и их обобщения, известные как специальные функции. С элементарными функциями все ясно — это комбинации (называемые в математике «полями») рациональных, степенных, экспоненциальных и тригонометрических функций и обратных к ним функций (например радикалов, логарифмов и т. д.). А вот универсального определения специальных функций нет. Утилитарно — это функции, приведенные в справочных пособиях. Однако требуется характеризация их общих свойств, которая позволила бы конструктивный поиск новых таких полезных функций, заслуживающих место в справочниках.

Существует много справочников и учебников по специальным функциям, например [26,52,53]. Однако даже самый последний проект такого масштаба, завершенный после десяти лет работы [54], не покрывает такие хорошо известные функции, как трансценденты Пенлеве или эллиптические гипергеометрические функции [50]. Более того, ни одна из этих книг не содержит списка формальных требований, которым должна удовлетворять функция для того, чтобы быть «специальной». Обычно обсуждаются какие-либо классы функций специфического вида или обладающих характерными свойствами, такие как гипергеометрические, эллиптические, модулярные функции и т. д. Для специальных функций естественно ожидать, что ее известное локальное поведение должно позволить вычислить асимптотику на бесконечности, т. е. проблема пересвязки асимптотик должна быть решаемой. Такой подход к специальным функциям характерен для исследований функций типа Пенлеве и общей теории общих изомонодромных деформаций [55].

Теория групп и связанные с ними алгебры предоставляют достаточно богатый набор средств для построения специальных функций, но исторически теория их представлений в основном дает интерпретацию уже известных функций [56]. Тем не менее общий подход, основанный на группах симметрий, является центральным в теории специальных функций. В частности, специальные функции XIX в. появились при разделении переменных в очень простых (и, таким образом, полезных и универсальных) уравнениях в частных производных. А основой разделения переменных служат симметрии этих уравнений, позволяющие выделить решения, инвариантные относительно этих симметрий. В рамках нашего подхода специальные функции появляются в результате автомодельных редукций бесконечных цепочек спектральных преобразований для линейных задач на собственные значения.

Это определение интерпретирует специальные функции как объекты, привязанные к фиксированным точкам различных непрерывных и дискретных преобразований, отображающих пространство решений взятой спектральной проблемы на себя. Известно, что такой подход хорошо работает в случае специальных функций одной независимой переменной, но даже для них он не претендует на покрытие всех возможных случаев. При этом отметим, что такие функции могут зависеть от бесконечного числа параметров. С одной стороны, это определение привязано к теории полностью интегрируемых систем [29], для которой поиск автомодельных решений нелинейных эволюционных уравнений является стандартной задачей. С другой стороны, с точки зрения самих специальных функций этот подход основан на смежных отношениях — линейных или нелинейных уравнениях, связывающих специальные функции при различных значениях их параметров.

Просуммируем полуэвристическую схему построения специальных функций, использованную выше. В качестве затравки берется линейная спектральная задача, определяемая дифференциальными, конечно-разностными или интегральными уравнениями (автор не работал с последним типом спектральных задач). На полном пространстве решений этого уравнения строятся другие линейные уравнения по переменным, входящим как параметры. То есть ищутся нетривиальные операторы, под действием которых пространство решений начального уравнения отображается само на себя.

Условие совместимости взятой системы линейных уравнений приводит к нелинейным соотношениям для функций, входящих как свободные коэффициенты. Если оба уравнения дифференциальные, то возникают уравнения типа КдФ, КП и т. д. Возможны смешанные дифференциально-разностные случаи типа цепочек Инфельда или Тоды. Уравнения, аналогичные цепочке Тоды с дискретным временем (9.7), соответствуют полностью разностным схемам, меняющим спектральные данные начальной линейной спектральной задачи предписанным образом. Далее проводится анализ дискретных и непрерывных симметрий полученных нелинейных уравнений с помощью ли-евских теоретико-групповых методов [57], отображающих пространство их решений на себя. На заключительном этапе строятся автомодельные решения полученных нелинейных уравнений, инвариантных относительно взятых преобразований симметрии. В результате таких редукций возникают замкнутые системы нелинейных дифференциальных, дифференциально-разностных, двумерных разностных и т. д. уравнений, решения которых определяют «нелинейные» специальные функции (например описанные выше непрерывные q-аналоги функций Пенлеве). Решения самих начальных линейных уравнений с коэффициентами, фиксируемыми указанными автомодельными функциями, определяют «линейные» специальные функции (например функции гипергеометрического типа). Последние два шага требуют привлечения эвристических рассуждений, так как полностью регулярный способ решения соответствующих задач еще отсутствует. Например, анзацы обобщенного разделения переменных, использованные в [46,47] для построения рекуррентных соотношений ассоциированных многочленов Аски–Вильсона и в [49] при открытии эллиптических биортогональных рациональных функций, еще не нашли регулярного теоретико-группового описания.

