ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА
2021. Т. 52. ВЫП. 4. С. 891–899

СДВИГОВАЯ ВЯЗКОСТЬ В НЕРАВНОВЕСНОЙ СКАЛЯРНОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

А. А. Радовская *, *А. Г. Семенов* **

Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, Москва

Рассмотрена сдвиговая вязкость в неравновесной квантовой теории поля φ^4 в рамках классического статистического приближения. Исследована зависимость от начального распределения по энергиям системы. Получено обобщение формулы Грина–Кубо на случай стационарной неравновесной полевой среды.

Shear viscosity of a nonequilibrium quantum field φ^4 is considered in the framework of the Classical Statistical Approximation. The dependence on the initial energy distribution is investigated. The generalization of the Green–Kubo relation to the case of the stationary nonequilibrium field is obtained.

PACS: 05.45.Mt; 25.75.-q; 12.40.Ee; 66.20.Cy

ВВЕДЕНИЕ

Хорошо известно, что при столкновении ультрарелятивистских тяжелых ядер возникает высоковозбужденная неравновесная квантовая среда [1–3]. Один из наиболее популярных в настоящее время способов численного моделирования начального этапа таких столкновений основан на предположении, что при высоких энергиях (или больших числах заполнения) динамика квантовых полей становится квазиклассической. Тогда эволюция среды к равновесному состоянию может быть описана с помощью усреднения классических траекторий с некоторым ансамблем начальных условий [4–8]. Таким образом, можно найти численные значения различных наблюдаемых [9, 10] и транспортных коэффициентов [11]. В литературных источниках такой метод часто называют классическим статистическим приближением.

Исследование транспортных коэффициентов среды, возникающей при столкновениях тяжелых ионов, является одной из важнейших задач описания таких столкновений. Знание таких коэффициентов, как сдвиговая вязкость,

*E-mail: raan@lpi.ru
**E-mail: semenov@lpi.ru

необходимо для описания экспериментальных данных с помощью гидродинамического моделирования. Однако большинство работ по исследованию вязкости основывается на предположении о тепловом равновесии среды. Данное предположение не всегда может быть применимо в случае среды, возникающей при столкновениях ядер.

В этой работе на примере скалярного поля в рамках классического статистического приближения рассмотрена сдвиговая вязкость для произвольного ансамбля начальных условий. Приведены частные примеры канонического и микроканонического ансамблей.

1. КЛАССИЧЕСКОЕ СТАТИСТИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

Полное решение задачи по квантовой эволюции системы из начального неравновесного состояния весьма сложное даже для численного моделирования, что приводит к необходимости делать различные приближения. Одним из наиболее используемых приближений является так называемое классическое статистическое приближение. Суть данного приближения состоит в том, что для вычисления квантового среднего от некоторой наблюдаемой необходимо рассмотреть ее классическую эволюцию из начального состояния, после чего следует усреднить полученное значение по всем возможным исходным классическим состояниям с некоторой весовой функцией, которая определяется матрицей плотности системы в исходный момент времени.

Рассмотрим скалярное поле $\hat{\phi}(x)$ с гамильтонианом

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\int d^3\mathbf{x}\left(\hat{\pi}^2(\mathbf{x}) + (\nabla\hat{\phi}(\mathbf{x}))^2 + m^2\hat{\phi}^2(\mathbf{x}) + \frac{g}{2}\hat{\phi}^4(\mathbf{x})\right), \tag{1}$$

которое в начальный момент времени t_{in} находится в состоянии, которое описывается матрицей плотности $\hat{\rho}_0$, $\hat{\pi}(x)$ — плотность канонического импульса поля.

