

ВЕРХНИЕ И НИЖНИЕ ОЦЕНКИ ЭНЕРГИИ ДЛЯ ЯДЕРНЫХ И КУЛОНОВСКИХ СИСТЕМ НЕСКОЛЬКИХ ЧАСТИЦ

А. Г. Дончев, С. А. Калачев, Н. Н. Колесников, В. И. Тарасов

Физический факультет Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, Москва

В рамках вариационного метода с пробными функциями экспоненциального и гауссовского типа найдены верхние и нижние оценки энергии для трех-, четырех- и пятичастичных ядерных и кулоновских систем. Двухсторонние оценки энергии не только позволяют установить пределы, в которых заключено точное значение энергии, но и дают дополнительную возможность для экстраполяции к точному значению энергии. Это позволяет при достижении той же точности уменьшить объем вычислений за счет использования меньшего числа пробных функций.

The upper and lower bounds of energy are found for three-, four- and five-particle nuclear and Coulomb systems in the framework of variational method with the trial functions of exponential and Gaussian types. The two-sided estimates of energy not only allow one to fix the limits for the exact value of energy but also provide an additional opportunity for extrapolation of the variational estimates to the exact value of energy. This allows one to reduce the volume of calculations by shortening the length of variational expansion without the loss of accuracy.

PACS: 21.10.Dr, 21.45.+v, 45.50.Jf

В настоящее время для расчета связанных систем небольшого числа нерелятивистских частиц предложен ряд весьма эффективных квантово-механических методов, которые могут претендовать на высокую точность оценки энергии E (иногда до двух десятков и более значащих цифр). Обычно в расчетах используется вариационный подход, в соответствии с которым находятся верхние оценки энергии E_U , которые в пределе бесконечно большого числа пробных функций n должны привести к точному значению энергии системы E_0 . При естественном ограничении расчетов конечным числом пробных функций энергия E_0 находится путем экстраполяции зависимости E_U от n , а на основе анализа характера сходимости оценок энергии делается заключение о точности расчетов.

Однако такая процедура не является безупречной, и для того чтобы исключить все возможные сомнения относительно точного значения энергии, влияния выбора базиса, а также истинных пределов точности расчетов, необходима нижняя оценка энергии E_L . Знание нижней оценки энергии наряду с верхней не только устанавливает границы, в пределах которых заключено точное значение энергии, но и дает дополнительную возможность для экстраполяции к точному значению энергии, что позволяет при достижении той же точности уменьшить объем вычислений за счет использования меньшего

числа пробных функций. Это в особенности относится к системам ядерного типа с короткодействующими потенциалами взаимодействия, на чем мы предполагаем специально остановиться.

Ниже вычисления проводятся в рамках вариационного метода с пробными функциями экспоненциального или гауссовского типа [1,2], которые в случае нулевого орбитального момента будем записывать в виде

$$\psi = \sum_{\alpha=1}^n C_n \exp \left(- \sum_{p>q=1}^A \alpha_{pq}^{\alpha} R_{pq}^k \right), \quad (1)$$

где A — число частиц, $k = 1$ в случае использования экспоненциальных функций и $k = 2$ в случае гауссовских функций; R_{pq} — расстояние между частицами p и q ; α_{pq}^{α} и C_n — соответственно нелинейный (размерный) и линейный параметры. Преимуществом выбора такого базиса является наличие большого числа размерных параметров, что обеспечивает большую гибкость по сравнению, например, с полиномиальными функциями хиллераасовского типа [3–5].

