

ФУНКЦИИ J_A В РЕДУКЦИИ ПАССАРИНО–ВЕЛЬТМАНА

Д. Ю. Бардин, Л. В. Калиновская, Л. А. Румянцев

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Рассмотрен специальный класс функций Пассарино–Вельтмана, возникающий при редукции боксовых диаграмм с инфракрасными расходимостями и массовыми сингулярностями. Предложена систематическая процедура отделения обоих типов сингулярностей в C_0 -функции. Новые функции J_A являются определенными линейными комбинациями стандартных D_0 - и C_0 -функций, свободными от каких-либо сингулярностей, и имеют компактный вид в терминах логарифмов и дилогарифмов. Проводится численное сравнение результатов с расчетами, использующими пакет программ LoopTools.

In this paper we consider a special class of Passarino–Veltman functions, which appears during the reduction of the box-type diagrams with the infrared divergences and mass singularities. The systematic procedure was proposed for separation of both types of singularities to the simplest objects, C_0 functions. These new functions are the certain linear combinations of the standard D_0 and C_0 functions, which are free from all types of singularities, and they have a compact expression in terms of logarithms and dilogarithms. Numerical comparison of our results with the calculations using well-known package LoopTools was also done.

PACS: 12.15.Lk, 12.20.Ds, 02.30.Gp, 11.10.Jj, 12.15.Mm

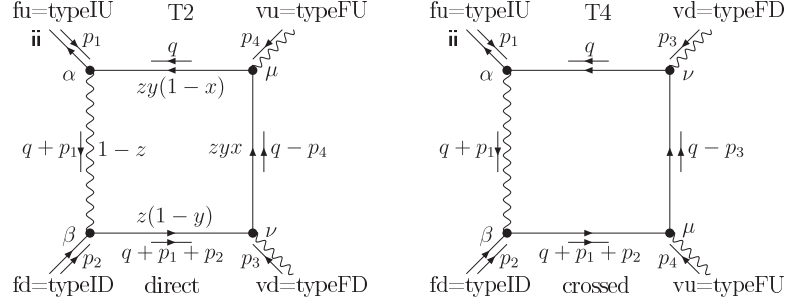
ВВЕДЕНИЕ

Стандартная редукция Пассарино–Вельтмана [1] 4-точечных диаграмм типа box с внутренней фотонной линией, соединяющей две внешние линии на массовой поверхности, приводит к инфракрасно-расходящимся и массово-сингулярным D_0 -функциям (см., например, [2]). Типичный пример таких диаграмм, появляющихся при вычислении однопетлевых электрослабых поправок к процессу $f\bar{f} \rightarrow ZZ$, приведен на рисунке (типа рис. 14 в [3]).

В данной работе впервые предложена систематическая процедура отделения обоих типов сингулярностей в простейшие объекты — C_0 -функции.

Процедура естественно разбивается на три этапа: отделение инфракрасных расходимостей, вычисление вспомогательной («вычтенной») J_A -функции и отделение массовых сингулярностей, если это требуется поставленной задачей (см., например, [4, 5]).

Формально получение выражения, свободного от инфракрасных расходимостей и массовых сингулярностей, сводится к добавлению к такой D_0 -функции одной инфракрасно-расходящейся и нескольких массово-сингулярных C_0 -функций. Такая сумма называется «вычтенной» $J_{A,\text{sub}}$ -функцией.



Боксы для ffbb-процессов, топологии T2 и T4

На первом этапе вводится вспомогательная инфракрасно-конечная функция. Поскольку в конечном состоянии рассматриваемого процесса находится пара Z -бозонов, то в дальнейшем мы будем называть эту сумму J_A^{ZZ} -функцией. Без ограничения общности будем рассматривать только J_A^{ZZ} -функцию прямой (direct) диаграммы, которая определяется выражением

$$i\pi^2 J_A^{ZZ}(Q^2, T^2; m_e, M_Z) = \mu^{4-n} \int d^n q \frac{2(q+p_1)p_4}{d_1 d_2 d_3 d_4}, \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} Q^2 &= (p_1 + p_2)^2, & T^2 &= (p_2 + p_3)^2, \\ d_1 &= (q + p_1)^2 - i\epsilon, & d_2 &= (q + p_1 + p_2)^2 + m_e^2 - i\epsilon, \\ d_3 &= (q + p_1 + p_2 + p_3)^2 + m_e^2 - i\epsilon, & d_4 &= q^2 + m_e^2 - i\epsilon. \end{aligned} \quad (2)$$

