Письма в ЭЧАЯ. 2006. Т. 3, № 1(130). С. 7–16

УДК 530.145

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ БОГОЛЮБОВА И ПЛАНИМЕТРИЯ ЛОБАЧЕВСКОГО

Н. А. Черников

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Установлена связь преобразования Боголюбова в теории сверхтекучести с планиметрией Лобачевского в двух конформно-евклидовых моделях Пуанкаре. Параметр этого преобразования, являясь комплексным числом с модулем < 1, представлен как радиус-вектор на плоскости Лобачевского.

The relation between the Bogolyubov transformation in the theory of superfluidity and the Lobachevsky planimetry in the two Poincare models is established. The parameter of the transformation, being a complex number with the modulus < 1, is presented as a radius-vector on a Lobachevsky plane.

1. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ БОГОЛЮБОВА

21 октября 1946 г. на сессии Физико-математического отделения Академии наук Союза Советских Социалистических Республик Н. Н. Боголюбов (1909–1992) выступил с докладом о развитой им квантовой микроскопической теории сверхтекучести [1, с. 215].

К гамильтониану сверхтекучей системы Боголюбов применил замечательное преобразование

$$E_f = \frac{B_f - L_f B^+_{-f}}{\sqrt{1-|L_f|^2}}, \quad E^+_f = \frac{B^+_f - \bar{L}_f B_{-f}}{\sqrt{1-|L_f|^2}} \tag{1}$$

бозе-операторов, называемое преобразованием Боголюбова.

В равенствах [1] через L_f и $\bar{L}_f$ обозначены комплексные взаимно сопряженные числа, удовлетворяющие условию $|L_f| < 1$. Предполагается, что множество чисел L_f симметрично относительно замены индекса f на $-f$ (см. [1, с. 218]), т. е.

$$L_{-f} = L_f. \tag{2}$$

Поэтому всякую пару $(f, -f)$ взаимно противоположных индексов можно рассматривать отдельно от остальных таких пар.

Разности и суммы

$$A_f = B_f - B_{-f}, \quad U_f = E_f - E_{-f}, \quad C_f = B_f + B_{-f}, \quad V_f = E_f + E_{-f} \tag{3}$$

бозе-операторов с взаимно противоположными индексами преобразуются следующим образом:

$$U_f = \frac{A_f + L_f A^+_f}{\sqrt{1-|L_F|^2}}, \quad U^+_f = \frac{A^+_f + \bar{L}_f A_f}{\sqrt{1-|L_F|^2}}, \tag{4}$$

$$V_f = \frac{C_f - L_f C_f^+}{\sqrt{1-|L_F|^2}}, \quad V_f^+ = \frac{C_f^+ - \bar{L}_f C_f}{\sqrt{1-|L_F|^2}}. \tag{5}$$

Пара преобразований (4), (5) эквивалентна преобразованию (1). Дальше индекс f мы будем опускать.

Параметр L преобразования Боголюбова представим в виде

$$L = \operatorname{th}\frac{\rho}{2}\, \mathrm{e}^{i\varphi}, \tag{6}$$

где ρ и φ — вещественные числа. В результате получим преобразование

$$\begin{aligned} U &= \operatorname{ch}\frac{\rho}{2}\, A + \operatorname{sh}\frac{\rho}{2}\, \mathrm{e}^{i\varphi}\, A^+, \\ U^+ &= \operatorname{sh}\frac{\rho}{2}\, \mathrm{e}^{-i\varphi}\, A + \operatorname{ch}\frac{\rho}{2}\, A^+ \end{aligned} \tag{7}$$

для разности и обратное преобразование

$$\begin{aligned} V &= \operatorname{ch}\frac{\rho}{2}\, C - \operatorname{sh}\frac{\rho}{2}\, \mathrm{e}^{i\varphi}\, C^+, \\ V^+ &= -\operatorname{sh}\frac{\rho}{2}\, \mathrm{e}^{-i\varphi}\, C + \operatorname{ch}\frac{s}{2}\, C^+ \end{aligned} \tag{8}$$

для суммы бозе-операторов.