В соответствии с вариационным принципом при заданном гамильтониане H верхняя оценка энергии E_U находится путем минимизации функционала $\mathcal{E}_U[\psi] = \langle \psi | H | \psi \rangle / \langle \psi | \psi \rangle$ с пробной функцией ψ . Нижняя же оценка согласно Темплу [6] соответствует максимуму функционала $\mathcal{E}_L[\psi]$:

$$E_L^T = \max_{\psi, \mathcal{E}_U[\psi] < E_1} \mathcal{E}_L[\psi] = \max_{\psi, \mathcal{E}_U[\psi] < E_1} \frac{E_1 \mathcal{E}_U[\psi] - \mathcal{E}_Q^2[\psi]}{E_1 - \mathcal{E}_U[\psi]}, \quad (2)$$

где E_1 — энергия первого возбужденного уровня (или его нижняя оценка) с такой же симметрией и орбитальным моментом, как для основного состояния, а

$$\mathcal{E}_Q[\psi] \equiv - \sqrt{\frac{\langle \psi | H^2 | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle}}. \quad (3)$$

Для введенных функционалов справедливы неравенства

$$\mathcal{E}_L[\psi] < E_0 < \mathcal{E}_U[\psi], \quad (4)$$

$$\mathcal{E}_L[\psi] < \mathcal{E}_Q[\psi] < \mathcal{E}_U[\psi] < E_1, \quad (5)$$

из которых второе справедливо в подпространстве $\{\psi : \mathcal{E}[\psi] < E_1\}$, являющемся областью определения $\mathcal{E}_L[\psi]$. При устремлении числа членов в (1) к $n \rightarrow \infty$ неравенства (4) и (5) превращаются в равенства. Учитывая то, что для $E_L^Q = \min \mathcal{E}_Q$ нормальным является возрастание при увеличении n , можно, следуя [7], рассматривать E_L^Q как нижнюю оценку энергии (см. [8]). Отметим, что в работе [9] предлагалось также в качестве нижней оценки использовать $E_L^W = E_U - \sqrt{E_L^Q - E_U^2}$.

В работе Холла и Поста [10] нахождение нижней оценки E_L^H для системы тождественных частиц сводится к решению эффективного одночастичного уравнения Шредингера; имеется также обобщение на случай нетождественных частиц [11]. Однако для небольшого числа частиц такая оценка оказывается весьма грубой. Например, при

расчете трития с потенциалом Бейкера [12] было найдено $E_L^H = -14,7$ МэВ, что отстоит значительно дальше от точного значения $-9,783$ МэВ, чем оценка по Темплу $E_L^T = -10,64$ МэВ, рассчитанная всего с двумя членами в разложении (1).

Для нахождения нижних оценок (E_L^T , E_L^Q , E_L^W) необходимо знать матричные элементы не только гамильтониана, но и его квадрата. Для случая гауссовского базиса матричные элементы операторов H и H^2 выражаются, как было показано в работах [1, 13], через алгебраические функции, и это справедливо для произвольного числа частиц, для всех обычно используемых потенциалов. В случае экспоненциальных функций матричные элементы H и H^2 удастся представить в замкнутой форме (через рациональные, логарифмические и дилогарифмические функции) лишь для трехчастичных систем [2, 14], а для четырехчастичных систем это возможно только для H , но не для его квадрата.

В качестве систем ядерного типа были рассмотрены а) модельные системы 2α , 3α , 4α , связанные потенциалом Али-Бодмера, вариант d_0 [15], б) ядра ${}^2\text{H}$, ${}^3\text{H}$, ${}^3\text{He}$ и ${}^4\text{He}$, в) гиперядра ${}^3_\Lambda\text{H}$, ${}^4_\Lambda\text{H}$, ${}^4_\Lambda\text{He}$, ${}^5_\Lambda\text{He}$, а также ${}^9_\Lambda\text{Be}$, рассматривавшийся как кластерная система $\alpha + \alpha + \Lambda$. При расчете ядер и гиперядер использовались полуреалистический центральный парный NN -потенциал из работ [1, 16], а также ΛN -потенциал [17, 18], согласованный с основными гиперядерными данными. Кроме ядерных систем верхние и нижние оценки энергии находились для ряда трех- и четырехчастичных кулоновских систем: для атома гелия, отрицательного иона водорода, электронно-позитронной системы $e^+e^+e^-$, для мюонных систем $\mu e e$, $\nu \mu \mu$, $\mu e e$, для двухцентровых систем $\nu \nu e$, а также четырехчастичных систем: молекулы водорода H_2 и ионизированного гидрида гелия HeH^+ . Расчеты трехчастичных кулоновских систем производились с использованием экспоненциальных функций (которые обеспечивают для них более высокую точность), а всех систем ядерного типа и четырехчастичных кулоновских систем — гауссовских функций.

