Письма в ЭЧАЯ. 2007. Т. 4, № 1(137). С. 8–15

ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА. ТЕОРИЯ

ТЕНЗОР ЭНЕРГИИ-ИМПУЛЬСА АРЕАЛЬНЫХ ОБЪЕКТОВ В РИМАНОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ-ВРЕМЕНИ

Н. А. Черников, Н. С. Шавохина

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Рассматривается тензор энергии-импульса ареальных объектов в римановом мире. Эти объекты называются эфирными пленками и выступают в качестве элементов — составных частей специфического вещества, называемого эфирным.

The energy-momentum tensor of areal objects in the Riemannian world is considered. These objects are called the aether ones and appear as elements — constituents of specific matter called the aether one.

PACS: 11.25.-w

ВВЕДЕНИЕ

Ареальными называются материальные объекты, адекватно описываемые ареальной метрикой Вагнера. Название «ареальные» происходит от латинского слова «area» — площадь.

Если метрика Вагнера порождается метрикой Римана гиперболического вида $E^{n+1}_{(n,1)}$, то типичный представитель ареальных объектов называется m-мерной эфирной пленкой. Такой объект описан в [1]. При $m = 0$ это есть материальная точка, при $m = 1$ — эфирная нить, при $m = n$ — эфирная масса. Эфирная пленка является составной частью, элементом, эфирного вещества.

В работах [2–6] механика эфирной нити, стягивающей две материальные точки, рассмотрена как пример релятивистской механики двух тел.

Название «эфирная» тесно связано с понятием эфира, обсуждавшимся в [7].

История эфирной пленки, ее бытие, представляется в виде мировой поверхности пленки, т. е. $(m+1)$-мерной времениподобной поверхности, заметаемой пленкой в $(n+1)$-мерном римановом мире.

Момент истории эфирной пленки, т. е. одно из ее событий, представляется в виде m-мерной пространственноподобной поверхности, лежащей на мировой поверхности пленки.

Площадь (т. е. $(m+1)$-мерный объем)

$$V_{m+1} = \int dV_{m+1} \tag{1}$$

мировой поверхности пленки, умноженная на константу взаимодействия G_m, — это вклад

$$S_m = G_m V_{m+1} \tag{2}$$

m-мерной пленки в общее действие эфирного вещества.

Элемент площади $(m+1)$-мерной времениподобной мировой поверхности m-мерной пленки, записанной в одной из координатных карт в виде

$$x^\alpha = f^\alpha(u^1, \dots, u^{m+1}), \tag{3}$$

в $(n+1)$-мерном римановом мире с метрикой $g_{\alpha\beta}(x)dx^\alpha dx^\beta$ гиперболического вида $E^{n+1}_{(n,1)}$ равняется

$$dV_{m+1} = \frac{1}{c}\sqrt{-f_m}du^1 \cdots du^{m+1}, \tag{4}$$

где c — скорость света; f_m — определитель матрицы (f_{kl}) с элементами

$$f_{kl}(u) = \frac{\partial f^\alpha}{\partial u^k} g_{\alpha\beta}(f(u)) \frac{\partial f^\beta}{\partial u^l}. \tag{5}$$

Заметим, что метрика $f_{kl}du^k du^l$ на мировой поверхности (3) измеряется в тех же единицах, что и метрика $g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta$ в римановом мире, т. е. в единицах $[\text{длина}]^2$. Поэтому площадь (1) измеряется в единицах $[\text{длина}]^m \cdot [\text{время}]$. Так как действие (2) измеряется в единицах $[\text{энергия}] \cdot [\text{время}]$, то константа G_m измеряется в единицах $[\text{энергия}]/[\text{длина}]^m = [\text{сила}]/[\text{длина}]^{m-1}$. В соответствии с этим константы взаимодействия имеют следующий смысл:

$G_0 = -Mc^2$, где M — масса материальной точки;

$G_1 = -F$, где F — сила натяжения эфирной нити;

$G_n = P$ — давление эфирной массы;

G_m — сила поверхностного натяжения m-мерной эфирной пленки.

