ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА
2025. Т. 56, вып. 1. С. 71–86

НЕРЕЛЯТИВИСТСКАЯ КВАНТОВАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА. ВЕДУЩИЕ РАДИАЦИОННЫЕ ПОПРАВКИ

В. И. Коробов

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Формулируется эффективная теория поля для описания низкоэнергетических процессов в квантовой электродинамике — нерелятивистская квантовая электродинамика (NRQED). Показывается, как формализм NRQED позволяет построить строгую теорию возмущения для вычисления поправок высших порядков по параметрам $v/c \sim Z\alpha$, $\beta = m/M$, где v — скорость электронов (мюонов) в атомах, m/M — отношение масс легких частиц к массам тяжелых в молекулярной системе. В качестве примера применения метода рассматривается ведущая радиационная поправка в порядке $m\alpha(Z\alpha)^4$. Показано, как параметр обрезания (регуляризации), вводимый в NRQED, сокращается в конечном выражении для энергии, не приводя к бессмысленным бесконечным результатам.

To describe low-energy processes in quantum electrodynamics an effective field theory, nonrelativistic quantum electrodynamics (NRQED), is formulated. It is shown how the NRQED formalism allows one to construct a rigorous perturbation theory for calculating higher-order corrections in the parameters $v/c \sim Z\alpha$, $\beta = m/M$, where v is the velocity of electrons (muons) in atoms, m/M is the ratio of masses (light-to-heavy) of particles in an atomic or molecular system. As an example of the application of the method, the leading radiative corrections of order $m\alpha(Z\alpha)^4$ are considered. It is shown that the cutoff (regularization) parameter introduced in NRQED is eventually cancelled from the final expression for energy without producing meaningless infinite results.

PACS: 12.20.–m; 12.15.Lk; 12.38.Bx

Хорошо известно, что релятивистски-инвариантный формализм квантовой электродинамики плохо приспособлен к решению задач на связанные состояния для систем нескольких частиц [1–3]. Вместе с тем нерелятивистская квантовая механика с хорошей точностью описывает решения для связанных состояний таких систем. Поэтому представляется весьма привлекательным использование такой схемы вычислений, которая бы исходила из нерелятивистской квантовой механики и позволяла бы последовательно строить теорию, предсказания которой в низших порядках по константе связи $\alpha = (1/4\pi\varepsilon_0)(e^2/\hbar c)$ совпадали бы с предсказаниями квантовой электродинамики. Такая схема была предложена Кажуэллом и Лепажем [4] и представляет из себя эффективную теорию поля, называемую *нерелятивистская квантовая электродинамика* (NRQED). Подробное и ясное изложение основ метода можно найти в [5].

Решение строится в два этапа. Сначала определяется эффективный лагранжиан NRQED с константами связи (которых необходимо больше, чем в КЭД) для различных локальных взаимодействий нерелятивистской теории. Эти константы получаются из сравнения амплитуд рассеяния КЭД и NRQED так, чтобы предсказания теорий совпадали до определенного порядка по параметру α. Следующим шагом является вычисление характеристик связанных состояний на основе построенного эффективного лагранжиана, который уже включает только взаимодействия для нерелятивистских значений момента импульса. На этом этапе все «новые» локальные взаимодействия включаются в вычисления как малые возмущения на основе теории возмущений Рэлея–Шредингера.

В изложении мы используем систему единиц Лоренца–Хевисайда: $\hbar = c = \varepsilon_0 = 1$ и $\alpha = e^2/4\pi$.

1. НЕРЕЛЯТИВИСТСКАЯ КВАНТОВАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

Лагранжиан NRQED строится из нерелятивистских полей ψ для частиц, входящих в систему: скалярных — для скалярных частиц, спиноров Паули — для частиц со спином 1/2 и т. д. Фотон с необходимостью является релятивистским и определяется таким же образом, как и в КЭД. Лагранжиан инвариантен относительно преобразований Галилея, а также должен сохранять те же симметрии, что и лагранжиан КЭД (калибровочную инвариантность, сохранение четности, обращение времени и эрмитовость):

$$
\begin{aligned}
L_{\text{eff}} = -\frac{1}{2}(E^2 - B^2) + \psi_e^* \left(i\partial_t - e\varphi + \frac{\mathbf{D}^2}{2m_e} + \frac{\mathbf{D}^4}{8m_e^3} + \ldots \right) \psi_e + \\
+ \psi_e^* \left(c_F \frac{e}{2m_e} \boldsymbol{\sigma}\mathbf{B} + c_D \frac{e}{8m_e^2} \mathbf{D}\mathbf{E} + c_S \frac{ie}{8m_e^2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \times \boldsymbol{\sigma} \right) \psi_e + \\
+ \text{члены высших порядков} + \text{мюон, протон и т. д.} + \\
+ \frac{d_1}{m_e m_\ell} \left(\psi_e^* \boldsymbol{\sigma}_e \psi_e\right) \left(\psi_\ell^* \boldsymbol{\sigma}_\ell \psi_\ell\right) + \frac{d_2}{m_e m_\ell} \left(\psi_e^* \psi_e\right) \left(\psi_\ell^* \psi_\ell\right) + \ldots, \qquad (1)
\end{aligned}
$$

где $\mathbf{D} = \boldsymbol{\nabla} - ie\mathbf{A}$ — ковариантная производная, в дальнейшем будем полагать заряд $e = -|e|$ равным заряду электрона. Индекс ℓ используется для второй частицы: электрона, позитрона, мюона и др.

