ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА
2023. Т. 54, вып. 3. С. 683–710

СВОЙСТВА ТРЕТЬЕГО УРАВНЕНИЯ ВЛАСОВА

Е. Е. Перепёлкин[1,2,3,4], *Б. И. Садовников*[2],
Н. Г. Иноземцева[3,4], *И. И. Александров*[2,4],
Р. В. Полякова[1,*], *В. А. Панасик*[1]

[1] Объединенный институт ядерных исследований, Дубна
[2] Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва
[3] Государственный университет «Дубна», Дубна, Россия
[4] Московский технический университет связи и информатики, Москва

Предпринята попытка описания прикладного использования третьего уравнения Власова для физических систем с электромагнитным взаимодействием. С этой целью рассматриваются различные виды аппроксимации среднего векторного поля потока ускорений второго порядка. Построение таких аппроксимаций необходимо для обрыва бесконечной самозацепляющейся цепочки уравнений Власова на третьем уравнении.

В ускорительной физике, астрофизике, физике плазмы, статистической физике и физике твердого тела используют второе уравнение Власова для функции распределения в фазовом пространстве. Третье уравнение записано для функции распределения, зависящей от координаты, скорости и ускорения. Такое расширение, с одной стороны, позволяет подойти к описанию систем с электромагнитным и гравитационным излучением, а с другой стороны, дает возможность построения численных методов, обладающих большей вычислительной точностью, так как содержит дополнительные интегралы движения.

The paper attempts to fit the use of the third Vlasov equation for applied physical systems with electromagnetic interaction. To this end, various approximation types of the average vector field of the second-order acceleration flux are considered. The construction of such an approximation is necessary for the infinite self-linking Vlasov equation chain to be cut off at the third equation.

The second Vlasov equation is frequently used in accelerator physics, astrophysics, plasma physics, statistical physics, and solid-state physics to construct the distribution function in the phase space. The third Vlasov equation describes the evolution in time of the distribution function depending on the coordinate, velocity, and acceleration. Such an extension makes it possible to describe the systems with electromagnetic and gravitational radiation and also to construct numerical methods with a higher computational accuracy, as it contains additional motion integrals.

PACS: 52.65.Ff

* E-mail: polykovarv@mail.ru

ВВЕДЕНИЕ

В середине XX в. исходя из первого принципа — закона сохранения вероятностей — А. А. Власовым была записана бесконечная самозацепляющаяся цепочка уравнений для функций распределения $f^1(\mathbf{r},t)$, $f^{1,2}(\mathbf{r},\mathbf{v},t)$, $f^{1,2,3}(\mathbf{r},\mathbf{v},\dot{\mathbf{v}},t)$, … случайных величин координаты, скорости, ускорения и ускорений высших порядков [1, 2]:

$$\begin{aligned}
&\widehat{\pi}_1 S^1 = -Q_1^1,\\
&\widehat{\pi}_{1,2} S^{1,2} = -Q_2^{1,2},\\
&\widehat{\pi}_{1,2,3} S^{1,2,3} = -Q_3^{1,2,3},\\
&\dots\\
&\widehat{\pi}_{1,\dots,n} S^{1,\dots,n} = -Q_n^{1,\dots,n}, \quad n\in\mathbb{N},\\
&\dots
\end{aligned}\tag{1}$$

где $S^{1,\dots,n} \stackrel{\text{det}}{=} \ln f^{1,\dots,n}$; операторы $\widehat{\pi}_{1,\dots,n}$ соответствуют полным производным по времени вдоль фазовых траекторий в обобщенном фазовом пространстве кинематических величин $\left\{\boldsymbol{\xi}^1,\boldsymbol{\xi}^2,\boldsymbol{\xi}^3,\dots\right\} = \{\mathbf{r},\mathbf{v},\dot{\mathbf{v}},\dots\}$:

$$\widehat{\pi}_{1,\dots,n} \stackrel{\text{det}}{=} \partial_{n-1} + \left\langle \boldsymbol{\xi}^{n+1}\right\rangle_{1,\dots,n} \nabla_{\xi^n}, \quad \partial_n \stackrel{\text{det}}{=} \partial_t + \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{\xi}^{k+1}\nabla_{\xi^k}, \tag{2}$$

$$f^{1,\dots,n}\left\langle \boldsymbol{\xi}^{n+1}\right\rangle_{1,\dots,n} \stackrel{\text{det}}{=} \int\limits_{(\infty)} \boldsymbol{\xi}^{n+1} f^{1,\dots,n,n+1} d^3\xi^{n+1}, \tag{3}$$

$$f^{1,\dots,n} \stackrel{\text{det}}{=} \int\limits_{(\infty)} f^{1,\dots,n,n+1} d^3\xi^{n+1}, \tag{4}$$

где интегрирование в выражениях (3), (4) производится по всему пространству. Правая часть уравнений (1) определяет источники диссипаций вероятностей:

$$Q_n^{1,\dots,n} \stackrel{\text{det}}{=} \operatorname{div}_{\xi^n}\left\langle \boldsymbol{\xi}^{n+1}\right\rangle_{1,\dots,n}. \tag{5}$$

Таким образом, уравнения (1) характеризуют эволюцию функций плотности вероятностей $f^{1,\dots,n}$ вдоль фазовых траекторий. Если источники диссипаций (5) отсутствуют ($Q_n^{1,\dots,n}=0$), то $f^{1,\dots,n}=\text{const}$ вдоль фазовой траектории, в противном случае в зависимости от знака $Q_n^{1,\dots,n}$ происходит рост или убывание $f^{1,\dots,n}$.

В работе [2] рассмотрен общий случай цепочки (1) — дисперсионная цепочка для смешанных функций распределения $f^{n_1,\dots,n_R}$ ранга R, где $n_1,\dots,n_R$ — упорядоченная последовательность, удовлетворяющая условию $\forall i,j\in[1,R]\subset\mathbb{N}\colon\ n_i\neq n_j$.

Цепочка уравнений Власова (1) представляет собой кинематический способ описания физической системы. Каждое уравнение соответствует определенному уровню кинематической информации. Например, первое уравнение, записанное для функции распределения $f^1(\mathbf{r}, t)$, содержит информацию только о координатном пространстве. Второе уравнение определяет поведение функции распределения $f^{1,2}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ в фазовом пространстве. Интегрирование второго уравнения по всему пространству скоростей переводит его в первое уравнение.

Для нахождения функции распределения $f^1(\mathbf{r}, t)$, удовлетворяющей первому уравнению цепочки, необходимо знание среднего векторного поля скорости потока вероятностей $\langle \mathbf{v} \rangle_1$, которое в силу выражения (3) (при $n = 1$) определяется функцией распределения $f^{1,2}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$, являющейся решением второго уравнения цепочки (1). Самозацепляющаяся структура цепочки уравнений Власова требует разрыва цепочки на некотором уравнении, соответствующем определенному уровню кинематической информации о системе. Разрыв цепочки возможен путем введения динамической аппроксимации кинематической средней величины (3) — $\left\langle \boldsymbol{\xi}^{n+1} \right\rangle_{1,\ldots,n}$.

Разрыв цепочки на первом уравнении возможен с использованием теоремы Гельмгольца о представлении векторного поля $\langle \mathbf{v} \rangle_1$ в виде суперпозиции потенциальной $(-\nabla_r \Phi^1)$ и вихревой $(\mathbf{A}_1)$ компонент

$$\langle \mathbf{v} \rangle_1 = -\alpha_1 \nabla_r \Phi^1 + \gamma_1 \mathbf{A}_1, \tag{6}$$

где α_1, γ_1 — постоянные величины. Если считать, что функция распределения плотности вероятностей $f^1(\mathbf{r}, t)$ является положительной величиной, т. е. допускает представление $f^1 = \left|\Psi^1\right|^2 \geqslant 0$, $\Psi^1 \in \mathbb{C}$, то первое уравнение Власова (1) примет вид [3]

$$\frac{i}{\beta_1} \frac{\partial \Psi^1}{\partial t} = -\alpha_1 \beta_1 \left(\widehat{p}_1 - \frac{\gamma_1}{2\alpha_1 \beta_1} \mathbf{A}_1 \right)^2 \Psi^1 + U^1 \Psi^1, \tag{7}$$

где $\widehat{p}_1 \stackrel{\text{det}}{=} -(i/\beta_1)\nabla_r$, β_1 — постоянная величина, а U^1 — функция потенциала, входящая в уравнение

$$-\frac{1}{2\beta_1} \frac{\partial \Phi^1}{\partial t} = -\frac{1}{4\alpha_1 \beta_1} \left|\langle \mathbf{v} \rangle_1\right|^2 + V^1 = H^1, \tag{8}$$

$$V^1 \stackrel{\text{det}}{=} U^1 + Q^1, \quad Q^1 = \frac{\alpha_1}{\beta_1} \frac{\Delta_r \left|\Psi^1\right|}{\left|\Psi^1\right|}, \tag{9}$$

где $\Phi^1 \stackrel{\text{det}}{=} 2\varphi^1 + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, φ^1 является фазой комплексной функции $\Psi^1 = \sqrt{f^1} \exp\left(i\varphi^1\right)$. При этом уравнение (8) допускает представление

$$\widehat{\pi}_1 \langle \mathbf{v} \rangle_1 = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \langle \mathbf{v} \rangle_1 \nabla_r \right) \langle \mathbf{v} \rangle_1 = -\gamma_1 \left(\mathbf{E}_1 + \langle \mathbf{v} \rangle_1 \times \mathbf{B}_1 \right), \tag{10}$$

где
$$\mathbf{E}_1 = -\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A}_1 - \frac{2\alpha_1\beta_1}{\gamma_1}\nabla_r V^1, \quad \mathbf{B}_1 = \mathrm{rot}_r\, \mathbf{A}_1. \tag{11}$$

Если в качестве постоянных значений $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ выбрать величины
$$\alpha_1 \stackrel{\mathrm{det}}{=} -\frac{\hbar}{2m}, \quad \beta_1 \stackrel{\mathrm{det}}{=} \frac{1}{\hbar}, \quad \gamma_1 \stackrel{\mathrm{det}}{=} -\frac{q}{m}, \tag{12}$$

то уравнение (7) перейдет в уравнение Шредингера для скалярной частицы в электромагнитном поле. Вихревое поле $\mathbf{A}_1$ будет соответствовать векторному потенциалу магнитной индукции $\mathbf{B}_1 = \mathrm{rot}_r\, \mathbf{A}_1$. Величина Q^1 (9) является квантовым потенциалом из теории волны-пилота де Бройля – Бома [4–6]. Скалярный потенциал Φ^1 в разложении (6) и уравнении (8) с точностью до постоянного множителя равен действию. Таким образом, уравнение (8) примет вид уравнения Гамильтона–Якоби, а выражение (10) определит уравнение движения сплошной среды в электромагнитном поле. Вид полей (11) приводит к уравнениям Максвелла:
$$\mathrm{rot}_r\, \mathbf{E}_1 = -\frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t}, \quad \mathrm{div}_r\, \mathbf{B}_1 = 0. \tag{13}$$

Два оставшихся уравнения Максвелла могут быть получены непосредственно из первого уравнения Власова, которое соответствует уравнению непрерывности, в котором
$$f^1 \stackrel{\mathrm{det}}{=} \mathrm{div}_r\, \mathbf{D}_1, \quad \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{D}_1 + \mathbf{J}_1 = \mathrm{rot}_r\, \mathbf{H}_1, \quad \mathbf{J}_1 \stackrel{\mathrm{det}}{=} f^1 \left\langle \mathbf{v} \right\rangle_1, \tag{14}$$

где $\mathbf{D}_1$, $\mathbf{H}_1$ — некоторые векторные поля.

Обрыв цепочки уравнений Власова на втором уравнении (1) можно произвести с помощью аппроксимации Власова–Моэля [7]:
$$\left\langle \dot{v}_\mu \right\rangle_{1,2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} (\hbar/2)^{2n}}{m^{2n+1} (2n+1)!} \frac{\partial^{2n+1} U^1}{\partial x_\mu^{2n+1}} \frac{1}{f^{1,2}} \frac{\partial^{2n} f^{1,2}}{\partial v_\mu^{2n}}, \tag{15}$$

где $\mu = 1, 2, 3$. Интегрирование (усреднение) аппроксимации (15) в соответствии с определением (3) дает известную аппроксимацию Власова
$$\left\langle \dot{v}_\mu \right\rangle_1 = -\frac{1}{m}\frac{\partial U^1}{\partial x_\mu}, \tag{16}$$

в которой отсутствует информация о квантовых поправках. Для прикладных задач, связанных с ускорительной физикой и физикой плазмы, А. А. Власов доопределял аппроксимацию (16) в соответствии со вторым законом Ньютона как
$$\left\langle \dot{\mathbf{v}} \right\rangle_{1,2} = \frac{q}{m}\left(\mathbf{E}_1 + \mathbf{v} \times \mathbf{B}_1\right), \tag{17}$$

где в отличие от уравнения (10) стоит независимая переменная $\mathbf{v}$, а не среднее поле $\langle \mathbf{v} \rangle_1$. Отметим, что источники диссипаций (5) для аппроксимации (17) отсутствуют, т. е. $Q_2^{1,2} = 0$.

Подстановка аппроксимации Власова–Моэля (15) во второе уравнение Власова (1) приводит к известному уравнению Моэля [8] для функции Вигнера $f^{1,2}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = mW(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{1}{m}(\mathbf{p}, \nabla_r) W - \left(\nabla_r U^1, \nabla_p W\right) = \\ = \sum_{l=1}^{+\infty} \frac{(-1)^l (\hbar/2)^{2l}}{(2l+1)!} U^1 \left(\overleftarrow{\nabla}_r, \overrightarrow{\nabla}_p\right)^{2l+1} W, \quad (18)$$

которое является квантовым аналогом уравнения Лиувилля в классической физике. Функция Вигнера [9, 10] является функцией квазиплотности вероятностей для квантовой системы в фазовом пространстве. Термин «квазиплотность» связан с наличием у функции Вигнера отрицательных значений. Согласно теореме Хадсона [11] только гауссово распределение функции Вигнера является положительным. Отметим, что при построении цепочки уравнений (1) А. А. Власов нигде не требовал выполнения условия положительности функций распределения $f^{1,\ldots,n}$, поэтому уравнение Моэля является непротиворечивым частным случаем второго уравнения Власова.