В рамках классического статистического приближения квантовое среднее представлено в виде [4, 12, 13]

$$\begin{aligned}
&\langle O[\hat{\phi}(\mathbf{x})]\rangle_t \equiv \operatorname{tr}\left(O[\hat{\phi}(\mathbf{x})]\hat{\rho}(t)\right) \underset{\hbar\to 0}{=} \\
&\underset{\hbar\to 0}{=} \int \mathfrak{D}\pi_{\text{in}}(\mathbf{x})\mathfrak{D}\phi_{\text{in}}(\mathbf{x})\; O[\varphi_c(t,\mathbf{x})]\mathcal{W}[\pi_{\text{in}}(\mathbf{x}),\phi_{\text{in}}(\mathbf{x})] \equiv \langle O[\varphi_c(t,\mathbf{x})]\rangle_{\text{i.c}},
\end{aligned} \tag{2}$$

где $\varphi_c(t,\mathbf{x})$ — решение классического уравнения движения

$$\partial_t^2\varphi_c(t,\mathbf{x}) - \nabla^2\varphi_c(t,\mathbf{x}) + m^2\varphi_c(t,\mathbf{x}) + g\varphi_c^3(t,\mathbf{x}) = 0 \tag{3}$$

с начальными условиями

$$\varphi_c(t_{\text{in}},\mathbf{x}) = \phi_{\text{in}}(\mathbf{x}), \quad \partial_t\varphi_c(t_{\text{in}},\mathbf{x}) = \pi_{\text{in}}(\mathbf{x}), \tag{4}$$

где $t_{\rm in}$ — начальное время. Вес, с которым происходит усреднение, — это функционал Вигнера, который связан с матрицей плотности соотношением

$$\mathcal{W}[\pi(\mathbf{x}),\phi(\mathbf{x})] = \int \mathfrak{D}\varphi(\mathbf{x}) \exp\left(i\int d^3\mathbf{x}\varphi(\mathbf{x})\pi(\mathbf{x})\right) \times \\ \times \left\langle \phi(\mathbf{x}) + \frac{1}{2}\varphi(\mathbf{x}) \middle| \hat{\rho}_0 \middle| \phi(\mathbf{x}) - \frac{1}{2}\varphi(\mathbf{x}) \right\rangle, \quad (5)$$

где $|\phi(\mathbf{x})\rangle$ — собственное состояние оператора поля.

В работах [12–14] было показано, что классическое статистическое приближение представляет собой лидирующий вклад квазиклассического разложения в технике Келдыша. Более того, оказалось, что поправки к квантовой эволюции начинаются только с $\hbar^2$. Это означает, что в рамках данного приближения может быть получен не только лидирующий классический вклад, но и первая квантовая поправка по $\hbar$, которая войдет в ответ через функционал Вигнера $\mathcal{W}[\pi(\mathbf{x}),\phi(\mathbf{x})]$ [7, 15].

2. ВЯЗКОСТЬ В РАМКАХ КЛАССИЧЕСКОГО СТАТИСТИЧЕСКОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

Как и любой другой транспортный коэффициент, вязкость среды выражается через запаздывающие корреляторы компонентов тензора энергии импульса ($x = (t, \mathbf{x})$):

$$R^{\mu\nu}_{\alpha\beta}(x;x') = -i\theta(t-t')\langle[\hat{T}^{\mu\nu}(x),\hat{T}_{\alpha\beta}(x')]\rangle. \quad (6)$$

В системе покоя среды сдвиговая вязкость связана с функцией отклика

$$R^{12}_{12}(p) = \int d^4(x-x')\, \mathrm{e}^{ip^\mu(x_\mu - x'_\mu)} R^{12}_{12}(x;x')$$

как

$$\eta = i \lim_{p^0\to 0}\lim_{p^i\to 0} \partial_0 R^{12}_{12}(p). \quad (7)$$

Для неравновесного случая, когда система слабонеоднородна и в ней присутствует поток энергии, описываемый 4-скоростью u^μ, выражение (7) обобщается [13, 16]:

$$\eta(x) = -\frac{1}{10}\Delta^{\mu\nu}_{\alpha\beta}\int d^4y\, u^\rho y_\rho R^{\alpha\beta}_{\mu\nu}(x+y;x), \quad (8)$$

