

УДК 537.8, 530.145

ПЕРЕПУТЫВАНИЕ КУБИТОВ И ПОЛЕЙ ЯНГА–МИЛЛСА–ХИГГСА В ПРОЦЕССЕ ЭВОЛЮЦИИ

В. И. Кувшинов^а, В. В. Мармыш^б

^а Институт физики НАНБ, Минск

^б Белорусский государственный университет, Минск

Показано, что в процессе эволюции полей Янга–Миллса–Хиггса и взаимодействующих кубитов возможно возникновение перепутанных состояний.

It was shown the appearance of entangled states is possible in the process of Young–Mills–Higgs fields and interactive q -bits evolution.

ВВЕДЕНИЕ

Интерес к перепутанным состояниям как особому классу квантовых состояний проявлялся еще в 30-е гг., сразу после создания квантовой механики [1], благодаря весьма необычным их свойствам. В последнее время проблема описания и получения перепутанных состояний привлекает к себе все большее внимание. Такой интерес связан в первую очередь с развитием возможностей управления динамикой квантовых систем на уровне отдельных частиц. Особенно важным достижением было осуществление в 1997 г. квантовой телепортации на фотонах Антоном Цайлингером и его сотрудниками [2] при помощи перепутанных состояний, которые могут быть сгенерированы в кристаллах [3].

Ценность перепутанных состояний заключается не только в квантовой телепортации, благодаря своим нетривиальным свойствам они расширяют границы и возможности в области передачи информации, кодирования, принципов вычисления. Поэтому они используются (возникают) при работе квантового компьютера, плотного кодирования, при передаче информации [4]. Особый интерес представляет возможная связь квантового сжатия, неустойчивости, перепутывания, в частности, образования двухмодовых сжатых состояний [5].

В данной работе изучаются дискретные и непрерывные перепутанные состояния. Отдельное внимание уделяется случаю, когда перепутывание происходит по величинам, спектр собственных значений которых состоит только из двух значений. Примером таких систем могут служить частицы с спином $1/2$, а также двухуровневые системы. В этом случае условие перепутанных состояний записывается через коэффициент корреляции и анализируется возможность возникновения перепутанных состояний в результате эволюции квантово-механической системы двух частиц.

В работе показывается также возможность возникновения перепутанных состояний в системе полей Янга–Миллса–Хиггса и для кубитов. Рассмотрен пример квантово-механической модели полей Янга–Миллса–Хиггса, для него записан коэффициент корреляции, характеризующий перепутывание, через элементы матрицы дисперсии. Эволюция системы прослеживалась при помощи уравнений движения для матрицы дисперсии [6, 7],

которые решались численно. Поправка за счет нелинейности (квантовая поправка по \hbar) оценена в Приложении и показано, что она мала.

1. ПЕРЕПУТАННЫЕ СОСТОЯНИЯ

Как известно, перепутанным состоянием составной квантовой системы называется такое состояние, которое невозможно представить в виде прямого произведения волновых функций составляющих системы. Примером перепутанных по поляризации фотонных состояний служат состояния Белла [3], которые имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} |\Phi^+\rangle &= \frac{|\uparrow\rangle_1 |\uparrow\rangle_2 + |\leftrightarrow\rangle_1 |\leftrightarrow\rangle_2}{\sqrt{2}}, & |\Phi^-\rangle &= \frac{|\uparrow\rangle_1 |\uparrow\rangle_2 - |\leftrightarrow\rangle_1 |\leftrightarrow\rangle_2}{\sqrt{2}}, \\ |\Psi^+\rangle &= \frac{|\uparrow\rangle_1 |\leftrightarrow\rangle_2 + |\leftrightarrow\rangle_1 |\uparrow\rangle_2}{\sqrt{2}}, & |\Psi^-\rangle &= \frac{|\uparrow\rangle_1 |\leftrightarrow\rangle_2 - |\leftrightarrow\rangle_1 |\uparrow\rangle_2}{\sqrt{2}}, \end{aligned} \quad (1)$$

где $|\uparrow\rangle$ и $|\leftrightarrow\rangle$ обозначают разную поляризацию фотонов. Отличительной особенностью этих состояний является то, что измерение поляризации одного фотона мгновенно переводит второй фотон в состояние с определенной поляризацией, причем вторая поляризация определяется именно в результате измерения первой поляризации и не является определенной до проведения измерений.

Рассмотрим вектор состояния $|\alpha\beta\rangle$, который описывает физическую систему, состоящую из подсистем α и β , и пусть над состоянием $|\alpha\beta\rangle$ производится два последовательных измерения двух физических величин X — для системы α — и Y — для системы β . Будем считать, что измеряемые величины X и Y могут иметь только по два собственных значения X_1, X_2 и Y_1, Y_2 , соответствующие собственным ортонормированным векторам $|X_1\rangle, |X_2\rangle$ и $|Y_1\rangle, |Y_2\rangle$. Для того чтобы проверить состояние системы на перепутанность, необходимо вычислить условную вероятность получения во втором измерении величины Y_k при условии, что в первом измерении было получено значение X_i . Если матрица условных вероятностей $P(Y_k/X_i)$ имеет вид

$$P(Y_k/X_i) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ или } P(Y_k/X_i) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

то рассматриваемое состояние является перепутанным. Условная вероятность рассчитывается следующим образом: $P(Y_i/X_k) = \langle Y_i | \langle X_k | \alpha\beta \rangle^2 / \|\langle X_k | \alpha\beta \rangle\|^2$; здесь использовано определение нормы $\|\Psi\| = \sqrt{\langle \Psi | \Psi \rangle}$.