Применяя стандартную редукцию Пассарино–Вельтмана, можно показать, что имеет место точное по массам соотношение

$$\begin{aligned} J_A^{ZZ}(Q^2, T^2; m_e, M_Z) &= (T^2 + m_e^2) D_0(-m_e^2, -m_e^2, -M_Z^2, -M_Z^2, Q^2, T^2; m_e, 0, m_e, m_e) + \\ &+ C_0(-m_e^2, -M_Z^2, T^2, 0, m_e, m_e) - C_0(-m_e^2, -m_e^2, Q^2, m_e, 0, m_e), \end{aligned} \quad (3)$$

из которого и исключается инфракрасно-расходящаяся D_0 -функция через простейшую инфракрасно-расходящуюся $C_0(-m_e^2, -m_e^2, Q^2, m_e, 0, m_e)$ и две инфракрасно-конечных, но массово-сингулярных функции $J_A^{ZZ}(Q^2, T^2; m_e, M_Z)$ и $C_0(-m_e^2, -M_Z^2, T^2, 0, m_e, m_e)$.

На втором этапе функция $J_A^{ZZ}(Q^2, T^2; m_e, M_Z)$ вычисляется точно по массам в терминах дилогарифмов.

На третьем этапе находится ее предел при массе $m_e \rightarrow 0$. Таким образом, массовая сингулярность проявляется в явном виде под аргументом логарифмической функции, после чего ее легко скомпенсировать с помощью комбинации с еще одной C_0 -функцией, которая находится из физического свойства отсутствия массовых сингулярностей в полной электрослабой части однопетлевой поправки (т. е. после отделения ее калибровочно-инвариантной КЭД-части).

В нашем случае $J_{A,\text{sub}}^{ZZ}$ определяется выражением

$$J_{A,\text{sub}}^{ZZ}(Q^2, T^2; M_Z) = J_A^{ZZ}(Q^2, T^2; m_e, M_Z) - \left(2\frac{M_Z^2 + T^2}{Q^2} + 1\right) C_0(-m_e^2, -M_Z^2, T^2; 0, m_e, m_e). \quad (4)$$

Вычисления завершаются приведением подобных членов и наблюдением факта явного сокращения вкладов, содержащих $\ln(m_e^2)$.

В разд. 1 приводится вычисление функции J_A^{ZZ} без пренебрежения массой m_e , находится ее предел при $m_e \rightarrow 0$ и завершается построение $J_{A,\text{sub}}^{ZZ}$. В разд. 2 без вывода приводятся результаты для аналогичных функций J_A^{ZA} , $J_{A,\text{sub}}^{ZA}$ и J_A^{AA} , $J_{A,\text{sub}}^{AA}$.

1. ВЫЧИСЛЕНИЕ J_A^{ZZ} -ФУНКЦИИ

1.1. Запись в виде тройного интеграла. В определении (1) сделаем сдвиг $q \rightarrow q' = q + p_1$, тогда мы получим

$$i\pi^2 J_A^{ZZ}(Q^2, T^2; m_e, M_Z) = \mu^{4-n} \int d^n q' \frac{2q' p_4}{d_1 d_2 d_3 d_4}, \quad (5)$$

и, соответственно,

$$\begin{aligned} d_1 &= q'^2 - i\epsilon, & d_2 &= (q' + p_2)^2 + m_e^2 - i\epsilon, \\ d_3 &= (q' + p_2 + p_3)^2 + m_e^2 - i\epsilon, & d_4 &= (q' - p_1)^2 + m_e^2 - i\epsilon. \end{aligned} \quad (6)$$

С помощью стандартной параметризации Фейнмана при введении переменных x, y, z , как показано на рисунке, можно перейти к $(3+n)$ -кратному интегралу (по x, y, z, q'), причем во внутреннем интеграле по q' будет идти интегрирование дроби со знаменателем следующего вида:

$$D = [d_1(1-z) + d_2z(1-y) + d_3zyx + d_4zy(1-x)]^4. \quad (7)$$

Приведем выражение для D к виду

$$D = q'^2 - 2zq'k_{xy} + Lz - i\epsilon. \quad (8)$$

Величина L и вектор k_{xy} таковы¹:

$$\begin{aligned} L &= (T^2 + m_e^2)xy, \\ k_{xy} &= -p_2 + (p_1 + p_2)y - (p_1 + p_2 + p_3)xy. \end{aligned} \quad (9)$$

¹Здесь вместо T^2 будет стоять U^2 в crossed-функции J_A^{ZZ} .