Применяемая в настоящей работе процедура вычислений состоит в оптимизации по нелинейным параметрам, которая включает в себя комбинацию покоординатного спуска и стохастического поиска с использованием функций распределения [2], см. также [19].

В случае систем ядерного типа характер сходимости верхних и нижних оценок энергии оказывается весьма сходным, в связи с чем зависимости E_L^T от E_U и E_L^Q от E_U близки к линейной¹, на что было обращено внимание в работе [20] и что использовалось для экстраполяции к точному значению энергии E_0 [2, 18]. Линейный характер зависимости E_L^T и E_L^Q от E_U иллюстрируется на примере четырехчастичных систем 4α и ${}^4\text{He}$, а также пятичастичной системы ${}^5_\Lambda\text{He}$ на рис. 1, 2 и 3 соответственно. По горизонтальной оси на рис. 1, 2 и 3 откладывались (в МэВ) значения E_L^T и E_L^Q , а по вертикальной — значения E_U , цифры у нанесенных точек указывают число пробных функций n . На рис. 2 и 3 по горизонтальной оси откладывались также значения n^{-1} и строилась зависимость $E_U = E_U(n^{-1})$. Точка пересечения линии $E_U = E_U(E_L^T)$ с линией $E_U = E_L^T$ соответствует экстраполированному к $n \rightarrow \infty$ значению энергии E_0^T . Аналогично пересечение линий $E_U = E_U(E_L^Q)$ и $E_U = E_L^Q$ определяет экстраполированное к $n \rightarrow \infty$ значение E_0^Q . Усредненное по двум экстраполяциям значение энергии находится как

¹В то же время, как показали проводившиеся нами расчеты, зависимость E_L^W от E_U значительно отличается от линейной, и поэтому ее экстраполяция к $n \rightarrow \infty$ ненадежна.

$\bar{E}_0 = \frac{1}{2} (E_0^T + E_0^Q)$, а точность расчета \bar{E}_0 определяется как среднеквадратичное отклонение от среднего.