где

$$\Delta^{\mu\nu}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\Delta^\mu_\alpha\Delta^\nu_\beta + \Delta^\nu_\alpha\Delta^\mu_\beta - \frac{2}{3}\Delta^{\mu\nu}\Delta_{\alpha\beta}\right),$$

$$\Delta^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} - u^\mu u^\nu.$$

В работе [13] было показано, что в рамках классического статистического приближения входящий в выражение (8) коррелятор для скалярной теории (1) может быть записан как

$$R(x;x') = -4\Delta^{\alpha\beta}_{\mu\nu}\langle\partial^\mu\varphi_c(x)\partial'_\alpha\varphi_c(x')\partial^\nu\partial'_\beta\Phi(x;x')\rangle_{\rm i.c}. \tag{9}$$

Здесь φ_c — решение классических уравнений движения с заданными начальными условиями, в то время как $\Phi(x;x')$ является запаздывающим решением уравнения

$$\left(\partial_\mu\partial^\mu + m^2 + 3g\varphi_c^2(x)\right)\Phi(x;x') = \delta(x-x'). \tag{10}$$

При этом усреднение $\langle\ldots\rangle_{\rm i.c}$ происходит по всевозможным случайным начальным условиям, которые фиксируются в момент времени $t_{\rm in}$, с весом $\mathcal{W}[\pi_{\rm in}(\mathbf{x}),\phi_{\rm in}(\mathbf{x})]$.

Отметим, что обычно при численном моделировании вязкости рассматривается корреляционная функция, отличная от выражения (9) (см., например, [11,17]), а именно используется автокорреляционная функция вида (формула Грина–Кубо [18])

$$K(x,x') \sim \Delta^{\alpha\beta}_{\mu\nu}\langle\partial^\mu\varphi_c(x)\partial^\nu\varphi_c(x)\;\partial'_\alpha\varphi_c(x')\partial'_\beta\varphi_c(x')\rangle_{\rm i.c}. \tag{11}$$

В состоянии теплового равновесия выражения (9) и (11) эквивалентны благодаря флуктуационно-диссипативной теореме, которая связывает функцию отклика с автокорреляционной функцией. Однако для моделирования среды, возникающей при столкновении ультрарелятивистских тяжелых ионов, предположение о тепловом равновесии слишком сильно. Вполне возможно, что в результате эволюции такой среды образуется стационарное, но неравновесное состояние, не обязательно тепловое [19]. Но даже в неравновесном случае выражение для вязкости через запаздывающий коррелятор (9) справедливо, тогда как флуктуационно-диссипативную теорему и соотношение Грина–Кубо (11) необходимо обобщить.

Проделаем такое вычисление в рамках классического статистического приближения. В большинстве случаев, к которым относится и случай классического скалярного поля (1), система с течением времени приходит к некоторому стационарному состоянию, при котором функционал распределения

$$\begin{aligned}&\mathcal{P}[\pi(\mathbf{x}),\phi(\mathbf{x});t] \equiv\\ &\equiv \int \mathfrak{D}\pi_{\rm in}(\mathbf{x})\mathfrak{D}\phi_{\rm in}(\mathbf{x})\;\delta[\phi(\mathbf{x})-\varphi_c(t,\mathbf{x})]\delta[\pi(\mathbf{x})-\partial_t\varphi_c(t,\mathbf{x})]\;\mathcal{W}[\pi_{\rm in}(\mathbf{x}),\phi_{\rm in}(\mathbf{x})]\end{aligned} \tag{12}$$

перестает зависеть от времени t. Рассмотрим именно такую ситуацию и предположим, что к моменту времени $t=0$ система перешла в стационарное состояние. Также будем считать, что мы находимся в системе покоя рассматриваемой скалярной среды. В этом случае единственной сохраняющейся величиной на уравнениях движения является полная классическая энергия системы, которая в данном случае имеет вид

$$\mathcal{H}[\pi(\mathbf{x}),\phi(\mathbf{x})]=\frac{1}{2}\int d^3\mathbf{x}\left(\pi^2(\mathbf{x})+(\nabla\phi(\mathbf{x}))^2+m^2\phi^2(\mathbf{x})+\frac{g}{2}\phi^4(\mathbf{x})\right). \quad (13)$$

