Письма в ЭЧАЯ. 2007. Т. 4, № 1(137). С. 85–90

ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА. ТЕОРИЯ

К ВОПРОСУ О КРИТЕРИЯХ ПРИМЕНИМОСТИ ОДНОЧАСТИЧНЫХ ПЕРЕХОДОВ В МНОГОЧАСТИЧНОЙ СИСТЕМЕ

А. А. Саркисян[1]

Ереванский государственный университет, Ереван, Армения

В работе представлены критерии, которым должны удовлетворять как локализованная многочастичная система, так и внешнее возмущение для того, чтобы в рассматриваемой системе характер квантовых переходов был таким же, как в одночастичном случае.

We consider the quantum transitions in the localized multi-particle system. We present the restrictions on the system and on the external perturbation, when the transitions are identical to those in one-particle system.

PACS: 71.10.Ca, 78.67.Hc

ВВЕДЕНИЕ

При исследовании одночастичных и многочастичных задач в квантовых низкоразмерных системах часто возникает необходимость рассмотрения различного рода межуровневых квантовых переходов, происходящих под воздействием внешних возмущений (см., например, [1–4]). При этом учет межчастичного взаимодействия существенным образом затрудняет проведение аналитического анализа особенностей этих переходов. Оказывается, однако, что иногда могут реализовываться такие специфические условия, обусловленные характером квантового ограничения, а также наложенного возмущения, при которых в многочастичной системе будут иметь место переходы, идентичные тем, которые реализуются в одночастичном приближении. Подобная ситуация имеет место, например, в случае циклотронного резонанса электронного газа, находящегося во внешнем однородном магнитном поле, под влиянием длинноволнового электромагнитного возмущения (теорема Кона [5–7]). Целью данной статьи является выявление критериев, которым должны удовлетворять, с одной стороны, изучаемая многочастичная система, а с другой — внешнее возмущение для того, чтобы квантовые переходы имели вышеуказанный характер. Отметим также, что дальнейшие рассуждения мы будем проводить на примере двумерной системы, состоящей из N взаимодействующих частиц.

[1] E-mail: shayk@ysu.am

1. КОММУТАЦИОННЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Рассмотрим систему взаимодействующих частиц, локализованную во внешнем ограничивающем поле, потенциал которого можно представить как

$$V_{\text{conf}}(\mathbf{r}_1,\ldots,\mathbf{r}_N)=\sum_{j=1}^{N}V_j(\mathbf{r}_j),$$

где N — число частиц; $V_j(\mathbf{r}_j)$ — ограничивающий потенциал, действующий на j-ю частицу. Обозначив оператор взаимодействия между частицами через $U(\mathbf{r}_1,\ldots,\mathbf{r}_N)$, гамильтониан системы можем записать в виде

$$\hat{H}=\frac{1}{2m}\sum_{j=1}^{N}\hat{p}_j^2+\sum_{j=1}^{N}V_j(\mathbf{r}_j)+U(\mathbf{r}_1,\ldots,\mathbf{r}_N).$$

Представим этот гамильтониан в виде суммы оператора невзаимодействующей части $\hat{H}_0$ и оператора взаимодействия $U(\mathbf{r}_1,\ldots,\mathbf{r}_N)$, т. е.

$$\hat{H}=\hat{H}_0+U(\mathbf{r}_1,\ldots,\mathbf{r}_N),$$

где

$$\hat{H}_0=\frac{1}{2m}\sum_{j=1}^{N}\hat{p}_j^2+\sum_{j=1}^{N}V_j(\mathbf{r}_j).$$

Допустим теперь, что для данной системы возможно построение ступенчатых операторов $\hat{C}_x^{\pm}$ и $\hat{C}_y^{\pm}$, выражаемых в общем случае через $\hat{p}_{xj}$, $\hat{p}_{yj}$, x_j, y_j:

$$\hat{C}_x^{\pm}=f_1^{\pm}(\hat{p}_{xj},\hat{p}_{yj},x_j,y_j),$$

$$\hat{C}_y^{\pm}=f_2^{\pm}(\hat{p}_{xj},\hat{p}_{yj},x_j,y_j),$$

и удовлетворяющих коммутационным соотношениям

$$[\hat{H}_0,\hat{C}_x^{\pm}]=\pm\Delta E_x\hat{C}_x^{\pm},\quad [\hat{H}_0,\hat{C}_y^{\pm}]=\pm\Delta E_y\hat{C}_y^{\pm}, \tag{1}$$