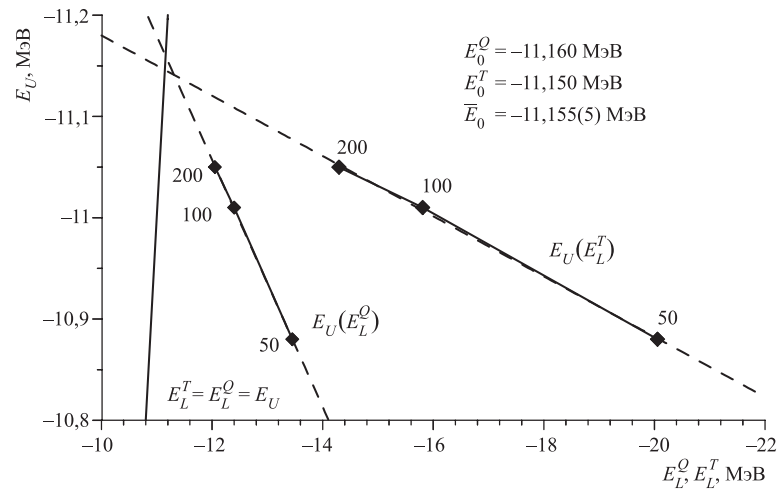


Рис. 1. График сходимости для системы 4α

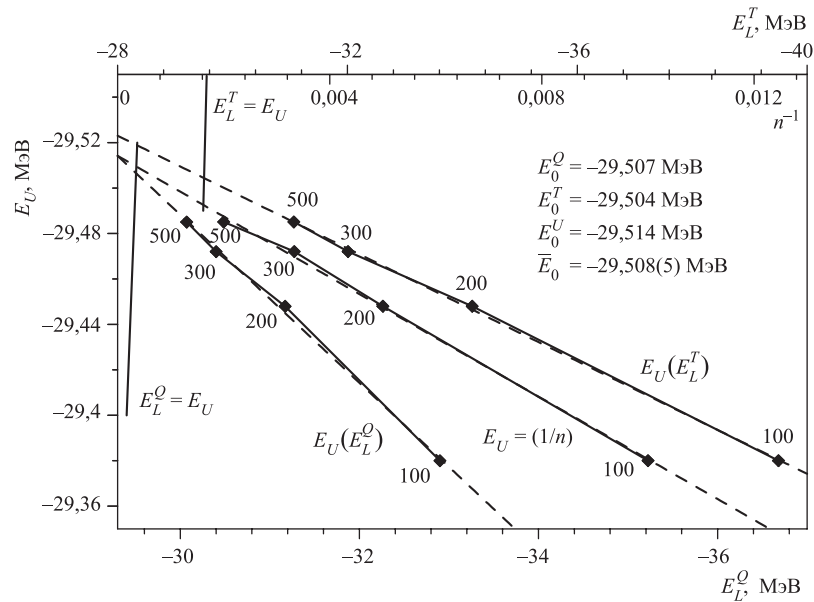


Рис. 2. График сходимости для системы ${}^4\text{He}$

В случае, когда зависимость E_U от $\frac{1}{n}$ приближалась к линейной (как это имеет место на рис. 2 и 3), кроме E_0^T и E_0^Q находилось также экстраполированное значение E_0^U , а \bar{E}_0 вычислялось с учетом тройной экстраполяции.

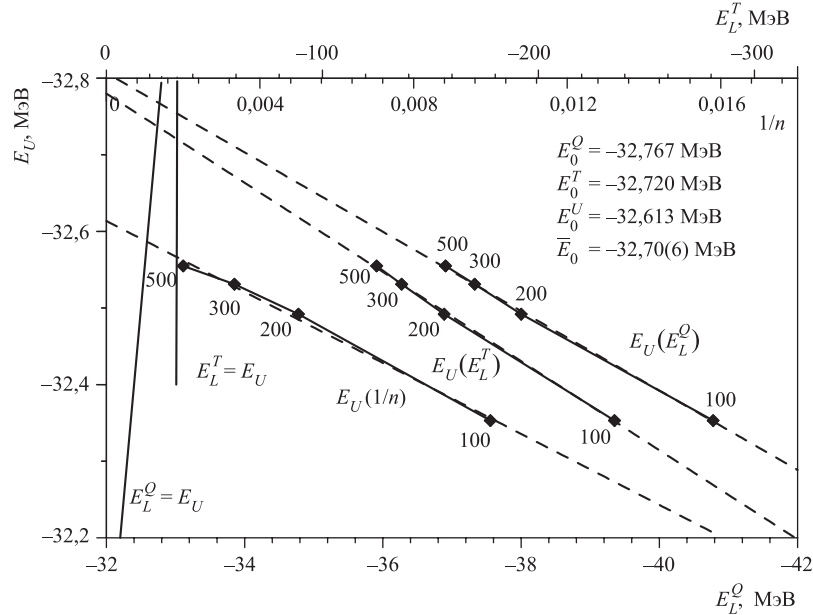


Рис. 3. График сходимости для системы ${}^5_\alpha\text{He}$

Для проверки надежности и точности определения энергии путем двойной (или тройной) экстраполяции проводились контрольные расчеты для систем 2α , 3α и 4α . Для этого E_U и E_L^T рассчитывались при значениях n , намного превосходящих те n_{\max} , которыми ограничивались расчеты, использовавшиеся для экстраполяции.