Коэффициенты $c_i(\alpha, m_e, \Lambda)$, которые появляются в лагранжиане (1), являются функциями *экспериментальных* константы связи α, массы электрона m_e, определенных на массовой поверхности и в пределе нулевого переданного импульса, и параметра обрезания Λ. Эти коэффициенты, коэффициенты Вильсона, для взаимодействия электрона с внешним полем определяются как

$$\begin{aligned} c_F &= 1 + a_e, \\ c_S &= 1 + 2a_e, \\ c_D &= 1 + 2a_e + \frac{\alpha}{\pi}\frac{8}{3}\left[\ln\left(\frac{m_e}{2\Lambda}\right) + \frac{5}{6} - \frac{3}{8}\right], \end{aligned} \tag{2а}$$

а коэффициенты Вильсона для контактных взаимодействий —

$$\begin{aligned} d_1 &= (Z\alpha)^2 \frac{2}{m_e^2 - m_\ell^2} \ln\left(\frac{m_e}{m_\ell}\right), \\ d_2 &= (Z\alpha)^2 \left\{\frac{7}{3} - 2\ln\left(\frac{m_e}{2\Lambda}\right) + \frac{2}{m_e^2 - m_\ell^2}\left[m_e^2 \ln\left(\frac{m_\ell}{\mu}\right) - m_\ell^2 \ln\left(\frac{m_e}{\mu}\right)\right]\right\}. \end{aligned} \tag{2б}$$

Здесь μ — приведенная масса пары частиц. Параметр Λ — параметр теории, удовлетворяющий требованию $m(Z\alpha) \approx \Lambda \ll m$, и интегрирование в NRQED производится по фотонам с моментом импульса $|\mathbf{k}| < \Lambda$. Важно отметить, что по построению NRQED полностью эквивалентна квантовой электродинамике в том смысле, что энергия связанного состояния имеет одинаковое разложение в ряд по α и $Z\alpha$ в обеих теориях.

Все эффекты, возникающие от вкладов фотонов с релятивистским моментом импульса, тем или иным образом преобразуются в локальные взаимодействия, которые затем включаются в лагранжиан (1). Поскольку (1) сохраняет калибровочную инвариантность, все вычисления в релятивистской области могут производиться в произвольной калибровке, например в фейнмановской: $G^{\mu\nu} = -g^{\mu\nu}/k^2$. При этом коэффициенты эффективного лагранжиана (1) не должны зависеть от выбора калибровки.

Здесь необходимо отметить одно важное свойство лагранжиана (1). Благодаря калибровочной инвариантности и приближенной (с точностью до определенной степени v/c) лоренц-инвариантности лагранжиана, с учетом того, что все взаимодействия описываются вершинными функциями, а нулевое приближение определяется нерелятивистским уравнением Шредингера, мы видим, что задача на связанные состояния в данном формализме естественным образом формулируется для физической системы с произвольным числом частиц.

Следуя работе [6], используем операторы $iD_t, i\mathbf{D}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{E}$, $\boldsymbol{\sigma}$ как строительные блоки лагранжиана (см. таблицу). А сам лагранжиан раскладывается в ряд по массе фермиона M_f (электрона, протона и т. д.):

$$\mathcal{L}_f = \sum_{n=0} \psi_f^* \frac{O_n}{M_f^n} \psi_f.$$

Используя симметрии, накладываемые на лагранжиан, можно показать, что форма $\mathcal{L}_f$ *единственна*. Единственный произвол связан с неоднозначностью выбора базиса однородных многочленов, как, например,

Симметрии пространственной четности и обращения времени. Массовая размерность операторов

	iD_t	$i\mathbf{D}$	$\mathbf{E}$	$\mathbf{B}$	$\boldsymbol{\sigma}$
P	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$
T	$+$	$-$	$+$	$-$	$-$
	M^1	M^1	M^2	M^2	M^0

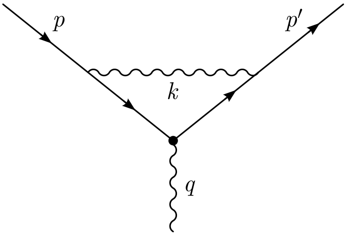

Рис. 1. Рассеяние электрона на внешнем поле

в случае рассеяния электрона на внешнем поле (рис. 1):

$$\mathbf{p}^2 + \mathbf{p}'^2,\ \ \mathbf{p}\mathbf{p}' \text{ или } (\mathbf{p}+\mathbf{p}')^2,\ \ (\mathbf{p}-\mathbf{p}')^2,$$

где $\mathbf{p}$ и $\mathbf{p}'$ — импульсы электрона до и после рассеяния.

Естественным выбором калибровки в нерелятивистской области значений импульсов фотонов является кулоновская калибровка ($\mathbf{kA} = 0$), в которой пропагатор фотона имеет вид

$$\begin{cases} G^{00} = \dfrac{1}{\mathbf{k}^2} \text{ — пропагатор кулоновского фотона,} \\ G^{ij} = \dfrac{\delta_{ij} - k_i k_j/\mathbf{k}^2}{k^2 + i\varepsilon} \text{ — пропагатор поперечного фотона,} \\ G^{0i} = G^{i0} = 0, \quad i,j = 1,2,3. \end{cases} \tag{3}$$

Здесь и в дальнейшем в этом разделе жирным шрифтом обозначаются трехмерные векторы, которые индексируются латинскими буквами. Четырехмерные векторы $k = (k^0, \ldots, k^3)$ имеют греческие индексы и $k^2 = k_0^2 - \mathbf{k}^2$. Пропагаторы частиц имеют вид

$$\frac{1}{E - \mathbf{p}^2/(2m) + i\varepsilon}. \tag{4}$$

Примеры основных взаимодействий иллюстрируются диаграммами Фейнмана для NRQED, здесь $\mathbf{q} = \mathbf{p}' - \mathbf{p}$ — передаваемый импульс частицы (рис. 2).