2. ДРОБНО-ЛИНЕЙНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПЛОСКОСТИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО, ТЕСНО СВЯЗАННОЕ С ПРЕОБРАЗОВАНИЕМ БОГОЛЮБОВА

Дробно-линейное преобразование

$$f(z) = \frac{z \operatorname{ch}\frac{\rho}{2} + \operatorname{sh}\frac{\rho}{2}\, \mathrm{e}^{i\varphi}}{z \operatorname{sh}\frac{\rho}{2}\, \mathrm{e}^{-i\varphi} + \operatorname{ch}\frac{\rho}{2}} \tag{9}$$

тесно связано с линейным преобразованием (7).

Заметим, что

$$f(0) = \operatorname{th}\frac{\rho}{2}\, \mathrm{e}^{i\varphi} = L. \tag{10}$$

Таким образом, точка с аффиксом $z = 0$ отображается на точку с аффиксом $z = L$, равным параметру (6) преобразования Боголюбова.

При заданном значении параметра φ множество преобразований (7) является группой с аддитивным параметром ρ, так как

$$f\left(\operatorname{th}\frac{s}{2}\, \mathrm{e}^{i\varphi}\right) = \frac{\operatorname{th}\frac{s}{2} \operatorname{ch}\frac{\rho}{2} + \operatorname{sh}\frac{\rho}{2}}{\operatorname{th}\frac{s}{2} \operatorname{sh}\frac{\rho}{2} + \operatorname{ch}\frac{\rho}{2}}\, \mathrm{e}^{i\varphi} = \operatorname{th}\frac{s+\rho}{2}\, \mathrm{e}^{i\varphi}. \tag{11}$$

При таких преобразованиях две диаметрально противоположные точки окружности $|z| = 1$ с аффиксами $\pm e^{i\varphi}$ остаются на месте, так как

$$f(\pm e^{i\varphi}) = \pm e^{i\varphi}. \tag{12}$$

Согласно равенству (11) диаметр окружности $|z| = 1$, соединяющий неподвижные точки с аффиксами (12), преобразуется сам в себя.

Рассматриваемая группа изоморфна группе преобразований (7) при $\varphi = 0$, изоморфной группе специальных преобразований Боголюбова, о которой см. [2].

Двухпараметрическое множество преобразований (7) не является группой. Оно является подмножеством группы трехпараметрической группы преобразований

$$\begin{aligned} U &= MA + NA^+, \\ U^+ &= \bar{N}A + \bar{M}A^+, \end{aligned} \tag{13}$$

где M и N — комплексные числа, удовлетворяющие условию

$$|M|^2 - |N|^2 = 1. \tag{14}$$

С преобразованием (13) тесно связана функция

$$F(z) = \frac{Mz + N}{\bar{N}z + \bar{M}}. \tag{15}$$

Отметим следующие два равенства, выполняющихся при условии (14),

$$1 - F\bar{F} = \frac{1 - z\bar{z}}{(\bar{N}z + \bar{M})(N\bar{z} + M)}, \tag{16}$$

$$dF = \frac{dz}{(\bar{N}z + \bar{M})^2}, \tag{17}$$

из которых следует третье равенство

$$\frac{dFd\bar{F}}{(1 - F\bar{F})^2} = \frac{dzd\bar{z}}{(1 - z\bar{z})^2}. \tag{18}$$

Согласно первому из этих равенств, если точка z лежит в круге $|z| < 1$, то и точка $F(z)$ лежит в этом же круге, а если точка z лежит на окружности $|z| = 1$, то и точка $F(z)$ лежит на этой же окружности. Согласно третьему из этих равенств, задаваемая им дифференциальная квадратичная форма при отображении круга на самого себя, задаваемом функцией (15), сохраняется.