Так, для системы 3α при расчетах с числом функций до $n_{\max} = 70$ было найдено путем экстраполяции $E_0^T = -5,124112$ МэВ, $E_0^Q = -5,124135$ МэВ и $\bar{E}_0 = -5,124125(20)$, а расчет при $n = 200$ дал $E_U = -5,122038$ МэВ и $E_L^T = -5,125085$ МэВ, а следовательно, \bar{E}_0 не выходит за пределы интервала между $E_U(200)$ и $E_L^T(200)$.

Аналогично для системы 4α при расчете с числом функций $n_{\max} = 200$ было найдено путем экстраполяции $E_0^T = -11,150$ МэВ, $E_0^Q = -11,160$ МэВ и $\bar{E}_0 = -11,155(5)$ МэВ, а расчет с $n = 1000$ привел к $E_U = -11,154$ МэВ, $E_L^T = -11,322$ МэВ.

В случае системы 2α при $n_{\max} = 7$ было найдено $E_0^T = -1,3498$ МэВ, $E_0^Q = -1,3502$ МэВ, а $\bar{E}_0 = -1,3500(1)$, что совпадает со значением E_0 , найденным без использования вариационного метода путем пошагового интегрирования уравнения Шредингера.

Приведенные примеры контрольных расчетов, а также рис. 1, 2 и 3 демонстрируют общую для систем ядерного типа линейную (с хорошей степенью точности) зависимость E_L^T и E_L^Q от E_U , причем это оказывается справедливым и в тех случаях, когда зависимость E_U от $\frac{1}{n}$ далека от линейной. Основываясь на этом, можно, ограничиваясь сравнительно небольшим числом пробных функций с $n \leq n_{\max}$, находить посредством экстраполяции E_L^T и E_L^Q энергию системы \bar{E}_0 при неопределенности в величине \bar{E}_0 , значительно меньшей (а точности значительно большей), чем разности $|E_L^T(n_{\max}) - E_U(n_{\max})|$ и $|E_L^Q(n_{\max}) - E_U(n_{\max})|$.

Таблица 1. Энергии E_U , E_L^T и E_L^Q для ядерных систем

Система	E_1	n	E_U	E_L^T	E_L^Q	\bar{E}_0	B_Λ
1	2	3	4	5	6	7	8
${}^3\text{H}$	-0,429	20	-8,37	-24	-13,2		
		50	-8,446	-10,1	-9,07		
		100	-8,4535	-8,56	-8,497		
${}^4\text{He}$	-8,4548	120	-8,4542	-8,489	-8,468	-8,455(1)	
		100	-29,38	-39,5	-32,9		
		200	-29,448	-34,17	-31,17		
		300	-29,472 1	-32,010	-30,40		
3α	-1,35	500	-29,485 1	-31,068	-30,071	-29,508(5)	
		20	-5,107 505	-5,533 946	-5,262 030		
		50	-5,122 207	-5,187 867	-5,146 328		
		60	-5,123 155	-5,157 298	-5,135 712		
4α	-5,12	70	-5,123 370	-5,147 416	-5,131 830	-5,124 125(20)	
		50	-10,88	-20,1	-13,5		
		100	-11,01	-15,8	-12,4		
		200	-11,05	-14,30	-12,05		
${}^3_\Lambda\text{H}$	-2,225	150	-2,3602	-77,7	-4,20	-11,155(5)	
		200	-2,36061	-71,9	-4,11		
		250	-2,36068	-70,9	-4,09		
${}^4_\Lambda\text{H}$	-8,4548	100	-10,39	-72,3	-15,41	-2,369(3)	0,144(3)
		300	-10,43	-44,4	-13,64		
		500	-10,444	-35,52	-12,93		
${}^4_\Lambda\text{He}$	-7,7623	100	-10,01	-84,319	-16,69	-10,48(2)	2,03(2)
		200	-10,047	-68,863	-15,75		
		300	-10,069	-56,372	-14,93		
		500	-10,094	-44,333	-13,99		
${}^5_\Lambda\text{He}$	-29,5	100	-32,35	-235,27	-40,78	-10,16(6)	2,44(6)
		200	-32,49	-156,35	-38,00		
		300	-32,53	-136,71	-37,33		
		500	-32,56	-125,14	-36,91		
${}^9_\Lambda\text{Be}$	-3,12	30	-6,477	-6,740	-6,557	-32,70(6)	3,19(6)
		50	-6,480	-6,589	-6,511		
		90	-6,481	-6,517	-6,491		