Инвариантность распределения (12) при изменении времени означает, что оно является лишь функцией сохраняющихся величин, в данном случае энергии:

$$\mathcal{P}_{\mathrm{st}}[\pi(\mathbf{x}),\phi(\mathbf{x})]=F(\mathcal{H}[\pi(\mathbf{x}),\phi(\mathbf{x})]). \quad (14)$$

В случае, когда стационарное распределение описывается классическим каноническим ансамблем, функция имеет вид $F(E)\sim \mathrm{e}^{-E/T}$, где T — температура. Отметим, что закон сохранения энергии (а значит, и распределение классической полевой системы по энергиям) на уравнениях движения позволяет связать $F(E)$ с исходным функционалом Вигнера:

$$F(E)=\frac{\int \mathfrak{D}\pi_{\mathrm{in}}(\mathbf{x})\mathfrak{D}\phi_{\mathrm{in}}(\mathbf{x})\ \delta\left(E-\mathcal{H}[\pi_{\mathrm{in}}(\mathbf{x}),\phi_{\mathrm{in}}(\mathbf{x})]\right)\mathcal{W}[\pi_{\mathrm{in}}(\mathbf{x}),\phi_{\mathrm{in}}(\mathbf{x})]}{\int \mathfrak{D}\pi_{\mathrm{in}}(\mathbf{x})\mathfrak{D}\phi_{\mathrm{in}}(\mathbf{x})\ \delta\left(E-\mathcal{H}[\pi_{\mathrm{in}}(\mathbf{x}),\phi_{\mathrm{in}}(\mathbf{x})]\right)}. \quad (15)$$

Собирая все вместе и учитывая стационарность и трансляционную инвариантность конечного распределения, получаем выражение для вязкости среды в рамках квазиклассического приближения

$$\eta=\frac{1}{5}\int\limits_0^\infty dt\ t\int d^3\mathbf{x}\int \mathfrak{D}\pi(\mathbf{x})\,\mathfrak{D}\phi(\mathbf{x})\ F(\mathcal{H}[\pi(\mathbf{x}),\phi(\mathbf{x})])\times$$
$$\times\left(\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk}-\frac{2}{3}\delta_{ij}\delta_{kl}\right)\nabla_i\varphi_c(t,\mathbf{x})\nabla_k\phi(\mathbf{0})\nabla_j\nabla_l'\Phi(t,\mathbf{x};0,\mathbf{x}')\Big|_{\mathbf{x}'\to 0}, \quad (16)$$

причем начальные условия на классическое решение φ_c накладываются не в начальный момент времени, а в момент времени $t=0$ как $\varphi_c(0,\mathbf{x})=\phi(\mathbf{x})$, $\partial_t\varphi_c(0,\mathbf{x})=\pi(\mathbf{x})$. Данное выражение совершенно общее, однако входящий сюда функциональный интеграл в практически важных случаях может быть рассчитан лишь численно, что требует не только моделирования классических уравнений движения, но и решения уравнения на $\Phi(x,x')$ (10). Однако в данном случае результат может быть упрощен благодаря форме функционала распределения. Поэтому отметим, что решение уравнения (10) может быть представлено как вариационная производная по начальным условиям

$$\Phi(t,\mathbf{x};0,\mathbf{x}')=\frac{\delta\varphi_c(t,\mathbf{x})}{\delta\pi(\mathbf{x}')}, \quad (17)$$

а значит, выражение для вязкости может быть переписано как

$$\eta = \frac{1}{10}\int\limits_0^\infty dt\ t \int d^3\mathbf{x} \int \mathfrak{D}\pi(\mathbf{x})\,\mathfrak{D}\phi(\mathbf{x})\ F(\mathcal{H}[\pi(\mathbf{x}),\phi(\mathbf{x})])\times$$
$$\times\left(\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk}-\frac{2}{3}\delta_{ij}\delta_{kl}\right)\nabla_k\phi(\mathbf{0})\nabla'_l\frac{\delta(\nabla_i\varphi_c(t,\mathbf{x})\nabla_j\varphi_c(t,\mathbf{x}))}{\delta\pi(\mathbf{x}')}\bigg|_{\mathbf{x}'\to 0}. \quad (18)$$