Введем обозначения: при $n \geqslant 3$ $G_{n-1} = G$; при $n > 3$ пленку размерности $n-1$ называем гиперпленкой.

В реальном случае $n = 3$ давление эфирной массы равно

$$P = \frac{\lambda c^4}{8\pi\gamma}, \tag{6}$$

где

$$\gamma = \frac{1}{15\ 000\ 000}\ \frac{\text{см}^3}{\text{г} \cdot \text{с}^2} \tag{7}$$

есть ньютонова постоянная тяготения (см. [8]), а λ есть константа, введенная Эйнштейном в теорию тяготения в [9].

В работе [10] вычислен вклад $T^{\alpha\beta}_m$, вносимый m-мерной пленкой в общий тензор энергии-импульса эфирного вещества. Ниже мы приведем это вычисление.

1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГИЛЬБЕРТА ТЕНЗОРА ЭНЕРГИИ-ИМПУЛЬСА

По определению Гильберта, тензор $T^{\alpha\beta}$ материальной системы вычисляется через вариацию

$$\delta S = \frac{1}{2}\int T^{\alpha\beta}(x)\delta g_{\alpha\beta}(x)dX \tag{8}$$

действия S материальной системы, где

$$dX = \frac{1}{c}\sqrt{-g}dx^1\cdots dx^{n+1}, \tag{9}$$

g — определитель матрицы $(g_{\alpha\beta})$, так что тензор энергии-импульса является вариационной производной действия S по метрическому тензору $g_{\alpha\beta}$.

Тензор $T^{\alpha\beta}$ симметричен, так как симметричен тензор $g_{\alpha\beta}$.

Из определения (8) следует, что след

$$T = T^{\alpha\beta}(x)g_{\alpha\beta}(x) \tag{10}$$

тензора $T^{\alpha\beta}$ измеряется в единицах $[\text{энергия}]/[\text{длина}]^n = [\text{сила}]/[\text{длина}]^{n-1}$, так как действие измеряется в единицах $[\text{энергия}]\cdot[\text{время}]$, а элемент объема dV_{n+1} измеряется в единицах $[\text{длина}]^n\cdot[\text{время}]$.

В реальном случае $n = 3$ и след тензора энергии-импульса измеряется в единицах $[\text{сила}]/[\text{длина}]^2$, что согласуется с (6).

2. ТЕНЗОР ЭНЕРГИИ-ИМПУЛЬСА ЭФИРНОЙ МАССЫ

Эфирная масса — самая простая материальная система. Ее действие равняется

$$S_n = G_n V_{n+1} = G_n\int dX, \tag{11}$$

так как

$$dV_{n+1} = dX, \tag{12}$$

а так как

$$\delta\sqrt{-g} = \frac{1}{2}\sqrt{-g}g^{\alpha\beta}\delta g_{\alpha\beta}, \tag{13}$$

то

$$\delta dX = \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}(x)\delta g_{\alpha\beta}(x)dX, \tag{14}$$

$$\delta S_n = \frac{1}{2}G_n\int g^{\alpha\beta}(x)\delta g_{\alpha\beta}(x)dX \tag{15}$$

и определенный по формуле (8) тензор энергии-импульса эфирной массы равняется

$$T_n^{\alpha\beta} = T_n^{\alpha\beta}(x) = G_n g^{\alpha\beta}(x) = Pg^{\alpha\beta}(x). \tag{16}$$

След тензора энергии-импульса эфирной массы не зависит от x и равняется

$$T_n = (n+1)P. \tag{17}$$

Это значит, что эфирная масса распределяется в пространстве-времени равномерно (там, где есть эта масса).