Заметим, что комплексные числа M и N, удовлетворяющие условию (14), выражаются через вещественные числа ρ, φ и μ в виде

$$M = e^{i\mu/2}\,\mathrm{ch}\frac{\rho}{2}\,, \quad N = e^{i\mu/2}\,\mathrm{sh}\frac{\rho}{2}e^{i\varphi}. \tag{19}$$

Соответственно, $F(z) = e^{i\mu}f(z)$. См. об этом [7, с. 121].

3. СВЯЗЬ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ БОГОЛЮБОВА С ГЕОМЕТРИЕЙ ЛОБАЧЕВСКОГО

12 (24) февраля 1826 г. на заседании Физико-математического отделения Казанского университета Н. И. Лобачевский (1792–1856) доложил о своем открытии новой геометрии.

Об истории открытия геометрии Лобачевского см. [3, 4].

Не получив поддержки Императорской Санкт-Петербургской Академии наук, Лобачевский опубликовал сочинение [5] в казанском журнале.

Это сочинение с комментариями А. П. Котельникова (1865–1944) было опубликовано вскоре после Великой Отечественной войны 1941–1945 гг. в Полном собрании сочинений [6].

На плоскости Лобачевского, как и на плоскости Евклида, относительно любого центра можно выбрать полярные координаты ρ, φ, в которых метрика имеет вид

$$dS^2 = d\rho^2 + r^2 d\varphi^2, \tag{20}$$

где $2\pi r$ — длина окружности радиуса ρ. Так вот, в геометрии Лобачевского

$$r = r(\rho) = k \operatorname{sh} \frac{\rho}{k}, \tag{21}$$

где k — характерная для геометрии Лобачевского единица длины. Лобачевский положил ее равной 1. При таком условии равенство (21) принимает вид

$$r = r(\rho) = \operatorname{sh} \rho, \tag{22}$$

так что в геометрии Лобачевского

$$dS_{\text{Л}}^2 = d\rho^2 + (\operatorname{sh} \rho d\varphi)^2. \tag{23}$$

В геометрии Евклида такой, геометрически определенной, единицы длины нет и $r(\rho) = \rho$, так что в геометрии Евклида

$$dS^2 = d\rho^2 + (\rho d\varphi)^2. \tag{24}$$

При $k \to \infty$ геометрия Лобачевского переходит в геометрию Евклида.

Связь преобразования Боголюбова с геометрией Лобачевского проявляется в том, что группа преобразований (7) при $\varphi = 0$ изоморфна группе изометрий ориентированной прямой в пространстве Лобачевского, а группа преобразований (13), в состав которой входят все преобразования (7), изоморфна группе изометрий ориентированной плоскости в пространстве Лобачевского. То же самое можно сказать и о преобразованиях круга $|z| < 1$, задаваемых функцией (15). О связи преобразований (9) и (15) с геометрией Лобачевского см. [7, с. 130–140].

В ответе на вопрос, как и в чем проявляется связь преобразования Боголюбова с геометрией Лобачевского, ключевой является следующая связка равенств:

$$z = x + iy = L = \operatorname{th} \frac{\rho}{2} \mathrm{e}^{i\varphi} = w \, \mathrm{e}^{i\varphi}. \tag{25}$$

Параметр Боголюбова L, стоящий в центре этой связки, можно рассматривать как вектор на комплексной евклидовой прямой, начало которого находится в точке $z = 0$, а конец имеет декартову комплексную координату — аффикс L. Его можно рассматривать и как вектор на вещественной евклидовой плоскости, начало которого находится в точке $x = 0, y = 0$, а конец имеет декартовы вещественные координаты x, y, а также и полярные вещественные координаты w, φ. Евклидова длина вектора L равна

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = |L| = \operatorname{th}\frac{\rho}{2} = w. \tag{26}$$