Теперь можно взять функциональный интеграл по $\pi(\mathbf{x})$ по частям

$$\eta = -\frac{1}{10}\int\limits_0^\infty dt\,t \int d^3\mathbf{x} \int \mathfrak{D}\pi(\mathbf{x})\,\mathfrak{D}\phi(\mathbf{x})\,F'(\mathcal{H}[\pi(\mathbf{x}),\phi(\mathbf{x})])\times$$
$$\times\left(\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk}-\frac{2}{3}\delta_{ij}\delta_{kl}\right)\nabla_i\varphi_c(t,\mathbf{x})\nabla_j\varphi_c(t,\mathbf{x})\nabla_k\phi(\mathbf{0})\nabla_l\pi(\mathbf{0}), \quad (19)$$

после чего остается воспользоваться трансляционной инвариантностью по времени и проинтегрировать по t по частям, чтобы получить итоговое выражение

$$\eta = -\frac{1}{10}\int\limits_0^\infty dt \int d^3\mathbf{x}\left(\delta_{ik}\delta_{jl}-\frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{kl}\right)\times$$
$$\times\left\langle\nabla_i\varphi_c(t,\mathbf{x})\nabla_j\varphi_c(t,\mathbf{x})\nabla_k\varphi_c(0,\mathbf{0})\nabla_l\varphi_c(0,\mathbf{0})\frac{F'(\mathcal{H}[\pi_{\text{in}}(\mathbf{x}),\phi_{\text{in}}(\mathbf{x})]}{F(\mathcal{H}[\pi_{\text{in}}(\mathbf{x}),\phi_{\text{in}}(\mathbf{x})]}\right\rangle_{\text{i.c}}. \quad (20)$$

Данный ответ содержит только решения классического уравнения движения, усредненные по начальным условиям. Отметим, что мы ожидаемо получили выражение, похожее на соотношение Грина–Кубо (11), но с дополнительным весовым множителем, учитывающим неравновесный характер стационарного распределения. Этот множитель зависит от начальных условий и может существенно влиять на усреднение. Далее кратко обсудим два случая, показывающих важность учета такого весового фактора.

3. КАНОНИЧЕСКИЙ АНСАМБЛЬ

Канонический ансамбль отвечает гиббсовскому распределению по энергиям $F_T(E) \sim \mathrm{e}^{-E/T}$. Он соответствует тепловому равновесию и используется в большинстве работ с аналитическими вычислениями [20–22] и численным моделированием [11, 17, 23]. Канонический ансамбль соответствует матрице плотности вида $\hat{\rho}_0 \sim \mathrm{e}^{-\hat{H}/T}$ в пределе $\hbar \to 0$. Полученное соотношение для вязкости (20) при этом упрощается

$$\eta_T = \frac{1}{10T} \int\limits_0^\infty dt \int d^3\mathbf{x} \left(\delta_{ik}\delta_{jl} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{kl} \right) \times \\ \times \langle \nabla_i \varphi_c(t,\mathbf{x}) \nabla_j \varphi_c(t,\mathbf{x}) \nabla_k \varphi_c(0,\mathbf{0}) \nabla_l \varphi_c(0,\mathbf{0}) \rangle_{\mathrm{i.c}} \quad (21)$$

и превращается в стандартное соотношение Грина–Кубо. Отметим, что во множестве работ, посвященных численному моделированию классической скалярной среды, именно это соотношение используется для вычисления вязкости. Но, как видно из проведенного нами анализа, для того чтобы данное соотношение было применимо, необходимо быть уверенным в том, что распределение системы по энергиям является именно гиббсовским. На наш взгляд, данное предположение может оказаться неприменимым для случая сильнонеравновесной среды, возникающей при столкновении тяжелых ионов.