Для данной работы более удобно рассмотреть коэффициент корреляции между величинами X и Y [8], который выражается через условные вероятности

$$r(X, Y) = \frac{\langle XY \rangle - \langle X \rangle \langle Y \rangle}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{P(X_2)(P(Y_2/X_2) - P(Y_2))}{\sqrt{P(X_2)(1 - P(X_2))} \sqrt{P(Y_2)(1 - P(Y_2))}}, \quad (3)$$

где $\langle \rangle$ означают среднее значение, а σ — соответствующее среднеквадратическое отклонение.

Легко показать, что когда состояние системы является перепутанным, то коэффициент корреляции равен ± 1 . Если же коэффициент корреляции равен ± 1 , то случайные

величины связаны линейной зависимостью $Y = aX + b$ [8], что означает полную корреляцию между величинами X и Y . Поэтому в качестве критерия перепутанности состояний (2) можно рассматривать равенство коэффициента корреляции (3) ± 1 .

Если у измеряемых величин число собственных значений, которые могут быть получены в результате измерения, больше двух, то коэффициент корреляции не дает достаточного и необходимого условия перепутанности. В этом случае наличие коэффициента корреляции, отличного от нуля (или близкого к ± 1) [8], безусловно означает перепутанное состояние, но равенство нулю (или близость к нулю) не означает еще того, что состояние не является перепутанным.

При переходе к непрерывным величинам X и Y необходимо заменить матрицу условных вероятностей на условную плотность распределения $\rho(Y/X)$ и $\rho(X/Y)$. Если при фиксировании одной переменной, которая была измерена первой, для второй переменной в обоих распределениях $\rho(Y/X)$, $\rho(X/Y)$ получится δ -образное распределение, — тогда это перепутанное состояние [9].

Воспользуемся коэффициентом корреляции для того, чтобы проанализировать возможность возникновения непрерывных перепутанных состояний в результате эволюции квантово-механической системы. Коэффициент корреляции может быть выражен через элементы матрицы дисперсии

$$r_p = \frac{\sigma^{12}}{\sqrt{\sigma^{11}\sigma^{22}}}, \quad r_q = \frac{\sigma^{34}}{\sqrt{\sigma^{33}\sigma^{44}}}. \quad (4)$$

Здесь $\mathbf{y} = (\mathbf{p}, \mathbf{q})$ — вектор, полностью задающий состояние классической гамильтоновой системы; $\sigma^{nl} = \frac{1}{2\hbar} \langle \Delta \hat{y}^n \Delta \hat{y}^l + \Delta \hat{y}^l \Delta \hat{y}^n \rangle$ — элементы матрицы дисперсии; $\Delta \hat{y}^n = \hat{y}^n - \langle \hat{y}^n \rangle$ — операторы отклонения от среднего значения. При помощи матрицы дисперсии можно также записать дисперсии квадратурных операторов \hat{X}_1, \hat{X}_2 [10] и проверить возможность возникновения квантового эффекта сжатия [13]

$$\left\langle (\Delta \hat{X}_i)^2 \right\rangle = \langle \hat{X}_i^2 \rangle - \langle \hat{X}_i \rangle^2 = \frac{\hbar}{s} \sum_{n,l} \mu_n \mu_l \sigma^{nl}; \quad (5)$$

при $i = 1$ $n = \xi + s$, $\mu_{\xi+s} = \sqrt{m_\xi \omega_\xi / 2\hbar}$, при $i = 2$ $n = \xi$, $\mu_\xi = 1 / \sqrt{2\hbar m_\xi \omega_\xi}$, $\xi = 1, \dots, s$; m_ξ , ω_ξ — масса и частота ξ -й моды. Диагональные элементы σ^{nn} определяют как дисперсии операторов координаты (при $n = \xi + s$), так и дисперсии операторов импульса (при $n = \xi$). Стандартные условия квадратурного сжатия [10, 11] в данном случае можно записать в виде ($n = \xi$ или $n = \xi + s$)

$$\sigma^{nn} < \frac{1}{4\hbar\mu_n^2} \text{ (одномодовое сжатие)}, \quad \sum_{n,l} \mu_n \mu_l \sigma^{nl} < \frac{s}{4\hbar} \text{ (многомодовое сжатие)}. \quad (6)$$

Для анализа эволюции коэффициента корреляции воспользуемся формализмом, разработанным в [6, 7, 13], и уравнениями движения для матрицы дисперсии

$$\frac{d}{dt} \sigma^{mn} = \Gamma_k^m \sigma^{kn} + \Gamma_k^n \sigma^{mk}, \quad (7)$$

где Γ_k^n — матрица устойчивости

$$\Gamma_n^m = \gamma^{mk} \frac{\partial^2 H}{\partial y^k \partial y^n} \Big|_{\mathbf{y}=\mathbf{y}(t)}, \quad \{\gamma^{mn}\} = \begin{pmatrix} 0 & -I_s \\ I_s & 0 \end{pmatrix}, \quad m, n = \overline{1, 2s}. \quad (8)$$

Здесь $\mathbf{y}(t)$ — классическая траектория движения, на которой вычисляется матрица устойчивости, а I_s — единичная матрица размера $s \times s$.

Решение уравнений (7) выражается через оператор эволюции $F(t, t_0)$, который связывает вариацию траектории в начальный момент времени t_0 с вариацией траектории в момент времени t [13] (мультипликативный интеграл [14]).

$$\sigma^{mn}(t) = F_l^m(t, t_0) F_k^n(t, t_0) \sigma^{lk}(t_0), \quad \text{где } F(t, t_0) = \int_{t_0}^{\cap t} (1 + \Gamma(\xi) d\xi). \quad (9)$$

Уравнения (7) являются точными только для систем, описываемых квадратичными гамильтонианами. В случае наличия в гамильтониане нелинейностей выше второго порядка эти уравнения становятся приближенными. Для того чтобы оценить точность уравнений (7), необходимо воспользоваться уравнениями движения, которые содержат квантовые поправки, обусловленные нелинейностью гамильтониана [7]. Такие уравнения имеют вид (19)–(21), их решение может быть записано в виде (25)–(27).