Выделим лагранжиан нулевого порядка:

$$L_{\text{eff}}^{(0)} = -\frac{1}{2}(E^2 - B^2) + \sum_n \psi_n^* \left(i\partial_t - eZ_n\varphi + \frac{\mathbf{D}^2}{2m_n} \right) \psi_n. \tag{5}$$

Из него вариацией функций полей ψ_n, соответствующих различным частицам, входящим в систему, и квантованием электромагнитного поля получаем нерелятивистский гамильтониан системы частиц, взаимодей-

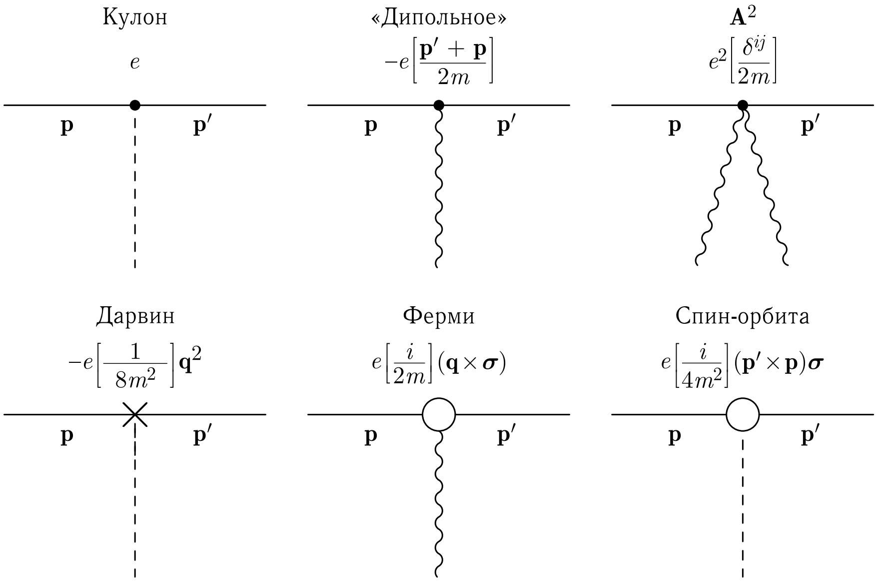

Рис. 2. Основные взаимодействия в NRQED

ствующих по закону Кулона, учитывающий также взаимодействие с электромагнитным полем:

$$\breve{H}_0 = \sum_i \frac{\mathbf{P}_i^2}{2m_i} + e^2 \sum_{j>i} \frac{Z_i Z_j}{r_{ij}} + \sum_{\lambda=1,2} \int d^3k\, k a_{k\lambda}^{+} a_{k\lambda}. \tag{6}$$

Здесь $\mathbf{P}_i = \mathbf{p}_i + e\mathbf{A}$ — обобщенный импульс частицы, и операторы $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ представляются в виде операторов рождения и уничтожения фотонов электромагнитного поля:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = (2\pi)^{-3/2} \int \frac{d^3k}{\sqrt{2k}} \left(a_{k\lambda}^{+}\, \mathrm{e}^{-i\mathbf{kr}} + a_{k\lambda}\, \mathrm{e}^{i\mathbf{kr}}\right) \mathbf{e}_\lambda,$$

где $\mathbf{e}_\lambda$ — два ортогональных вектора поляризации ($\lambda = 1{,}2$). Гамильтониан (6) является удобной отправной точкой для построения эффективной нерелятивистской квантовой электродинамики системы нескольких частиц в гамильтоновой форме [7, 8].

2. НЕСТАЦИОНАРНАЯ ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЯ

Прежде чем переходить к конкретным расчетам, необходимо сказать несколько слов о теории возмущений, применяемой в вычислениях в NRQED. В задачах рассеяния применяется временна́я теория возмущений, как она формулируется Фейнманом в [9], а именно, функция Грина разлагается в ряд по возрастающим степеням возмущающего потенциала взаимодействия

$$K(2,1) = K_0(2,1) + K^{(1)}(2,1) + K^{(2)}(2,1) + \ldots, \tag{7}$$

где $K_0(2,1)$ — функция распространения (функция Грина) невозмущенного гамильтониана:

$$K_0(2,1) = \mathrm{e}^{-iH_0(t_2-t_1)}, \qquad \left[\frac{i\partial}{\partial t_2 - H_0(2)}\right] K_0(2,1) = i\delta(2,1). \tag{8}$$

При этом поправка первого порядка, описывающая испускание фотона одной из частиц системы и последующее его поглощение другой (или той же самой) частицей системы, записывается как

$$\begin{gathered} K^{(1)}(2,1) = -i\int K_0(2,4)\, V(4)\, G(4,3)\, K_0(4,3)\, V(3)\, K_0(3,1)\, d\tau_3\, d\tau_4, \\ d\tau = dt\, dX = dt \prod_i d\mathbf{x}_i, \end{gathered} \tag{9}$$

где $G(4,3)$ — пропагатор фотона (3), а $V(4)$ и $V(3)$ — некоторые функции вершин из лагранжиана NRQED, уравнение (1) (см. также рис. 1). В случае обмена кулоновским фотоном между частицами a и b имеем мгновенное взаимодействие

$$G_{00}(x) = \frac{\delta(x_0)}{(2\pi)^3}\int d^3\mathbf{k}\, \mathrm{e}^{-i\mathbf{k}x}\left[\frac{4\pi}{\mathbf{k}^2}\right] = \frac{\delta(x_0)}{\mathbf{x}},$$

и поправка первого порядка выражается следующим образом:

$$\begin{aligned} K^{(1)}(2,1) = \frac{-i}{(2\pi)^3}\int dX_3\, K_0(2,3)\times \\ \times\left\{\int d^3\mathbf{k}\, V_a(3)\left[\frac{4\pi\,\mathrm{e}^{-i\mathbf{k}(\mathbf{x}_b-\mathbf{x}_a)}}{\mathbf{k}^2}\right] V_b(3)\right\} K_0(3,1) = \\ = -i\int dX_3\, K_0(2,3)\frac{V_a(3)V_b(3)}{\left|\mathbf{x}_a^{(3)} - \mathbf{x}_b^{(3)}\right|} K_0(3,1). \end{aligned} \tag{10}$$

Для поперечного фотона функция Грина имеет вид ($k^2 = k_0^2 - \mathbf{k}^2$)

$$\begin{gathered} G_{ij}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4k\, \mathrm{e}^{-ikx}\left[\frac{4\pi}{k^2+i\varepsilon}\left(\delta_{ij} - \frac{k_ik_j}{\mathbf{k}^2}\right)\right], \\ G_{ij}(x_2-x_1) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4k\, \mathrm{e}^{-ikx_2}\left[\frac{4\pi}{k^2+i\varepsilon}\left(\delta_{ij} - \frac{k_ik_j}{\mathbf{k}^2}\right)\right]\mathrm{e}^{ikx_1}, \end{gathered}$$