4. МИКРОКАНОНИЧЕСКИЙ АНСАМБЛЬ

В работе [19] исследовались различные ансамбли по начальным энергиям. Было показано, что поведение корреляционных функций существенно зависит от вида ансамбля. Для описания столкновения тяжелых ионов естественно выбрать ансамбль, в котором начальная энергия практически фиксированная и определяется полной энергией столкновения. Предельным случаем такого ансамбля является микроканонический. Микроканонический ансамбль описывается функцией $F^{\mathcal{E}}(E) \sim \delta(\mathcal{E} - E)$ и отвечает тому условию, что в начальный момент времени происходит усреднение только по конфигурациям с некоторой фиксированной энергией $\mathcal{E}$. Такая функция Вигнера не может соответствовать никакой матрице плотности, поскольку при этом нарушается соотношение неопределенности. Тем не менее данный случай интересен, а также важен для описания общей ситуации благодаря тому, что в силу сохранения классической энергии состояния с разными энергиями эволюционируют независимо. Введем понятие числа состояний с данной энергией

$$\mathcal{N}(E) = \int \mathfrak{D}\pi_{\mathrm{in}}(\mathbf{x}) \mathfrak{D}\phi_{\mathrm{in}}(\mathbf{x})\, \delta\left(E - \mathcal{H}[\pi_{\mathrm{in}}(\mathbf{x}), \phi_{\mathrm{in}}(\mathbf{x})]\right), \quad (22)$$

логарифм которого есть микроканоническая энтропия $\mathcal{S}(E) = \log(\mathcal{N}(E))$. В итоге выражение для вязкости может быть представлено в виде

$$\eta^{\mathcal{E}} = \frac{1}{10T(\mathcal{E})} \int\limits_0^\infty dt \int d^3\mathbf{x} \left(\delta_{ik}\delta_{jl} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{kl} \right) \times \\ \times \langle \nabla_i \varphi_c(t,\mathbf{x}) \nabla_j \varphi_c(t,\mathbf{x}) \nabla_k \varphi_c(0,\mathbf{0}) \nabla_l \varphi_c(0,\mathbf{0}) \rangle^{\mathcal{E}} +$$

$$+\frac{1}{10}\int\limits_0^\infty dt\int d^3\mathbf{x}\left(\delta_{ik}\delta_{jl}-\frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{kl}\right)\times$$
$$\times\,\partial_{\mathcal{E}}\left\langle\nabla_i\varphi_c(t,\mathbf{x})\nabla_j\varphi_c(t,\mathbf{x})\nabla_k\varphi_c(0,\mathbf{0})\nabla_l\varphi_c(0,\mathbf{0})\right\rangle^{\mathcal{E}}, \quad (23)$$

где $T(\mathcal{E})=\mathcal{N}(\mathcal{E})/\mathcal{N}'(\mathcal{E})$ — микроканоническая температура; $\langle\ldots\rangle^{\mathcal{E}}$ — усреднение при фиксированной энергии $\mathcal{E}$. Отметим, что первый вклад в данном выражении выглядит так же, как и ответ для канонического ансамбля. Но это лишь часть вклада в ответ. Полный ответ содержит еще и производную по энергии. Численное моделирование вязкости в зависимости от начального распределения по энергиям видится нам интересной задачей и будет рассмотрено в дальнейшем.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках классического статистического приближения получено выражение для сдвиговой вязкости неравновесной скалярной полевой среды для случая произвольного начального распределения по энергиям $F(E)$. Результат (20) обобщает хорошо известное соотношение Грина–Кубо, обычно используемое для вычисления вязкости при численном моделировании классической полевой среды. В качестве примера рассмотрены канонический тепловой ансамбль, приводящий к стандартной формуле Грина–Кубо, и микроканонический ансамбль, более подходящий для описания столкновения тяжелых ионов.