В реальном случае тензор энергии-импульса эфирной массы и его след равняются

$$T_3^{\alpha\beta}(x) = \frac{\lambda c^4}{8\pi\gamma} g^{\alpha\beta}(x); \quad T_3 = \frac{\lambda c^4}{2\pi\gamma}. \tag{18}$$

3. ТЕНЗОР ЭНЕРГИИ-ИМПУЛЬСА m-МЕРНОЙ ЭФИРНОЙ ПЛЕНКИ

Действие m-мерной эфирной пленки равняется (2). Подсчитаем вариационную производную $V_{m+1}^{\alpha\beta}$ площади (1) по этому тензору. Так как

$$\delta\sqrt{-f_m} = \frac{1}{2}\sqrt{-f_m} f^{kl}\delta f_{kl}, \tag{19}$$

$$\delta f_{kl}(u) = \frac{\partial f^\alpha}{\partial u^k}\frac{\partial f^\beta}{\partial u^l}\delta g_{\alpha\beta}(f(u)), \tag{20}$$

$$\delta dV_{m+1} = \frac{\partial f^\alpha}{\partial u^k}\frac{\partial f^\beta}{\partial u^l}\delta g_{\alpha\beta}(f(u))dV_{m+1}, \tag{21}$$

то

$$\delta V_{m+1} = \frac{1}{2}\int f^{kl}\delta f_{kl} dV_{m+1} = \frac{1}{2}\int f^{kl}\frac{\partial f^\alpha}{\partial u^k}\frac{\partial f^\beta}{\partial u^l}\delta g_{\alpha\beta}(f(u))dV_{m+1}. \tag{22}$$

Остается преобразовать полученную вариацию (22) к виду

$$\delta V_{m+1} = \frac{1}{2}\int V_{m+1}^{\alpha\beta}(x)\delta g_{\alpha\beta}(x)dX. \tag{23}$$

С этой целью введем $(n+1)$-мерную δ-функцию:

$$\delta(x-f) = \frac{1}{\sqrt{-g}}\delta(x^1 - f^1)\cdots\delta(x^{n+1} - f^{n+1}). \tag{24}$$

Имеем

$$\delta g_{\alpha\beta}(f(u)) = \int \delta(x - f(u))\delta g_{\alpha\beta}(x)dX. \tag{25}$$

Следовательно,

$$V_{m+1}^{\alpha\beta}(x) = \int \delta(x - f(u)) f^{kl}\frac{\partial f^\alpha}{\partial u^k}\frac{\partial f^\beta}{\partial u^l}dV_{m+1}, \tag{26}$$

так что тензор энергии-импульса m-мерной эфирной пленки равняется

$$T_m^{\alpha\beta} = T_m^{\alpha\beta}(x) = G_m V_{m+1}^{\alpha\beta} = G_m\int \delta(x - f(u)) f^{kl}\frac{\partial f^\alpha}{\partial u^k}\frac{\partial f^\beta}{\partial u^l}dV_{m+1}. \tag{27}$$

Полученный тензор, как видно, симметричен. Его след

$$T_m = T_m(x) = G_m\int \delta(x - f(u)) f^{kl}\frac{\partial f^\alpha}{\partial u^k}\frac{\partial f^\beta}{\partial u^l}g_{\alpha\beta}(f(u))dV_{m+1} \tag{28}$$

равняется

$$T_m = T_m(x) = T_m^{\alpha\beta}(x) g_{\alpha\beta}(x) = (m+1) G_m \int \delta(x - f(u)) dV_{m+1}. \tag{29}$$

Действительно, согласно (5)

$$f^{kl} \frac{\partial f^\alpha}{\partial u^k} \frac{\partial f^\beta}{\partial u^l} g_{\alpha\beta}(f(u)) = f^{kl} f_{kl} = m + 1. \tag{30}$$

Подставляя это равенство в (28), получаем (29).

4. ЭФИРНАЯ МАССА КАК *n*-МЕРНАЯ ЭФИРНАЯ ПЛЕНКА

Заметим, что при $m = n$ поверхность (3) есть не что иное, как риманов мир в координатной карте $u^1, \ldots, u^{n+1}$. При $m = n$ входящая в интеграл (27) сумма

$$f^{\mu\nu} \frac{\partial f^\alpha}{\partial u^\mu} \frac{\partial f^\beta}{\partial u^\nu} = g^{\alpha\beta}(f(u)) \tag{31}$$

выносится из-под знака интеграла, так что

$$T_n^{\alpha\beta} = T_n^{\alpha\beta}(x) = G_n g^{\alpha\beta}(x) \int \delta(x - f(u)) dV_{n+1}. \tag{32}$$

С учетом равенства (12)

$$\int \delta(x - f(u)) dV_{n+1} = \int \delta(x - f(u)) dX = 1. \tag{33}$$

Подставляя (33) в (32), получаем (16).