В прикладных областях физики плазмы [12–14], ускорительной физики [15–17], астрофизики [18–23], статистической физики [24–26] и физики твердого тела [27–29] наиболее известно второе уравнение Власова с аппроксимацией (17), (6). При рассмотрении систем с излучением (электромагнитным или гравитационным) возникает необходимость учета кинематических величин более высокого порядка. Известным примером такого описания является уравнение Лоренца–Абрахама–Дирака [30–34] для заряженной частицы, движущейся с ускорением во внешних полях:

$$m\dot{\mathbf{v}} = m\tau_0\ddot{\mathbf{v}} + \mathbf{F}_{\text{ext}}, \quad (19)$$

где $\mathbf{F}_{\text{ext}}$ — внешняя сила; $\tau_0 = q^2/(6\pi\varepsilon_0 mc^3)$. Величина $\tau_0 \ll 1$ (для электрона $\tau_0 \approx 6{,}266 \cdot 10^{-24}$ с). Уравнение (19) является уравнением третьего порядка по координате и существенно отличается характером своих решений от обычных уравнений второго порядка механики Ньютона (10).

Как уже было сказано, появление в описании физической системы новой кинематической величины повышает уровень информативности о системе и приводит к необходимости рассмотрения следующего уравнения в цепочке Власова для функции распределения $f^{1,2,3}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}}, t)$. Обрыв цепочки (1) на третьем уравнении требует построения новой аппроксимации для векторного поля среднего потока ускорений второго порядка $\langle \ddot{\mathbf{v}} \rangle_{1,2,3}$.

Целью данной работы является рассмотрение возможных вариантов построения аппроксимации для поля $\langle \ddot{\mathbf{v}} \rangle_{1,2,3}$ на основе уравнения Лоренца–Абрахама–Дирака (11) и так называемых уравнений Максвелла второго ранга [35].

Работа имеет следующую структуру. В разд. 1 рассматриваются кинематические свойства первых трех уравнений Власова. Строятся уравнения движения и законы сохранения в гидродинамическом приближении и исследуются их свойства. Вводятся различные типы аппроксимации $\langle\ddot{\mathbf{v}}\rangle_{1,2,3}$ на основе уравнения Лоренца–Абрахама–Дирака и их гидродинамического описания. В разд. 2 с использованием второго уравнения Власова предлагается модель расширения уравнений Максвелла на фазовое пространство. Полученная система уравнений «кинематических» полей позволяет построить аппроксимацию $\langle\ddot{\mathbf{v}}\rangle_{1,2,3}$ для электромагнитного взаимодействия. В разд. 3 подробно рассматриваются свойства решений третьего уравнения Власова с различными аппроксимациями $\langle\ddot{\mathbf{v}}\rangle_{1,2,3}$, полученными в разд. 1 и 2. Исследуются диссипативные свойства решений, анализируются микроскопические решения, разобран простейший модельный пример, иллюстрирующий возможности описания системы цепочкой уравнений Власова с позиции как классической, так и квантовой физики. В заключении приведены основные результаты и выводы работы.

1. ГИДРОГАЗОДИНАМИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

Получим соотношения для уравнений движения и законов сохранения энергии в рамках гидрогазодинамического приближения из второго и третьего уравнений Власова (1) [1, 2]. Начнем со второго уравнения Власова для функции $f^{1,2}$. Умножая второе уравнение на компоненту скорости v_μ и интегрируя по пространству скоростей, получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{(\infty)} v_\mu f^{1,2} d^3v + \frac{\partial}{\partial x_\lambda}\int\limits_{(\infty)} v_\mu v_\lambda f^{1,2} d^3v + \int\limits_{(\infty)} v_\mu \frac{\partial}{\partial v_\lambda}\left[f^{1,2}\left\langle \dot{v}_\lambda\right\rangle_{1,2}\right] d^3v = 0, \tag{20}$$

где по повторяющимся индексам λ идет суммирование (по правилу Эйнштейна). Введем обозначение для описания корреляций между компонентами кинематических величин:

$$\begin{gathered} P^2_{\mu\lambda}(1) \overset{\det}{=} P^2_{\mu\lambda}(\mathbf{r},t) \overset{\det}{=} \int\limits_{(\infty)} \left(v_\mu - \langle v_\mu\rangle_1\right)\left(v_\lambda - \langle v_\lambda\rangle_1\right) f^{1,2} d^3v = \\ = \int\limits_{(\infty)} v_\mu v_\lambda f^{1,2} d^3v - \langle v_\lambda\rangle_1 \int\limits_{(\infty)} v_\mu f^{1,2} d^3v - \langle v_\mu\rangle_1 \int\limits_{(\infty)} v_\lambda f^{1,2} d^3v + \\ + \langle v_\mu\rangle_1 \langle v_\lambda\rangle_1 \int\limits_{(\infty)} f^{1,2} d^3v, \end{gathered} \tag{21}$$

$$\int\limits_{(\infty)} v_\mu v_\lambda f^{1,2} d^3v = P^2_{\mu\lambda} + f^1 \langle v_\mu \rangle_1 \langle v_\lambda \rangle_1 .$$

Подставляя (21) в (20), интегрируя по частям и используя формулу (3), получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[f^1 \langle v_\mu \rangle_1\right] + \frac{\partial P^2_{\mu\lambda}}{\partial x_\lambda} + \frac{\partial}{\partial x_\lambda}\left[f^1 \langle v_\lambda \rangle_1 \langle v_\mu \rangle_1\right] - \int\limits_{(\infty)} f^{1,2} \langle \dot{v}_\mu \rangle_{1,2} d^3v = 0, \quad (22)$$

где при интегрировании были учтены быстрый спад функций распределения на бесконечности [1] и условие $\partial v_\mu / \partial v_\lambda = \delta_{\mu\lambda}$. Так как функция первого ранга f^1 удовлетворяет первому уравнению Власова $\partial f^1/\partial t = -(\partial/\partial x_\lambda)\left[f^1 \langle v_\lambda \rangle_1\right]$ (1), выражение (22) примет вид

$$\widehat{\pi}_1 \langle v_\mu \rangle_1 = \left[\frac{\partial}{\partial t} + \langle v_\lambda \rangle_1 \frac{\partial}{\partial x_\lambda}\right] \langle v_\mu \rangle_1 = -\frac{1}{f^1}\frac{\partial P^2_{\mu\lambda}}{\partial x_\lambda} + \langle \dot{v}_\mu \rangle_1 . \quad (23)$$

Полученное уравнение (23) является аналогом уравнения движения (10) в гидродинамическом приближении и выражает закон сохранения количества движения. Из второго уравнения Власова можно получить закон сохранения энергии, если умножить его на $v^2/2$ и проинтегрировать по пространству скоростей. Действительно,

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t} \int\limits_{(\infty)} v^2 f^{1,2} d^3v + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_\lambda} \int\limits_{(\infty)} v^2 v_\lambda f^{1,2} d^3v + \\ + \frac{1}{2} \int\limits_{(\infty)} v^2 \frac{\partial}{\partial v_\lambda}\left[f^{1,2} \langle \dot{v}_\lambda \rangle_{1,2}\right] d^3v = 0. \quad (24)$$

Интегрируя по частям и учитывая, что $(1/2)(\partial/\partial v_\lambda)(v_\mu v_\mu) = v_\mu \delta_{\mu\lambda}$, выражение (24) примет вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{f^1}{2}\left\langle v^2 \right\rangle_1\right] + \frac{\partial}{\partial x_\lambda} \int\limits_{(\infty)} \frac{1}{2} v^2 v_\lambda f^{1,2} d^3v - \int\limits_{(\infty)} f^{1,2} \langle \dot{v}_\mu \rangle_{1,2} v_\mu \, d^3v = 0, \quad (25)$$

где учтено условие Власова быстрого спада функции распределения на бесконечности. Выразим второй интеграл в уравнении (25) через тензор третьего ранга $P^2_{\mu\lambda\nu}$:

$$P^2_{\mu\lambda\nu}(1) \stackrel{\text{det}}{=} \int\limits_{(\infty)} \left(v_\mu - \langle v_\mu \rangle_1\right)\left(v_\lambda - \langle v_\lambda \rangle_1\right)\left(v_\nu - \langle v_\nu \rangle_1\right) f^{1,2} d^3v =$$

$$= \int\limits_{(\infty)} v_\mu v_\lambda v_\nu f^{1,2} d^3v - \langle v_\lambda \rangle_1 \int\limits_{(\infty)} v_\mu v_\nu f^{1,2} d^3v - \langle v_\mu \rangle_1 \int\limits_{(\infty)} v_\lambda v_\nu f^{1,2} d^3v +$$

$$+\left\langle v_\mu\right\rangle_1\left\langle v_\lambda\right\rangle_1 \int\limits_{(\infty)} v_\nu f^{1,2} d^3v - \left\langle v_\nu\right\rangle_1 \int\limits_{(\infty)} v_\mu v_\lambda f^{1,2} d^3v +$$

$$+\left\langle v_\lambda\right\rangle_1\left\langle v_\nu\right\rangle_1 \int\limits_{(\infty)} v_\mu f^{1,2} d^3v + \left\langle v_\mu\right\rangle_n\left\langle v_\lambda\right\rangle_1 \int\limits_{(\infty)} v_\lambda f^{1,2} d^3v - \left\langle v_\mu\right\rangle_1\left\langle v_\lambda\right\rangle_1\left\langle v_\nu\right\rangle_1 =$$

$$= \int\limits_{(\infty)} v_\mu v_\lambda v_\nu f^{1,2} d^3v - \left\langle v_\lambda\right\rangle_1 \int\limits_{(\infty)} v_\mu v_\nu f^{1,2} d^3v - \left\langle v_\mu\right\rangle_1 \int\limits_{(\infty)} v_\lambda v_\nu f^{1,2} d^3v -$$

$$- \left\langle v_\nu\right\rangle_1 \int\limits_{(\infty)} v_\mu v_\lambda f^{1,2} d^3v + 2f^1\left\langle v_\mu\right\rangle_1\left\langle v_\lambda\right\rangle_1\left\langle v_\nu\right\rangle_1 .$$

Учитывая выражение (21), получим

$$P^2_{\mu\lambda\nu} = \int\limits_{(\infty)} v_\mu v_\lambda v_\nu f^{1,2} d^3v - \left\langle v_\lambda\right\rangle_1 P^2_{\lambda\nu} - f^1\left\langle v_\nu\right\rangle_1\left\langle v_\mu\right\rangle_1\left\langle v_\lambda\right\rangle_1 -$$

$$- \left\langle v_\mu\right\rangle_1 P^2_{\lambda\nu} - f^1\left\langle v_\mu\right\rangle_1\left\langle v_\lambda\right\rangle_1\left\langle v_\nu\right\rangle_1 - \left\langle v_\nu\right\rangle_1 P^2_{\mu\lambda} - f^1\left\langle v_\lambda\right\rangle_1\left\langle v_\mu\right\rangle_1\left\langle v_\nu\right\rangle_1 +$$

$$+ 2f^1\left\langle v_\mu\right\rangle_1\left\langle v_\lambda\right\rangle_1\left\langle v_\nu\right\rangle_1 = \int\limits_{(\infty)} v_\mu v_\lambda v_\nu f^{1,2} d^3v - \left\langle v_\lambda\right\rangle_1 P^2_{\mu\nu} - \tag{26}$$

$$- \left\langle v_\mu\right\rangle_1 P^2_{\lambda\nu} - \left\langle v_\nu\right\rangle_1 P^2_{\mu\lambda} - f^1\left\langle v_\nu\right\rangle_1\left\langle v_\lambda\right\rangle_1\left\langle v_\mu\right\rangle_n ,$$

$$\int\limits_{(\infty)} v_\mu v_\lambda v_\nu f^{1,2} d^3v = P^2_{\mu\lambda\nu} + \left\langle v_\lambda\right\rangle_1 P^2_{\mu\nu} + \left\langle v_\mu\right\rangle_1 P^2_{\lambda\nu} + \left\langle v_\nu\right\rangle_1 P^2_{\mu\lambda} +$$

$$+ f^1\left\langle v_\nu\right\rangle_1\left\langle v_\mu\right\rangle_1\left\langle v_\lambda\right\rangle_1 .$$

Из выражения (26) следует, что

$$\int\limits_{(\infty)} v^2 v_\nu f^{1,2} d^3v = \operatorname{Tr} P^2_{\mu\mu\nu} + 2\left\langle v_\mu\right\rangle_1 P^2_{\mu\nu} + \left\langle v_\nu\right\rangle_1 \operatorname{Tr} P^2_{\mu\mu} + f^1\left\langle v_\nu\right\rangle_1\left\langle v\right\rangle_1^2 , \tag{27}$$

где след тензора Tr берется по повторяющимся индексам. Первое слагаемое в уравнении (25) с учетом выражения (21) примет вид

$$f^1\left\langle v^2\right\rangle_1 = \int\limits_{(\infty)} v^2 f^{1,2} d^3v = \operatorname{Tr} P^2_{\mu\mu} + f^1\left\langle v\right\rangle_1^2 . \tag{28}$$

Подставляя (28) и (27) в уравнение (25), получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{f^1}{2}\left\langle v\right\rangle_1^2 + \frac{1}{2}\operatorname{Tr} P^2_{\mu\mu}\right] + \frac{\partial}{\partial x_\lambda}\left[\frac{f^1}{2}\left\langle v\right\rangle_1^2\left\langle v_\lambda\right\rangle_1 + \frac{1}{2}\left\langle v_\lambda\right\rangle_1 \operatorname{Tr} P^2_{\mu\mu} + \right.$$

$$\left. + \left\langle v_\mu\right\rangle_1 P^2_{\mu\lambda} + \frac{1}{2}\operatorname{Tr} P^2_{\mu\mu\lambda}\right] = \int\limits_{(\infty)} f^{1,2}\left\langle \dot v_\mu\right\rangle_{1,2} v_\mu \, d^3v. \tag{29}$$

Полученное уравнение (29) описывает закон сохранения энергии. Слагаемое $(f^1/2)\langle v\rangle_1^2$ определяет плотность кинетической энергии, $(1/2)\mathrm{Tr}\,P^2_{\mu\mu}$ соответствует плотности внутренней энергии, $(f^1/2)\langle v\rangle_1^2\langle v_\lambda\rangle$ задает поток кинетической энергии, $(1/2)\langle v_\lambda\rangle\,\mathrm{Tr}\,P^2_{\mu\mu}$ — поток внутренней энергии, $\langle v_\mu\rangle\,P^2_{\mu\lambda}$ характеризует работу сил тяжести, $(1/2)\mathrm{Tr}\,P^2_{\mu\mu\lambda}$ — тепловой поток. Правая часть уравнения (29) $m\int\limits_{(\infty)} f^{1,2}\langle \dot v_\mu\rangle\, v_\mu\, d^3v$ является средним значением работы внешних сил [1].