При помощи оператора эволюции можно проанализировать устойчивость движения системы, для этого необходимо проанализировать собственные значения оператора эволюции. Для устойчивых систем все собственные значения оператора эволюции ограничены по модулю $|\lambda_i(t)| < M$, где M — положительное число, не зависящее от времени, а $i = \overline{1, 2s}$. Если некоторые собственные значения оператора эволюции будут неограниченно возрастать со временем, то это будет означать неустойчивость движения системы [13].

При анализе эволюции коэффициента корреляции во времени будем пользоваться уравнениями (7). Влияние квантовых поправок будем учитывать при помощи (26), (27).

Рассмотрим теперь принципиальную возможность возникновения в результате эволюции состояния, которое бы имело коэффициент корреляции, равный ± 1 . Воспользовавшись решением (9), выпишем явные выражения для элементов матрицы дисперсии, которые входят в коэффициент корреляции, выбрав в качестве начального состояния когерентное

$$\sigma^{13} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 F_k^1 F_k^3, \quad \sigma^{11} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 F_k^1 F_k^1, \quad \sigma^{33} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 F_k^3 F_k^3. \quad (10)$$

Пользуясь определением коэффициента корреляции можно показать, что коэффициент корреляции может быть равен ± 1 только в том случае, когда две строчки оператора эволюции линейно зависимы, а это означает, что детерминант оператора эволюции равен нулю. При этом, воспользовавшись определением оператора эволюции (9), можно показать, что всегда $\det(F) = 1$. Это означает, что в рамках уравнений (7) линейная корреляция между измеряемыми величинами не может быть полной. Верхняя оценка для максимального коэффициента корреляции имеет вид

$$|r| \leq 1 / \left(\sqrt{1 + 1 / ((2s)! \sqrt{2s} M^4)^2} \right), \quad (11)$$

где $M = \max |F_k^i|$. Так как для устойчивых систем все значения оператора эволюции ограничены, то для них и максимально возможное значение коэффициента корреляции тоже ограничено. И только для неустойчивых систем, для которых характерен неограниченный рост собственных значений и элементов оператора эволюции, возможно в пределе достижение коэффициента корреляции, равного ± 1 , и переход в перепутанное состояние.

Приведенная оценка (11) доказывает невозможность возникновения перепутанных состояний для устойчивых систем. Покажем, что для хаотических систем возможно возникновение перепутанных состояний. Для этого рассмотрим пример невырожденного параметрического усилителя с внешними δ -образными толчками [12, 13]. Так как это пример системы, квадратичной по импульсам и координатам, то для него уравнения движения для матрицы дисперсии (7) не содержат квантовых поправок и являются точными. Оператор эволюции рассматриваемой системы вычислен в работе [13]. Воспользовавшись полученным результатом, запишем следующие выражения для элементов матрицы дисперсии:

$$\begin{aligned}\sigma^{12}(t) &= -\frac{\sqrt{\omega_1\omega_2}}{2} \sinh(2B) \cos(t(\omega_1 + \omega_2)), \\ \sigma^{11}(t) &= \frac{\omega_1}{2} \cosh(2B), \quad \sigma^{22}(t) = \frac{\omega_2}{2} \cosh(2B),\end{aligned}$$

где $B = \chi t + \epsilon [t/T]$. Коэффициент корреляции в этом случае равен $r = -\tanh(2B) \times \cos(t(\omega_1 + \omega_2))$. Очевидно, что для данной системы, в случае ее неустойчивого движения ($\chi T + \epsilon \neq 0$), коэффициент корреляции будет достигать значений ± 1 .

В том случае, когда система состоит из двух частей, каждая из которых неустойчива, но они не взаимодействуют друг с другом, очевидно, отсутствует возможность возникновения перепутанных состояний. Таким образом, для возникновения перепутанных состояний неустойчивость системы необходима, но не достаточна.

2. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ КУБИТОВ

Рассмотрим две полностью тождественные по свойствам системы, обладающие спином, равным $1/2$. В качестве базиса будем рассматривать собственные векторы оператора спина. Исходя из симметрии задачи, можно указать общий вид матричных элементов гамильтониана такой системы в указанном базисе:

$$\{H_{mn}\} = \begin{pmatrix} A & \alpha^* & \alpha^* & \beta^* \\ \alpha & B & \gamma^* & \alpha \\ \alpha & \gamma & B & \alpha \\ \beta & \alpha^* & \alpha^* & A \end{pmatrix}, \quad (12)$$

где A, B — вещественные числа, а α, β, γ — комплексные в базисе

$$|1\rangle = |\uparrow\rangle_1 |\uparrow\rangle_2, \quad |2\rangle = |\uparrow\rangle_1 |\downarrow\rangle_2, \quad |3\rangle = |\downarrow\rangle_1 |\uparrow\rangle_2, \quad |4\rangle = |\downarrow\rangle_1 |\downarrow\rangle_2. \quad (13)$$

Начальное состояние выбиралось в следующем виде: $|\psi\rangle = \frac{1}{2} (|\uparrow\rangle_1 + |\downarrow\rangle_1) \otimes (|\uparrow\rangle_2 + |\downarrow\rangle_2)$. Вектор состояния в произвольный момент времени можно записать следующим образом:

$$|\psi\rangle = C_1 |1\rangle + C_2 |2\rangle + C_3 |3\rangle + C_4 |4\rangle, \quad (14)$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 — коэффициенты разложения состояния $|\psi\rangle$ по базису (13).