$$[U,\hat{C}_x^{\pm}]=0,\quad [U,\hat{C}_y^{\pm}]=0. \tag{2}$$

Тогда можно утверждать, что если волновая функция Ψ_{n_x,n_y} (n_x,n_y — квантовые числа) является собственной функцией оператора $\hat{H}$, то функции $\hat{C}_x^{\pm}\Psi_{n_x,n_y}$, $\hat{C}_y^{\pm}\Psi_{n_x,n_y}$ также являются собственными функциями оператора $\hat{H}$. Для доказательства этого утверждения обратимся сначала к невозмущенному гамильтониану $\hat{H}_0$. Пусть Ψ_{0n_x,n_y} является собственной функцией оператора $\hat{H}_0$, которой соответствует собственная энергия $E_0(n_x,n_y)$, т. е.

$$\hat{H}_0\Psi_{0n_x,n_y}=E_0(n_x,n_y)\Psi_{0n_x,n_y}.$$

Рассмотрим коммутационное соотношение

$$[\hat{H}_0,\hat{C}_x^{+}]\Psi_{0n_x,n_y}=(\hat{H}_0\hat{C}_x^{+}-\hat{C}_x^{+}\hat{H}_0)\Psi_{0n_x,n_y}=+\Delta E_x\hat{C}_x^{+}\Psi_{0n_x,n_y}. \tag{3}$$

Из (3) непосредственно следует, что

$$\hat{H}_0 C_x^+ \Psi_{0n_x,n_y} = (E_0(n_x,n_y) + \Delta E_x)\hat{C}_x^+ \Psi_{0n_x,n_y}.$$

Таким образом, $C_x^+ \Psi_{0n_x,n_y}$ также является собственной функцией оператора $\hat{H}_0$, но теперь уже с энергией

$$E_0(n_x,n_y) + \Delta E_x.$$

Аналогичным образом можно рассуждать и в случаях с остальными функциями $C_x^- \Psi_{0n_x,n_y}$, $C_y^+ \Psi_{0n_x,n_y}$, $C_y^- \Psi_{0n_x,n_y}$:

$$\begin{cases} C_x^- \Psi_{0n_x,n_y} \to E_0(n_x,n_y) - \Delta E_x, \\ C_y^+ \Psi_{0n_x,n_y} \to E_0(n_x,n_y) + \Delta E_y, \\ C_y^- \Psi_{0n_x,n_y} \to E_0(n_x,n_y) - \Delta E_y. \end{cases}$$

Обратимся теперь к полному гамильтониану $\hat{H}$. Пусть Ψ_{n_x,n_y} — собственная функция $\hat{H}$, соответствующая собственному значению энергии $E(n_x,n_y)$. Далее, рассмотрим коммутационное соотношение

$$[\hat{H},\hat{C}_x^+]\Psi_{n_x,n_y} = [\hat{H}_0 + U,\hat{C}_x^+]\Psi_{n_x,n_y} = [\hat{H}_0,\hat{C}_x^+]\Psi_{n_x,n_y}.$$

С другой стороны, согласно (1) имеем

$$[\hat{H}_0,\hat{C}_x^+]\Psi_{n_x,n_y} = \Delta E_x \hat{C}_x^+ \Psi_{n_x,n_y},$$

поэтому можем записать, что

$$\hat{H} C_x^+ \Psi_{n_x,n_y} = (E(n_x,n_y) + \Delta E_x)\hat{C}_x^+ \Psi_{n_x,n_y}.$$

Иначе говоря, функция $C_x^+ \Psi_{n_x,n_y}$ также является собственной функцией гамильтониана $\hat{H}$, но теперь уже с энергией

$$E(n_x,n_y) + \Delta E_x.$$

Рассуждая аналогичным образом для остальных функций, можем записать:

$$\begin{cases} C_x^- \Psi_{n_x,n_y} \to E(n_x,n_y) - \Delta E_x, \\ C_y^+ \Psi_{n_x,n_y} \to E(n_x,n_y) + \Delta E_y, \\ C_y^- \Psi_{n_x,n_y} \to E(n_x,n_y) - \Delta E_y. \end{cases}$$

Таким образом, нам действительно удалось доказать сделанное выше утверждение относительно функций $\hat{C}_{x,y}^{\pm} \Psi_{n_x,n_y}$.

Посмотрим теперь, как рассматриваемая система будет реагировать на некоторое внешнее возмущение, оператор которого можно представить в виде линейной комбинации вышеуказанных ступенчатых операторов.