Таким образом, эфирная масса — это n-мерная эфирная пленка. Можно сказать, что и, наоборот, m-мерная эфирная пленка есть эфирная масса, сосредоточенная на поверхности (3). Согласно (29) на поверхности (3) она распределена равномерно.

5. МАТЕРИАЛЬНАЯ ТОЧКА КАК 0-МЕРНАЯ ЭФИРНАЯ ПЛЕНКА

Заметим, что при $m = 0$ поверхность (3) есть не что иное, как мировая линия материальной точки, а 1-мерный объем (1)

$$V_1 = \int dV_1 = \tau \tag{34}$$

есть ее собственное время. Действие материальной точки равняется

$$S_0 = G_0 V_1 = -Mc^2 \tau, \tag{35}$$

где M — масса материальной точки.

Имеем

$$dV_1 = \frac{1}{c}\sqrt{-f_{11}}du = d\tau, \quad f_{11} = \frac{dx^\alpha}{du}g_{\alpha\beta}(f)\frac{dx^\beta}{du}. \tag{36}$$

От произвольно выбранного параметра u на мировой линии перейдем теперь к параметру τ (34). Так как

$$f^{11} = \frac{1}{f_{11}}, \quad \frac{df^\alpha}{du} = \frac{df^\alpha}{d\tau}\frac{du}{d\tau} = \frac{1}{c}\sqrt{-f_{11}}\frac{df^\alpha}{d\tau}, \tag{37}$$

то

$$f^{11}\frac{df^\alpha}{du}\frac{df^\beta}{du} = -\frac{1}{c^2}\frac{df^\alpha}{d\tau}\frac{df^\beta}{d\tau}. \tag{38}$$

Следовательно, согласно (27) тензор энергии-импульса материальной точки равняется

$$T_0^{\alpha\beta}(x) = M\int \delta(x - f(\tau))\frac{df^\alpha}{d\tau}\frac{df^\beta}{d\tau}d\tau. \tag{39}$$

Этот тензор, умноженный на M, совпадает с тензором, представленным в работе [11, с. 226], в которой собственное время материальной точки измеряется в с/г и равняется времени (34), поделенному на M.

Согласно (39) эфирная масса сосредоточена на мировой линии материальной точки.

След тензора (39) равен

$$T_0(x) = -Mc^2\int \delta(x - f(\tau))d\tau, \tag{40}$$

так как (см. (38) и (36))

$$g_{\alpha\beta}(f)\frac{df^\alpha}{d\tau}\frac{df^\beta}{d\tau} = -c^2 f^{11}g_{\alpha\beta}\frac{df^\alpha}{du}\frac{df^\beta}{du} = -c^2 f^{11}f_{11} = -c^2. \tag{41}$$

Согласно (40) на мировой линии материальной точки эфирная масса распределена равномерно. Это значит, что масса M материальной точки не зависит от ее собственного времени τ.

6. ТЕНЗОР ЭНЕРГИИ-ИМПУЛЬСА ЭФИРНОЙ ГИПЕРПЛЕНКИ

Всякий вектор $n^\alpha = n^\alpha(f)$, ортогональный к времениподобной поверхности (3), пространственноподобен. Поэтому можно нормировать его на единицу и положить

$$g_{\alpha\beta}(f)n^\alpha(f)n^\beta(f) = 1. \tag{42}$$

Если $m = n - 1$, то в каждой точке $x = f(u)$ имеется один и только один такой вектор. Поэтому на мировой поверхности гиперпленки

$$f^{kl}\frac{\partial f^\alpha}{\partial u^k}\frac{\partial f^\beta}{\partial u^l} = g^{\alpha\beta} - n^\alpha n^\beta. \tag{43}$$

В соответствии с (27) тензор энергии-импульса гиперпленки равняется

$$T_{n-1}^{\alpha\beta} = T_{n-1}^{\alpha\beta}(x) = G_{n-1}V_n^{\alpha\beta} = G\int \delta(x - f(u))(g^{\alpha\beta} - n^\alpha n^\beta)dV_n. \tag{44}$$

В соответствии с (29) след тензора энергии-импульса гиперпленки равняется

$$T_{n-1} = T_{n-1}(x) = T^{\alpha\beta}_{n-1}(x) g_{\alpha\beta}(x) = nG \int \delta(x - f(u)) dV_n. \tag{45}$$

Согласно (44) эфирная масса сосредоточена на мировой гиперповерхности эфирной гиперпленки.