Результаты расчетов энергии E_U , E_L^T и E_L^Q при различных значениях n для трех-, четырех- и пятичастичных ядерных и гиперъядерных систем ${}^3\text{H}$, ${}^4\text{He}$, ${}^3_\Lambda\text{H}$, ${}^4_\Lambda\text{H}$, ${}^4_\Lambda\text{He}$, ${}^5_\Lambda\text{He}$, а также для ${}^9_\Lambda\text{Be}$ (как кластерной системы $\alpha + \alpha + \Lambda$) и для модельных систем 3α и 4α представлены в табл. 1 в столбцах 4–6. В столбце 7 даются найденные посредством описанной выше процедуры экстраполяции значения полной энергии \bar{E}_0 с (приведенной в скобках) оценкой точности расчета, а в столбце 8 для гиперъядер указана энергия связи Λ -частицы, вычисленная как разность между полной энергией связи гиперъядра и энергией связи ядра-остова. Используемые для расчета E_L^T энергии E_1 содержатся в столбце 2 таблицы¹.

¹Укажем для сравнения значения нижней оценки E_L^H : -7,48, -20,0 и -17,48 МэВ для систем 3α , 4α и ${}^3\text{H}$ соответственно.

Таблица 2. Энергии E_U , E_L^T и E_L^Q для трех- и четырехчастичных кулоновских систем

Система	E_1	n	E_U	E_L^T	E_L^Q	δ_v
1	2	3	4	5	6	7
${}^\infty\text{He}$	-2,146	10	-2,903 723 6	-2,903 83	-2,903 737	6,0
		30	-2,903 724 373	-2,903 725 8	-2,903 724 6	8,3
		100	-2,903 724 377 01	-2,903 724 414	-2,903 724 381	10,6
		300	-2,903 724 377 033 15	-2,903 724 380 41	-2,903 724 37747	12,1
$\alpha e^- e^-$	-2,146	300	-2,903 304 557 732 27	-2,903 304 561 11	-2,903 304 558 17	12,6
${}^\infty\text{H}^-$	-0,500	10	-0,527 750 54	-0,528 06	-0,527 759	
		30	-0,527 751 009 4	-0,527 764	-0,527 751 3	
		50	-0,527 751 016 10	-0,527 752 7	-0,527 751 06	
		100	-0,527 751 016 400	-0,527 751 66	-0,527 751 033	9,0
$p e^- e^-$	-0,500	100	-0,527 445 880 971	-0,527 446 533	-0,527 445 898	9,2
$\mu e e$	-0,500	100	-0,525 054 806 098	-0,525 055 501	-0,525 054 827	8,6
$e^+ e^- e^-$	-0,250	10	-0,262 003 5	-0,262 74	-0,262 020 5	
		30	-0,262 005 053	-0,262 026	-0,262 005 53	
		50	-0,262 005 068 6	-0,262 008 7	-0,262 005 220	7,6
		10	-0,494 374	-0,495 7	-0,494 434	
$p p \mu$	-0,450	30	-0,494 386 64	-0,494 408	-0,494 387 6	
		50	-0,494 386 790	-0,494 391 1	-0,494 387 12	6,8
$\mu \mu e$	-0,560	10	-0,583 3	-0,604	-0,599	
		30	-0,584 75	-0,600	-0,592 1	
		50	-0,584 971	-0,594 4	-0,586 55	3,2
		50	-0,585 126 095 200*			7,5
$p p e$	-0,580	10	-0,591	-0,745	-0,702	
		30	-0,595 0	-0,652	-0,636	
		50	-0,595 67	-0,618	-0,600 6	3,3
		50	-0,597 139 063 059*			9,2
$p p e^- e^-$ (H_2)	-1,145	200	-1,158	-9,8	-1,21	
		300	-1,159 2	-6,73	-1,196	
		500	-1,160 2	-4,78	-1,187	2,3
$p \alpha e^- e^-$ (HeH^+)	-2,9567	200	-1,164 01*			3,8
		200	-2,964	-75	-3,068	
		300	-2,965 0	-61	-3,053	3,0
		200	-2,970 9*			3,5