Итак, в области $|z| < 1$ задана евклидова планиметрия с элементом длины

$$dS = \sqrt{dzd\bar{z}} = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{dw^2 + (wd\varphi)^2}. \tag{27}$$

С другой стороны, параметр L задается вещественными числами ρ и φ, которые следует рассматривать как полярные координаты точки $z = L$ на плоскости Лобачевского, так как инвариант (18) задает в области $|z| < 1$ планиметрию Лобачевского с элементом длины

$$dS_{\text{Л}} = \sqrt{d\rho^2 + (\operatorname{sh}\rho d\varphi)^2}. \tag{28}$$

Действительно,

$$\frac{2}{1 - z\bar{z}}\sqrt{dzd\bar{z}} = \frac{2}{1 - w^2}\sqrt{dw^2 + (wd\varphi)^2} = \sqrt{d\rho^2 + (\operatorname{sh}\rho d\varphi)^2} = dS_{\text{Л}}. \tag{29}$$

Тем самым связь преобразования Боголюбова с геометрией Лобачевского устанавливается.

Заметим, что конформное отображение плоскости Лобачевского на евклидов круг $w < 1$, характеризуемое равенством

$$dS_{\text{Л}} = \frac{2}{1 - w^2}dS, \tag{30}$$

принадлежит Пуанкаре (см. [8, с. 47]). Это вторая модель Пуанкаре плоскости Лобачевского. О первой модели Пуанкаре плоскости Лобачевского см. [9].

Преобразование Боголюбова в теории сверхтекучести в образах первой модели Пуанкаре рассмотрено мною в работе [10].

4. СРАВНЕНИЕ ДВУХ МОДЕЛЕЙ ПУАНКАРЕ

В первой модели Пуанкаре точками плоскости Лобачевского являются точки верхней полуплоскости Евклида. В декартовых координатах ξ, η эта плоскость задается неравенством $\eta > 0$. Метрика плоскости Лобачевского в первой модели задается в виде

$$dS_{\text{Л}} = \frac{1}{\eta}\,dS, \quad \eta > 0, \quad dS = \sqrt{d\xi^2 + d\eta^2}. \tag{31}$$

Следовательно, в первой модели Пуанкаре осуществляется конформное отображение плоскости Лобачевского на евклидову полуплоскость.

Расстояние $S_{\text{Л}}$ между двумя точками плоскости Лобачевского с координатами (ξ_1, η_1) и (ξ_2, η_2) находится по формуле

$$\operatorname{ch} S_{\text{Л}} = \frac{(\xi_2 - \xi_1)^2 + \eta_1^2 + \eta_2^2}{2\,\eta_1\,\eta_2}. \tag{32}$$

Прямые Лобачевского в первой модели Пуанкаре изображаются евклидовыми полуокружностями и полупрямыми, ортогональными евклидовой прямой $\eta = 0$.

Во второй модели Пуанкаре точками плоскости Лобачевского являются точки евклидова круга единичного радиуса. В декартовых координатах x, y этот круг задается неравенством $x^2 + y^2 < 1$. Метрика плоскости Лобачевсого во второй модели задается в виде

$$dS_{\text{Л}} = \frac{2}{1 - x^2 - y^2}\,dS, \quad x^2 + y^2 < 1, \quad dS = \sqrt{dx^2 + dy^2}. \tag{33}$$

Следовательно, во второй модели Пуанкаре осуществляется конформное отображение плоскости Лобачевского на евклидов круг.

Расстояние $S_{\text{Л}}$ между двумя точками плоскости Лобачевского с координатами (x_1, y_1) и (x_2, y_2) находится по формуле

$$\operatorname{ch} S_{\text{Л}} - 1 = \frac{2\,[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2]}{(1 - x_1x_1 - y_1y_1)(1 - x_2x_2 - y_2y_2)}. \tag{34}$$

Прямые Лобачевского во второй модели Пуанкаре изображаются диаметрами евклидова круга $x^2 + y^2 < 1$ и дугами евклидовых окружностей, ортогональными евклидовой окружности $x^2 + y^2 = 1$.