и окончательно получаем для поправки первого порядка для *собственной энергии электрона* или обмена поперечным фотоном

$$K^{(1)}(2,1) = -i \int d\tau_3\, d\tau_4 \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k\, K_0(2,4) V(4) \times$$
$$\times \left\{ \mathrm{e}^{-ikx_b} \left[\frac{4\pi}{k^2 + i\varepsilon} \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{\mathbf{k}^2} \right) \right] \mathrm{e}^{ikx_a} K_0(4,3) \right\} V(3) K_0(3,1). \quad (11)$$

3. СТАЦИОНАРНАЯ ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЯ

Поправка к энергии стационарного состояния может быть получена из формулы (11) подстановкой стационарного решения уравнения Шредингера $\psi_0(\mathbf{r}_i, t)$:

$$\Delta E = \int \prod_i^N d\mathbf{r}'_i \prod_j^N d\mathbf{r}_j\, d(t'-t) \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k\, \psi_0^*(\mathbf{r}_j, t)\, V(2) \times$$
$$\times \left\{ \mathrm{e}^{-i(k_0 t - \mathbf{k}\mathbf{r}_j)} \left[\frac{4\pi}{k^2 + i\varepsilon} \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{\mathbf{k}^2} \right) \right] \mathrm{e}^{i(k_0 t' - \mathbf{k}\mathbf{r}_i)}\, K_0(2,1) \right\} V(1)\, \psi_0(\mathbf{r}_i, t').$$

Интегрируя по t, получаем

$$\Delta E = \frac{1}{(2\pi)^4\, i} \int \frac{d^4k}{k^2 + i\varepsilon} 4\pi \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{\mathbf{k}^2} \right) \times$$
$$\times \left\langle \psi_0 \middle| V(2)\, \mathrm{e}^{i\mathbf{k}\mathbf{r}_a} \frac{1}{E_0 - k_0 - H_0} \mathrm{e}^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}_b}\, V(1) \middle| \psi_0 \right\rangle - \delta_{ab}\, \delta m \, \langle \psi_0 | \psi_0 \rangle$$

и, выполняя интегрирование по k_0 ($k = |\mathbf{k}|$),

$$\Delta E = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{2|\mathbf{k}|} 4\pi \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{\mathbf{k}^2} \right) \times$$
$$\times \left\langle \psi_0 \middle| V(2)\, \mathrm{e}^{i\mathbf{k}\mathbf{r}_a} \frac{1}{E_0 - k - H_0} \mathrm{e}^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}_b}\, V(1) \middle| \psi_0 \right\rangle - \delta_{ab}\, \delta m \, \langle \psi_0 | \psi_0 \rangle .$$

Здесь δm — контрчлен, связанный с перенормировкой массы.

Используя разложение по k

$$\frac{1}{E_0 - k - H_0} = -\frac{1}{k} + \frac{H_0 - E_0}{k^2} - \frac{(H_0 - E_0)^2}{k^3} + \ldots,$$

получаем разложение полного вклада в энергию, обусловленного обменом фотоном, в ряд по $Z\alpha$ с коэффициентами, представленными некоторыми локальными операторами (взаимодействиями).

4. СОБСТВЕННАЯ ЭНЕРГИЯ ЭЛЕКТРОНА ВО ВНЕШНЕМ ПОЛЕ

В качестве примера использования NRQED вычислим собственную энергию связанного электрона во внешнем кулоновском поле. Соответствующая задача рассеяния, из которой строится приближение NRQED, изображается диаграммой Фейнмана (см. рис. 1).

Интеграл, определяющий поправку к вершинной функции $\Gamma^\mu_{(0)} = \gamma^\mu$, имеет вид

$$\Gamma^\mu_{(1)} = ie^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \gamma^\rho \frac{1}{\hat{p} - \hat{k} - m_e} \gamma^\mu \frac{1}{\hat{p}' - \hat{k} - m_e} \gamma^\nu \frac{g_{\rho\nu}}{k^2}, \tag{12}$$

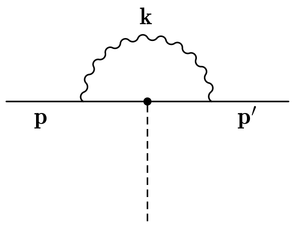

Рис. 3. Диаграмма собственной энергии в NRQED

который содержит не только ультрафиолетовую расходимость, но и расходимость в инфракрасной области, так как электрон находится на массовой поверхности. Для его регуляризации введем фиктивную малую массу в пропагатор фотона

$$\frac{1}{k^2} \to \frac{1}{k^2 - \lambda^2_{\min}}.$$

Используя эту регуляризацию, Фейнман [9] получил следующую формулу для рассеяния без излучения в пределе малых q:

$$\Gamma^\mu_{(1)} = \gamma^\mu \frac{\alpha}{3\pi} \frac{q^2}{m_e^2} \left(\ln \frac{m_e}{\lambda_{\min}} - \frac{3}{8} \right) + \frac{i}{2m_e} \frac{\alpha}{2\pi} \sigma^{\mu\nu} q_\nu. \tag{13}$$

Диаграмма NRQED, определяющая ведущую поправку собственной энергии, показана на рис. 3. Здесь штриховой линией обозначен внешний потенциал, а волнистой — поперечный фотон. Соответствующий интеграл, составленный по правилам NRQED и определяющий поправку к вершинной функции $\Gamma_{(0)} = 1$, записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \Gamma_{(1)} = ie^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\mathbf{p} + (\mathbf{p} + \mathbf{k})}{2m_e} \frac{1}{E + k^0 - (\mathbf{p} - \mathbf{k})^2/2m_e} \times \\ \times \frac{1}{E + k^0 - (\mathbf{p}' - \mathbf{k})^2/2m_e} \frac{\mathbf{p}' + (\mathbf{p}' + \mathbf{k})}{2m_e} \frac{1}{k^2 - \lambda^2_{\min}} \times \\ \times \left(\delta^{ij} - \frac{k^i k^j}{\mathbf{k}^2 + \lambda^2_{\min}} \right). \end{aligned} \tag{14a}$$