Получим аналогичный результат для третьего уравнения из цепочки Власова. Умножим третье уравнение на компоненту ускорения $\dot v_\mu$ и проинтегрируем его по пространству ускорений

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[f^{1,2}\langle \dot v_\mu\rangle_{1,2}\right]+\frac{\partial}{\partial x_\lambda}\int\limits_{(\infty)} f^{1,2,3}\dot v_\mu v_\lambda d^3\dot v+\frac{\partial}{\partial v_\lambda}\int\limits_{(\infty)} f^{1,2,3}\dot v_\mu \dot v_\lambda d^3\dot v = \\ = f^{1,2}\langle \ddot v_\mu\rangle_{1,2}, \quad (30)$$

где слагаемое в правой части найдено интегрированием по частям выражения $\int\limits_{(\infty)} \dot v_\mu \frac{\partial}{\partial \dot v_\lambda}\left[f^{1,2,3}\langle \ddot v_\lambda\rangle_{1,2,3}\right] d^3\dot v$. Первый интеграл в уравнении (30) равен $\langle \dot v_\mu\rangle_{1,2} v_\lambda f^{1,2}$. Значение второго интеграла выразим через момент второго порядка для кинематических величин одного порядка. По аналогии с (21) тензор $P^3_{\mu\lambda}(1,2)$ для кинематических величин третьего порядка будет иметь вид

$$P^3_{\mu\lambda}(\mathbf{r},\mathbf{v},t)\overset{\text{det}}{=}P^3_{\mu\lambda}(1,2)\overset{\text{det}}{=}\int\limits_{(\infty)}\Big(\dot v_\mu-\langle \dot v_\mu\rangle_{1,2}\Big)\left(\dot v_\lambda-\langle \dot v_\lambda\rangle_{1,2}\right) f^{1,2,3}d^3\dot v = \\ = \int\limits_{(\infty)} \dot v_\mu \dot v_\lambda f^{1,2,3}d^3\dot v - f^{1,2}\langle \dot v_\mu\rangle_{1,2}\langle \dot v_\lambda\rangle_{1,2}. \quad (31)$$

Частную производную $\partial_t f^{1,2}$ выразим из второго уравнения Власова (1)

$$\frac{\partial f^{1,2}}{\partial t}=-v_\lambda\frac{\partial f^{1,2}}{\partial x_\lambda}-\frac{\partial}{\partial v_\lambda}\left[f^{1,2}\langle \dot v_\lambda\rangle_{1,2}\right]. \quad (32)$$

Подставляя (31) и (32) в уравнение (30), получим

$$\widehat{\pi}_{1,2}\langle \dot v_\mu\rangle_{1,2}=\left[\frac{\partial}{\partial t}+v_\lambda\frac{\partial}{\partial x_\lambda}+\langle \dot v_\lambda\rangle_{1,2}\frac{\partial}{\partial v_\lambda}\right]\langle \dot v_\mu\rangle_{1,2}=-\frac{1}{f^{1,2}}\frac{\partial P^3_{\mu\lambda}}{\partial v_\lambda}+\langle \ddot v_\mu\rangle_{1,2}. \quad (33)$$

Уравнение (33) является аналогом уравнения движения (23) для векторного поля потока ускорений. Отметим, что уравнения движения (23) и (33) имеют общую закономерность:

$$\begin{gathered}\left\langle \dot{v}_\mu \right\rangle_1 - \widehat{\pi}_1 \left\langle v_\mu \right\rangle_1 = \frac{1}{f^1}\frac{\partial P^2_{\mu\lambda}}{\partial x_\lambda},\\ \left\langle \ddot{v}_\mu \right\rangle_{1,2} - \widehat{\pi}_{1,2} \left\langle \dot{v}_\mu \right\rangle_{1,2} = \frac{1}{f^{1,2}}\frac{\partial P^3_{\mu\lambda}}{\partial v_\lambda}.\end{gathered} \tag{34}$$

В левой части выражений (34) находится разность между средней от производной и производной от средней, а в правой части — сила «давления». Таким образом, если «давление» в системе отсутствует, то имеем $\left\langle \dot{v}_\mu \right\rangle_1 = \widehat{\pi}_1 \left\langle v_\mu \right\rangle_1$ и $\left\langle \ddot{v}_\mu \right\rangle_{1,2} = \widehat{\pi}_{1,2} \left\langle \dot{v}_\mu \right\rangle_{1,2}$. Отсутствие давления характерно для системы точечных частиц с микроскопической функцией распределения:

$$\begin{gathered}f^{1,2,3}(\mathbf{r},\mathbf{v},\dot{\mathbf{v}},t) = \sum_{k=1}^{N} \delta\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}_k(t)\right)\delta\left(\mathbf{v}-\mathbf{v}_k(t)\right)\delta\left(\dot{\mathbf{v}}-\dot{\mathbf{v}}_k(t)\right),\\ f^{1,2}(\mathbf{r},\mathbf{v},t) = \sum_{k=1}^{N} \delta\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}_k(t)\right)\delta\left(\mathbf{v}-\mathbf{v}_k(t)\right),\end{gathered} \tag{35}$$

где N — число частиц; δ — дельта-функция Дирака; $\mathbf{r}_k(t)$, $\mathbf{v}_k(t)$, $\dot{\mathbf{v}}_k(t)$ — координата, скорость и ускорение соответственно для k-й частицы в момент времени t. Действительно, подставляя представление (35) для функции $f^{1,2}$ в определение тензора $P^2_{\mu\lambda}$ (1, 2), получим

$$\begin{gathered}P^2_{\mu\lambda} = \int\limits_{(\infty)} f^{1,2}\left(v_\mu - \left\langle v_\mu\right\rangle_1\right)\left(v_\lambda - \left\langle v_\lambda\right\rangle_1\right) d^3v = \\ = \sum_{j=1}^{N}\delta\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}_j\right)\left(v_\mu^j - \left\langle v_\mu\right\rangle_1\right)\left(v_\lambda^j - \left\langle v_\lambda\right\rangle_1\right) = \\ = \sum_{j=1}^{N}\delta\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}_j\right)\left(v_\mu^j - \frac{1}{f^1}\sum_{k=1}^{N} v_\mu^k\delta\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}_k\right)\right)\left(v_\lambda^j - \frac{1}{f^1}\sum_{s=1}^{N} v_\lambda^s\delta\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}_s\right)\right) = \\ = \frac{1}{f^1}\sum_{j=1}^{N}\delta\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}_j\right)\left(\sum_{k=1}^{N} v_\mu^j\delta\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}_k\right) - \sum_{k=1}^{N} v_\mu^k\delta\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}_k\right)\right)\times \\ \times\left(\sum_{s=1}^{N} v_\lambda^j\delta\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}_s\right) - \sum_{s=1}^{N} v_\lambda^s\delta\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}_s\right)\right), \\ P^2_{\mu\lambda} = \frac{1}{f^1}\sum_{j=1}^{N}\delta\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}_j\right)\sum_{k=1}^{N}\left(v_\mu^j - v_\mu^k\right)\delta\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}_k\right)\sum_{s=1}^{N}\left(v_\lambda^j - v_\lambda^s\right)\delta\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}_s\right).\end{gathered} \tag{36}$$

Если в выражении (36) $\mathbf{r} = \mathbf{r}_j$, то $k = s = j$, следовательно, $\left(v_\mu^j - v_\mu^k\right) = \left(v_\lambda^s - v_\lambda^s\right) = 0$. Таким образом, из (36) следует, что $P_{\mu\lambda}^2 = 0$. Аналогичное утверждение справедливо и для тензора $P_{\mu\lambda}^3 = 0$ с микроскопическим распределением (35).

Проведем сравнительный анализ уравнений движения (23) и (10). Для простоты рассмотрения будем считать, что система описывается одночастичной функцией плотности распределения вероятностей $f^{1,2}$. Таким образом, собственное электрическое и магнитное поля не действуют на саму частицу, т. е. частица находится во внешних полях. Левые части уравнений (23) и (10) совпадают, следовательно, должны совпадать и правые части. Величина $\langle \dot{v}_\mu \rangle_1$ в правой части уравнения (23) ответственна за внешнее воздействие на систему. Слагаемое $-(1/f^1)(\partial P_{\mu\lambda}^2/\partial x_\lambda)$ определяет плотность силы давления, которая согласно (21) связана с собственным распределением системы $f^{1,2}$. Рассмотрим правую часть уравнения (10). Сила Лоренца $q \langle \mathbf{v} \rangle_1 \times \mathbf{B}_1$ и вклад векторного потенциала $\partial_t \mathbf{A}_1$ можно отнести к внешней силе, соответствующей $\langle \dot{v}_\mu \rangle_1$. Потенциал U^1 также относится к внешнему воздействию. Следовательно, согласно выражениям (9)–(11) справедливо соотношение

$$-\frac{1}{m}\frac{\partial Q^1}{\partial x_\mu} = \frac{\hbar^2}{2m^2}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\frac{1}{\sqrt{f^1}}\frac{\partial^2}{\partial x_\nu \partial x_\nu}\sqrt{f^1} = -\frac{1}{f^1}\frac{\partial P_{\mu\lambda}^2}{\partial x_\lambda}, \tag{37}$$

т. е. квантовое давление Q^1 связано со статистическим тензором давления $P_{\mu\lambda}^2$. Оценим возможную величину квантового давления на примере квантовой системы, описываемой стационарным уравнением Шредингера (7). В этом случае фаза волновой функции $\varphi^1 = -(E/\hbar)t$ (величина E соответствует энергии квантовой системы) и согласно (6) средний поток вероятностей равен $\langle \mathbf{v} \rangle_1 = 0$. Из уравнения Гамильтона–Якоби (8) следует, что $E = U^1 + Q^1$. Отсюда с учетом (37) получаем $-(\partial U^1/\partial x_\mu) = (m/f^1)(\partial P_{\mu\lambda}^2/\partial x_\lambda)$. Сила квантового давления уравновешивается силой внешнего потенциала, которая удерживает эту частицу. В классическом пределе ($\hbar \ll 1$) частица является точечной с однозначно определенными координатой $\mathbf{r}(t)$ и скоростью $\mathbf{v}(t)$. Точечной частице соответствует микроскопическая функция распределения типа (35), для которой согласно (36) тензор давления $P_{\mu\lambda}^2 = 0$.

Таким образом, на классических масштабах давление (квантовое) в уравнениях (23) и (29) пренебрежимо мало, что согласно уравнению (34) приводит к аппроксимации Власова (16), (17)

$$\langle \dot{\mathbf{v}} \rangle_1 = \widehat{\pi}_1 \langle \mathbf{v} \rangle_1 = \frac{q}{m}\left(\mathbf{E}_1 + \langle \mathbf{v} \rangle_1 \times \mathbf{B}_1\right), \tag{38}$$

где потенциал $V^1 = U^1$ (9), (11).

Рассмотрим построение аппроксимации для векторного поля ускорений второго порядка $\langle \ddot{v}_\mu \rangle_{1,2,3}$. Воспользуемся уравнением Лоренца–Абрахама–Дирака (11). Уравнение (11) записано для точечной частицы, поэтому по аналогии с аппроксимацией Власова (17) рассмотрим два возможных варианта:

$$\tau_0 \left\langle \ddot{v}_\mu \right\rangle_{1,2,3} = \tau_0 \left\langle \ddot{v}_\mu \right\rangle_{1,2} = \left\langle \dot{v}_\mu \right\rangle_{1,2} - \frac{q}{m} \left(E_1^\mu + \varepsilon_{\mu\lambda\nu} v_\lambda B_1^\nu \right), \tag{39}$$

$$\tau_0 \left\langle \ddot{v}_\mu \right\rangle_{1,2,3} = \dot{v}_\mu - \frac{q}{m} \left(E_1^\mu + \varepsilon_{\mu\lambda\nu} v_\lambda B_1^\nu \right), \tag{40}$$

где $\varepsilon_{\mu\lambda\nu}$ — символы Леви-Чивиты. Усреднение по пространству ускорений аппроксимации (40) дает аппроксимацию (39). Отметим, что аппроксимация (40) в отличие от (39) содержит источники диссипаций (5) $Q_3^{1,2,3} = 3/\tau_0$ вдоль фазовой траектории для функции распределения $f^{1,2,3}$. С учетом (39) уравнение (33) примет вид

$$m\tau_0 \widehat{\pi}_{1,2} \left\langle \dot{v}_\mu \right\rangle_{1,2} = m \left\langle \dot{v}_\mu \right\rangle_{1,2} - q \left(E_1^\mu + \varepsilon_{\mu\lambda\nu} v_\lambda B_1^\nu \right) - \frac{m}{f^{1,2}} \frac{\partial P_{\mu\lambda}^3}{\partial v_\lambda}. \tag{41}$$

В частном случае для микроскопического распределения (35) $P_{\mu\lambda}^3 = 0$ и уравнение (41) переходит в уравнение для точечной частицы (11). При отсутствии излучения ($\tau_0 = 0$) уравнение (41) после интегрирования по пространству скоростей перейдет в аппроксимацию Власова (38).