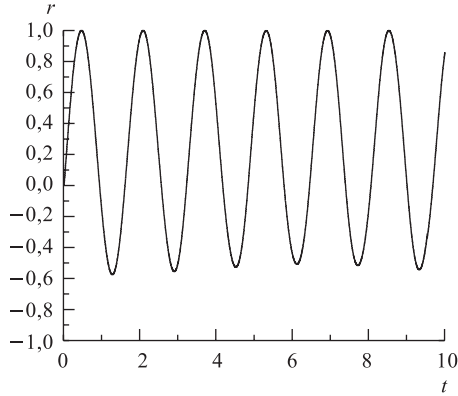


Рис. 1. Зависимость коэффициента корреляции от времени для взаимодействующих кубитов

система эволюционирует в перепутанное состояние в определенные моменты времени, максимальное значение коэффициента корреляции повторяется с течением времени.

Для проверки возможности возникновения перепутанных состояний рассматриваемой системы варьировались параметры гамильтониана (12), затем численным образом решалось уравнение Шредингера. По решению вычислялся коэффициент корреляции и численно находилось его максимальное значение и момент времени, в который оно достигалось (см. Приложение). В результате численного поиска наилучший результат был достигнут в момент времени $t = 0,473799533$ при следующих параметрах гамильтониана (17). Вектор состояния системы в этот момент времени имел вид (18), а коэффициент корреляции достиг значения $r(X, Y) = 0,999999943015$. Зависимость коэффициента корреляции от времени представлена на рис. 1. Таким образом, видно, что

3. КВАНТОВО-МЕХАНИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПОЛЕЙ ЯНГА–МИЛЛСА–ХИГТСА

Рассмотрим взаимодействие $SU(2)$ калибровочного поля A_μ^a (индекс a отвечает внутренней, цветовой симметрии, μ — пространственно-временной индекс) с хиггсовскими полями ϕ . Лагранжиан такого взаимодействия имеет вид

$$L = \frac{1}{2} (D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi) - V(\phi) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a}, \quad V(\phi) = \mu^2 |\phi|^2 + \nu |\phi|^4. \quad (15)$$

Наложив требование пространственной однородности на поля Янга–Миллса–Хиггса $\partial_i A_\mu^a = \partial_i \phi = 0$ и положив

$$|\phi_0| = \sqrt{-\mu^2/(4\nu)} = v, \quad A_1^1 = q_1, \quad A_2^2 = q_2, \quad \dot{A}_1^1 = p_1, \quad \dot{A}_2^2 = p_2,$$

получим модельный гамильтониан полей Янга–Миллса–Хиггса [15, 16]

$$\hat{H} = \frac{1}{2} (\hat{p}_1^2 + \hat{p}_2^2) + g^2 v^2 (\hat{q}_1^2 + \hat{q}_2^2) + \frac{1}{2} g^2 \hat{q}_1^2 \hat{q}_2^2. \quad (16)$$

Система полей Янга–Миллса и Хиггса имеет бесконечное число степеней свободы, и слишком сложно исследовать ее точно. Для уменьшения числа степеней свободы, следуя многим другим авторам, изучавшим систему аналитически и численно, мы ограничили наше рассмотрение пространственно-однородными полями. Это частный случай модели. Несмотря на это, он представляет самостоятельный интерес. Пространственно-однородные поля, сохраняя основные нелинейности, позволяют исследовать главные свойства неоднородных полей, в частности понять причину появления хаоса и перепутанности в системе полей Янга–Миллса и Хиггса. Установление хаоса и перепутанности в

однородной проекционной модели означает их наличие и в более общем случае. Следует отметить также, что однородные поля представляют собой в действительности поля в длинноволновом приближении, и сами по себе имеют смысл и представляют интерес.

Будем исследовать гамильтониан (16) на предмет возникновения перепутанных состояний в результате эволюции. В качестве физических величин, по которым будет рассматриваться перепутанность, возьмем в одном случае импульсы, а в другом координаты системы (16). Анализ будем производить при помощи коэффициента корреляции. В качестве начального состояния возьмем когерентное состояние. Матрица дисперсии при этом в начальный момент времени будет равна

$$\sigma(0) = \text{diag} \{1/2, 1/2, 1/2, 1/2\}.$$

Для получения зависимости коэффициентов корреляции от времени будем пользоваться уравнениями движения для матрицы дисперсии без квантовых поправок (7). Нелинейность гамильтониана дает вклад в эволюцию матрицы дисперсии и коэффициента корреляции посредством влияния на траекторию, на которой вычисляется матрица устойчивости и вторых производных, входящих в нее. Так как зависимости для r_p и r_q (4) имеют одинаковые характерные особенности, все графики будут приводиться только для r_p , а также при следующих начальных условиях $p_1(0) = 1/2$, $p_2(0) = 1$, $q_1(0) = 1$, $q_2(0) = 2/3$.

Для того чтобы проанализировать влияние параметров гамильтониана на свойства рассматриваемой системы, зафиксируем коэффициент перед квадратичной частью, положим его равным $g^2 v^2 = 1/2$ и рассмотрим случаи с различными значениями константы g^2 .

Результат анализа представлен в графической форме для $g = 0, 1, 10$. Для каждого случая представим графики дисперсий по координатам и импульсам собственных значений оператора эволюции, коэффициента корреляции, оценок квантовых поправок (полная матрица дисперсии с учетом квантовых поправок равна $\sigma^{mn} = \sigma^{mn}(t) + \hbar \delta \sigma^{mn}$)

$\delta \sigma^{11}$, $\delta \sigma^{33}$, $\delta \sigma^{13}$ (см. рис. 2–7). На основе полученных графических зависимостей можно сделать следующие выводы. Во-первых, для каждого рассмотренного g в течение вре-