Переход от второй модели Пуанкаре к первой достигается преобразованием

$$\zeta = \frac{z + i}{1 + iz}; \qquad \xi = \frac{2\,x}{x^2 + (1 - y)^2}, \quad \eta = \frac{1 - x^2 - y^2}{x^2 + (1 - y)^2}, \tag{35}$$

где

$$\zeta = \xi + i\eta, \quad z = x + iy, \tag{36}$$

а переход от первой модели ко второй достигается обратным преобразованием

$$z = \frac{\zeta - i}{1 - i\zeta}; \qquad x = \frac{2\xi}{\xi^2 + (1 + \eta)^2}, \quad y = \frac{\xi^2 + \eta^2 - 1}{\xi^2 + (1 + \eta)^2}. \tag{37}$$

Два равенства

$$\eta = \frac{1 - z\bar{z}}{(1 - iz)(1 + i\bar{z})}, \quad d\zeta = \frac{2dz}{(1 + iz)^2} \tag{38}$$

объясняют переход от выражения (31) к выражению (33) для метрики плоскости Лобачевского.

Все изометрии ориентированной плоскости Лобачевского в первой модели Пуанкаре представляются дробно-линейными преобразованиями

$$\tilde{\zeta} = \frac{\alpha\,\zeta + \beta}{\gamma\,\zeta + \delta} \tag{39}$$

с вещественными коэффициентами и определителем, равным единице

$$\alpha\beta - \gamma\delta = 1, \tag{40}$$

а во второй модели — дробно-линейными преобразованиями

$$\tilde{z} = \frac{M\,z + N}{\bar{N}\,z + \bar{M}} \tag{41}$$

с определителем, тоже равным единице

$$|M|^2 - |N|^2 = 1. \tag{42}$$

Из цепочки равенств

$$\tilde{z} = \frac{\tilde{\zeta} - i}{1 - i\tilde{\zeta}} = \frac{(\alpha\,\zeta + \beta) - i(\gamma\,\zeta + \delta)}{(\gamma\,\zeta + \delta) - i(\alpha\,\zeta + \beta)} = \frac{(\alpha - i\gamma)\,\zeta + (\beta - i\delta)}{(\gamma - i\alpha)\,\zeta + (\delta - i\beta)} =$$
$$= \frac{(\alpha - i\gamma)(z + i) + (\beta - i\delta)(1 + iz)}{(\gamma - i\alpha)(z + i) + (\delta - i\beta)(1 + iz)} = \frac{M\,z + N}{\bar{N}\,z + \bar{M}} \tag{43}$$

и равенств (40) и (42) следуют равенства

$$\begin{aligned} 2M &= \alpha + \delta + i(\beta - \gamma), & 2N &= \beta + \gamma + i(\alpha - \delta), \\ 2\alpha &= \bar{M} + M + i(\bar{N} - N), & 2\beta &= \bar{N} + N + i(\bar{M} - M), \\ 2\gamma &= N + \bar{N} + i(M - \bar{M}), & 2\delta &= M + \bar{M} + i(N - \bar{N}). \end{aligned} \tag{44}$$

5. ИЗОБРАЖЕНИЕ ПАРАМЕТРА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ БОГОЛЮБОВА В ПЕРВОЙ МОДЕЛИ ПУАНКАРЕ

Как было выше установлено, параметр преобразования Боголюбова задается полярными координатами ρ, φ точки на плоскости Лобачевского. Эту точку можно рассматривать как конец неевклидова радиуса-вектора, выходящего из начала полярной системы координат.

Взаимно перпендикулярные прямые I и J, лежащие на плоскости Лобачевского и задаваемые в полярных координатах значениями $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi/2$ полярного угла, во второй модели Пуанкаре изображаются диаметрами $-1 < x < 1,\ y = 0$ и $x = 0,\ -1 < y < 1$ евклидовой окружности $x^2 + y^2 = 1$.