Другим важным составляющим элементом этой схемы построения специальных функций является теория трансцендентности. Известно, что функции Пенлеве трансцендентны над дифференциональными полями, построенными с помощью конечного числа расширений Пикара–Вессио над полем рациональных функций. Аналогично необходимо выяснять, какому дифференциальному или конечно-разностному полю принадлежат найденные решения взятого уравнения, в частности, ответить на вопрос, принадлежат ли они полю коэффициентов этого уравнения. Так, до сих пор открыта проблема интерпретации автомодельных решений цепочки спектральных преобразований Инфельда с точки зрения дифференциальной или разностной теории Галуа.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итак, мы описали несколько важных физических приложений функций, возникающих при автомодельной редукции факторизационной цепочки Инфельда, в решаемых задачах квантовой механики, в когерентных состояниях, солитонах, цепочках Изинга и двумерном кулоновском газе. Кроме того, представлен ряд изящных математических конструкций в контексте теории специальных функций, q-деформированных алгебр и необычных дифференциально-разностных уравнений. Широта приложений автомодельных систем и общий интерес к ним привели В. Б. Приезжева и автора к идее организации большой конференции, посвященной соответствующей тематике. Эта конференция проходила в течение двух недель в ЛТФ ОИЯИ летом 1998 г., и ее результаты отражены в трудах [58]. Автор глубоко благодарен Вячеславу Борисовичу за искренний интерес к его исследованиям и общую интеллектуальную поддержку на протяжении всего времени, которое они были знакомы.

Представленный ниже список литературы не претендует на полноту. Имеется много других обзоров пересекающихся тем, в частности [59–61]. Один из интересных сюжетов, пропущенных здесь, состоит в красивой физической интерпретации метода факторизации в рамках концепции суперсимметрии, оказавшейся весьма продуктивной. Персонально для автора это приложение сыграло ключевую роль в смене тематики исследований, начавшейся с работы [62]. В частности, развитие соответствующих идей привело к интерпретации полиномиальных соотношений (2.10) как нелинейной реализации алгебры суперсимметрии [63]. Подробный обзор такого обобщения суперсимметричной квантовой механики дан в [61].

Работа выполнена при поддержке Лаборатории зеркальной симметрии НИУ ВШЭ, грант Правительства РФ, договор № 14.641.31.0001.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Infeld L.* On a New Treatment of Some Eigenvalue Problems // Phys. Rev. 1941. V. 59. P. 737–747.
2. *Schrödinger E.* A Method of Determining Quantum-Mechanical Eigenvalues and Eigenfunctions // Proc. Roy. Irish Acad. A. 1940/1941. V. 46. P. 9–16.
3. *Schrödinger E.* Further Studies on Solving Eigenvalue Problems by Factorization // Ibid. P. 183–206.