В общем случае оценка величины тензора $P_{\mu\lambda}^3$ в уравнении (41) требует отдельного исследования. Для использования подхода, изложенного при оценке тензора $P_{\mu\lambda}^2$, необходимо построить электродинамический аналог уравнения (33). Построение такого аналога будет произведено в следующем разделе.

2. ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ

Уравнению движения в гидрогазодинамическом приближении (23) соответствует электродинамический аналог уравнения движения (10). Логично найти соответствующую пару для уравнения (33). Построение такого уравнения выполним в рамках подхода, изложенного в работах [3, 35].

Пусть функция распределения $f^{1,2}$ является положительной $f^{1,2} = \left| \Psi^{1,2} \right|^2 \geqslant 0$, $\Psi^{1,2} \in \mathbb{C}$, и справедливо представление

$$\left\langle \mathbf{\dot{v}} \right\rangle_{1,2} = -\alpha_2 \nabla_v \Phi^{1,2} + \gamma_2 \mathbf{A}_{1,2}, \tag{42}$$

где $-\alpha_2 \nabla_v \Phi^{1,2}$ — потенциальная, а $\gamma_2 \mathbf{A}_{1,2}$ — вихревая компоненты векторного поля $\left\langle \mathbf{\dot{v}} \right\rangle_{1,2}$; α_2, γ_2 — некоторые постоянные величины. Подставляя представление (42) во второе уравнение Власова (1), получим

$$\overline{\Psi}^{1,2} \left[\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla_r + i\alpha_2 \Delta_v + \gamma_2 \mathbf{A}_{1,2} \nabla_v - \frac{i}{4\alpha_2} \left| \gamma_2 \mathbf{A}_{1,2} \right|^2 \right] \Psi^{1,2} +$$
$$+ \Psi^{1,2} \left[\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla_r - i\alpha_2 \Delta_v + \gamma_2 \mathbf{A}_{1,2} \nabla_v + \frac{i}{4\alpha_2} \left| \gamma_2 \mathbf{A}_{1,2} \right|^2 \right] \overline{\Psi}^{1,2} = 0, \tag{43}$$

где в силу (42) учтено, что $\langle\dot{\mathbf{v}}\rangle_{1,2} = i\alpha_2\nabla_v \ln\left(\Psi^{1,2}/\overline{\Psi}^{1,2}\right) + \gamma_2\mathbf{A}_{1,2}$. Отметим, что фаза $\varphi^{1,2}$ комплексной функции $\Psi^{1,2} = \sqrt{f^{1,2}}\exp\left(i\varphi^{1,2}\right)$ является свободным параметром, который в рамках данного подхода полагается равным скалярному потенциалу, т. е. $2\varphi^{1,2} \stackrel{\text{det}}{=} \Phi^{1,2} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

Перепишем выражение (43) через операторы $\Lambda_{1,2}$ и $L_{1,2}$:

$$\begin{gathered}\Lambda_{1,2} + \overline{\Lambda}_{1,2} = 2\mathrm{Re}\,\Lambda_{1,2} = 0, \quad \Lambda_{1,2} \stackrel{\text{det}}{=} \overline{\Psi}^{1,2} L_{1,2}\Psi^{1,2},\\ L_{1,2} \stackrel{\text{det}}{=} \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla_r + i\alpha_2\Delta_v + \gamma_2\mathbf{A}_{1,2}\nabla_v - \frac{i}{4\alpha_2}\left|\gamma_2\mathbf{A}_{1,2}\right|^2.\end{gathered} \tag{44}$$

Из выражения (44) следует, что величина $\Lambda_{1,2} = iu_{1,2}$, где $u_{1,2} \in \mathbb{R}$, т. е.

$$\overline{\Psi}^{1,2} L_{1,2}\Psi^{1,2} = iu_{1,2} \Rightarrow L_{1,2}\Psi^{1,2} = -i\beta_2 U^{1,2}\Psi^{1,2}, \tag{45}$$

где $-\beta_2 U^{1,2} \stackrel{\text{det}}{=} u_{1,2}/\left|\Psi^{1,2}\right|^2$ — действительная величина. С учетом выражения (44) уравнение (45) примет вид

$$\begin{aligned}\frac{i}{\beta_2}\frac{\partial\Psi^{1,2}}{\partial t} = -\alpha_2\beta_2\left[\widehat{p}_2^2 - \frac{\gamma_2}{\alpha_2\beta_2}\mathbf{A}_{1,2}\widehat{p}_2\right]\Psi^{1,2} - \frac{1}{4\alpha_2\beta_2}\left|\gamma_2\mathbf{A}_{1,2}\right|^2\Psi^{1,2} + \\ + \frac{\beta_1}{\beta_2}\mathbf{v}\widehat{p}_1\Psi^{1,2} + U^{1,2}\Psi^{1,2},\end{aligned} \tag{46}$$

где $\widehat{p}_2 = -(i/\beta_2)\nabla_v$. Учитывая, что $\left(\widehat{p}^2 - \lambda\mathbf{A}\widehat{p} + \frac{\lambda^2}{4}\left|\mathbf{A}\right|^2\right)\Psi = \left(\widehat{p} - \frac{\lambda}{2}\mathbf{A}\right)^2\Psi$, уравнение (46) примет вид

$$\frac{i}{\beta_2}\partial_1\Psi^{1,2} = -\alpha_2\beta_2\left(\widehat{p}_2 - \frac{\gamma_2}{2\alpha_2\beta_2}\mathbf{A}_{1,2}\right)^2\Psi^{1,2} + U^{1,2}\Psi^{1,2}. \tag{47}$$

Полученное уравнение (47) является в некотором смысле аналогом уравнения Шредингера (7). Построим аналог уравнения Гамильтона–Якоби (8). Умножая уравнение (46) на $\overline{\Psi}^{1,2}$, получим

$$\begin{aligned}\beta_2 U^{1,2}\left|\Psi^{1,2}\right|^2 = i\overline{\Psi}^{1,2}\frac{\partial\Psi^{1,2}}{\partial t} - \alpha_2\overline{\Psi}^{1,2}\Delta_v\Psi^{1,2} + \\ + i\mathbf{v}\overline{\Psi}^{1,2}\nabla_r\Psi^{1,2} + i\gamma_2\overline{\Psi}^{1,2}\mathbf{A}_{1,2}\nabla_v\Psi^{1,2} + \frac{1}{4\alpha_2}\left|\gamma_2\mathbf{A}_{1,2}\right|^2\left|\Psi^{1,2}\right|^2.\end{aligned} \tag{48}$$

Справедливы следующие соотношения:

$$\begin{gathered}\nabla_r\Psi^{1,2} = \mathrm{e}^{i\varphi^{1,2}}\left(\nabla_r\left|\Psi^{1,2}\right| + i\left|\Psi^{1,2}\right|\nabla_r\varphi^{1,2}\right),\\ \nabla_v\Psi^{1,2} = \mathrm{e}^{i\varphi^{1,2}}\left(\nabla_v\left|\Psi^{1,2}\right| + i\left|\Psi^{1,2}\right|\nabla_v\varphi^{1,2}\right),\\ \mathrm{e}^{-i\varphi^{1,2}}\Delta_v\Psi^{1,2} = 2i\nabla_v\varphi^{1,2}\nabla_v\left|\Psi^{1,2}\right| + \Delta_v\left|\Psi^{1,2}\right| - \left|\Psi^{1,2}\right|\left|\nabla_v\varphi^{1,2}\right|^2 + \\ + i\left|\Psi^{1,2}\right|\Delta_v\varphi^{1,2}.\end{gathered} \tag{49}$$

Подставляя (49) в (48), получим

$$\beta_2 U^{1,2}\left|\Psi^{1,2}\right|^2=\frac{i}{2}\left[\frac{\partial\left|\Psi^{1,2}\right|^2}{\partial t}+\left(-\alpha_2\nabla_v\Phi^{1,2}+\gamma_2\mathbf{A}_{1,2},\nabla_v\left|\Psi^{1,2}\right|^2\right)+\right.$$
$$\left.+\mathbf{v}\nabla_r\left|\Psi^{1,2}\right|^2-\alpha_2\left|\Psi^{1,2}\right|^2\Delta_v\Phi^{1,2}\right]+$$
$$+\left|\Psi^{1,2}\right|^2\left[-\frac{1}{2}\frac{\partial\Phi^{1,2}}{\partial t}-\alpha_2\frac{\Delta_v\left|\Psi^{1,2}\right|}{\left|\Psi^{1,2}\right|}+\frac{\alpha_2}{4}\left|\nabla_v\Phi^{1,2}\right|^2-\frac{1}{2}\mathbf{v}\nabla_r\Phi^{1,2}-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}\gamma_2\mathbf{A}_{1,2}\nabla_v\Phi^{1,2}+\frac{1}{4\alpha_2}\left|\gamma_2\mathbf{A}_{1,2}\right|^2\right].\qquad(50)$$

Покажем, что мнимая часть выражения (50) равна нулю. Действительно,

$$\operatorname{Im}\left(\beta_2 U^{1,2}\left|\Psi^{1,2}\right|^2\right)=\frac{\partial f^{1,2}}{\partial t}+\langle\dot{\mathbf{v}}\rangle_{1,2}\nabla_v f^{1,2}+\mathbf{v}\nabla_r f^{1,2}+$$
$$+f^{1,2}\left(\nabla_v,-\alpha_2\nabla_v\Phi^{1,2}+\gamma_2\mathbf{A}_{1,2}\right)=$$
$$=\frac{\partial f^{1,2}}{\partial t}+\mathbf{v}\nabla_r f^{1,2}+\operatorname{div}_v\left[f^{1,2}\langle\dot{\mathbf{v}}\rangle_{1,2}\right]=0.$$

В результате выражение (50) примет вид

$$-\frac{1}{2\beta_2}\frac{\partial\Phi^{1,2}}{\partial t}=-\frac{1}{4\alpha_2\beta_2}\left(\left|\alpha_2\nabla_v\Phi^{1,2}\right|^2-2\gamma_2\mathbf{A}_{1,2}\alpha_2\nabla_v\Phi^{1,2}+\left|\gamma_2\mathbf{A}_{1,2}\right|^2\right)+$$
$$+\frac{1}{2\alpha_2\beta_2}\mathbf{v}\alpha_2\nabla_r\Phi^{1,2}+\frac{\alpha_2}{\beta_2}\frac{\Delta_v\left|\Psi^{1,2}\right|}{\left|\Psi^{1,2}\right|}+U^{1,2}-\frac{1}{2\beta_2}\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{v}\nabla_r\right)\Phi^{1,2},$$
$$-\frac{1}{2\beta_2}\frac{\partial\Phi^{1,2}}{\partial t}-\frac{1}{2\beta_2}\mathbf{v}\nabla_r\Phi^{1,2}=\qquad(51)$$
$$=-\frac{1}{4\alpha_2\beta_2}\left|-\alpha_2\nabla_v\Phi^{1,2}+\gamma_2\mathbf{A}_{1,2}\right|^2+\frac{\alpha_2}{\beta_2}\frac{\Delta_v\left|\Psi^{1,2}\right|}{\left|\Psi^{1,2}\right|}+U^{1,2},$$
$$-\frac{1}{2\beta_2}\partial_1\Phi^{1,2}=-\frac{1}{4\alpha_2\beta_2}\left|\langle\dot{\mathbf{v}}\rangle_{1,2}\right|^2+V^{1,2}=H^{1,2},$$
$$V^{1,2}=U^{1,2}+Q^{1,2},\qquad Q^{1,2}=\frac{\alpha_2}{\beta_2}\frac{\Delta_v\left|\Psi^{1,2}\right|}{\left|\Psi^{1,2}\right|}.\qquad(52)$$

Уравнение (51) и выражения (52) имеют схожую структуру с уравнением Гамильтона–Якоби (8) и выражениями (9) соответственно. На основании уравнения (51) получим уравнение движения:

$$-2\alpha_2\nabla_v\partial_1\varphi^{1,2}=-\alpha_2\partial_1\nabla_v\Phi^{1,2}-\alpha_2\nabla_r\Phi^{1,2}=2\alpha_2\beta_2\nabla_v H^{1,2},\qquad(53)$$

где учтено, что

$$
\begin{aligned}
-\alpha_2\frac{\partial}{\partial v_\lambda}\partial_1\Phi^{1,2} &= -\alpha_2\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\Phi^{1,2}}{\partial v_\lambda} - \alpha_2\frac{\partial}{\partial v_\lambda}\left(v_\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu}\Phi^{1,2}\right) = \\
&= -\alpha_2\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\Phi^{1,2}}{\partial v_\lambda} - \alpha_2\frac{\partial v_\mu}{\partial v_\lambda}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\Phi^{1,2} - \alpha_2\left(v_\mu\frac{\partial}{\partial v_\lambda}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\Phi^{1,2}\right) = \\
&= -\alpha_2\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu}\right)\frac{\partial\Phi^{1,2}}{\partial v_\lambda} - \alpha_2\frac{\partial}{\partial x_\lambda}\Phi^{1,2}. \quad (54)
\end{aligned}
$$

Из выражения (54) следует, что

$$\partial_1\left(\langle\dot{\mathbf{v}}\rangle_{1,2} - \gamma_2\mathbf{A}_{1,2}\right) = \alpha_2\nabla_r\Phi^{1,2} + 2\alpha_2\beta_2\nabla_v H^{1,2}, \quad (55)$$

где

$$
\begin{gathered}
2\alpha_2\beta_2\nabla_v H^{1,2} = -\langle\dot{\mathbf{v}}\rangle_{1,2}\nabla_v\langle\dot{\mathbf{v}}\rangle_{1,2} - \gamma_2\langle\dot{\mathbf{v}}\rangle_{1,2}\times\mathbf{B}_{1,2} + 2\alpha_2\beta_2\nabla_v V^{1,2}, \\
\mathbf{B}_{1,2} = \mathrm{rot}_v\mathbf{A}_{1,2},
\end{gathered}
$$