Так как $-i\epsilon$ — бесконечно малая добавка, то можно заменить ее на $-i\epsilon z$ и переопределить L и D :

$$\begin{aligned} L &= (T^2 + m_e^2)xy - i\epsilon, \\ D &= q'^2 - 2zq'k_{xy} + Lz. \end{aligned} \quad (10)$$

Далее воспользуемся известной формулой интегрирования в n -мерном пространстве:

$$\int d^n q \frac{q_\mu}{(q^2 - 2qp + m^2)^\alpha} = i\pi^{n/2} \frac{\Gamma(\alpha - n/2)}{\Gamma(\alpha)} (m^2 - p^2)^{n/2 - \alpha} p_\mu. \quad (11)$$

В нашем случае $m^2 = Lz$, $p = zk_{xy}$, $\alpha = n = 4$. Поэтому

$$\int d^4 q' \frac{q'_\mu (p_4)_\mu}{(q'^2 - 2zq'k_{xy} + Lz)^4} = i\pi^2 \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(4)} (Lz - z^2 k_{xy}^2)^{-2} z (k_{xy})_\mu (p_4)_\mu. \quad (12)$$

Подставляя этот результат в определение J_A^{ZZ} , мы получаем его представление в виде тройного интеграла:

$$J_A^{ZZ} = \int_0^1 dx \int_0^1 y dy N_{xy} \int_0^1 dz \frac{z}{(L - zk_{xy}^2)^2}, \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} N_{xy} &= 2k_{xy}p_4 = -2M_z^2 xy + N_y, \\ N_y &= Q^2(1 - y) + M_z^2 + T^2 + m_e^2, \end{aligned} \quad (14)$$

и

$$\begin{aligned} k_{xy}^2 &= (k_{xy})^2 = -M_z^2 x^2 y^2 + N_y xy - Q_y^2, \\ Q_y^2 &= Q^2 y(1 - y) + m_e^2. \end{aligned} \quad (15)$$

1.2. Интегрирование по z . Интегрирование по z , где подынтегральное выражение имеет вид:

$$I_3(x, y, z) = \frac{z}{(L - zk_{xy}^2)^2}, \quad (16)$$

проводится просто

$$\begin{aligned} \int_0^1 dz I_3(x, y, z) &= \frac{N_{xy}}{(-k_{xy}^2)} \int_0^1 dz \left[\frac{1}{(L - zk_{xy}^2)} - \frac{L}{(L - zk_{xy}^2)^2} \right] = \\ &= \frac{N_{xy}}{(k_{xy}^2)^2} \left[\ln(L - k_{xy}^2) - \ln L + \frac{k_{xy}^2}{L - k_{xy}^2} \right]. \end{aligned} \quad (17)$$

1.3. Интегрирование по x . Подынтегральное выражение для двукратного интегрирования по x, y (17) обладает важным свойством — отсутствием сингулярности при $k_{xy}^2 \rightarrow 0$, т. е. оно непрерывно во всей области изменения переменных x, y .

Сделаем замену переменных

$$xy = x', \quad y dx = dx', \quad (18)$$

и интегрирование по переменным x, y переходит в интегрирование по y, x' в пределах $0 \leq y \leq 1, 0 \leq x' \leq y$.

Далее сделаем переобозначение $x' \rightarrow x$. При этом для выражений N_{xy}, k_{xy}^2 и L получаем следующие результаты:

$$\begin{aligned} N_{xy} &= -2M_z^2 x + N_y, \\ k_{xy}^2 &= -M_z^2 x^2 + N_y x - Q_y^2, \\ L &= Px - i\epsilon, \end{aligned} \quad (19)$$

где

$$P = T^2 + m_e^2. \quad (20)$$

Мы получили тождество, на котором основано вычисление любой функции J_A^{XX} :

$$N_{xy} = \frac{d}{dx} k_{xy}^2. \quad (21)$$

Как следствие имеем

$$N_{xy} dx = dk_{xy}^2, \quad (22)$$

что дает возможность провести интегрирование по частям:

$$I_1(y) = \int_0^y dUV = UV \Big|_{\delta}^y - \int_{\delta}^y dVU, \quad (23)$$

где мы ввели инфинитезимальный параметр δ , поскольку оба члена выражения (23) по отдельности расходятся.