Интеграл (14a) расходится в инфракрасной области, поэтому для устранения расходимости используется регуляризация с введением малой фиктивной массы фотона, такой же, что была использована в КЭД. Проинтегрируем (14a) сначала по k^0, замыкая контур интегрирования в верхней полуплоскости. В этом случае внутри контура находится только один полюс, отвечающий энергии фотона с отрицательной энергией $k^0 = -\sqrt{\mathbf{k}^2 + \lambda_{\min}^2}$. После интегрирования по k^0 получаем

$$\Gamma_{(1)} = \left(\frac{e}{m_e}\right)^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\sqrt{\mathbf{k}^2 + \lambda_{\min}^2}} \frac{\mathbf{p} + \mathbf{k}/2}{E - \sqrt{\mathbf{k}^2 + \lambda_{\min}^2} - (\mathbf{p} - \mathbf{k})^2/2m_e} \times$$
$$\times \frac{\mathbf{p}' + \mathbf{k}/2}{E - \sqrt{\mathbf{k}^2 + \lambda_{\min}^2} - (\mathbf{p}' - \mathbf{k})^2/2m_e} \left[\delta^{ij} - \frac{k^i k^j}{\mathbf{k}^2 + \lambda_{\min}^2}\right] =$$
$$= \left(\frac{e}{m_e}\right)^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\sqrt{\mathbf{k}^2 + \lambda_{\min}^2}} \frac{\mathbf{p} + \mathbf{k}/2}{\sqrt{\mathbf{k}^2 + \lambda_{\min}^2} - \mathbf{k}\,(\mathbf{p} - \mathbf{k}/2)/m_e} \times$$
$$\times \frac{\mathbf{p}' + \mathbf{k}/2}{\sqrt{\mathbf{k}^2 + \lambda_{\min}^2} - \mathbf{k}\,(\mathbf{p}' - \mathbf{k}/2)/m_e} \left[\delta^{ij} - \frac{k^i k^j}{\mathbf{k}^2 + \lambda_{\min}^2}\right]. \quad (14б)$$

В последнем равенстве мы учли, что частицы на внешних линиях находятся на массовой поверхности. Интеграл (14б) расходится логарифмически при больших $|\mathbf{k}|$. Слагаемые $\mathbf{k}/2$ в числителе могут быть отброшены, так как

$$p_i k_j \left[\delta^{ij} - \frac{k^i k^j}{\mathbf{k}^2 + \lambda_{\min}^2}\right] = (\mathbf{pk}) \frac{\lambda_{\min}^2}{\mathbf{k}^2 + \lambda_{\min}^2}$$

и соответствующие вклады в (14б) исчезают при $\lambda_{\min} \to 0$. Замечая, что при $|\mathbf{k}| < \Lambda$ выполняется неравенство

$$\sqrt{\mathbf{k}^2 + \lambda_{\min}^2} \gg \mathbf{k}\,(\mathbf{p} - \mathbf{k}/2)/m,$$

и ограничиваясь ведущим вкладом порядка α, получаем

$$\Gamma_{(1)} = \frac{2(\mathbf{pp}')}{3\pi} \frac{\alpha}{m_e^2} \int_0^\Lambda k^2\, dk\, \left(k^2 + \lambda_{\min}^2\right)^{-3/2} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\lambda_{\min}^2}{k^2 + \lambda_{\min}^2}\right) =$$
$$= \frac{q^2}{3\pi} \frac{\alpha}{m_e^2} \left[\ln\left(\frac{2\Lambda}{\lambda_{\min}}\right) - \frac{5}{6}\right] + \mathbf{r}_{\text{ren}} + O(\lambda_{\min}^2; \alpha^2). \quad (15)$$

Здесь $\mathbf{r}_{\text{ren}}$ — вклад, связанный с ренормализацией массы, и можно показать тем же образом, как это было проделано Фейнманом [9, 10] в релятивистской квантовой электродинамике, что он сокращается с вкладами от диаграмм, изображенных на рис. 4.

Сравнивая вклад от диаграмм в амплитуду рассеяния на кулоновском центре, вычисленную в КЭД, с соответствующим вкладом диаграмм

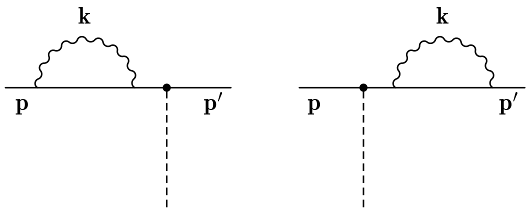

Рис. 4. Диаграммы собственной энергии в NRQED, внешние относительно вершины взаимодействия

NRQED, находим, что коэффициенты c_D и c_S в (1) должны быть выбраны следующими:

$$\begin{cases} c_D = 1 + 2\left(\dfrac{\alpha}{2\pi}\right) + \dfrac{\alpha}{\pi}\dfrac{8}{3}\left[\ln\left(\dfrac{m_e}{2\Lambda}\right) - \dfrac{3}{8} + \dfrac{5}{6}\right], \\ c_S = 1 + 2\left(\dfrac{\alpha}{2\pi}\right), \end{cases} \tag{16}$$

при условии, что интегрирование по поперечным фотонам производится до моментов импульса $|\mathbf{k}| < \Lambda$.

4.1. Вклад низких энергий. В NRQED вклад фотонов низких энергий в собственную энергию электрона в порядке $m\alpha^5$ записывается выражением

$$E_L = \frac{2\alpha}{3\pi m_e^2}\int_0^\Lambda k\,dk\left\langle \mathbf{p}\left(\frac{1}{E_0 - H - k}\right)\mathbf{p}\right\rangle - \delta m\,\langle\psi_0|\psi_0\rangle\,. \tag{17а}$$

Подынтегральное выражение может быть преобразовано с использованием тождества

$$(E_0 - H - k)^{-1} = -\frac{1}{k} - \frac{1}{k^2}(E_0 - H) + \frac{1}{k^2}\frac{(E_0 - H)^2}{E_0 - H - k},$$

что приводит к

$$E_L = \frac{2\alpha}{3\pi m_e^2}\left[-\left\langle\mathbf{p}^2\right\rangle\Lambda + \langle\mathbf{p}\,[H,\mathbf{p}]\rangle\ln\Lambda + \right.$$
$$\left. + \int\frac{dk}{k}\left\langle\mathbf{p}\frac{(E_0 - H)^2}{E_0 - H - k}\mathbf{p}\right\rangle\right] - \delta m\,\langle\psi_0|\psi_0\rangle\,. \tag{17б}$$

Первый член под интегралом связан с перенормировкой массы. Легко показать, что для свободного электрона поправка собственной энергии равна

$$\Delta E_{\rm se}^{\rm free} = -\frac{2\alpha}{3\pi m_e^2}\int_0^\Lambda dk\,k\frac{\left\langle\mathbf{p}^2\right\rangle}{k}\,,$$

поэтому первый член в (17б) сокращается с δm.