Данная работа поддержана грантом РФФИ № 18-02-40131 «мега».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Gelis F.* Initial State and Thermalization in the Color Glass Condensate Framework // Intern. J. Mod. Phys. E. 2015. V. 24, No. 10. P. 1530008.
2. *Kurkela A.* Initial State of Heavy-Ion Collisions: Isotropization and Thermalization // Nucl. Phys. A. 2016. V. 956. P. 136–143.
3. *Berges J.* Nonequilibrium Quantum Fields: From Cold Atoms to Cosmology. arXiv:1503.02907. 2015.
4. *Mrówczyński S., Müller B.* Wigner Functional Approach to Quantum Field Dynamics // Phys. Rev. D. 1994. V. 50, No. 12. P. 7542.
5. *Dueling K., Epelbaum T., Gelis F., Venugopalan R.* Role of Quantum Fluctuations in a System with Strong Fields: Onset of Hydrodynamical Flow // Nucl. Phys. A. 2011. V. 850, No. 1. P. 69–109.
6. *Epelbaum T., Gelis F.* Role of Quantum Fluctuations in a System with Strong Fields: Spectral Properties and Thermalization // Ibid. V. 872, No. 1. P. 210–244.
7. *Bödeker D.* Classical Real Time Correlation Functions and Quantum Corrections at Finite Temperature // Nucl. Phys. B. 1997. V. 486, No. 1–2. P. 500–514.

8. *Leonidov A. V., Radovskaya A. A.* On the Formation of the Equation of State of an Evolving Quantum Field // JETP Lett. 2015. V. 101, No. 4. P. 215–220.
9. *Boguslavski K., Kurkela A., Lappi T., Peuron J.* Spectral Function for Overoccupied Gluodynamics from Real-Time Lattice Simulations // Phys. Rev. D. 2018. V. 98, No. 1. P. 014006.
10. *Aarts G.* Spectral Function at High Temperature in the Classical Approximation // Phys. Lett. B. 2001. V. 518, No. 3–4. P. 315–322.
11. *Homor M., Jakovac A.* Shear Viscosity of the Φ^4 Theory from Classical Simulation // Phys. Rev. D. 2015. V. 92, No. 10. P. 105011.
12. *Leonidov A. V., Radovskaya A. A.* Quantum Corrections to the Classical Statistical Approximation for the Expanding Quantum Field // Eur. Phys. J. C. 2019. V. 79, No. 1. P. 55.
13. *Radovskaya A. A., Semenov A. G.* Semiclassical Approximation Meets Keldysh–Schwinger Diagrammatic Technique: Scalar φ^4. arXiv:2003.06395. 2020.
14. *Leonidov A. V., Radovskaya A. A.* Applicability of the Wigner Functional Approach to Evolution of Quantum Fields // Europhys. J. Web of Conf. / EDP Sciences. 2016. V. 125. P. 05013.
15. *Bödeker D., Laine M., Philipsen O.* The Finite Temperature Real-Time $\hbar^2$ Corrections in Quantum Mechanics // Nucl. Phys. B. 1998. V. 513, Nos. 1–2. P. 445–470.
16. *Jeon S., Heinz U.* Introduction to Hydrodynamics // Intern. J. Mod. Phys. E. 2015. V. 24, No. 10. P. 1530010.
17. *Matsuda H., Kunihiro T., Ohnishi A., Takahashi T. T.* Shear Viscosity of Massless Classical Fields in Scalar Theory // Prog. Theor. Exp. Phys. 2020. V. 2020, No. 5. P. 053D03.
18. *Kubo R.* Statistical-Mechanical Theory of Irreversible Processes. I. General Theory and Simple Applications to Magnetic and Conduction Problems // J. Phys. Soc. Japan. 1957. V. 12, No. 6. P. 570–586.
19. *Aarts G., Bonini G. F., Wetterich C.* On Thermalization in Classical Scalar Field Theory // Nucl. Phys. B. 2000. V. 587, Nos. 1–3. P. 403–418.
20. *Jeon S.* Hydrodynamic Transport Coefficients in Relativistic Scalar Field Theory // Phys. Rev. D. 1995. V. 52, No. 6. P. 3591.
21. *Wang E., Heinz U.* Nonperturbative Calculation of the Shear Viscosity in Hot φ^4 Theory in Real Time // Phys. Lett. B. 1999. V. 471, Nos. 2–3. P. 208–213.
22. *Wang E., Heinz U., Zhang X.* Viscosity in Hot Scalar Field Theory // Phys. Rev. D. 1996. V. 53, No. 10. P. 5978.
23. *Jakovác A.* Viscosity of Scalar Fields from Classical Theory // Phys. Lett. B. 1999. V. 446, Nos. 3–4. P. 203–208.