4. *Infeld L., Hull T. E.* The Factorization Method // Rev. Mod. Phys. 1951. V. 23. P. 21–68.
5. *Крейн М. Г.* О континуальном аналоге одной формулы Кристоффеля из теории ортогональных многочленов // Докл. АН СССР. 1957. Т. 113, № 5. С. 970–973.
6. *Spiridonov V. P.* Deformation of Supersymmetric and Conformal Quantum Mechanics through Affine Transformations. Talk at the Intern. Workshop on Harmonic Oscillators, College Park, USA, March 25–28, 1992. NASA Conf. Publ. 1992. V. 3197. P. 93–108; hep-th/9208073.
7. *Spiridonov V.* Universal Superpositions of Coherent States and Self-Similar Potentials // Phys. Rev. A. 1995. V. 52. P. 1909–1935; Erratum // Ibid. V. 53. P. 2903; quant-ph/9601030.
8. *Frisch U., Bourret R.* Parastochastics // J. Math. Phys. 1970. V. 11. P. 364–390.
9. *Coon D. D., Yu S., Baker S.* Operator Formulation of a Dual Multiparticle Theory with Nonlinear Trajectories // Phys. Rev. D. 1972. V. 5. P. 1429–1433.
10. *Arik M., Coon D. D.* Hilbert Spaces of Analytic Functions and Generalized Coherent States // J. Math. Phys. 1976. V. 17. P. 524–527.
11. *Macfarlane A. J.* On q-Analogues of the Quantum Harmonic Oscillator and Quantum Group $SU(2)_q$ // J. Phys. A: Math. Gen. 1989. V. 22. P. 4581–4588.
12. *Spiridonov V. P.* Exactly Solvable Potentials and Quantum Algebras // Phys. Rev. Lett. 1992. V. 69. P. 398–401.
13. *Spiridonov V.* Nonlinear Algebras and Spectral Problems // Proc. of the CAP-NSERC Workshop on Quantum Groups, Integrable Models and Statistical Systems, Kingston, Canada, July 13–18, 1992. World Sci., 1993. P. 246–256.
14. *Spiridonov V.* Symmetries of the Self-Similar Potentials // Commun. Theor. Phys. 1993. V. 2. P. 149–163.
15. *Дубровин Б. А., Матвеев В. Б., Новиков С. П.* Нелинейные уравнения типа Кортевега – де Фриза, конечнозонные линейные операторы и абелевы многообразия // УМН. 1976. Т. 31, № 1. С. 55–136.
16. *Weiss J.* Periodic Fixed Points of Bäcklund Transformations and the Korteweg – de Vries Equation // J. Math. Phys. 1986. V. 27. P. 2647–2656.
17. *Веселов А. П., Шабат А. Б.* Одевающая цепочка и спектральная теория оператора Шрёдингера // Функц. анализ прил. 1993. Т. 27, № 2. С. 1–21.
18. *Skorik S., Spiridonov V.* On the Spectra of Hyperelliptic Potentials // Phys. Lett. A. 1994. V. 190. P. 90–95.
19. *Flaschka H.* A Commutator Representation of Painlevé Equations // J. Math. Phys. 1980. V. 21. P. 1016–1018.
20. *Bureau F. J.* Differential Equations with Fixed Critical Points // Painlevé Transcendents, NATO ASI Ser. Ser. B. New York: Plenum Press, 1990. V. 278. P. 103–123.
21. *Adler V. E.* Nonlinear Chains and Painlevé Equations // Physica D. 1994. V. 73. P. 335–351.
22. *Tovbis A.* Meromorphic Solutions to a Differential-Difference Equation Describing Certain Self-Similar Potentials // Nonlinearity. 2001. V. 14. P. 842–933.
23. *Skorik S., Spiridonov V.* Self-Similar Potentials and the q-Oscillator Algebra at Roots of Unity // Lett. Math. Phys. 1993. V. 28. P. 59–74.
24. *Shabat A. B.* The Infinite Dimensional Dressing Dynamical System // Inverse Prob. 1992. V. 8. P. 303–308.

25. *Schrödinger E.* Der stetige Übergang von der Mikro- zur Makromechanik // Die Naturwissenschaften. 1926. V. 14. P. 664–666.
26. *Andrews G. E., Askey R., Roy R.* Special Functions // Encycl. Math. Appl. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999. V. 71.
27. *Spiridonov V. P.* Coherent States of the q-Weyl Algebra // Lett. Math. Phys. 1995. V. 35. P. 179–185.
28. *Saxena R., Singh K.* Fractional Fourier Transform: A Novel Tool for Sigmal Processing // J. Ind. Inst. Sci. 2005. V. 85. P. 1–26.
29. *Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П.* Теория солитонов: метод обратной задачи. М.: Наука, 1980.
30. *Crum M. M.* Associated Sturm–Liouville Systems // Quart. J. Math. Oxford. 1955. V. 6. P. 121–127.
31. *Matveev V. B., Salle M. A.* Darboux Transformations and Solitons. Berlin: Springer-Verlag, 1991.
32. *Hirota R.* Exact Solution of the Korteweg – de Vries Equation for Multiple Collisions of Solitons // Phys. Rev. Lett. 1971. V. 27. P. 1192–1194.
33. *Loutsenko I. M., Spiridonov V. P.* Self-Similar Potentials and Ising Models // Pis'ma ZhETF. 1997. V. 66. P. 747–753.
34. *Loutsenko I. M., Spiridonov V. P.* Spectral Self-Similarity, One-Dimensional Ising Chains and Random Matrices // Nucl. Phys. B. 1999. V. 538. P. 731–758.
35. *Loutsenko I. M., Spiridonov V. P.* A Critical Phenomenon in Solitonic Ising Chains // SIGMA. 2007. V. 3. P. 059.
36. *Loutsenko I. M., Spiridonov V. P.* Soliton Solutions of Integrable Hierarchies and Coulomb Plasmas // J. Stat. Phys. 2000. V. 99. P. 751–767.
37. *Berest Yu. Yu., Loutsenko I. M.* Huygens' Principle in Minkowski Spaces and Soliton Solutions of the Korteweg – de Vries Equation // Commun. Math. Phys. 1997. V. 190. P. 113–132.
38. *Loutsenko I.* Integrable Dynamics of Charges Related to the Bilinear Hypergeometric Equation // Commun. Math. Phys. 2003. V. 242. P. 251–275.
39. *Loutsenko I.* Equilibrium of Charges and Differential Equations Solved by Polynomials // J. Phys. A: Math. Gen. 2004. V. 37. P. 1309–1321.
40. *Loutsenko I.* The Variable Coefficient Hele-Shaw Problem, Integrability and Quadrature Identities // Commun. Math. Phys. 2006. V. 268. P. 465–479.
41. *Loutsenko I., Yermolayeva O.* On Integrability and Exact Solvability in Deterministic and Stochastic Laplacian Growth // Math. Model. Nat. Phenom. 2020. V. 15. P. 3.
42. *Miller W., Jr.* Lie Theory and Difference Equations I // J. Math. Anal. Appl. 1969. V. 2. P. 383–399.
43. *Szegö G.* Orthogonal Polynomials. New York: AMS, 1939.
44. *Геронимус Я. Л.* О полиномах, ортогональных относительно данной числовой последовательности, и теорема В. Хана // Изв. АН СССР. 1940. Т. 4. С. 215–228.
45. *Rutishauser H.* Der Quotienten-Differenzen-Algorithmus // Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik (ZAMP). 1954. V. 5. P. 233–251.
46. *Spiridonov V., Zhedanov A.* Discrete Darboux Transformations, Discrete Time Toda Lattice and the Askey–Wilson Polynomials // Methods Appl. Anal. 1995. V. 2. P. 369–398.