Таким образом, оставшаяся часть интеграла может быть представлена в виде сходящегося интеграла

$$E_L^{(0)} = \frac{2\alpha}{3\pi m_e^2} \int\limits_0^{E_h} k\,dk \left\langle \mathbf{p} \left(\frac{1}{E_0 - H - k} + \frac{1}{k} \right) \mathbf{p} \right\rangle + \\ + \frac{2\alpha}{3\pi m_e^2} \int\limits_{E_h}^{\infty} \frac{dk}{k} \left\langle \mathbf{p} \frac{(E_0 - H)^2}{E_0 - H - k} \mathbf{p} \right\rangle$$

и логарифмически расходящегося члена

$$E_L^{(1)} = \frac{2\alpha}{3\pi m_e^2} \left(\int\limits_{E_h}^{\Lambda} \frac{dk}{k} \right) \left\langle \mathbf{p}\,[H, \mathbf{p}] \right\rangle = \frac{\alpha}{3\pi m_e^2} \ln \frac{\Lambda}{E_h} \left(4\pi Z\alpha \langle \delta(\mathbf{r}) \rangle \right).$$

Как будет показано ниже, параметр обрезания Λ сокращается с логарифмическим вкладом от высокоэнергетической части. Здесь E_h — энергия Хартри, а $E_h = m_e \alpha^2$.

4.2. Вклад высоких энергий. Здесь мы берем вклад порядка $m\alpha^5$ из дарвиновского члена лагранжиана NRQED:

$$E_H = -\frac{c_D^{(5)}}{8m_e^2} 4\pi Z\alpha \langle \delta(\mathbf{r}) \rangle, \quad c_D^{(5)} = 2\,\frac{\alpha}{2\pi} + \frac{\alpha}{\pi}\,\frac{8}{3} \left[\ln \left(\frac{m_e}{2\Lambda} \right) + \frac{5}{6} - \frac{3}{8} \right].$$

Тогда для вклада собственной энергии S состояний получаем

$$E_H = \frac{\alpha}{3\pi m_e^2} \left[\ln \alpha^{-2} + \ln \frac{E_h}{\Lambda} - \ln 2 + \frac{5}{6} \right] 4\pi Z\alpha \langle \delta(\mathbf{r}) \rangle.$$

Суммируя вклады E_L и E_H, мы видим, что параметр обрезания Λ сокращается, и получаем конечное выражение для вклада собственной энергии.

4.3. Поправка собственной энергии для связанного состояния. Заменив $E_h \to 2R_\infty$ и учитывая вклад от взаимодействия спина движущегося электрона с электрическим полем (в атомной физике — спин-орбитальное взаимодействие [5])

$$E_{\rm SO} = -\frac{c_S^{(5)} e}{8m_e^2} \langle \mathbf{p} \cdot \mathbf{E} \times \boldsymbol{\sigma} \rangle, \quad c_S = 1 + 2a_e,$$

из лагранжиана NRQED (1), приходим к известному выражению [11]:

$$\Delta E_{\rm se} = \frac{4\alpha(Z\alpha)}{3m_e^2} \left[\ln\, \alpha^{-2} - \ln \left[\frac{k_0(n,l)}{R_\infty} \right] + \frac{5}{6} \right] \langle \psi | \delta(\mathbf{r}) | \psi \rangle + \\ + \frac{\alpha(Z\alpha)}{2\pi m_e^2} \left\langle \psi \left| \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{p}}{r^3} \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} \right| \psi \right\rangle, \quad (18)$$

где $\ln(k_0(n,l)/R_\infty)$ есть так называемый логарифм Бете, определяемый выражением

$$\ln\left[\frac{k_0(n,l)}{R_\infty}\right] = \sum_n \frac{\mathbf{p}_{0n}\,\mathbf{p}_{n0}(E_n - E_0)\ln(|E_n - E_0|/R_\infty)}{\mathbf{p}_{0n}\,\mathbf{p}_{n0}(E_n - E_0)}. \qquad (19)$$

5. ЭФФЕКТИВНЫЕ ОПЕРАТОРЫ ПОРЯДКА $m\alpha^5$ ДЛЯ СИСТЕМЫ ДВУХ ЧАСТИЦ

Если мы ограничиваемся точностью $m\alpha^5$, то полученные в предыдущих разделах параметры NRQED (c_S, c_D и c_F) могут быть использованы для построения гамильтониана взаимодействия системы нескольких частиц из лагранжиана (1).

Для того чтобы определить полный гамильтониан взаимодействия для системы двух точечных частиц спина 1/2 с конечными массами m_1 и m_2 ($m_2 > m_1$), точный до порядка $m\alpha^5$ включительно, необходимо еще рассмотреть вклад релятивистских фотонов от диаграмм (рис. 5) в пределе малых импульсов частиц (на пороге) и малых углов рассеяния (рассеяние вперед). Соответствующая амплитуда рассеяния определяется интегралом

$$\begin{aligned} M_{if} = -iZ^2e^4\langle i|\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{1}{k^4}\,\mathrm{Tr}\left[\gamma^\mu\frac{1}{\hat{t}_1 - \hat{k} - m_1}\gamma^\nu\right]\times \\ \times\left\{\mathrm{Tr}\left[\gamma^\mu\frac{1}{\hat{t}_2 + \hat{k} - m_2}\gamma^\nu\right] + \mathrm{Tr}\left[\gamma^\mu\frac{1}{\hat{t}_2 - \hat{k} - m_2}\gamma^\nu\right]\right\}|f\rangle, \qquad (20)\end{aligned}$$