*Рассчитано с использованием каркасных функций [21].

Результаты расчетов верхней и нижних оценок энергии для систем кулоновского типа собраны в табл. 2. Для кулоновских систем, в отличие от ядерных систем, зависимость E_L^T и E_L^Q от E_U отклоняется от линейной, поэтому экстраполяция к $n \rightarrow \infty$ ненадежна. В связи с этим в табл. 2 приведены только рассчитанные значения E_U , E_L^T и E_L^Q для различного числа пробных функций n . В качестве дополнительной характеристики точности расчета в столбце 7 таблицы приводится величина вириального индекса $\delta_v = -\lg |1 + 2\langle T \rangle / \langle V \rangle|$. Для атомных и молекулярных систем энергии выражаются в атомных единицах, а для мезоатомных систем — в мезоатомных. В столбце 2 указывается энергия E_1 . В расчетах принимается следующее отношение масс: $m_p/m_e = 1836,1524$; $m_\alpha/m_e = 7294,2996$; $m_\mu/m_e = 206,76826$ и $m_p/m_\mu = 8,8802444$.

Для атома гелия приводятся результаты расчетов как для стандартной системы ${}^{\infty}\text{He}$ (соответствующей бесконечно тяжелому ядру), так и для реальной системы $\alpha e^- e^-$. Для отрицательного иона водорода расчеты проводились аналогичным образом как для стандартной системы ${}^{\infty}\text{H}^-$, так и для реальной системы $p e^- e^-$. Остальные кулоновские системы рассчитывались с частицами реальных масс. В случае систем кулоновского типа о точности расчетов и ее зависимости от n можно судить по разности между E_U и E_L^T , а также E_U и E_L^Q (а кроме того, по величине δ_ν). Как видно из табл. 2, точность расчета выше для атомных (одноцентровых) систем и ниже всего для двухцентровых систем. Видно также, что имеет место корреляция между числом правильных знаков δ в вариационных оценках и вириальным индексом; грубо говоря, $\delta = \delta_\nu - 2$. Отметим, что точность расчетов кулоновских систем с гауссовскими функциями намного ниже, чем с экспоненциальными. Использование для расчета двухцентровых систем вместо экспоненциальных функций обобщенно-экспоненциальных (каркасных) функций [21] резко улучшает точность расчета. Однако это относится только к расчету E_U , но не к E_L , поскольку с помощью каркасных функций не удается вычислить матричные элементы H^2 .