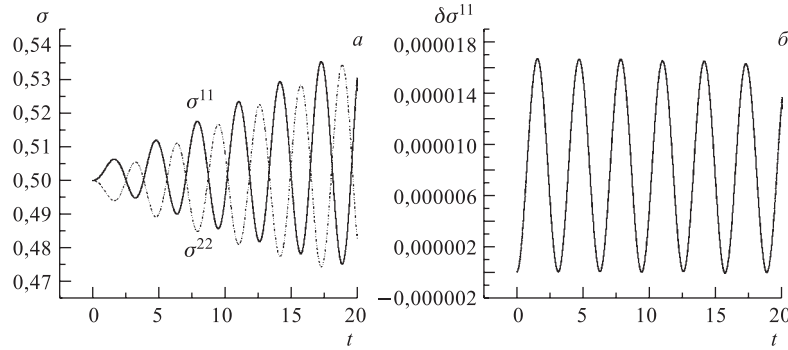


Рис. 2. Зависимость элементов матрицы дисперсии (а) и поправки к элементу матрицы дисперсии (б) от времени при следующих параметрах: $(vg)^2 = 1/2$; $g^2 = 0,01$; $p_1(0) = 1/2$; $q_1(0) = 1$; $p_2(0) = 1$; $q_2(0) = 2/3$ для модельного гамильтониана полей Янга–Миллса–Хиггса

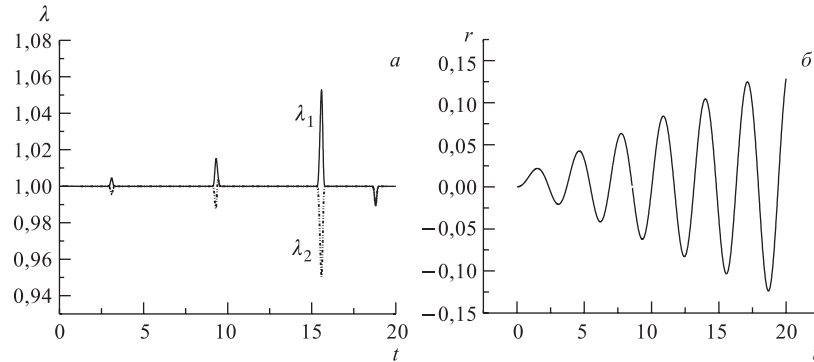


Рис. 3. Зависимость собственных значений оператора эволюции (а) и коэффициента корреляции (б) от времени при следующих параметрах: $(vg)^2 = 1/2$; $g^2 = 0,01$; $p_1(0) = 1/2$; $q_1(0) = 1$; $p_2(0) = 1$; $q_2(0) = 2/3$ для модельного гамильтониана полей Янга–Миллса–Хиггса

мени, на протяжении которого строятся графики, квантовые поправки к матрице дисперсии являются чрезвычайно малыми, что обусловлено малостью постоянной Планка. Во-вторых, с ростом константы g резко возрастает неустойчивость системы. В-третьих, с увеличением g^2 от 0,01 до 1 значительно возрастает квантовый эффект сжатия в определенные моменты времени, хотя в среднем наблюдается рост дисперсий как по координатам, так и по импульсам. Причем для большего значения константы g скорость увеличения дисперсий со временем становится большей. Кроме того, с увеличением g^2 от 0,01 до 1 время, в течение которого можно наблюдать эффект сжатия, уменьшается. С увеличением константы до $g^2 = 100$ описанные тенденции сохраняются, принимая более резкий характер.

Для $g^2 = 0,01$ наблюдается слабый рост коэффициента корреляции (рис. 3), обусловленный малой нелинейностью и слабой неустойчивостью системы. Для $g^2 = 1$ зависимость коэффициента корреляции от времени носит резкий пульсирующий характер, значения r близки к ± 1 (рис. 5). Для $g^2 = 100$ под действием сильной неустойчивости

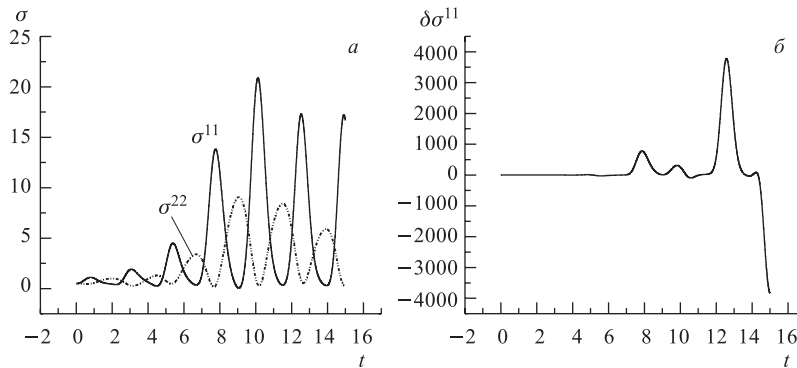


Рис. 4. Зависимость элементов матрицы дисперсии (а) и поправки к элементу матрицы дисперсии (б) от времени при следующих параметрах: $(vg)^2 = 1/2$; $g^2 = 1$; $p_1(0) = 1/2$; $q_1(0) = 1$; $p_2(0) = 1$; $q_2(0) = 2/3$ для модельного гамильтониана полей Янга–Миллса–Хиггса

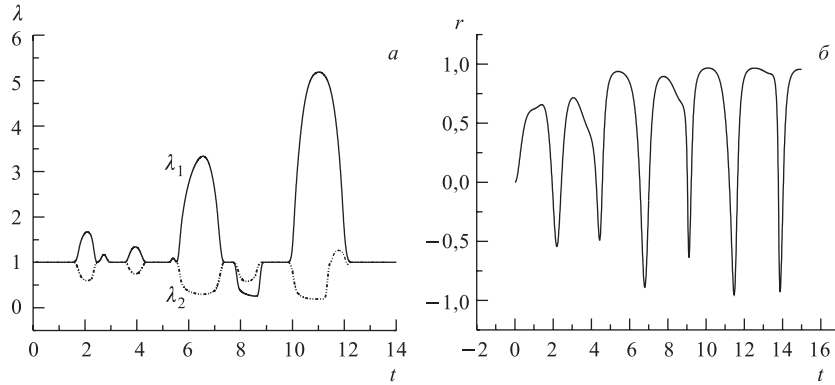


Рис. 5. Зависимость собственных значений оператора эволюции (а) и коэффициента корреляции (б) от времени при следующих параметрах: $(vg)^2 = 1/2$; $g^2 = 1$; $p_1(0) = 1/2$; $q_1(0) = 1$; $p_2(0) = 1$; $q_2(0) = 2/3$ для модельного гамильтониана полей Янга–Миллса–Хиггса