В первой модели Пуанкаре прямая I изображается евклидовой полуокружностью

$$\xi = \cos\psi, \quad y = \sin\psi, \quad \pi > \psi > 0, \tag{45}$$

а прямая J — евклидовой полупрямой

$$\xi = 0, \quad \eta > 0. \tag{46}$$

Во второй модели Пуанкаре неевлидов радиус-вектор представляется евклидовым радиусом-вектором, выходящим из начала координат $x = 0, y = 0$ и входящим в точку с координатами

$$x = w\cos\varphi, \;\; y = w\sin\varphi, \quad \text{где} \quad w = \operatorname{th}\frac{\rho}{2}. \tag{47}$$

Чтобы найти изображение неевклидова радиуса-вектора в первой модели Пуанкаре, надо подставить в равенства (35) функцию

$$x = \operatorname{th}\frac{s}{2}\cos\varphi, \quad y = \operatorname{th}\frac{s}{2}\cos\varphi, \quad 0 \leqslant s \leqslant \rho \tag{48}$$

длины s, рассматриваемую при заданном значении полярного угла φ.

Рассмотрим самый интересный интервал $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2$ значений угла φ.

При $\varphi = \pi/2$ получаем

$$\xi = 0, \quad \eta = \mathrm{e}^s, \quad 0 \leqslant s \leqslant \rho, \tag{49}$$

а при $\varphi = 0$ получаем

$$\xi = \operatorname{th} s = \cos\Pi(s), \quad \eta = \frac{1}{\operatorname{ch} s} = \sin\Pi(s), \quad 0 \leqslant s \leqslant \rho, \tag{50}$$

где $\Pi(s)$ — угол параллельности, определенный и установленный Лобачевским по знаменитой формуле

$$\operatorname{th}\frac{1}{2}\Pi(s) = \mathrm{e}^{-s}. \tag{51}$$

В интервале $0 < \varphi < \pi/2$ получается

$$\xi = \frac{\operatorname{sh} s\cos\varphi}{\operatorname{ch} s - \operatorname{sh} s\sin\varphi}, \quad \eta = \frac{1}{\operatorname{ch} s - \operatorname{sh} s\sin\varphi}, \quad 0 \leqslant s \leqslant \rho. \tag{52}$$

Иначе

$$\xi = \frac{\sin\varphi + \cos\psi(s,\varphi)}{\cos\varphi}, \quad \eta = \frac{\sin\psi(s,\varphi)}{\cos\varphi}, \quad 0 \leqslant s \leqslant \rho, \tag{53}$$

где

$$\sin\psi(s,\varphi) = \frac{\cos\varphi}{\operatorname{ch} s - \operatorname{sh} s\sin\varphi}, \quad \cos\psi(s,\varphi) = \frac{\operatorname{sh} s - \operatorname{ch} s\sin\varphi}{\operatorname{ch} s - \operatorname{sh} s\sin\varphi}, \quad 0 \leqslant s \leqslant \rho. \tag{54}$$

Нетрудно взять частную производную

$$\frac{\partial}{\partial s}\psi(s,\varphi) = -\sin\psi(s,\varphi), \tag{55}$$

а так как $\sin\psi(0,\varphi) = \cos\varphi$, $\cos\psi(0,\varphi) = -\sin\varphi$, то

$$\psi(0,\varphi) = \frac{\pi}{2} + \varphi. \tag{56}$$

Отсюда находится следующая зависимость:

$$\operatorname{th}\frac{1}{2}\psi(s,\varphi) = \operatorname{th}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)\mathrm{e}^{-s} = \frac{1+\sin\varphi}{\cos\varphi}\,\mathrm{e}^{-s}. \tag{57}$$

В случае специального преобразования Боголюбова $\varphi = 0$ и $\psi(\rho, 0) = \Pi(\rho)$.