Предположим, что на систему наложено внешнее возмущение $\hat{H}_1$, которое можно представить в виде линейной комбинации операторов $\hat{C}_x^{\pm}$ и $\hat{C}_y^{\pm}$. Например, пусть

$$\hat{H}_1 = \alpha \hat{C}_x^+ + \beta \hat{C}_y^-.$$

Сначала обсудим случай слабо взаимодействующих частиц, т. е. будем рассматривать гамильтониан $\hat{H}_0$. Из теории квантовых переходов следует, что возмущение $\hat{H}_1$ свяжет состояние Ψ_{0n_x,n_y} с состояниями $\hat{C}_x^+\Psi_{0n_x,n_y}$ и $\hat{C}_y^-\Psi_{0n_x,n_y}$. Таким образом, в системе будут иметь место переходы

$$\begin{cases} E_0(n_x,n_y) \to E_0(n_x,n_y) + \Delta E_x, \\ E_0(n_x,n_y) \to E_0(n_x,n_y) - \Delta E_y. \end{cases} \tag{4}$$

Аналогичным образом можем утверждать, что возмущение $\hat{H}_1$ будет связывать состояние Ψ_{n_x,n_y} с состояниями $\hat{C}_x^+\Psi_{n_x,n_y}$ и $\hat{C}_y^-\Psi_{n_x,n_y}$. Следовательно, в этом случае будут иметь место переходы

$$\begin{cases} E(n_x,n_y) \to E(n_x,n_y) + \Delta E_x, \\ E(n_x,n_y) \to E(n_x,n_y) - \Delta E_y. \end{cases} \tag{5}$$

Как следует из соотношений (4) и (5), во взаимодействующей и невзаимодействующей системах имеют место одни и те же переходы, индуцированные внешним возмущением $\hat{H}_1$, иначе говоря, мы пришли к следующему утверждению.

Если для двумерного гамильтониана взаимодействующих частиц $\hat{H}$ можно построить ступенчатые операторы $\hat{C}_x^\pm$ и $\hat{C}_y^\pm$, которые удовлетворяют коммутационным соотношениям (1) и (2), а также если оператор внешнего возмущения $\hat{H}_1$ этой системы можно представить в виде линейной комбинации вышеуказанных операторов, то переходы, индуцированные этим возмущением, не зависят от числа частиц N. Иными словами, переходы в системе из N частиц будут такими же, как в одночастичном случае.

2. ЭЛЕКТРОННЫЙ ГАЗ В АСИММЕТРИЧНОЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ЯМЕ

Проиллюстрируем вышеприведенные рассуждения на примере двумерного электронного газа, локализованного в асимметричной параболической квантовой яме [7]. В приближении парного взаимодействия между частицами гамильтониан данной задачи будет иметь вид

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + U(\mathbf{r}_1,\ldots,\mathbf{r}_N) = \frac{1}{2m}\sum_{j=1}^{N}\hat{p}_j^2 + \frac{m}{2}\sum_{j=1}^{N}(\omega_x^2x_j^2 + \omega_y^2y_j^2) + \frac{1}{2}\sum_{i\neq j=1}^{N}u(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|),$$

где ω_x и ω_y — частоты ограничивающего потенциала квантовой ямы; $u(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|)$ — энергия взаимодействия между i-й и j-й частицами.

Для рассматриваемого гамильтониана $\hat{H}$ можно построить вышеупомянутые ступенчатые операторы $\hat{C}_x^\pm$ и $\hat{C}_y^\pm$, которые будут иметь вид

$$\hat{C}_x^\pm = \left(\frac{m\omega_x}{2\hbar}\right)^{1/2}\sum_{j=1}^{N}\left(x_j \mp i\frac{\hat{p}_{xj}}{m\omega_x}\right),$$

$$\hat{C}_y^\pm = \left(\frac{m\omega_y}{2\hbar}\right)^{1/2}\sum_{j=1}^{N}\left(y_j \mp i\frac{\hat{p}_{yj}}{m\omega_y}\right),$$

а также удовлетворять следующим коммутационным соотношениям:

$$[U, \hat{C}_x^{\pm}] = 0, \quad [U, \hat{C}_y^{\pm}] = 0, \tag{6}$$

$$[\hat{H}_0, \hat{C}_x^{\pm}] = \pm\hbar\omega_x \hat{C}_x^{\pm}, \quad [\hat{H}_0, \hat{C}_y^{\pm}] = \pm\hbar\omega_y \hat{C}_y^{\pm}. \tag{7}$$