Пусть

$$L^* = L - k_{xy}^2, \quad (24)$$

тогда

$$L^* = M_z^2 x^2 + (P - N_y)x + Q_s^2 - i\epsilon. \quad (25)$$

Разложим квадратный трехчлен (25) на простые сомножители:

$$L^* = Ax^2 + Bx + C = A(x - x_1)(x - x_2), \quad (26)$$

$$x_{1,2} = \frac{-B \pm \sqrt{D}}{2A}, \quad D = B^2 - 4AC.$$

Коэффициенты A, B и C имеют следующий вид:

$$A = M_z^2, \quad B = Q^2 y - Q^2 - M_z^2, \quad C = Q_y^2 - i\epsilon. \quad (27)$$

Введем обозначения $L^*|_y = L^*(x = y, y)$ и $k_{xy}^2|_y = k_{xy}^2(x = y, y)$.

После сложных и громоздких выкладок находим представление J_A^{ZZ} в виде однократного интеграла по y , где инфинитезимальный параметр δ сокращается.

1.4. Интегрирование по y

$$J_A^{ZZ} = \int_0^1 dy I_1(y), \quad (28)$$

где

$$I_1(y) = -\frac{1}{k_{xy|y}^2} \left(\ln L^*|_y - \ln(Py) \right) - \frac{1}{2C} \left\{ \ln C + \ln L^*|_y - 2 \ln(Py) + \right. \\ \left. + \frac{B}{\sqrt{D}} \left[\ln \left(\frac{x_1 x_2 - y x_2}{x_1 x_2} \right) - \ln \left(\frac{x_1 x_2 - y x_1}{x_1 x_2} \right) \right] \right\}. \quad (29)$$

Предпримем несколько вспомогательных шагов:

- Разложим на множители рациональную дробь $1/C$:

$$C = -Q^2(y - y_{Q_1})(y - y_{Q_2}), \\ \frac{1}{C} = -\frac{1}{\sqrt{D_Q}} \left(\frac{1}{y - y_{Q_1}} - \frac{1}{y - y_{Q_2}} \right), \quad (30) \\ y_{Q_{1,2}} = \frac{Q^2 \pm \sqrt{D_Q}}{2Q^2}, \quad D_Q = Q^2[Q^2 + 4(m_e^2 - i\epsilon)].$$

Теперь с учетом разложения (30) можно написать аналитическое представление для величины $I_1(y)$:

$$I_1(y) = -\frac{1}{k_{xy|y}^2} \left(\ln L^*|_y - \ln L|_y \right) + \frac{1}{2\sqrt{D_Q}} \left(\frac{1}{y - y_{Q_1}} - \frac{1}{y - y_{Q_2}} \right) I_p(y), \quad (31)$$

где

$$I_p(y) = \ln C + \ln L^*|_y - 2 \ln(Py) + \\ + \frac{B}{\sqrt{D}} \left[\ln \left(\frac{2C + y(B + \sqrt{D})}{C} \right) - \ln \left(\frac{2C + y(B - \sqrt{D})}{C} \right) \right]. \quad (32)$$

- Аналогично раскладываем на множители $k_{xy|y}^2$ и $L^*|_y$, чтобы логарифмы от этих выражений расщепились на более простые:

$$k_{xy|y}^2 = M_Z^2 y(1-y) + T^2 y - m_e^2(1-y) = -M_Z^2(y - y_{k_1})(y - y_{k_2}), \\ y_{k_{1,2}} = \frac{T^2 + m_e^2 + M_Z^2 \mp \sqrt{D_k}}{2M_Z^2}, \quad D_k = (T^2 + m_e^2 + M_Z^2)^2 - 4m_e^2 M_Z^2, \quad (33)$$

$$\frac{1}{k_{xy|y}^2} = \frac{1}{\sqrt{D_k}} \left(\frac{1}{y - y_{k_1}} - \frac{1}{y - y_{k_2}} \right),$$

и

$$L^*|_y = -M_Z^2 y(1-y) + m_e^2 - i\epsilon = (m_e^2 - i\epsilon) \left(1 - \frac{y}{y_{L_1}} \right) \left(1 - \frac{y}{y_{L_2}} \right), \quad (34)$$

$$y_{L_{1,2}} = \frac{M_Z^2 \pm \sqrt{D_L}}{2M_Z^2}, \quad D_L = M_Z^4 - 4M_Z^2(m_e^2 - i\epsilon).$$

C под логарифмом тоже раскладываем на множители аналогично (30). В итоге первое слагаемое подынтегрального выражения (31) вместе с первой строкой (32) можно записать как сумму функций, которые после интегрирования по y выражаются через логарифмы и дилогарифмы.