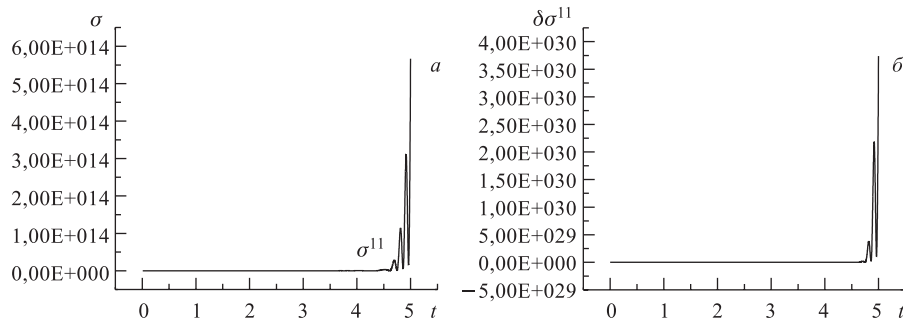


Рис. 6. Зависимость элемента матрицы дисперсии (а) и поправки к элементу матрицы дисперсии (б) от времени при следующих параметрах: $(vg)^2 = 1/2$; $g^2 = 100$; $p_1(0) = 1/2$; $q_1(0) = 1$; $p_2(0) = 1$; $q_2(0) = 2/3$ для модельного гамильтониана полей Янга–Миллса–Хиггса

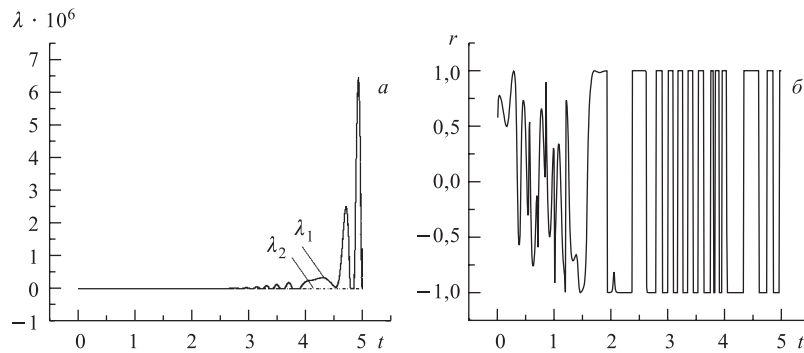


Рис. 7. Зависимость собственных значений оператора эволюции (а) и коэффициента корреляции (б) от времени при следующих параметрах: $(vg)^2 = 1/2$; $g^2 = 100$; $p_1(0) = 1/2$; $q_1(0) = 1$; $p_2(0) = 1$; $q_2(0) = 2/3$ для модельного гамильтониана полей Янга–Миллса–Хиггса

происходит быстрый переход системы в перепутанное состояние (рис. 7). Впоследствии система осуществляет скачкообразные переходы из состояния с $r = -1$ в состояние с $r = +1$, и наоборот. Видно, что более быстрое перепутывание происходит для более неустойчивой эволюции.

Данный пример показывает, что существует глубокая связь между двумя явлениями: перепутанностью и неустойчивостью. Тот факт, что неустойчивость системы сильно влияет на эффект квантового сжатия, а коэффициент корреляции выражается через элементы матрицы дисперсии, говорит о нетривиальной связи между всеми тремя эффектами.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Введено достаточное и необходимое условие перепутанных состояний в случае, если перепутывание происходит между величинами, спектр собственных значений которых состоит из двух значений. Данное условие записано на языке коэффициента корреляции.

Проанализированы две системы: система двух частиц, взаимодействующих при помощи спин-спинового взаимодействия, и квантово-механическая модель полей Янга–Миллса–Хиггса — на предмет образования перепутанных состояний в результате эволюции.

Для системы двух частиц производился численный поиск параметров гамильтониана, при которых достигался бы максимальный коэффициент корреляции. В результате поиска были найдены параметры, при которых, в определенные моменты времени, достигнутое состояние будет вести себя практически как перепутанное.

Для квантово-механической модели полей Янга–Миллса–Хиггса с ростом константы взаимодействия происходит резкое усиление неустойчивости системы. Кроме того, с ростом g происходит усиление сжатия. Для больших констант взаимодействия происходит более быстрое увеличение ширины волнового пакета, что говорит об уменьшении времени квазиклассического приближения и усилении роли квантовых поправок, однако анализ квантовых поправок для элементов матрицы дисперсии показывает, что в течение рассмотренного времени эволюции их влияние мало. В течение времени применимости уравнений движения для матрицы дисперсии можно наблюдать небольшой рост коэффициента корреляции со временем для $g^2 = 0,01$, резкое возрастание и повторяющийся, пульсирующий характер зависимости от времени r для $g^2 = 1$, очень быстрый переход в перепутанное состояние и скачкообразные переходы из состояния с $r = 1$ в состояние с $r = -1$.

Скорость образования перепутанного состояния растет с увеличением константы взаимодействия и уменьшением вакуумного среднего хиггсовских полей. Это также приводит к увеличению неустойчивости системы, что позволяет говорить о наличии взаимосвязи между неустойчивостью и перепутанностью.