Согласно (45) эфирная масса распределена на мировой гиперповерхности эфирной гиперпленки равномерно.

7. ТЕНЗОР ЭНЕРГИИ-ИМПУЛЬСА ЭФИРНОЙ НИТИ

В случае эфирной нити имеем

$$f_1 = f_{11} f_{22} - f_{12} f_{21} < 0, \quad c dV_2 = \sqrt{f_{12} f_{21} - f_{11} f_{22}}\, du^1 du^2. \tag{46}$$

Выбирая изотропные координаты на мировой поверхности, заметаемой эфирной нитью, полагаем

$$f_{11} = 0, \quad f_{22} = 0, \quad f_{12} = f_{21} > 0, \quad f_{12} f^{12} = 1 \tag{47}$$

и согласно (27) получаем

$$T^{\alpha\beta}_1(x) = -\frac{F}{c} \int \delta(x - f(u)) \left(\frac{\partial f^\alpha}{\partial u^1} \frac{\partial f^\beta}{\partial u^2} + \frac{\partial f^\alpha}{\partial u^2} \frac{\partial f^\beta}{\partial u^1} \right) du^1 du^2. \tag{48}$$

Итак, здесь рассмотрены все типы элементов эфирного вещества.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Черников Н. А., Шавохина Н. С.* Дифференциальные уравнения времениподобных геодезических поверхностей в римановом пространстве-времени // Письма в ЭЧАЯ. 2006. Т. 3, № 6(135). С. 113.
2. *Черников Н. А., Шавохина Н. С.* Пример релятивистской задачи двух тел. I. Краевая задача для минимальной поверхности // ТМФ. 1980. Т. 42, № 1. С. 59–70.
3. *Черников Н. А., Шавохина Н. С.* Пример релятивистской задачи двух тел. II. Уравнения движения // ТМФ. 1980. Т. 43, № 3. С. 356–366.
4. *Черников Н. А., Шавохина Н. С.* Специальная формулировка релятивистской задачи двух одинаковых тел // Проблемы теории гравитации и элементарных частиц. М., 1983. Вып. 14. С. 113–119.
5. *Шавохина Н. С.* Релятивистская задача двух одинаковых тел с постоянной по величине силой притяжения // Докл. АН СССР. 1982. Т. 265, № 4. С. 852–856.
6. *Шавохина Н. С.* Релятивистская система двух тел с собственной осью времени на поверхности взаимодействия // Проблемы теории гравитации и элементарных частиц. М.: Энергоатомиздат, 1986. Вып. 17. С. 187–194.
7. *Larmor J. J.* Aether and Matter. Camgridge, 1900.
8. *Фок В. А.* Теория пространства, времени и тяготения. М., 1955.

9. *Einstein A.* Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie // Sitzungber. preuss. Akad. Wiss. 1917. Bd. 1. S. 142–152; Пер.: *Эйнштейн А.* Собр. науч. тр. М.: Наука, 1965. Т. I. Ст. 44. С. 611.
10. *Шавохина Н. С.* Тензор энергии-импульса ареального объекта // Тр. Междунар. семинара «Гравитационная энергия и гравитационные волны». Дубна, 11–13 мая 1988 г. Дубна, 1989. С. 31–38.
11. *Черников Н. А.* Общий принцип относительности в квантовой теории поля // Материалы III Междунар. совещ. по нелокальной теории поля, Алушта, 23–30 апр. 1973 г. Дубна, 1973. С. 218–244.

Получено 24 мая 2006 г.