в результате

$$
\begin{aligned}
&\left(\partial_1 + \langle\dot{\mathbf{v}}\rangle_{1,2}\nabla_v\right)\langle\dot{\mathbf{v}}\rangle_{1,2} = \\
&\qquad = \gamma_2\partial_1\mathbf{A}_{1,2} + \alpha_2\nabla_r\Phi^{1,2} + 2\alpha_2\beta_2\nabla_v V^{1,2} - \gamma_2\langle\dot{\mathbf{v}}\rangle_{1,2}\times\mathbf{B}_{1,2}, \\
&\qquad \widehat{\pi}_{1,2}\langle\dot{\mathbf{v}}\rangle_{1,2} = -\gamma_2\left(\mathbf{E}_{1,2} + \langle\dot{\mathbf{v}}\rangle_{1,2}\times\mathbf{B}_{1,2}\right), \quad (56)
\end{aligned}
$$

$$\mathbf{E}_{1,2} \stackrel{\mathrm{det}}{=} -\partial_1\mathbf{A}_{1,2} - \frac{\alpha_2}{\gamma_2}\left(\nabla_r\Phi^{1,2} + 2\beta_2\nabla_v V^{1,2}\right), \quad \mathrm{div}_v\,\mathbf{B}_{1,2} = 0. \quad (57)$$

Уравнение движения (56) является искомым парным уравнением для уравнения (33). Определим, какими уравнениями связаны поля $\mathbf{E}_{1,2}$ и $\mathbf{B}_{1,2}$. Вычислим $\mathrm{rot}_v\,\mathbf{E}_{1,2}$, используя выражение (57):

$$\mathrm{rot}_v\,\mathbf{E}_{1,2} = -\mathrm{rot}_v\,\partial_1\mathbf{A}_{1,2} - \frac{\alpha_2}{\gamma_2}\mathrm{rot}_v\,\nabla_r\Phi^{1,2}, \quad (58)$$

где правая часть (58) требует дополнительных преобразований. Преобразуем по отдельности каждое слагаемое в правой части (58). Используя определение производной ∂_1 для $\mathrm{rot}_v\,\partial_1\mathbf{A}_{1,2}$, получим

$$\mathrm{rot}_v\,\partial_1\mathbf{A}_{1,2} = \partial_0\mathbf{B}_{1,2} + \mathrm{rot}_v\left(\mathbf{v}\nabla_r\mathbf{A}_{1,2}\right), \quad (59)$$

где величина $\mathrm{rot}_v\left(\mathbf{v}\nabla_r\mathbf{A}_{1,2}\right)$ может быть представлена как

$$
\begin{aligned}
\mathrm{rot}_v\left(\mathbf{v}\nabla_r\mathbf{A}_{1,2}\right) = [\nabla_v, (\mathbf{v},\nabla_r)\mathbf{A}_{1,2}] = \left[\nabla_v\underline{(\mathbf{v},\nabla_r)}, \mathbf{A}_{1,2}\right] + (\mathbf{v},\nabla_r)\left[\nabla_v, \underline{\mathbf{A}_{1,2}}\right] = \\
= [\nabla_r, \mathbf{A}_{1,2}] + (\mathbf{v},\nabla_r)\mathbf{B}_{1,2}, \quad (60)
\end{aligned}
$$

$$\mathrm{rot}_v\left(\mathbf{v}\nabla_r\mathbf{A}_{1,2}\right) = \mathrm{rot}_r\mathbf{A}_{1,2} + (\mathbf{v},\nabla_r)\,\mathbf{B}_{1,2},$$

где

$$\nabla_v(\mathbf{v},\nabla_r) = \nabla_r. \quad (61)$$

На основании результата (60) выражение (59) примет вид

$$\mathrm{rot}_v\, \partial_1 \mathbf{A}_{1,2} = \partial_0 \mathbf{B}_{1,2} + (\mathbf{v}, \nabla_r)\, \mathbf{B}_{1,2} + \mathrm{rot}_r\, \mathbf{A}_{1,2} = \partial_1 \mathbf{B}_{1,2} + \mathrm{rot}_r\, \mathbf{A}_{1,2}. \quad (62)$$

Преобразуем второе слагаемое, стоящее в правой части выражения (58):

$$\mathrm{rot}_v\, \nabla_r \Phi^{1,2} = \left[\nabla_v, \nabla_r \underline{\Phi^{1,2}}\right] = -\left[\nabla_r, \nabla_v \Phi^{1,2}\right] = -\mathrm{rot}_r\, \nabla_v \Phi^{1,2}. \quad (63)$$

Подставляя выражения (62) и (63) в уравнение (58), получим представление

$$\mathrm{rot}_v\, \mathbf{E}_{1,2} = -\partial_1 \mathbf{B}_{1,2} - \frac{1}{\gamma_2} \mathrm{rot}_r \left(-\alpha_2 \nabla_v \Phi^{1,2} + \gamma_2 \mathbf{A}_{1,2}\right) = \\ = -\partial_1 \mathbf{B}_{1,2} - \frac{1}{\gamma_2} \mathrm{rot}_r \left\langle \dot{\mathbf{v}} \right\rangle_{1,2}, \quad (64)$$

которое в частном случае при $\mathrm{rot}_r \left\langle \dot{\mathbf{v}} \right\rangle_{1,2} = 0$ переходит в уравнение

$$\mathrm{rot}_v\, \mathbf{E}_{1,2} = -\partial_1 \mathbf{B}_{1,2}. \quad (65)$$

Преобразуем второе уравнение Власова. Представим функцию плотности вероятностей $f^{1,2}$ в виде

$$f^{1,2} \stackrel{\mathrm{det}}{=} \mathrm{div}_r\, \mathbf{D}^1_{1,2} + \mathrm{div}_v\, \mathbf{D}^2_{1,2}, \quad (66)$$

где $\mathbf{D}^1_{1,2}, \mathbf{D}^2_{1,2}$ — некоторые поля. Подставляя представление (66) во второе уравнение Власова, получим

$$\partial_0 f^{1,2} + \mathbf{v} \nabla_r f^{1,2} + \mathrm{div}_v \left[f^{1,2} \left\langle \dot{\mathbf{v}} \right\rangle_{1,2}\right] = 0 \;\Rightarrow\; \partial_1 f^{1,2} + \mathrm{div}_v\, \mathbf{J}_{1,2} = 0, \\ \partial_1\, \mathrm{div}_v\, \mathbf{D}^2_{1,2} + \partial_1\, \mathrm{div}_r\, \mathbf{D}^1_{1,2} + \mathrm{div}_v\, \mathbf{J}_{1,2} = 0, \quad (67)$$

где $\mathbf{J}_{1,2} \stackrel{\mathrm{det}}{=} f^{1,2} \left\langle \dot{\mathbf{v}} \right\rangle_{1,2}$. Преобразуем выражение $\partial_1 \mathrm{div}_v\, \mathbf{D}^2_{1,2}$:

$$\partial_1\, \mathrm{div}_v\, \mathbf{D}^2_{1,2} = \mathrm{div}_v\, \partial_0 \mathbf{D}^2_{1,2} + \mathbf{v} \nabla_r \mathrm{div}_v\, \mathbf{D}^2_{1,2}. \quad (68)$$

Вычислим слагаемое $\mathbf{v} \nabla_r\, \mathrm{div}_v\, \mathbf{D}^2_{1,2}$ в правой части уравнения (68):

$$\frac{\partial}{\partial v_\lambda} \left(v_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} D_\lambda\right) = \left(\frac{\partial}{\partial v_\lambda} v_\mu\right) \frac{\partial}{\partial x_\mu} D_\lambda + v_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\partial}{\partial v_\lambda} D_\lambda = \\ = \frac{\partial}{\partial x_\lambda} D_\lambda + v_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\partial}{\partial v_\lambda} D_\lambda,$$

отсюда

$$v_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\partial}{\partial v_\lambda} D_\lambda = \frac{\partial}{\partial v_\lambda} \left(v_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} D_\lambda\right) - \frac{\partial}{\partial x_\lambda} D_\lambda. \quad (69)$$

Следовательно,

$$(\mathbf{v}, \nabla_r) \left(\nabla_v, \mathbf{D}^2_{1,2}\right) = \left(\nabla_v, (\mathbf{v}, \nabla_r)\, \mathbf{D}^2_{1,2}\right) - \left(\nabla_r, \mathbf{D}^2_{1,2}\right). \quad (70)$$

Подставляя выражение (70) в (68), получим

$$\partial_1 \operatorname{div}_v \mathbf{D}^2_{1,2} = \operatorname{div}_v \partial_0 \mathbf{D}^2_{1,2} + \operatorname{div}_v \left[(\mathbf{v}, \nabla_r)\, \mathbf{D}^2_{1,2} \right] - \operatorname{div}_r \mathbf{D}^2_{1,2} = \\ = \operatorname{div}_v \left[\partial_0 \mathbf{D}^2_{1,2} + (\mathbf{v}, \nabla_r)\, \mathbf{D}^2_{1,2} \right] - \operatorname{div}_r \mathbf{D}^2_{1,2}, \quad (71) \\ \partial_1 \operatorname{div}_v \mathbf{D}^2_{1,2} = \operatorname{div}_v \partial_1 \mathbf{D}^2_{1,2} - \operatorname{div}_r \mathbf{D}^2_{1,2}.$$

Найдем выражение $\partial_1 \operatorname{div}_r \mathbf{D}^1_{1,2}$:

$$\partial_1 \operatorname{div}_r \mathbf{D}^1_{1,2} = \operatorname{div}_r \partial_0 \mathbf{D}^1_{1,2} + (\mathbf{v}, \nabla_r) \operatorname{div}_r \mathbf{D}^1_{1,2} = \\ = \operatorname{div}_r \partial_0 \mathbf{D}^1_{1,2} + \operatorname{div}_r\, (\mathbf{v}, \nabla_r)\, \mathbf{D}^1_{1,2}, \quad (72) \\ \partial_1 \operatorname{div}_r \mathbf{D}^1_{1,2} = \operatorname{div}_r \partial_1 \mathbf{D}^1_{1,2}.$$

В результате уравнение (67) с учетом (71) и (72) примет вид

$$\operatorname{div}_v \left(\partial_1 \mathbf{D}^2_{1,2} + \mathbf{J}_{1,2} \right) + \operatorname{div}_r \left(\partial_1 \mathbf{D}^1_{1,2} - \mathbf{D}^2_{1,2} \right) = 0. \quad (73)$$

В определении (66) есть свобода в выборе полей $\mathbf{D}^1_{1,2}$ и $\mathbf{D}^2_{1,2}$, поэтому определим поле $\mathbf{D}^1_{1,2}$ через $\mathbf{D}^2_{1,2}$:

$$\partial_1 \mathbf{D}^1_{1,2} \overset{\text{det}}{=} \mathbf{D}^2_{1,2}. \quad (74)$$

С учетом (74) выражение (73) примет вид

$$\partial_1 \mathbf{D}^2_{1,2} + \mathbf{J}_{1,2} = \operatorname{rot}_v \mathbf{H}_{1,2}, \quad (75)$$

где $\mathbf{H}_{1,2}$ — некоторое поле. Таким образом, на основании уравнений (57), (64), (66), (74), (75) получена следующая система уравнений:

$$\begin{cases} \operatorname{div}_v \mathbf{B}_{1,2} = 0, \\ \operatorname{div}_r \mathbf{D}^1_{1,2} + \operatorname{div}_v \mathbf{D}^2_{1,2} = f^{1,2}, \;\; \partial_1 \mathbf{D}^1_{1,2} \overset{\text{det}}{=} \mathbf{D}^2_{1,2}, \\ \partial_1 \mathbf{D}^2_{1,2} + \mathbf{J}_{1,2} = \operatorname{rot}_v \mathbf{H}_{1,2}, \\ \operatorname{rot}_v \mathbf{E}_{1,2} = -\partial_1 \mathbf{B}_{1,2} - \dfrac{1}{\gamma_2} \operatorname{rot}_r \langle \dot{\mathbf{v}} \rangle_{1,2}. \end{cases} \quad (76)$$

Система (76) получена для второго уравнения Власова и является аналогом уравнений Максвелла (13), (14) для первого уравнения Власова. Система уравнений (76) связана с уравнениями движения (51) и (56) и аналогом уравнения Шредингера (47):

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{2\beta_2} \partial_1 \Phi^{1,2} = -\dfrac{1}{4\alpha_2\beta_2} \left| \langle \dot{\mathbf{v}} \rangle_{1,2} \right|^2 + V^{1,2} = H^{1,2}, \\ \widehat{\pi}_{1,2} \langle \dot{\mathbf{v}} \rangle_{1,2} = -\gamma_2 \left(\mathbf{E}_{1,2} + \langle \dot{\mathbf{v}} \rangle_{1,2} \times \mathbf{B}_{1,2} \right), \\ \dfrac{i}{\beta_2} \partial_1 \Psi^{1,2} = -\alpha_2\beta_2 \left(\widehat{p}_2 - \dfrac{\gamma_2}{2\alpha_2\beta_2} \mathbf{A}_{1,2} \right)^2 \Psi^{1,2} + U^{1,2} \Psi^{1,2}, \end{cases} \quad (77)$$

где

$$\mathbf{E}_{1,2} \stackrel{\text{det}}{=} -\partial_1 \mathbf{A}_{1,2} - \frac{\alpha_2}{\gamma_2}\left(\nabla_r \Phi^{1,2} + 2\beta_2 \nabla_v V^{1,2}\right), \quad \mathbf{B}_{1,2} = \operatorname{rot}_v \mathbf{A}_{1,2},$$
$$V^{1,2} = U^{1,2} + Q^{1,2}, \quad Q^{1,2} = \frac{\alpha_2}{\beta_2}\frac{\Delta_v \left|\Psi^{1,2}\right|}{\left|\Psi^{1,2}\right|}. \tag{78}$$

Рассмотрим аппроксимацию Власова (17) для систем уравнений (76), (77). Из сравнения выражений (17) и (42) следует, что

$$\Phi^{1,2}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \frac{\gamma_1}{\alpha_2}(\mathbf{E}_1, \mathbf{v}), \quad \mathbf{A}_{1,2}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = -\frac{\gamma_1}{\gamma_2}[\mathbf{v}, \mathbf{B}_1], \tag{79}$$