Внутренне присущая полям Янга–Миллса неустойчивость [17] и стабилизирующая роль полей Хиггса показана аналитически и численно в большом количестве работ. Квантовая роль этого эффекта, а также обнаруженного эффекта перепутывания состояний еще ждет своего объяснения [18]. Отметим, в частности, что двухмодовое состояние глюонов в процессе эволюции становится перепутанным [5], что может приводить к перепутанным состояниям кварков, при взаимодействии с вакуумом (резервуаром) — к связыванию кварк-антикварковых пар и конфайнменту.

ПРИЛОЖЕНИЕ

А. Взаимодействие кубитов

Параметры гамильтониана, при которых был найден максимально возможный коэффициент корреляции:

$$\{H_{mn}\} = \begin{pmatrix} -1,0109 & 0,44287+0,74056 i & 0,44287+0,74056 i & 1,1992-0,11529 i \\ 0,44287-0,74056 i & -1,1057 & -0,47593-8,7099 \cdot 10^{-4} i & 0,44287-0,74056 i \\ 0,44287-0,74056 i & -0,47593+8,7099 \cdot 10^{-4} i & -1,1057 & 0,44287-0,74056 i \\ 1,1992+0,11529 i & 0,44287+0,74056 i & 0,44287+0,74056 i & -1,01089 \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Вектор состояния, который соответствует максимальному коэффициенту корреляции, полученному в результате численного поиска:

$$C = \begin{pmatrix} 0,660397 - 0,157911 i \\ -0,0000987185 - 0,0000758849 i \\ 0,0001129 - 8,31814 \cdot 10^{-6} i \\ 0,721495 - 0,135593 i \end{pmatrix}. \quad (18)$$

В. Уравнения движения матрицы дисперсии с квантовыми поправками и их решение

Уравнения движения для матрицы дисперсии и корреляций более высокого порядка с учетом квантовых поправок до первого порядка по \hbar включительно имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \sigma^{mn} &= \Gamma_l^m \sigma^{ln} + \Gamma_l^n \sigma^{ml} + \frac{\hbar^{1/2}}{2!} \{ \Gamma_{lr}^m \sigma^{lrn} + \Gamma_{lr}^n \sigma^{lrm} \} + \\ &+ \frac{\hbar}{3!} \left\{ \frac{1}{2} \Gamma_{lkr}^m [\sigma^{lkrn} + \sigma^{rklm}] + \frac{1}{2} \Gamma_{lkr}^n [\sigma^{lkrm} + \sigma^{rklm}] \right\}, \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \sigma^{mnl} &= \Gamma_k^m \sigma^{knl} + \Gamma_k^n \sigma^{mkl} + \Gamma_k^l \sigma^{mnk} + \frac{\hbar^{1/2}}{2!} \{ \Gamma_{kr}^m (\sigma^{(kr)ln} - \sigma^{kr} \sigma^{ln}) + \\ &+ \Gamma_{kr}^n (\sigma^{m(kr)l} - \sigma^{kr} \sigma^{ml}) + \Gamma_{kr}^l (\sigma^{mn(kr)} - \sigma^{kr} \sigma^{mn}) \}, \end{aligned} \quad (20)$$

$$\frac{d}{dt} \sigma^{mnlk} = \Gamma_r^k \sigma^{rnlk} + \Gamma_r^l \sigma^{mnrk} + \Gamma_r^m \sigma^{mrkl} + \Gamma_r^n \sigma^{rnlk}, \quad (21)$$

Γ_{nl}^m и Γ_{nlk}^m — классические объекты, определенные на базовой траектории следующим образом:

$$\Gamma_{nl}^m = \gamma^{mi} \frac{\partial^2 H}{\partial y^i \partial y^n \partial y^l} \Big|_{\mathbf{y}=\mathbf{y}(t)}, \quad \Gamma_{nlk}^m = \gamma^{mi} \frac{\partial^2 H}{\partial y^i \partial y^n \partial y^l \partial y^k} \Big|_{\mathbf{y}=\mathbf{y}(t)}. \quad (22)$$

σ^{mnl} , σ^{mnlk} — корреляции третьего и четвертого порядка соответственно

$$\begin{aligned} \sigma^{mnl} &= \frac{\langle \Delta \hat{y}^m \Delta \hat{y}^n \Delta \hat{y}^l + \Delta \hat{y}^l \Delta \hat{y}^n \Delta \hat{y}^m \rangle}{\hbar^{3/2}}, \\ \sigma^{mnlk} &= \frac{\langle \Delta \hat{y}^m \Delta \hat{y}^n \Delta \hat{y}^l \Delta \hat{y}^k + \Delta \hat{y}^k \Delta \hat{y}^l \Delta \hat{y}^n \Delta \hat{y}^m \rangle}{\hbar^2}. \end{aligned} \quad (23)$$

Решение уравнений (19), (20) записывается в виде разложения по $\hbar^{1/2}$

$$\sigma^{mnl}(t) = \underset{(0)}{\sigma^{mnl}(t)} + \hbar^{1/2} \underset{(1)}{\sigma^{mnl}(t)}, \quad \sigma^{mn}(t) = \underset{(0)}{\sigma^{mn}(t)} + \hbar^{1/2} \underset{(1)}{\sigma^{mn}(t)} + \hbar \underset{(2)}{\sigma^{mn}(t)}. \quad (24)$$