- Замена переменных в однократном интеграле.

Часть выражения (31) с $I_p(y)$, определенной второй строкой (32), при интегрировании по y требует более сложной замены переменных. Разобьем ее на сумму двух вкладов, при этом подставим в префактор B/\sqrt{D} выражение для B из (27):

$$I'(y) = \frac{1}{2\sqrt{D_Q}} \left(\frac{1}{y-y_{Q_1}} - \frac{1}{y-y_{Q_2}} \right) \frac{Q^2(y-1) - M_Z^2}{\sqrt{D}} \times \\ \times \left[\ln \left(\frac{2C + y(B + \sqrt{D})}{C} \right) - \ln \left(\frac{2C + y(B - \sqrt{D})}{C} \right) \right] = \frac{1}{2\sqrt{D_Q}} [I'_1(y) + I'_2(y)]. \quad (35)$$

После сокращения общей части у $I'_1(y_1)$ и $I'_2(y_2)$ имеем

$$I'_1(y) = -\frac{Q^2 y_{Q_2} + M_Z^2}{(y-y_{Q_1})\sqrt{D}} \left[\ln \left(\frac{2C + y(B + \sqrt{D})}{C} \right) - \ln \left(\frac{2C + y(B - \sqrt{D})}{C} \right) \right], \quad (36)$$

и

$$I'_2(y) = +\frac{Q^2 y_{Q_1} + M_Z^2}{(y-y_{Q_2})\sqrt{D}} \left[\ln \left(\frac{2C + y(B + \sqrt{D})}{C} \right) - \ln \left(\frac{2C + y(B - \sqrt{D})}{C} \right) \right]. \quad (37)$$

Напомним, что в эти выражения входят y_{Q_1}, y_{Q_2} — корни квадратичного полинома C , (30).

- Переход к переменным $y_1 = y - y_{Q_1}$ и $y_2 = y - y_{Q_2}$.

Перейдем в первой части однократного интеграла (36) к переменной $y_1 = y - y_{Q_1}$, а во второй части, (37), — к переменной $y_2 = y - y_{Q_2}$. Используем свойства

$$C = -y_1(Q^2 y_1 + \sqrt{D_Q}) = -y_2(Q^2 y_2 - \sqrt{D_Q}). \quad (38)$$

Получаем естественное разбиение на два класса интегралов: полином D в первой части выражения после сдвига $y \rightarrow y_1$ переходит в полином D_1 , а во второй части выражения после сдвига $y \rightarrow y_2$ — в полином D_2 . В последующих выражениях также подставлена величина B из (27):

$$I'_1(y_1) = +\frac{Q^2 y_{Q_2} + M_Z^2}{y_1 \sqrt{D_1}} \times \\ \times \left[-\ln \left(\frac{y_1(Q^2 y_1 + \sqrt{D_Q}) - (m_e^2 - i\epsilon) + (y_1 + y_{Q_1})(M_Z^2 - \sqrt{D_1})}{y_1(Q^2 y_1 + \sqrt{D_Q})} \right) + \right. \\ \left. + \ln \left(\frac{y_1(Q^2 y_1 + \sqrt{D_Q}) - (m_e^2 - i\epsilon) + (y_1 + y_{Q_1})(M_Z^2 + \sqrt{D_1})}{y_1(Q^2 y_1 + \sqrt{D_Q})} \right) \right] = \\ = \frac{-Q^2 y_{Q_2} - M_Z^2}{y_1 \sqrt{D_1}} \left[+ \ln \frac{n_1^-}{d_1} - \ln \frac{n_1^+}{d_1} \right], \quad (39)$$

$$\begin{aligned}
 I_2'(y_2) &= -\frac{Q^2 y_{Q_1} + M_Z^2}{y_2 \sqrt{D_2}} \times \\
 &\times \left[-\ln \left(\frac{y_2(Q^2 y_2 - \sqrt{D_Q}) - (m_e^2 - i\epsilon) + (y_2 + y_{Q_2})(M_Z^2 - \sqrt{D_2})}{y_2(Q^2 y_2 - \sqrt{D_Q})} \right) + \right. \\
 &\left. + \ln \left(\frac{y_2(Q^2 y_2 - \sqrt{D_Q}) - (m_e^2 - i\epsilon) + (y_2 + y_{Q_2})(M_Z^2 + \sqrt{D_2})}{y_2(Q^2 y_2 - \sqrt{D_Q})} \right) \right] = \\
 &= \frac{Q^2 y_{Q_1} + M_Z^2}{y_2 \sqrt{D_2}} \left[+ \ln \frac{n_2^-}{d_2} - \ln \frac{n_2^+}{d_2} \right]. \quad (40)
 \end{aligned}$$