отсюда

$$\mathbf{B}_{1,2} = -\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\operatorname{rot}_v [\mathbf{v}, \mathbf{B}_1] = -\frac{\gamma_1}{\gamma_2}(\mathbf{B}_1, \nabla_v)\,\mathbf{v} + \frac{\gamma_1}{\gamma_2}\mathbf{B}_1(\nabla_v, \mathbf{v}) =$$
$$= -\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\mathbf{B}_1 + 3\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\mathbf{B}_1, \tag{80}$$
$$\mathbf{B}_{1,2} = 2\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\mathbf{B}_1;$$

$$\operatorname{rot}_r \langle\dot{\mathbf{v}}\rangle_{1,2} = -\gamma_1 \operatorname{rot}_r \mathbf{E}_1 - \gamma_1 \operatorname{rot}_r [\mathbf{v}, \mathbf{B}_1] =$$
$$= \gamma_1 \frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t} - \gamma_1 \mathbf{v}(\nabla_r, \mathbf{B}_1) + \gamma_1 (\mathbf{v}, \nabla_r)\,\mathbf{B}_1, \tag{81}$$
$$\operatorname{rot}_r \langle\dot{\mathbf{v}}\rangle_{1,2} = \gamma_1 \partial_1 \mathbf{B}_1.$$

Подставляя выражения (80) и (81) в четвертое уравнение (76) или в (64), получим

$$\operatorname{rot}_v \mathbf{E}_{1,2} = -3\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\partial_1 \mathbf{B}_1. \tag{82}$$

Отметим, что аналогичный результат (82) получается, если вычислить величину $\mathbf{E}_{1,2}$ по формуле (78) с учетом выражений (79). При этом величина потенциала $V^{1,2}$ находится из уравнения Гамильтона–Якоби (51) (или из первого уравнения в системе (77)). Найдем выражение для поля $\mathbf{E}_{1,2}$ и потенциала $V^{1,2}$:

$$V^{1,2} = -\frac{\gamma_1}{2\alpha_2\beta_2}(\partial_1 \mathbf{E}_1, \mathbf{v}) + \frac{\gamma_1^2}{4\alpha_2\beta_2}\left|\mathbf{E}_1 + \mathbf{v} \times \mathbf{B}_1\right|^2, \tag{83}$$

где учтено, что

$$\partial_1 \Phi^{1,2} = \frac{\gamma_1}{\alpha_2}(\partial_0 \mathbf{E}_1, \mathbf{v}) + \frac{\gamma_1}{\alpha_2} v_\mu v_\lambda \frac{\partial E_1^\mu}{\partial x_\lambda} = \frac{\gamma_1}{\alpha_2}(\partial_0 \mathbf{E}_1 + (\mathbf{v}, \nabla_r)\,\mathbf{E}_1, \mathbf{v}) =$$
$$= \frac{\gamma_1}{\alpha_2}(\partial_1 \mathbf{E}_1, \mathbf{v}).$$

Для нахождения поля $\mathbf{E}_{1,2}$ произведем промежуточные выкладки. Обозначим $\mathbf{P} = \mathbf{v} \times \mathbf{B}_1$, тогда

$$\begin{gathered}\operatorname{rot}_v \mathbf{P} = [\nabla_v, [\mathbf{v}, \mathbf{B}_1]] = (\mathbf{B}_1, \nabla_v)\, \mathbf{v} - \mathbf{B}_1 (\nabla_v, \mathbf{v}) = \mathbf{B}_1 - 3\mathbf{B}_1 = -2\mathbf{B}_1, \\ \nabla_v |\mathbf{P}|^2 = 2\,[\mathrm{P}, [\nabla_v, \mathbf{P}]] + 2\,(\mathbf{P}, \nabla_v)\, \mathbf{P} = 4\,[\mathbf{B}_1, [\mathbf{v}, \mathbf{B}_1]] + 2\,(\mathbf{P}, \nabla_v)\, \mathbf{P}, \\ \nabla_v |\mathbf{P}|^2 = 4\mathbf{v}B_1^2 - 4\mathbf{B}_1 (\mathbf{v}, \mathbf{B}_1) + 2\,(\mathbf{P}, \nabla_v)\, \mathbf{P}.\end{gathered} \tag{84}$$

Учтем, что $(\mathbf{P}, \nabla_v)\, \mathrm{P}_\mu = \varepsilon_{\mu\lambda\nu} B_\nu \mathrm{P}_s (\partial/\partial v_s) v_\lambda = \varepsilon_{\mu\lambda\nu} B_\nu \mathrm{P}_\lambda$, т. е. $(\mathbf{P}, \nabla_v)\, \mathbf{P} = [\mathbf{P}, \mathbf{B}_1]$, следовательно,

$$\begin{aligned}\nabla_v |\mathbf{E}_1 + \mathbf{P}|^2 &= \nabla_v \left(E_1^2 + 2\mathbf{E}_1\mathbf{P} + |\mathbf{P}|^2 \right) = \\ &= 2\nabla_v (\mathbf{v}, \mathbf{B}_1 \times \mathbf{E}_1) + 4\mathbf{v}B_1^2 - 4\mathbf{B}_1 (\mathbf{v}, \mathbf{B}_1) + 2\,(\mathbf{P}, \nabla_v)\, \mathbf{P} = \\ &= 2\,[\mathbf{B}_1, \mathbf{E}_1] + 4\mathbf{v}B_1^2 - 4\mathbf{B}_1 (\mathbf{v}, \mathbf{B}_1) - 2\,[\mathbf{B}_1, [\mathbf{v}, \mathbf{B}_1]] = \\ &= 2\,[\mathbf{B}_1, \mathbf{E}_1] + 4\mathbf{v}B_1^2 - 4\mathbf{B}_1 (\mathbf{v}, \mathbf{B}_1) - 2\mathbf{v}B_1^2 + 2\mathbf{B}_1 (\mathbf{v}, \mathbf{B}_1), \\ \nabla_v |\mathbf{E}_1 + \mathbf{P}|^2 &= 2\,[\mathbf{B}_1, \mathbf{E}_1 + [\mathbf{v}, \mathbf{B}_1]] = \frac{2}{\gamma_1} \left[\langle \dot{\mathbf{v}} \rangle_{1,2}, \mathbf{B}_1 \right]\end{aligned} \tag{85}$$

с учетом (84). Вычисляя $\nabla_v V^{1,2}$ с учетом выражения (85), получим

$$\begin{gathered}\nabla_v V^{1,2} = -\frac{\gamma_1}{2\alpha_2\beta_2} \nabla_v (\partial_1 \mathbf{E}_1, \mathbf{v}) + \frac{\gamma_1^2}{4\alpha_2\beta_2} \nabla_v |\mathbf{E}_1 + [\mathbf{v}, \mathbf{B}_1]|^2, \\ \frac{2\alpha_2\beta_2}{\gamma_1} \nabla_v V^{1,2} = -\partial_1 \mathbf{E}_1 - \nabla_r (\mathbf{E}_1, \mathbf{v}) + \left[\langle \dot{\mathbf{v}} \rangle_{1,2}, \mathbf{B}_1 \right]\end{gathered} \tag{86}$$

при том, что

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial v_\mu} (\partial_1 \mathbf{E}_1, \mathbf{v}) &= \frac{\partial}{\partial v_\mu} (\partial_0 \mathbf{E}_1 + (\mathbf{v}, \nabla_r)\, \mathbf{E}_1, \mathbf{v}) = \partial_0 E_1^\mu + \frac{\partial E_1^\lambda}{\partial x_\nu} \frac{\partial}{\partial v_\mu} (v_\nu v_\lambda) = \\ &= \partial_0 E_1^\mu + \frac{\partial E_1^\lambda}{\partial x_\nu} \left(v_\lambda \frac{\partial v_\nu}{\partial v_\mu} + v_\nu \frac{\partial v_\lambda}{\partial v_\mu} \right) = \partial_0 E_1^\mu + v_\lambda \frac{\partial E_1^\lambda}{\partial x_\mu} + v_\nu \frac{\partial E_1^\mu}{\partial x_\nu} = \\ &= \partial_0 E_1^\mu + \frac{\partial}{\partial x_\mu} (\mathbf{E}_1, \mathbf{v}) + (\mathbf{v}, \nabla_r)\, E_1^\mu,\end{aligned}$$

т. е.

$$\nabla_v (\partial_1 \mathbf{E}_1, \mathbf{v}) = \partial_1 \mathbf{E}_1 + \nabla_r (\mathbf{E}_1, \mathbf{v}).$$

С учетом (86), (79) выражение (78) для поля $\mathbf{E}_{1,2}$ примет вид

$$\begin{gathered}\mathbf{E}_{1,2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \partial_1 [\mathbf{v}, \mathbf{B}_1] - \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \nabla_r (\mathbf{E}_1, \mathbf{v}) - \frac{2\alpha_2\beta_2}{\gamma_2} \nabla_v V^{1,2}, \\ \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \mathbf{E}_{1,2} = \partial_1 [\mathbf{v}, \mathbf{B}_1] + \partial_1 \mathbf{E}_1 - \left[\langle \dot{\mathbf{v}} \rangle_{1,2}, \mathbf{B}_1 \right],\end{gathered} \tag{87}$$

а с учетом аппроксимаций Власова — следующий вид:

$$-\gamma_2 \mathbf{E}_{1,2} = \partial_1 \langle \dot{\mathbf{v}} \rangle_{1,2} + \gamma_1 \left[\langle \dot{\mathbf{v}} \rangle_{1,2}, \mathbf{B}_1 \right]. \tag{88}$$

Отметим, что выражение (88) фактически является уравнением движения (56) или вторым уравнением в системе (77). Действительно, воспользуемся определением оператора $\widehat{\pi}_{1,2}$ и соотношением (80) и найдем

$$-\gamma_2\left(\mathbf{E}_{1,2}+\left[\langle\dot{\mathbf{v}}\rangle_{1,2},\mathbf{B}_{1,2}\right]\right)=\partial_1\langle\dot{\mathbf{v}}\rangle_{1,2}-\gamma_1\left[\langle\dot{\mathbf{v}}\rangle_{1,2},\mathbf{B}_1\right]=\widehat{\pi}_{1,2}\langle\dot{\mathbf{v}}\rangle_{1,2}.$$

Уравнения движения (56) и (33) получены из одного и того же второго уравнения Власова. В результате сравнения этих уравнений найдено следующее равенство:

$$\gamma_2\left(\mathbf{E}_{1,2}+\langle\dot{\mathbf{v}}\rangle_{1,2}\times\mathbf{B}_{1,2}\right)=\frac{1}{f^{1,2}}\frac{\partial P^3_{\mu\lambda}}{\partial v_\lambda}+\langle\ddot{v}_\mu\rangle_{1,2}. \tag{89}$$

В случае микроскопического распределения (35) для функции $f^{1,2,3}$ тензор равен $P^3_{\mu\lambda}=0$, а в правой части выражения (89) остается только слагаемое $\langle\ddot{v}_\mu\rangle_{1,2}$. В левой части выражения (89) слагаемое $\mathbf{E}_{1,2}$ (78) содержит «силу квантового давления» $\nabla_v Q^{1,2}$, которая определяется функцией распределения $f^{1,2,3}$. По аналогии с первым уравнением Власова допустимо рассмотрение малости «квантового давления» $\nabla_v Q^{1,2}$ для микроскопической функции распределения. В этом случае на основании выражения (89) можно построить аппроксимацию без источников диссипаций:

$$\langle\ddot{\mathbf{v}}\rangle_{1,2,3}=-\gamma_2\left(\mathbf{E}_{1,2}+\dot{\mathbf{v}}\times\mathbf{B}_{1,2}\right),\quad Q_3^{1,2,3}=0. \tag{90}$$

Отметим, что после усреднения по пространству ускорений аппроксимация (90) будет содержать слагаемое $\langle\dot{\mathbf{v}}\rangle_{1,2}\times\mathbf{B}_{1,2}$. В общем случае векторное поле $\langle\dot{\mathbf{v}}\rangle_{1,2}$ может не совпадать с аппроксимацией Власова (17). Вид поля $\langle\dot{\mathbf{v}}\rangle_{1,2}$ определяется функцией распределения $f^{1,2,3}$ (3), которая является решением третьего уравнения Власова (1).

3. РЕШЕНИЯ ТРЕТЬЕГО УРАВНЕНИЯ ВЛАСОВА

Применим рассмотренные в разд. 1 и 2 аппроксимации (39), (40) и (90) для третьего уравнения Власова (1). При решении второго уравнения Власова используется аппроксимация (17) для среднего ускорения $\langle\dot{\mathbf{v}}\rangle_{1,2}$, в которой электромагнитные поля $\mathbf{E}_1$ и $\mathbf{B}_1$ находятся из решений уравнений Максвелла. Поля $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{B}_1$ являются функциями только от одной кинематической переменной $\mathbf{r}$. Уравнения Максвелла фактически строятся из первого уравнения Власова [3], которое записано для функции f^1 одной кинематической переменной $\mathbf{r}$. Таким образом, уравнения поля (11), (13), (14), полученные из первого уравнения Власова, используются в аппроксимации $\langle\dot{\mathbf{v}}\rangle_{1,2}$ (17). Если придерживаться такой логики построения метода решения второго уравнения Власова, то для третьего уравнения Власова в аппроксимации $\langle\ddot{\mathbf{v}}\rangle_{1,2,3}$ (90) необходимо использовать поля $\mathbf{E}_{1,2}$ и $\mathbf{B}_{1,2}$ — двух кинематических переменных $(\mathbf{r},\mathbf{v})$, удовлетворяющие уравнениям поля (76), которые получены из второго уравнения Власова. Таким образом, третье уравнение Власова (1) с аппроксимацией (90) примет вид

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{v}\nabla_r+\dot{\mathbf{v}}\nabla_v-\gamma_2\left(\mathbf{E}_{1,2}+\dot{\mathbf{v}}\times\mathbf{B}_{1,2}\right)\nabla_{\dot{v}}\right\}f^{1,2,3}=0, \tag{91}$$

в котором учтено отсутствие источников диссипаций у аппроксимации (90).