Следовательно, в интервале $0 < \varphi < \pi/2$ параметр преобразования Боголюбова в первой модели Пуанкаре изображается на плоскости Евклида круговой дугой

$$\xi = \frac{\sin\varphi + \cos\psi}{\cos\varphi}, \quad \eta = \frac{\sin\psi}{\cos\varphi}, \quad \frac{\pi}{2} + \varphi \geqslant \psi \geqslant \psi(\rho, \varphi), \tag{58}$$

выходящей из точки $\xi = 0, \eta = 1$ под углом φ к окружности $\xi^2 + (\eta - 1)^2 = 1$.

В заключение отметим главный результат настоящей работы:

Параметр преобразования Боголюбова в теории сверхтекучести представляется в виде радиуса-вектора на плоскости Лобачевского.

Соответственно отметим следующие знаменательные даты в истории России и мировой науки:

Николай Иванович Лобачевский родился в Нижнем Новгороде 20 ноября (1 декабря) 1792 г. [11].

Николай Николаевич Боголюбов родился в Нижнем Новгороде 8 (21) августа 1909 г. [12].

12 (24) февраля 1826 г. — день рождения геометрии Лобачевского.

21 октября 1946 г. — день рождения созданной Боголюбовым новой теории сверхтекучести.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Боголюбов Н. Н.* К теории сверхтекучести // Избранные труды в трех томах. Киев, 1970. Т. 2. С. 210–224; Изв. АН СССР. Сер. физ. 1947. Т. 11, № 1. С. 77–90.

2. *Боголюбов Н. Н.* Вопросы теории сверхтекучести бозе- и ферми-систем // Избранные труды в трех томах. Киев, 1971. Т. 3. С. 11–16; Вестн. АН СССР. 1958. Т. 28, вып. 4. С. 25–29.

3. *Черников Н. А.* К истории открытия Лобачевским неевклидовой геометрии // Письма в ЭЧАЯ. 2002. № 3[112]. С. 5–18.

4. *Черников Н. А.* Введение геометрии Лобачевского в теорию гравитации // ЭЧАЯ. 1992. Т. 23, вып. 5. С. 1155–1191.

5. *Лобачевский Н. И.* О началах геометрии // Казанский вестник. Т. 4. Вып. XXV. Кн. II–III. Февраль–март 1829 г. С. 178–187; Кн. IV. Апрель 1829 г. С. 228–241; Вып. XXVII. Кн. XI–XII. Ноябрь–декабрь 1829 г. С. 227–243; Вып. XXVIII. Кн. III–IV. Март–апрель 1830 г. С. 251–283; Вып. XIX. Кн. VII–VIII. Июль–август 1830 г. С. 571–636.

6. *Лобачевский Н. И.* Полн. собр. соч. М.; Л., 1946. Т. 1. С. 185–261.

7. *Привалов И. И.* Введение в теорию функций комплексного переменного. М.; Л.: ОГИЗ; Гостехиздат, 1948. 452 с.

8. *Бушманова Г. В., Норден А. П.* Элементы конформной геометрии. Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1972. 178 с.

9. *Пуанкаре А.* Теория фуксовых групп // Об основаниях геометрии: Сб. классических работ по геометрии Лобачевского и развитию ее идей. М., 1956. С. 304–306.

10. *Черников Н. А.* Планиметрия Лобачевского, модель Пуанкаре и преобразование Боголюбова в теории свертекучести. Препринт ОИЯИ Р2-94-469. Дубна, 1994; Междунар. Боголюбовский симп. «Фундаментальные проблемы теоретической и математической физики», Дубна, 18–21 августа 1994 г.

11. Большая советская энциклопедия. М., 1973. Т. 14. С. 585.

12. Большая советская энциклопедия. М., 1970. Т. 3. С. 447.

Получено 27 апреля 2005 г.