• Переход от переменных $y_{1,2}$ к переменным $t_{1,2}$.

Для перехода к переменным t_i делаем фундаментальную замену:

$$\sqrt{D_i} = \sqrt{A_i y_i^2 - 2B_i y_i + C_i^2} = C_i + y_i t_i, \quad (41)$$

выбирая $C_i = +\sqrt{C_i^2}$, т. е. $C_i > 0$.

Здесь и далее:

$$\begin{aligned}
 A_{1,2} &= Q^4 + 4Q^2 M_Z^2, \\
 B_1 &= A y_{Q_2} - Q^2 M_Z^2, \quad B_2 = A y_{Q_1} - Q^2 M_Z^2, \\
 C_1 &= -Q^2 y_{Q_2} - M_Z^2, \quad C_2 = +Q^2 y_{Q_1} + M_Z^2.
 \end{aligned} \quad (42)$$

Тогда, как следствие, получаем:

$$y_i = 2 \frac{B_i + C_i t_i}{A_i - t_i^2}, \quad \sqrt{D_i} = \frac{N_i}{A - t_i^2}, \quad (43)$$

где введено обозначение

$$A_i C_i + 2B_i t_i + C_i t_i^2 = N_i. \quad (44)$$

Пределы изменения переменной t_i определяются из обратного условия

$$t_i = \frac{\sqrt{D_1} - C_i}{y_i}, \quad (45)$$

а якобиан перехода равен

$$\frac{dy_i}{dt_i} = 2 \frac{N_i}{(A - t_i)^2}. \quad (46)$$

Числители и знаменатели логарифмов n_i^- в выражениях (39), (40) принимают следующий вид:

$$\begin{aligned}
 n_1^- &= y_1(Q^2 y_1 + \sqrt{D_Q}) - (m_e^2 - i\epsilon) + (y_1 + y_{Q_1})(M_Z^2 - \sqrt{D_2}) = \\
 &= \frac{4y_{Q_2}(Q^2 + M_Z^2)(\sqrt{D_Q} t_1 + Q^2(Q^2 + 2M_Z^2))(t_1 - t_2^{-,1})(t_1 - t_2^{-,2})}{(A_1 - t_1^2)^2},
 \end{aligned}$$

$$n_1^+ = y_1(Q^2 y_1 + \sqrt{D_Q}) - (m_e^2 - i\epsilon) + (y_1 + y_{Q_1})(M_Z^2 + \sqrt{D_2}) =$$

$$= -\frac{2y_{Q_1}(t_1 - Q^2)(B_1 + C_1 t_1)(t_1 - t_1^{+,1})(t_1 - t_1^{+,2})}{(A_1 - t_1^2)^2}, \quad (47)$$

$$d_1 = y_1(Q^2 y_1 + \sqrt{D_Q}) = -\frac{2(t_1 - Q^2)(B_1 + C_1 t_1)(\sqrt{D_Q} t_1 + Q^2(Q^2 + 2M_Z^2))}{(A_1 - t_1^2)^2},$$

$$n_2^- = y_2(Q^2 y_2 - \sqrt{D_Q}) - (m_e^2 - i\epsilon) + (y_2 + y_{Q_2})(M_Z^2 - \sqrt{D_2}) =$$

$$= \frac{2y_{Q_2}(t_2 + Q^2)(B_2 + C_2 t_2)(t_2 - t_2^{-,1})(t_2 - t_2^{-,2})}{(A_2 - t_2^2)^2},$$

$$n_2^+ = y_2(Q^2 y_2 - \sqrt{D_Q}) - (m_e^2 - i\epsilon) + (y_2 + y_{Q_2})(M_Z^2 + \sqrt{D_2}) =$$

$$= \frac{4y_{Q_1}(Q^2 + M_Z^2)(\sqrt{D_Q} t_2 + Q^2(Q^2 + 2M_Z^2))(t_2 - t_2^{+,1})(t_2 - t_2^{+,2})}{(A_2 - t_2^2)^2}, \quad (48)$$

$$d_2 = y_2(Q^2 y_2 - \sqrt{D_Q}) = \frac{2(t_2 + Q^2)(B_2 + C_2 t_2)(\sqrt{D_Q} t_2 + Q^2(Q^2 + 2M_Z^2))}{(A_2 - t_2^2)^2}.$$