где $t_{1,2} = (m_{1,2}, \mathbf{0})$ — 4-импульсы частиц в состоянии покоя. Получающийся из этого интеграла оператор взаимодействия имеет вид [8] (см. также уравнение (2б))

$$\begin{aligned} E_H = -\frac{(Z\alpha)^2}{m_1m_2}\left\{\frac{7}{3} - 2\ln\left(\frac{m_1}{2\Lambda}\right) + \frac{2}{m_1^2 - m_2^2}\left[m_1^2\ln\frac{m_2}{\mu} - m_2^2\ln\frac{m_1}{\mu}\right] + \right. \\ \left. + 2\langle\boldsymbol{\sigma}_1\cdot\boldsymbol{\sigma}_2\rangle\frac{m_1m_2}{m_2^2 - m_1^2}\ln\frac{m_2}{m_1}\right\}\langle\delta(\mathbf{r})\rangle. \qquad (21)\end{aligned}$$

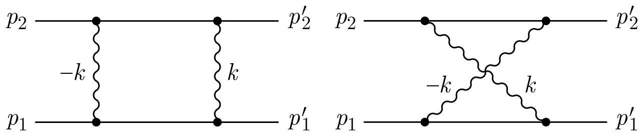

Рис. 5. Диаграммы двухфотонного обмена

Здесь $\mu = m_1 m_2/(m_1+m_2)$ — приведенная масса соответствующей пары частиц. Для простоты мы предполагаем, что частица 1 есть электрон и $m_1 = m_e$, а частица 2 имеет заряд Z.

Рассмотрим теперь вклады NRQED. Первым рассмотрим вклад E_S от обмена двумя поперечными «мягкими» фотонами, который определяется диаграммой ($k_2 = q - k_1$, $q^0 = 0$) и получается из гамильтониана NRQED (рис. 6):

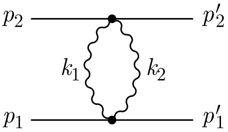

Рис. 6. Одновременный обмен двумя мягкими фотонами в NRQED

$$E_S = \frac{Z^2 e^4}{4m_1 m_2} \left\langle \psi \left| \mathbf{A}(\mathbf{r}_1)^2 (E_0 - H)^{-1} \mathbf{A}(\mathbf{r}_2)^2 \right| \psi \right\rangle + \text{h. c.}$$

Выписывая этот интеграл в формализме нестационарной NRQED и интегрируя по k_0, получаем

$$E_S = -\frac{Z^2 e^4}{4m_1 m_2} \left\langle \psi \right| \int \frac{d^3\mathbf{k}_1}{(2\pi)^3} \frac{1}{k_1 k_2 (k_1 + k_2)} \left(\delta^{ij} - \frac{k_1^i k_1^j}{\mathbf{k}_1^2} \right) \times \\ \times \left(\delta^{ij} - \frac{k_2^i k_2^j}{\mathbf{k}_2^2} \right) \left| \psi \right\rangle. \quad (22)$$

Последний интеграл расходится при больших $|\mathbf{k}_1|$ и имеет вид

$$E_S = -\frac{2(Z\alpha)^2}{m_1 m_2} \left[\ln{(2\Lambda)^{-1}} + Q(r) + \frac{1}{3} \left(7 \ln 2 - \frac{17}{2} \right) \langle \delta(\mathbf{r}) \rangle \right]. \quad (23)$$

Оператор $Q(r)$ был введен в работах [12, 13] и определяется выражением

$$Q(r) = \lim_{a \to 0} \left[\int_a^\infty r^2 dr \left(\psi^* \frac{1}{4\pi r^3} \psi \right) + \big\langle \delta(\mathbf{r}) \big\rangle (\gamma + \ln a) \right]. \quad (24)$$

Как и следовало ожидать, расходящиеся части интеграла, которые содержат параметр теории Λ, сокращаются с соответствующим вкладом в E_H от обмена двух поперечных релятивистских фотонов, что приводит к конечному выражению для вклада в энергию.

Нам осталось рассмотреть вклад $\sim m\alpha^5$, определяемый обменом одним поперечным фотоном с энергией фотона в области «мягких» ($\sim m(Z\alpha)$) и «ультрамягких» энергий, порядка энергии связи $\sim m(Z\alpha)^2$.

В области «мягких» энергий член, определяющий поправку порядка $m\alpha^4$, уже был включен в гамильтониан Брейта. Чтобы определить следующий по порядку вклад, удобно представить функцию Грина нерелятивистского гамильтониана в виде

$$\frac{1}{E_0 - k - H} = -\frac{1}{k} + \frac{(H - E_0)}{k^2} + \ldots,$$

тогда поправка от обмена «мягким» поперечным фотоном порядка $m\alpha^5$ дается следующим интегралом:

$$E_M = -\frac{Ze^2}{m_1 m_2}\int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3 2|\mathbf{k}|^3}\left(\delta^{ij} - \frac{k^i k^j}{\mathbf{k}^2}\right)\times \\ \times \left\langle \psi \middle| p_1^i\, e^{i\mathbf{kr}}\,(H-E_0)\, e^{-i\mathbf{kr}}\, p_2^j \middle| \psi \right\rangle + \text{h. c.}, \qquad (25)$$

который логарифмически расходится на нижней границе $\Lambda_{\text{us}} \sim (Za)\Lambda \sim$ $\sim m_e(Z\alpha)^2$. Этот вклад имеет вид

$$E_M = \frac{2(Z\alpha)^2}{m_1 m_2}\left[-\frac{4}{3}\,Q(r) - \frac{2}{3}\,\ln\,\Lambda_{\text{us}}\,\langle\delta(\mathbf{r})\rangle - \frac{16}{9}\,\langle\delta(\mathbf{r})\rangle\right]. \qquad (26)$$

Вклад ультрамягких фотонов дается выражением [14, 15]

$$E_L = -\frac{2Z\alpha}{3\pi}\left[\ln\,\frac{(Z\alpha)^2}{\Lambda_{\text{us}}} - \frac{5}{6} + \frac{\langle \mathbf{J}(H-E)\,\ln\left((H-E)/R_\infty\right)\mathbf{J}\rangle}{\langle[\mathbf{J},[H,\,\mathbf{J}]]/2\rangle}\right]\times \\ \times\left\langle\frac{[\mathbf{J},[H,\,\mathbf{J}]]}{2}\right\rangle, \qquad (27)$$

где $\mathbf{J} = \sum\limits_a Z_a\mathbf{p}_a/m_a$ — оператор электромагнитного тока в атоме (молекуле). Новый параметр Λ_{us} сокращается при суммировании с соответствующим вкладом из (26).