Авторы выражают благодарность В. Б. Беляеву, В. Г. Неудачину, Н. П. Юдину, Т. Я. Коренману, В. С. Ростовскому за обсуждение результатов работы и ценные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Колесников Н. Н., Тарасов В. И. Феноменологический NN -потенциал из анализа трех- и четырехчастичных ядер // ЯФ. 1982. Т. 35. С. 609–619.
2. Дончев А. Г., Колесников Н. Н., Тарасов В. И. Нижние и верхние вариационные оценки в расчетах кулоновских и ядерных систем // ЯФ. 2000. Т. 63. С. 419–430.
3. Schwartz C. Ground State of the Helium Atom // Phys. Rev. 1962. V. 128. P. 1146–1148.
4. Thakkar A. J., Koga T. Ground-State Energies for the Helium Isoelectronic Series // Phys. Rev. A. 1994. V. 50. P. 854–856.
5. Frankowski K., Pekeris C. L. Logarithmic Terms in the Wave Functions of the Ground State of Two-Electron Atoms // Phys. Rev. 1966. V. 150. P. 366.
6. Temple G. The Theory of Rayleigh's Principle as Applied to Continuous Systems // Proc. Roy. Soc. 1928. V. 119. P. 276–293.
7. Romberg W. Über die untere Schranke des He-Grundzustandes, berechnet nach dem Ritzschen Verfahren // Phys. Zs. (Sowjetunion). 1935. Bd. 8. S. 516–527.
8. Stvenson A. F. On the Lower Bounds of Weinstein and Romberg in Quantum Mechanics // Phys. Rev. 1938. V. 53. P. 199.
9. Weinstein D. H. Modified Ritz Method // Proc. Nat. Acad. Sci. 1934. V. 20. P. 529–532;
MacDonald J. K. L. On the Modified Ritz Variation Method // Phys. Rev. 1934. V. 46. P. 828.
10. Hall R. L., Post H. R. Many-Particle Systems. IV. Short-Range Interactions // Proc. Phys. Soc. 1967. V. 90. P. 381–396.

11. *Basdevant J. et al.* Optimized Lower Bounds in the Three-Body Problem // Nucl. Phys. B. 1993. V. 393. P. 111–125.
12. *Baker G. A. et al.* Exact Numerical Solution of a Three-Body Ground-State Problem // Phys. Rev. 1962. V. 125. P. 1754–1758.
13. *Колесников Н. Н., Тарасов В. И., Старосотников М. И.* Вариационный метод расчета многочастичных систем в естественных координатах. Деп. ВИНТИ. 1980. № 3822-80.
14. *Дончев А. Г., Колесников Н. Н., Тарасов В. И.* Верхние и нижние вариационные оценки в расчетах трехчастичных систем с экспоненциальными пробными функциями // Вестн. Моск. ун-та. Сер. «Физ. астрон.». 1999. № 2. С. 15–18.
15. *Ali S., Bodmer A. R.* Phenomenological α - α Potentials // Nucl. Phys. 1966. V. 80. P. 99–112.
16. *Колесников Н. Н., Тарасов В. И.* Феноменологический NN -потенциал в малонуклонных системах // Изв. АН СССР. Сер. физ. 1981. Т. 45. С. 2183–2188.
17. *Kolesnikov N. N., Kalachev S. A., Tarasov V. I.* ΛN -Potential from Analysis of Binding Energies of Hypernuclei and Λp -Scattering // Eur. Few Body XIX Conf. Handbook. Groningen, 2004. P. 142.
18. *Колесников Н. Н., Калачев С. А.* Гиперядра и взаимодействие ΛN и $\Lambda\Lambda$. Препринт физ. фак. МГУ. М., 2004. № 18/2004.
19. *Kukulín V. I., Krasnopolsky V. M.* A Stochastic Variational Method for Few-Body Systems // J. Phys. G. 1977. V. 63. P. 795–811;
Кукулин В. И. Стохастический метод оптимизации базиса для вариационных расчетов многочастичных систем // Изв. АН СССР. Сер. физ. 1975. Т. 39. С. 535–542.
20. *Delves L. M.* Variational Techniques on the Nuclear Three-Body Problem // Adv. Nucl. Phys. 1973. V. 5. P. 1–224.
21. *Donchev A. G. et al.* Generalized Exponential Functions in Variational Calculations of Molecular Systems // Phys. Rev. A. 2004. V. 69. P. 034501.

Получено 7 июня 2005 г.