Здесь введены обозначения для корней соответствующих квадратных членов в переменных $t_{1,2}$:

$$t_1^{+,1,2} = \frac{-Q^2 y_{Q_1} - M_Z^2 \pm M_Z^2 \sqrt{D_e}}{y_{Q_1}},$$

$$t_1^{-,1,2} = \frac{Q^2(Q^2 + 3M_Z^2)y_{Q_2} + M_Z^4 \pm M_Z^4 \sqrt{D_e}}{y_{Q_2}(Q^2 + M_Z^2)},$$

$$t_2^{+,1,2} = \frac{-Q^2(Q^2 + 3M_Z^2)y_{Q_1} - M_Z^4 \pm M_Z^4 \sqrt{D_e}}{y_{Q_1}(Q^2 + M_Z^2)},$$

$$t_2^{-,1,2} = \frac{Q^2 y_{Q_2} + M_Z^2 \pm M_Z^2 \sqrt{D_e}}{y_{Q_2}},$$
(49)

где

$$D_e = 1 - \frac{4m_e^2}{M_Z^2}. \quad (50)$$

В исходном выражении как фактор имеем $dy_i/y_i\sqrt{D_i}$. Если учесть (43)–(46), то этот фактор переходит в $dt_i/(B_i + C_i t_i)$. Величины I_1' и I_2' принимают вид

$$I_1'(t_1) = \frac{C_1}{B_1 + C_1 t_1} \left\{ + \ln \left[\frac{2y_{Q_2}(Q^2 + M_Z^2)(t_1 - t_1^{-,1})(t_1 - t_1^{-,2})}{(C_1 t_1 + B_2)(Q^2 - t_1)} \right] - \right.$$

$$\left. - \ln \left[\frac{y_{Q_1}(t_1 - t_1^{+,1})(t_1 - t_1^{+,2})}{\sqrt{D_Q} t_1 + Q^2(Q^2 + 2M_Z^2)} \right] \right\}, \quad (51)$$

$$I'_2(t_2) = \frac{C_2}{B_2 + C_2 t_2} \left\{ + \ln \left[\frac{y_{Q_2}(t_2 - t_2^{-,1})(t_2 - t_2^{-,2})}{\sqrt{D_Q} t_2 + Q^2(Q^2 + 2M_Z^2)} \right] - \right. \\ \left. - \ln \left[\frac{2y_{Q_1}(Q^2 + M_Z^2)(t_2 - t_2^{+,1})(t_2 - t_2^{+,2})}{(C_2 t_2 + B_2)(t_2 + Q^2)} \right] \right\}. \quad (52)$$

• Переход от t_i к y .

Для дальнейшего интегрирования необходима новая замена, убираем t_i по формуле

$$t_i = \Delta_{t_i} y + t_{i,\min}, \quad (53)$$

или

$$B_i + C_i t_i = C_i (t_{i,\max} - t_{i,\min}) y + B_i + C_i t_{i,\min}, \quad (54)$$

при

$$t_{1,\max} = \frac{M_Z^2 \sqrt{D_e} - C_1}{1 - y_{Q_1}}, \\ t_{1,\min} = - \frac{\sqrt{(Q^2 + M_Z^2)^2 - 4(m_e^2 - i\epsilon)M_Z^2} - C_1}{y_{Q_1}}, \quad (55)$$

$$d_{t_1} = t_{1,\max} - t_{1,\min}.$$

Тогда получаем

$$\frac{dt_i}{B_i + C_i t_i} = \frac{dy}{C_i (y - y_{d_i})}, \quad (56)$$

где

$$y_{d_i} = - \frac{B_i + C_i t_{i,\min}}{C_i \Delta_{t_i}}, \quad \Delta_{t_i} = t_{i,\max} - t_{i,\min}. \quad (57)$$