47. *Spiridonov V., Zhedanov A.* Discrete-Time Volterra Chain and Classical Orthogonal Polynomials // J. Phys. A: Math. Gen. 1997. V. 30. P. 8727–8737.
48. *Zhedanov A.* Rational Spectral Transformations and Orthogonal Polynomials // J. Comp. Appl. Math. 1997. V. 85, No. 1. P. 67–86.
49. *Spiridonov V. P., Zhedanov A. S.* Spectral Transformation Chains and Some New Biorthogonal Rational Functions // Commun. Math. Phys. 2000. V. 210. P. 49–83.
50. *Спиридонов В. П.* Очерки теории эллиптических гипергеометрических функций // УМН. 2008. Т. 63, вып. 3. С. 3–72.
51. *Спиридонов В. П.* Суперконформные индексы, дуальности Зайберга и специальные функции // ЭЧАЯ. 2020. Т. 51, вып. 4. С. 556–567; arXiv:1912.11514.
52. *Erdélyi A., Magnus W., Oberhettinger F., Tricomi F. G.* Higher Transcendental Functions. V. I, II, III. New York: McGraw-Hill, 1953.
53. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. 5-е изд. М.: Наука, 1971.
54. NIST Digital Library of Mathematical Functions. http://dlmf.nist.gov/.
55. *Kitaev A. V.* Special Functions of the Isomonodromy Type // Acta Appl. Math. 2000. V. 64. P. 1–32.
56. *Виленкин Н. Я.* Специальные функции и теория представлений групп. М.: Наука, 1965.
57. *Yamilov R.* Symmetries as Integrability Criteria for Differential Difference Equations // J. Phys. A: Math. Gen. 2006. V. 39. P. R541–R623.
58. Proc. of the Intern. Workshop on Self-Similar Systems, Dubna, July 30 – Aug. 7, 1998 / Eds: V. B. Priezzhev, V. P. Spiridonov. Dubna: JINR, 1999.
59. *Багров В. Г., Самсонов Б. Ф.* Преобразования Дарбу уравнения Шрёдингера // ЭЧАЯ. 1997. Т. 28, вып. 4. С. 951–1012.
60. *Mielnik B., Rosas-Ortiz O.* Factorization: Little or Great Algorithm? // J. Phys. A: Math. Gen. 2004. V. 37. P. 10007.
61. *Andrianov A. A., Ioffe M. V.* Nonlinear Supersymmetric Quantum Mechanics: Concepts and Realizations // J. Phys. A: Meth. Theor. 2012. V. 45. P. 503001.
62. *Rubakov V. A., Spiridonov V. P.* Parasupersymmetric Quantum Mechanics // Mod. Phys. Lett. A. 1988. V. 3. P. 1337–1347.
63. *Andrianov A. A., Ioffe M. V., Spiridonov V. P.* Higher-Derivative Supersymmetry and the Witten Index // Phys. Lett. A. 1993. V. 174. P. 273–279.