С помощью соотношений (6) и (7) можно показать, что если Ψ_{n_x,n_y} — собственная функция оператора $\hat{H}$, которой соответствует энергия $E(n_x, n_y)$, то функция $\hat{C}_x^{+}\Psi_{n_x,n_y}$ также будет собственной функцией $\hat{H}$, но теперь уже с энергией

$$E(n_x, n_y) + \hbar\omega_x.$$

Аналогичным образом для функций $\hat{C}_x^{-}\Psi_{0n_x,n_y}$, $\hat{C}_y^{+}\Psi_{0n_x,n_y}$, $\hat{C}_y^{-}\Psi_{0n_x,n_y}$ можно записать:

$$\begin{cases} C_x^{-}\Psi_{n_x,n_y} \to E(n_x, n_y) - \hbar\omega_x, \\ C_y^{+}\Psi_{n_x,n_y} \to E(n_x, n_y) + \hbar\omega_y, \\ C_y^{-}\Psi_{n_x,n_y} \to E(n_x, n_y) - \hbar\omega_y. \end{cases}$$

Если теперь на систему наложено длинноволновое электромагнитное поле, электрическая составляющая которого имеет вид

$$\mathbf{E}(t) = \mathrm{e}^{-i\omega t}\,\mathbf{E}_0(\cos\,\theta, \sin\,\theta),$$

то соответствующий оператор возмущения $\hat{H}_1$, действующий на заряд e, можно представить в следующей форме:

$$\hat{H}_1 = -e\sum_{j=1}^{N} \mathbf{r}_j \mathbf{E}(t).$$

Это хорошо известный оператор дипольных переходов. Заметим, что с помощью операторов $\hat{C}_x^{\pm}$ и $\hat{C}_y^{\pm}$ можно записать:

$$\sum_{j=1}^{N} x_j = \left(\frac{\hbar}{m\omega_x}\right)^{1/2} (\hat{C}_x^{+} + \hat{C}_x^{-}),$$

$$\sum_{j=1}^{N} y_j = \left(\frac{\hbar}{m\omega_y}\right)^{1/2} (\hat{C}_y^{+} + \hat{C}_y^{-}).$$

Таким образом, для параболических квантовых ям в силу факторизуемости невозмущенного гамильтониана $\hat{H}_0$, обладающего динамической симметрией, удается построить ступенчатые операторы, удовлетворяющие вышеуказанным критериям: они удовлетворяют коммутационным соотношениям (1), (2), и через эти операторы можно выразить оператор возмущения системы, взаимодействующей с электромагнитным полем.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Теорема Кона изначально была сформулирована для электронного газа, находящегося во внешнем магнитном поле. Именно это поле являлось причиной локализации электронного газа. В дальнейшем благодаря наличию размерного квантования в квантовых наноструктурах стало возможным создание условий для локализации электронного газа, равносильных тем, которые имеют место в присутствии магнитного поля (обобщенная теорема Кона), и поэтому в низкоразмерных квантованных системах эта теорема может реализовываться уже в отсутствие магнитного поля.

Благодарности. Автор благодарен Эдуарду Казаряну, Левону Мардояну и Армену Нерсесяну за полезные обсуждения.

Представленная работа выполнена в рамках Национальной программы Армении «Полупроводниковая наноэлектроника».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Brey L., Johnson N., Halperin B.* Optical and Magneto-Optical Absorption in Parabolic Quantum Wells // Phys. Rev. B. 1989. V. 40. P. 10647–10649.

2. *Villamil P., Cabra C., Porras-Montenegro N.* Shallow Impurity States and Transition Energies in Cylindrical Quantum Well Wires under Applied Magnetic Fields // J. Phys. Condensed Matter. 2005. V. 17. P. 5049–5058.

3. *Zaluzny M., Nalewajko C.* Intersubband Absorption Saturation in Multiple-Quantum-Well Structures: The Sheet Model Approach // Phys. Rev. B. 2003. V. 68. P. 233305.

4. *Sarkisyan H. A.* Direct Optical Absorption in Cylindrical Quantum Dot // Mod. Phys. Lett. B. 2004. V. 18. P. 443–452.

5. *Kohn W.* Cyclotron Resonance and Haas–van Alphen Oscillations of an Interacting Electron Gas // Phys. Rev. 1961. V. 123. P. 1242–1244.

6. *Maksym P., Chakraborty T.* Quantum Dot in Magnetic Field: Role of Electron–Electron Interactions // Phys. Rev. Lett. 1990. V. 65. P. 108–111.

7. *Peeters F. M.* Magneto-Optics in Parabolic Quantum Dots // Phys. Rev. B. 1990. V. 42. P. 1486–1487.

Получено 6 марта 2006 г.