Последнее выражение в скобках в (27) представляет собой логарифм Бете [11], который зависит от нерелятивистской волновой функции системы частиц. Коммутатор $[\mathbf{J},[H,\,\mathbf{J}]]$ легко раскрывается:

$$\langle[\mathbf{J},[H,\,\mathbf{J}]]\rangle = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{Z}{m_2}\right)^2 4\pi Z\alpha\,\langle\delta(\mathbf{r})\rangle\,.$$

Предполагая, что m_2 много больше массы m_1, и суммируя (21), (23), (26) и (27), получим окончательное выражение для поправки порядка $m\alpha^5$ с учетом конечной массы ядра:

$$\delta^{(3)}E = \frac{\alpha^3}{m_1^2}\left[\frac{4Z}{3}\left(-\ln\alpha^2 - \beta(L,v) + \frac{5}{6} - \frac{1}{5}\right)\langle\delta(\mathbf{r})\rangle + \right. \\ \left. + \frac{2Z^2}{3}\frac{m_1}{m_2}\left(-\ln\alpha - 4\,\beta(L,v) + \frac{31}{3}\right)\langle\delta(\mathbf{r})\rangle - \frac{14Z^2}{3}\frac{m_1}{m_2}Q(r)\right],$$

где

$$\beta(L,v) = \frac{\langle\mathbf{J}(H-E_0)\,\ln\left((H-E_0)/R_\infty\right)\mathbf{J}\rangle}{\langle[\mathbf{J},[H,\,\mathbf{J}]]/2\rangle}.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Нашей целью было продемонстрировать на простом примере атома водорода с конечной массой ядра вывод эффектов квантовой электродинамики для вычисления поправок к энергии связи. Используя эффективную теорию поля, нерелятивистскую КЭД, впервые предложенную Кажуэллом и Лепажем [4], мы вычислили лэмбовский сдвиг порядка $m\alpha^5$ и получили полное выражение для ведущей поправки, включая отдачу. Этот метод успешно применялся для вычисления поправок к энергии водородоподобных систем, таких как поправки высшего порядка к лэмбовскому сдвигу и сверхтонкой структуре [3], и может быть распространен на произвольную кулоновскую систему нескольких частиц, такую как атом гелия [16], молекулярные ионы водорода [17] и экзотические атомы антипротонного и пионного гелия [18].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Sapirstein J.R., Yennie D.R.* Theory of Hydrogenic Bound States. Quantum Electrodynamics. Singapore: World Sci., 1990.
2. *Eides M.I., Grotch H., Shelyuto V.A.* Theory of Light Hydrogenlike Atoms // Phys. Rep. 2001. V. 342. P. 63.
3. *Eides M.I., Grotch H., Shelyuto V.A.* Theory of Light Hydrogenic Bound States // Springer Tracts in Modern Physics. Berlin: Springer, 2007. V. 222.
4. *Caswell W.E., Lepage G.P.* Effective Lagrangians for Bound State Problems in QED, QCD, and Other Field Theories // Phys. Lett. B. 1986. V. 167. P. 437.
5. *Kinoshita T., Nio M.* // Phys. Rev. D. 1996. V. 53. P. 4909.
6. *Paz Gil.* An Introduction to NRQED // Mod. Phys. Lett. A. 2015. V. 30. P. 1550128.
7. *Pachucki K.* Effective Hamiltonian Approach to the Bound State: Positronium Hyperfine Structure // Phys. Rev. A. 1997. V. 56. P. 297.
8. *Pachucki K.* Simple Derivation of Helium Lamb Shift // J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. 1998. V. 31. P. 5123.
9. *Feynman R.P.* Theory of Positron // Phys. Rev. 1949. V. 76. P. 749; Space-Time Appxoach to Quantum Electrodynamics // Ibid. P. 769.
10. *Feynman R.P.* Quantum Electrodynamics. New York: W.A. Benjamin, Inc., 1961.
11. *Бете Г.А., Солпитер Э.* Квантовая механика атомов с одним и двумя электронами. М.: Физматгиз, 1960.
12. *Araki H.* Quantum-Electrodynamical Corrections to Energy-Levels of Helium // Prog. Theor. Phys. 1957. V. 17. P. 619.
13. *Sucher J.* Energy Levels of the Two-Electron Atom to Order α^3 Ry; Ionization Energy of Helium // Phys. Rev. 1958. V. 109. P. 1010.
14. *Yelkhovsky A.* QED Corrections to Singlet Levels of the Helium Atom: A Complete Set of Effective Operators to $m\alpha^6$ // Phys. Rev. A. 2001. V. 64. P. 062104.
15. *Korobov V.I.* Calculation of the Nonrelativistic Bethe Logarithm in the Velocity Gauge // Phys. Rev. A. 2012. V. 85. P. 042514.

16. *Yerokhin V. A., Patkóš V., Pachucki K.* Atomic Structure Calculations of Helium with Correlated Exponential Functions // Symmetry. 2021. V. 13. P. 1246.
17. *Korobov V. I., Karr J.-Ph.* Rovibrational Spin-Averaged Transitions in the Hydrogen Molecular Ions // Phys. Rev. A. 2021. V. 104. P. 032806.
18. *Bai Zhi-Da, Korobov V. I., Yan Zong-Chao, Shi Ting-Yun, Zhong Zhen-Xiang.* Precision Spectroscopy of the Pionic Helium-4 // Phys. Rev. Lett. 2022. V. 128. P. 183001.