Поиск решения уравнения (91) является сложной самосогласованной задачей, решение которой в общем случае требует использования численных методов. Численное решение уравнения (91) может быть найдено по следующему алгоритму. Пусть имеется начальное ($t=0$) распределение для функции $f^{1,2,3}(\mathbf{r},\mathbf{v},\dot{\mathbf{v}},0)=f_0^{1,2,3}$. Функция распределения $f_0^{1,2,3}$ может быть аппроксимирована набором «крупных частиц» (методом PIC — Particle-In-Cell [36–38]) или задана в явном виде на эйлеровой сетке. Зная функцию $f_0^{1,2,3}$ из формулы (3), находим $\langle\dot{\mathbf{v}}\rangle_{1,2}$ в начальный момент времени. Если поле $\langle\dot{\mathbf{v}}\rangle_{1,2}$ является «достаточно» гладким, то его можно представить в виде разложения (42). Из выражения (42) получим информацию о скалярном ($\Phi^{1,2}$) и векторном ($\mathbf{A}_{1,2}$) потенциалах. Подставляя $\Phi^{1,2}$, $\mathbf{A}_{1,2}$, $\langle\dot{\mathbf{v}}\rangle_{1,2}$ в качестве начальных условий в систему уравнений поля (76), (78), можно получить поля $\mathbf{E}_{1,2}$ и $\mathbf{B}_{1,2}$. Зная поля $\mathbf{E}_{1,2}$ и $\mathbf{B}_{1,2}$, по уравнениям движения (77) или непосредственно из уравнения (91) находим функцию распределения $f^{1,2,3}$ на следующем временном шаге.

Отметим, что аппроксимация (90) не содержит в явном виде информацию об излучении, которая присутствует в уравнении Лоренца–Абрахама–Дирака (11). В разд. 1 уравнению (11) были поставлены в соответствие две аппроксимации: (39) и (40). Рассмотрим третье уравнение Власова с аппроксимациями (39) и (40). Начнем с (40). Как было сказано в разд. 1, аппроксимация (40) содержит источники диссипаций $Q_3^{1,2,3}=3/\tau_0$, следовательно, третье уравнение Власова (1) примет вид

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t}+v_\lambda\frac{\partial}{\partial x_\lambda}+\dot{v}_\lambda\frac{\partial}{\partial v_\lambda}+\frac{1}{\tau_0}\left[\dot{v}_\mu-\frac{q}{m}\left(E_1^\mu+\varepsilon_{\mu\lambda\nu}v_\lambda B_1^\nu\right)\right]\frac{\partial}{\partial\dot{v}_\mu}\right\}S^{1,2,3}=-\frac{3}{\tau_0}. \tag{92}$$

Исследуем поведение решений уравнения (92). Уравнение (92) является неоднородным, поэтому его решение можно представить в виде суммы $S^{1,2,3}=S_{\mathrm{g.h}}^{1,2,3}+S_{\mathrm{p.i}}^{1,2,3}$, где $S_{\mathrm{g.h}}^{1,2,3}$ — общее решение однородного, а $S_{\mathrm{p.i}}^{1,2,3}$ — частное решение неоднородного уравнения (92). Частное решение можно представить в виде $S_{\mathrm{p.i}}^{1,2,3}=-3(t/\tau_0)$. Решение $S_{\mathrm{g.h}}^{1,2,3}$ можно получить методом характеристик

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt}=\mathbf{v},\quad \frac{d\mathbf{v}}{dt}=\dot{\mathbf{v}},\ \ m\tau_0\frac{d\dot{\mathbf{v}}}{dt}=m\dot{\mathbf{v}}-q\left(\mathbf{E}_1+\mathbf{v}\times\mathbf{B}_1\right). \tag{93}$$

Функция $S_{\mathrm{g.h}}^{1,2,3}$ является постоянной вдоль характеристик (93). В результате решение уравнения (92) примет вид

$$f^{1,2,3}\left(\mathbf{r},\mathbf{v},\dot{\mathbf{v}},t\right)=f_{\mathrm{g.h}}^{1,2,3}\left(\mathbf{r},\mathbf{v},\dot{\mathbf{v}},t\right)\exp\left(-3\frac{t}{\tau_0}\right), \tag{94}$$

где $f_{\mathrm{g.h}}^{1,2,3}=\exp\left(S_{\mathrm{g.h}}^{1,2,3}\right)$. Из представления решения (94) уравнения (92) следует, что функция $f^{1,2,3}$ быстро стремится к нулю уже при малых временах, так как $\tau_0 \ll 1$. Таким образом, вдоль фазовых траекторий, определяемых характеристиками (93), функция $f^{1,2,3}$ быстро убывает, что обусловлено наличием ненулевой ($Q_3^{1,2,3}=3/\tau_0$) диссипативной правой части уравнения $\widehat{\pi}_{1,2,3}S^{1,2,3}=-Q_3^{1,2,3}$.

Аппроксимация (39) не имеет источников диссипаций, поэтому третье уравнение Власова для нее примет вид

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{v}\nabla_r+\dot{\mathbf{v}}\nabla_v+\frac{1}{\tau_0}\left[\langle\dot{\mathbf{v}}\rangle_{1,2}-\frac{q}{m}\left(\mathbf{E}_1+\mathbf{v}\times\mathbf{B}_1\right)\right]\nabla_{\dot{v}}\right\}f^{1,2,3}=0. \tag{95}$$

Уравнению (95) соответствуют характеристики

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt}=\mathbf{v},\quad \frac{d\mathbf{v}}{dt}=\dot{\mathbf{v}},\quad m\tau_0\frac{d\dot{\mathbf{v}}}{dt}=m\left\langle\dot{\mathbf{v}}\right\rangle_{1,2}-q\left(\mathbf{E}_1+\mathbf{v}\times\mathbf{B}_1\right), \tag{96}$$

где поля $\mathbf{E}_1, \mathbf{B}_1$ удовлетворяют уравнениям Максвелла (13), (14). Среднее поле $\langle\dot{\mathbf{v}}\rangle_{1,2}$ в уравнении (96) определяется по функции $f^{1,2,3}$ в соответствии с уравнением (3). Численный метод решения уравнения (95) схож с методом, изложенным для уравнения (91), за исключением особенностей, связанных с решением уравнения (96). Как известно [31–34], уравнение Лоренца–Абрахама–Дирака (11) допускает представление в виде

$$m\dot{\mathbf{v}}\left(t\right)=\frac{1}{\tau_0}\int\limits_t^{+\infty}\mathbf{F}_{\mathrm{ext}}\left(t'\right)\exp\left(-\frac{t'-t}{\tau_0}\right)dt', \tag{97}$$

где $\mathbf{F}_{\mathrm{ext}}=q\left(\mathbf{E}_1+\mathbf{v}\times\mathbf{B}_1\right)$. Одной из особенностей представления (97) является интегрирование по временной области «будущего» для определения силы $m\dot{\mathbf{v}}$ настоящего. Другая особенность уравнения (97), (11) проявляется в наличии бесконечно растущих со временем решений (разбегающихся решений — runaway solutions) [31]. Наличие таких особенностей приводит к необходимости специального выбора временного шага при численном интегрировании уравнения (11) и использования метода отбора физически реалистических решений [33, 34]. Рассматриваемое уравнение характеристик (96) в случае одной точечной частицы переходит в уравнение (11), поэтому при численной реализации (96) могут возникнуть схожие проблемы.

Основное внимание при рассмотрении третьего уравнения Власова было сфокусировано на электродинамических системах, которые имеют применение в области физики плазмы. При описании таких систем часто используют функцию микроскопического распределения (35). В разд. 1 рассматривались уравнения движения в гидрогазодинамическом приближении (23) и (33). Как было отмечено в разд. 1, квантовые системы характеризуются наличием квантового потенциала Q, который связан с тензором давления $P_{\mu\lambda}$ (37) в уравнениях движения (23), (33). В качестве простейшего примера с тензором давления рассмотрим модельную систему — квантовый гармонический осциллятор с потенциалом $U^1 = (m\omega^2 x^2)/2$.

Запишем уравнение движения (33) с учетом аппроксимации Власова–Моэля (15), получим

$$\widehat{\pi}_{1,2}\left\langle \dot{v}_\mu \right\rangle_{1,2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}(\hbar/2)^{2k}}{m^{2k+1}(2k+1)!}\widehat{\pi}_{1,2}\left[\frac{\partial^{2k+1}U^1}{\partial x_\mu^{2k+1}}\frac{1}{f^{1,2}}\frac{\partial^{2k}f^{1,2}}{\partial v_\mu^{2k}}\right] = \\ = -\frac{1}{f^{1,2}}\frac{\partial P^3_{\mu\lambda}}{\partial v_\lambda} + \left\langle \ddot{v}_\mu \right\rangle_{1,2}, \quad (98)$$

$$\left\langle \ddot{v} \right\rangle_{1,2} = \frac{1}{f^{1,2}}\frac{\partial P^3_{11}}{\partial v} - \frac{1}{m}\widehat{\pi}_{1,2}\left[\frac{\partial U^1}{\partial x}\right] = \frac{1}{f^{1,2}}\frac{\partial P^3_{11}}{\partial v} - \omega^2 v.$$

В качестве функции распределения $f^{1,2,3}$ возьмем [35]

$$f_n^{1,2,3}(x,v,\dot{v}) = \\ = \frac{(-1)^n}{2\pi\sigma_x\sigma_v}\exp\left(-\frac{\dot{v}^2}{2\sigma_{\dot{v}}^2} - \frac{v^2}{2\sigma_v^2}\right) L_n\left(2\left(\frac{\dot{v}^2}{2\sigma_{\dot{v}}^2} + \frac{v^2}{2\sigma_v^2}\right)\right)\delta\left(\dot{v} + \omega^2 x\right), \quad (99)$$

где n — номер квантового состояния; L_n — полиномы Лагерра; σ_x и σ_v — дисперсии, удовлетворяющие соотношениям $\omega = \sigma_v/\sigma_x = \sigma_{\dot{v}}/\sigma_v$, $\sigma_x\sigma_v = \hbar/(2m)$. Используя функцию (99), вычислим тензор давления P^3_{11} (31). Сначала определим среднее значение $\langle \dot{v} \rangle_{1,2}$ по формуле (3), получим

$$f_n^{1,2}\left\langle \dot{v} \right\rangle_{1,2|n} = \frac{(-1)^n}{2\pi\sigma_x\sigma_v}\exp\left(-\frac{v^2}{2\sigma_v^2}\right)\int_{-\infty}^{+\infty} \dot{v}\exp\left(-\frac{\dot{v}^2}{2\sigma_{\dot{v}}^2}\right)\times \\ \times L_n\left(2\left(\frac{\dot{v}^2}{2\sigma_{\dot{v}}^2} + \frac{v^2}{2\sigma_v^2}\right)\right)\delta\left(\dot{v} + \omega^2 x\right)d\dot{v} = \\ = -\omega^2 x\frac{(-1)^n}{2\pi\sigma_x\sigma_v}\exp\left(-\frac{\omega^2 x^2}{2\sigma_v^2} - \frac{v^2}{2\sigma_v^2}\right)L_n\left(2\left(\frac{\omega^2 x^2}{2\sigma_v^2} + \frac{v^2}{2\sigma_v^2}\right)\right), \quad (100) \\ \left\langle \dot{v} \right\rangle_{1,2|n} = -\omega^2 x$$

с учетом того, что $f_n^{1,2}(x,v) = mW(x,p)$ является функцией Вигнера гармонического осциллятора

$$f_n^{1,2}(x,v) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_n^{1,2,3}(x,v,\dot{v})\,d\dot{v} =$$
$$= \frac{(-1)^n m}{\pi\hbar} \exp\left(-\frac{m}{\hbar\omega}\left(v^2+\omega^2x^2\right)\right) L_n\left(\frac{2m}{\hbar\omega}\left(v^2+\omega^2x^2\right)\right). \quad (101)$$

С учетом выражений (99) и (100) тензор давления P_{11}^3 примет вид

$$P_{11|n}^3(x,v) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\dot{v} - \langle\dot{v}\rangle_{1,2|n}\right)^2 f_n^{1,2,3} d\dot{v} =$$
$$= \frac{(-1)^n}{2\pi\sigma_x\sigma_v}\left(\omega^2 x + \langle\dot{v}\rangle_{1,2|n}\right)^2 \exp\left(-\frac{\omega^2x^2}{2\sigma_v^2} - \frac{v^2}{2\sigma_v^2}\right) \times$$
$$\times L_n\left(2\left(\frac{\omega^2x^2}{2\sigma_v^2} + \frac{v^2}{2\sigma_v^2}\right)\right) = 0. \quad (102)$$

Результат (102) является ожидаемым, так как по пространству ускорений $\dot{v}$ функция распределения (99) имеет нулевую дисперсию. Уравнение движения (98) с учетом (102) запишем в виде

$$\langle\ddot{v}\rangle_{1,2|n} = -\omega^2 v. \quad (103)$$

Используя выражение (103), запишем третье уравнение Власова:

$$\frac{\partial}{\partial t} f^{1,2,3} + v\frac{\partial}{\partial x} f^{1,2,3} + \dot{v}\frac{\partial}{\partial v} f^{1,2,3} - \omega^2 v \frac{\partial}{\partial \dot{v}} f^{1,2,3} = 0. \quad (104)$$

Уравнению (104) соответствуют следующие характеристики:

$$\begin{gathered} \frac{dx}{dt} = v, \quad \frac{dv}{dt} = \dot{v}, \quad \frac{d\dot{v}}{dt} = -\omega^2 x, \\ \omega^2 v\,dv = -\dot{v}\,d\dot{v} \Rightarrow \zeta(v,\dot{v}) = \omega^2 v^2 + \dot{v}^2, \\ \omega^2\,dx = -d\dot{v} \Rightarrow \eta(x,\dot{v}) = \omega^2 x + \dot{v}. \end{gathered} \quad (105)$$