В случае, когда начальным состоянием системы является прямое произведение когерентных состояний $|\Psi\rangle = |\alpha\rangle_1 \otimes |\alpha\rangle_2$, решение уравнений (19)–(21) имеет следующий явный вид:

$$\sigma^{mnlk}(t) = F_i^m(t, t_0) F_j^n(t, t_0) F_r^l(t, t_0) F_s^k(t, t_0) \sigma^{ijrs}(t_0), \quad (25)$$

$$\sigma^{mnl}(t) = \frac{\hbar^{1/2}}{2} F_i^m(t, t_0) F_j^n(t, t_0) F_k^l(t, t_0) \times \Phi^{ijk}(t, t_0), \quad \text{где}$$

$$\begin{aligned} \Psi^{ijk}(t, t_0) = & \int_{t_0}^t (F^{-1}(\tau, t_0))_c^i \Gamma_{pq}^c(\tau) F_a^p(\tau, t_0) F_b^q(\tau, t_0) (\sigma^{(ab)jk}(t_0) - \sigma^{pq}(t_0) \sigma^{jk}(t_0)) d\tau + \\ & + \int_{t_0}^t (F^{-1}(\tau, t_0))_c^j \Gamma_{pq}^c(\tau) F_a^p(\tau, t_0) F_b^q(\tau, t_0) (\sigma^{i(ab)k}(t_0) - \sigma^{pq}(t_0) \sigma^{ik}(t_0)) d\tau + \\ & + \int_{t_0}^t (F^{-1}(\tau, t_0))_c^k \Gamma_{pq}^c(\tau) F_a^p(\tau, t_0) F_b^q(\tau, t_0) (\sigma^{ij(ab)}(t_0) - \sigma^{pq}(t_0) \sigma^{ij}(t_0)) d\tau. \quad (26) \end{aligned}$$

Аналогично находим, что

$$\sigma^{mn}(t) = F_i^m(t, t_0) F_j^n(t, t_0) \sigma(t_0) + \hbar F_i^m(t, t_0) F_j^n(t, t_0) \Psi^{ij}(t, t_0), \quad \text{где}$$

$$\begin{aligned} \Psi^{ij}(t, t_0) = & \frac{1}{2} \int_{t_0}^t (F^{-1}(\tau, t_0))_m^i \Gamma_{pq}^m(\tau) F_a^p(\tau, t_0) F_b^q(\tau, t_0) \Psi^{abj}(\tau) d\tau + \\ & + \frac{1}{2} \int_{t_0}^t (F^{-1}(\tau, t_0))_m^j \Gamma_{pq}^m(\tau) F_a^p(\tau, t_0) F_b^q(\tau, t_0) \Psi^{abi}(\tau) d\tau + \\ & + \frac{1}{3!} \int_{t_0}^t (F^{-1}(\tau, t_0))_m^i \Gamma_{pqr}^m(\tau) F_a^p(\tau, t_0) F_b^q(\tau, t_0) F_c^r(\tau, t_0) \left(\frac{1}{2} (\sigma^{abcj}(t_0) + \sigma^{cbaj}(t_0)) \right) d\tau + \\ & + \frac{1}{3!} \int_{t_0}^t (F^{-1}(\tau, t_0))_m^j \Gamma_{pqr}^m(\tau) F_a^p(\tau, t_0) F_b^q(\tau, t_0) F_c^r(\tau, t_0) \times \\ & \times \left(\frac{1}{2} (\sigma^{iabc}(t_0) + \sigma^{icba}(t_0)) \right) d\tau. \quad (27) \end{aligned}$$

Видно, что всегда существует промежуток времени, в течение которого квантовые поправки к матрице дисперсии будут малы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Schrodinger E.* // *Naturwissenschaften.* 1935. V. 23. P. 807; 823; 844.
2. *Bouwmeester D. et al.* // *Nature (London).* 1997. V. 390. P. 575.
3. *Клишн С. Я.* Квантовая информация // *УФН.* 1999. Т. 169. С. 507.

4. *Steane A.* // Rep. Progr. Phys. 1998. V. 61. P. 117.
5. *Kuvshinov V. I., Shaparau V. A.* // Acta Phys. Polon. B. 2004. V. 35. P. 443.
6. *Kuvshinov V. I., Marmysh V. V., Shaparau V. A.* On Coexistence of the Conditions of Chaos and Squeezing for Different Models // Proc. of the 10th Intern. Seminar «Nonlinear Phenomena in Complex Systems», May 15–18, 2001. V. 10. P. 191–194.
7. *Kuvshinov V. I., Marmysh V. V., Shaparau V. A.* Quantum Squeezing Evolution under Influence of the Instability // Proc. of the 11th Intern. Seminar «Nonlinear Phenomena in Complex Systems», May 13–16, 2002. V. 11. P. 196–204.
8. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М.: Мир, 1964.
9. *Braunstein S. L.* Multipartite Entanglement. quant-ph 0205068.
10. *Scully M. O., Zubairy M. S.* Quantum Optics. Cambridge University Press, 1997. P. 630.
11. *Hirota O.* Squeezed Light. Tokyo, 1992. P. 267.
12. *Walls D. F., Milburn G. J.* Quantum Optics. Berlin; Heidelberg; N. Y., 1995. P. 351.
13. *Кувшинов В. И., Мармыш В. В., Шапоров В. А.* Связь и эволюция сжатия и неустойчивости для систем с квадратичными гамильтонианами // ТМФ. 2004. Т. 139. С. 846.
14. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М., 1967. С. 576.
15. *Salasnich L.* // ЯФ. 1998. Т. 61. С. 1990.
16. *Kuvshinov V. I., Kuzmin A. V.* The Influence of Quantum Field Fluctuation on Chaotic Dynamic of Yang–Mills System // Nonlin. Mathem. Phys. 2002. V. 9, No. 4. P. 382.
17. *Savidi G. K.* // Phys. Lett. B. 1983. V. 130. P. 303.
18. *Kuvshinov V. I., Kuzmin A. V.* Towards Chaos Criterion in Quantum Field Theory // Phys. Lett. A. 2002. V. 296. P. 82–86.

Получено 15 апреля 2004 г.