Таким образом, решение уравнения (104) можно представить в виде

$$f^{1,2,3}(x,v,\dot{v}) = G\left(\omega^2 v^2 + \dot{v}^2, \omega^2 x + \dot{v}\right), \quad (106)$$

где $G = G(\zeta,\eta)$ — некоторая функция, определяемая из краевых условий. При сравнении выражений (106) и (99) видно, что функция (99) является решением третьего уравнения Власова. Интегрирование третьего уравнения Власова по пространству скоростей переведет его во второе уравнение Власова, решением которого будет функция Вигнера (101) с аппроксимацией (100):

$$\frac{\partial}{\partial t} f^{1,2} + v\frac{\partial}{\partial x} f^{1,2} - \omega^2 x \frac{\partial}{\partial v} f^{1,2} = 0. \quad (107)$$

Второму уравнению Власова (107) будет соответствовать уравнение движения (23) с тензором P^2_{11}, отличным от нуля. Действительно, вычислим $\langle v \rangle$ по формуле (3)

$$f_n^1 \langle v \rangle_{1|n} = \frac{(-1)^n m}{\pi \hbar} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} v \exp\left(-\frac{m}{\hbar\omega}\left(v^2+\omega^2 x^2\right)\right) \times \\ \times L_n\left(\frac{2m}{\hbar\omega}\left(v^2+\omega^2 x^2\right)\right) dv = 0 \quad (108)$$

с учетом того, что под интегралом стоит нечетная функция по переменной скорости v. Функция f_n^1 имеет вид

$$f_n^1(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_n^{1,2}(x,v)\, dv = \frac{1}{2^n n!}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_x} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}\right) H_n^2\left(\frac{x}{\sqrt{2}\,\sigma_x}\right), \tag{109}$$

где H_n — полиномы Эрмита. Используя выражения (108), (101) и (21) для тензора $P^2_{11|n}$, получим

$$P^2_{11|n} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} v^2 f_n^{1,2}\, dv = f^1 \left\langle v^2 \right\rangle_{1|n}. \tag{110}$$

Средняя величина $\left\langle v^2 \right\rangle_{1|n}$ вычислена ранее в работах [39, 40] и представлена в виде

$$\left\langle v^2 \right\rangle_{1|n}(x) = \sigma_v^2 \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} C_k L_{n-k}\left(x^2/\sigma_x^2\right)}{\sum\limits_{k=0}^{n} \overline{C}_k L_{n-k}\left(x^2/\sigma_x^2\right)}, \tag{111}$$

$$\begin{gathered} C_k = (-1)^k \sum_{j=0}^{k} \frac{1+\eta(j)}{2} \frac{H^2_{k-j}(0) + 2(k-j) H^2_{k-j-1}(0)}{2^{k-j}(k-j)!}, \\ \overline{C}_k = (-1)^k \sum_{j=0}^{k} \frac{1+\eta(j)}{2} \frac{H^2_{k-j}(0) - 2(k-j) H^2_{k-j-1}(0)}{2^{k-j}(k-j)!}, \end{gathered} \tag{112}$$

где $\eta(j)$ — функция Хевисайда. Значения полиномов Эрмита в начале координат (112) могут быть вычислены по формулам $H^2_{2k}(0) = ((2k)!\,(2k)!)/(k!k!)$ и $H^2_{2k+1}(0) = 0$. Таким образом, тензор давления $P^2_{11|n}$ отличен от нуля, а уравнение движения (23) с учетом (100), (108) и (110) примет вид

$$\frac{\partial P^2_{11|n}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[f_n^1 \left\langle v^2 \right\rangle_{1|n}\right] = f_n^1 \langle \dot v \rangle_{1|n} = -f_n^1 \omega^2 x \tag{113}$$

при том, что $\langle \dot v \rangle_{1|n} = -\omega^2 x$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе представлен обзор по основным кинематическим свойствам третьего уравнения Власова и связанным с ним уравнениям движения в случае как электромагнитного взаимодействия, так и гидрогазодинамического приближения. Рассмотрена связь между классической физикой (уравнением Гамильтона–Якоби) и квантовой (уравнением Шредингера, квантовым потенциалом) с обобщением на фазовое пространство.

Для систем с электромагнитным излучением на основании уравнения Лоренца–Абрахама–Дирака описана возможная процедура построения аппроксимации для среднего потока ускорений второго порядка. Обсуждаются диссипативные (по вероятности) свойства таких систем. На основе квантовой механики высших кинематических величин рассмотрен вариант построения расширенного аналога уравнений Максвелла в фазовом пространстве, который позволяет построить аппроксимацию для третьего уравнения Власова.

Предложенные в работе аппроксимации можно условно разбить на два класса. Первый класс — это аппроксимации (39) и (40), которые строятся на основе уравнения Лоренца–Абрахама–Дирака в рамках феноменологического подхода. Сила радиационного трения искусственным образом вставляется в классическое уравнение Ньютона, что нарушает его порядок и приводит к возможности существования физически нереалистических решений. Тем не менее такой подход имеет практическое применение при его корректном использовании. Второй класс аппроксимаций (17), (90) получен непосредственно из цепочки уравнений Власова при условии выполнения разложения Гельмгольца, в котором скалярный потенциал связан с фазой волновой функции. Такое допущение часто используется по принципу наименьшего действия для квантовой механики. Здесь это допущение было расширено на случай фазового пространства. Аппроксимации из второго класса в явном виде не содержат радиационных поправок, но в них присутствуют новые кинематические поля, которые взаимодействуют с системой через высшие производные. Такие аппроксимации могут быть полезны при численном решении задач физики плазмы с повышенной точностью, так как содержат большее число законов сохранения.

Работа выполнена при поддержке междисциплинарной научно-образовательной школы Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова «Фотонные и квантовые технологии. Цифровая медицина».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Vlasov A. A.* Statistical Distribution Functions. M.: Nauka, 1966.
2. *Perepelkin E. E., Sadovnikov B. I., Inozemtseva N. G., Aleksandrov I. I.* Dispersion Chain of Vlasov Equations // J. Stat. Mech. 2022. No. 013205.
3. *Perepelkin E. E., Sadovnikov B. I., Inozemtseva N. G.* The Properties of the First Equation of the Vlasov Chain of Equations // J. Stat. Mech. 2015. No. P05019.

4. *Bohm D., Hiley B.J., Kaloyerou P.N.* An Ontological Basis for the Quantum Theory // Phys. Rep. 1987. V. 144. P. 321–375.
5. *Bohm D., Hiley B.J.* The Undivided Universe: An Ontological Interpretation of Quantum Theory. London: Routledge, 1993.
6. *de Broglie L.* Une Interpretation Causale et non Lineaire de la Mecanique Ondulatoire: La Theorie de la Double Solution. Paris: Gauthiers-Villiars, 1956.
7. *Perepelkin E.E., Sadovnikov B.I., Inozemtseva N.G., Burlakov E.V.* Wigner Function of a Quantum System with Polynomial Potential // J. Stat. Mech.: Theory Exp. 2020. No. 053105.
8. *Moyal J.E.* Quantum Mechanics as a Statistical Theory // Proc. Cambridge Philos. Soc. 1949. V. 45. P. 99–124.
9. *Wigner E.P.* On the Quantum Correction for Thermodynamic Equilibrium // Phys. Rev. 1932. V. 40. P. 749–759.
10. *Weyl H.* The Theory of Groups and Quantum Mechanics. New York: Dover, 1931.
11. *Hudson R.L.* When Is the Wigner Quasi-Probability Density Non-Negative? // Rep. Math. Phys. 1974. V. 6, No. 2. P. 249–252.
12. *Hara K., Barth I., Kaminski E., Dodin I.Y., Fisch N.J.* Kinetic Simulations of Ladder Climbing by Electron Plasma Waves // Phys. Rev. E. 2017. V. 95. P. 053212.
13. *Horky M., Miloch W.J., Delong V.A.* Numerical Heating of Electrons in Particle-in-Cell Simulations of Fully Magnetized Plasmas // Ibid. P. 043302.
14. *Ratan N., Sircombe N.J., Ceurvorst L., Sadler J., Kasim M.F., Holloway J., Levy M.C., Trines R., Bingham R., Norreys P.A.* Dense Plasma Heating by Crossing Relativistic Electron Beams // Ibid. P. 013211.
15. *Shetty D.V., Botvina A.S., Yennello S.J., Souliotis G.A., Bell E., Keksis A.* Fragment Yield Distribution and the Influence of Neutron Composition and Excitation Energy in Multifragmentation Reactions // Phys. Rev. C. 2005. V. 71, No. 2. P. 029903.
16. *Zheng H., Burrello S., Colonna M., Lacroix D., Scamps G.* Connecting the Nuclear Equation of State to the Interplay between Fusion and Quasifission Processes in Low-Energy Nuclear Reactions // Phys. Rev. C. 2018. V. 98, No. 2. P. 024622-1–024622-9.
17. *Pierroutsakou D., Martin B., Agodi C., Alba R., Baran V., Boiano A., …, Signorini C.* Dynamical Dipole Mode in Fusion Reactions at 16 MeV/nucleon and Beam Energy Dependence // Phys. Rev. C. 2009. V. 80, No. 2. P. 024612-1–024612-16.
18. *Kopp M., Vattis K., Skordis C.* Solving the Vlasov Equation in Two Spatial Dimensions with the Schrödinger Method // Phys. Rev. D. 2017. V. 96. P. 123532.
19. *Bergström S., Catena R., Chiappo A., Conrad J., Eurenius B., Eriksson M., Högberg M., Larsson S., Olsson E., Unger A., Wadman R.* J-Factors for Self-Interacting Dark Matter in 20 Dwarf Spheroidal Galaxies // Phys. Rev. D. 2018. V. 98. P. 043017.
20. *Gabriel Gomez L., Rueda J.A.* Dark Matter Dynamical Friction versus Gravitational Wave Emission in the Evolution of Compact-Star Binaries // Phys. Rev. D. 2017. V. 96. P. 063001.

21. *Inman D., Yu Hao-Ran, Zhu Hong-Ming, Emberson J. D., Pen Ue-Li, Zhang Tong-Jie, Yuan Shuo, Chen Xuelei, Xing Zhi-Zhong.* Simulating the Cold Dark Matter-Neutrino Dipole with TianNu // Phys. Rev. D. 2017. V. 95. P. 083518.
22. *Manfredi G., Rouet J.-L., Miller B., Chardin G.* Cosmological Structure Formation with Negative Mass // Phys. Rev. D. 2018. V. 98. P. 023514.
23. *Veltmaat J., Niemeyer J. C., Schwabe B.* Formation and Structure of Ultralight Bosonic Dark Matter Halos // Ibid. P. 043509.
24. *Atenas B., Curilef S.* Dynamics and Thermodynamics of Systems with Long-Range Dipole-Type Interactions // Phys. Rev. E. 2017. V. 95. P. 022110.
25. *Giona M.* Space-Time-Modulated Stochastic Processes // Ibid. V. 96. P. 042132.
26. *Kumar P., Miller B. N.* Thermodynamics of a One-Dimensional Self-Gravitating Gas with Periodic Boundary Conditions // Ibid. V. 95. P. 022116.
27. *Batalov S. V., Shagalov A. G.* Autoresonant Excitation of Bose–Einstein Condensates // Phys. Rev. E. 2018. V. 97. P. 032210.
28. *Florkowski W., Maksymiuk E., Ryblewski R.* Anisotropic-Hydrodynamics Approach to a Quark–Gluon Fluid Mixture // Phys. Rev. C. 2018. V. 97. P. 014904.
29. *Stephanov M., Yin Y.* Hydrodynamics with Parametric Slowing Down and Fluctuations near the Critical Point // Phys. Rev. D. 2018. V. 98. P. 036006.
30. *Klepekov N. P.* Radiation Damping Forces and Radiation from Charged Particles // Usp. Fiz. Nauk. 1985. V. 146, No. 2. P. 317–339.
31. *Hartemann R. T., Kerman A. K.* Classical Theory of Nonlinear Compton Scattering // Phys. Rev. Lett. 1996. V. 76, No. 4. P. 624–627.
32. *Ezeilo J. O. C.* On the Stability of Solutions of Certain Differential Equations of the Third Order // Quart. J. Math. 1960. V. 11. P. 64–69.
33. *Plass G. N.* Classical Electrodynamics Equations of Motion with Radiative Reaction // Phys. Rev. Lett. 1960. V. 4, No. 5. P. 248–249.
34. *Jackson J. D.* Classical Electrodynamics. New York: Wiley, 1962. 656 p.
35. *Perepelkin E. E., Sadovnikov B. I., Inozemtseva N. G.* The Quantum Mechanics of High-Order Kinematic Values // Ann. Phys. 2019. V. 401. P. 59–90.
36. *Camporealea E., Delzanno G.L., Bergen B. K., Moulton J. D.* On the Velocity Space Discretization for the Vlasov–Poisson System: Comparison between Implicit Hermite Spectral and Particle-in-Cell Methods // Comput. Phys. Commun. 2016. V. 198. P. 47–58.
37. *Sonnendrucker E., Roche J., Bertrand P., Ghizzoy A.* The Semi-Lagrangian Method for the Numerical Resolution of the Vlasov Equation // J. Comput. Phys. 1999.
38. *Anjiao Gu, Yang He, Yajuan Sun.* Hamiltonian Particle-in-Cell Methods for Vlasov–Poisson Equation // J. Comput. Phys. 2022. V. 467. P. 111472.
39. *Perepelkin E. E., Sadovnikov B. I., Inozemtseva N. G., Burlakov E. V.* Explicit Form for the Kernel Operator Matrix Elements in Eigenfunction Basis of Harmonic Oscillator // J. Stat. Mech.: Theory Exp. 2020. No. 023109.
40. *Perepelkin E. E., Sadovnikov B. I., Inozemtseva N. G., Burlakov E. V.* The Wigner Function Negative Value Domains and Energy Function Poles of the Harmonic Oscillator // J. Comput. Electron. 2021. P. 1–11.