В результате применения замены $t_i \rightarrow y$ в (53) переходим к выражению

$$I'_1(y) = \frac{1}{y - y_{d_1}} \left\{ + \ln \left[\frac{2y_{Q_2}(Q^2 + M_Z^2)(\Delta_{t_1} y + t_{1,\min} - t_1^{-,1})(\Delta_{t_1} y + t_{1,\min} - t_1^{-,2})}{(C_1 \Delta_{t_1} y + t_{1,\min} + B_2)(Q^2 - (\Delta_{t_1} y + t_{1,\min}))} \right] - \right. \\ \left. - \ln \left[\frac{y_{Q_1}(\Delta_{t_1} y + t_{1,\min} - t_1^{+,1})(\Delta_{t_1} y + t_{1,\min} - t_2^{+,2})}{\sqrt{D_Q} \Delta_{t_1} y + t_{1,\min} + Q^2(Q^2 + 2M_Z^2)} \right] \right\}, \quad (58)$$

$$= \frac{1}{y - y_{d_1}} \left\{ -l(y_{d_1}) + \sum_{y_l=y_{l_{11}}}^{y_{l_{13}}} l(y_l) - \sum_{y_l=y_{l_{14}}}^{y_{l_{16}}} l(y_l) \right\}, \quad (59)$$

где

$$\begin{aligned}
y_{l_{11}} &= \frac{t_1^{-,1} - t_{1,\min}}{\Delta_{t_1}}, & y_{l_{12}} &= \frac{t_1^{-,2} - t_{1,\min}}{\Delta_{t_1}}, \\
y_{l_{13}} &= -\frac{\sqrt{D_Q} t_{1,\min} + Q^2(Q^2 + 2M_Z^2)}{\sqrt{D_Q} \Delta_{t_1}}, & y_{l_{14}} &= \frac{t_1^{+,1} - t_{1,\min}}{\Delta_{t_1}}, \\
y_{l_{15}} &= \frac{t_1^{+,2} - t_{1,\min}}{\Delta_{t_1}}, & y_{l_{16}} &= \frac{Q^2 - t_{1,\min}}{\Delta_{t_1}},
\end{aligned} \tag{60}$$

$$l(y_l) = \ln \left(1 - \frac{1}{y_l} \right).$$

Отметим нетривиальный переход от (58) к (59) — расщепление логарифмов без появления η -функции Вельтмана и тождественное обнуление постоянной части логарифмов,

$$\begin{aligned}
&\ln \left(\frac{2y_{Q_2}(Q^2 + M_Z^2)(t_{1,\min} - t_1^{-,1})(t_{1,\min} - t_1^{-,2})}{(Q^2 - t_{1,\min})(B_1 + C_1 t_{1,\min})} \right) - \\
&\quad - \ln \left(\frac{y_{Q_1}(t_{1,\min} - t_1^{+,1})(t_{1,\min} - t_1^{+,2})}{D_Q t_{1,\min} + Q^2(Q^2 + 2M_Z^2)} \right) = 0. \tag{61}
\end{aligned}$$

Эти свойства не были доказаны аналитически, а только подтверждены численно на компьютере в случае рассматриваемой кинематики аннигиляционного процесса.

Аналогично преобразуем $I'_2(y)$:

$$\begin{aligned}
I'_2(y) &= \frac{1}{y - y_{d_2}} \left\{ + \ln \left[\frac{y_{Q_2}(\Delta_{t_2} y + t_{2,\min} - t_2^{-,1})(\Delta_{t_2} y + t_{2,\min} - t_2^{-,2})}{\sqrt{D_Q} \Delta_{t_2} y + t_{2,\min} + Q^2(Q^2 + 2M_Z^2)} \right] - \right. \\
&\quad \left. - \ln \left[\frac{2y_{Q_1}(Q^2 + M_Z^2)(\Delta_{t_2} y + t_{2,\min} - t_2^{+,1})(\Delta_{t_2} y + t_{2,\min} - t_2^{+,2})}{(C_2 \Delta_{t_2} y + t_{2,\min} + B_2)(\Delta_{t_2} y + t_{2,\min} + Q^2)} \right] \right\} = \\
&= \frac{1}{y - y_{d_2}} \left\{ l(y_{d_2}) - \sum_{y_l=y_{l_{21}}}^{y_{l_{23}}} l(y_l) + \sum_{y_l=y_{l_{24}}}^{y_{l_{26}}} l(y_l) \right\}, \tag{62}
\end{aligned}$$

где набор переменных $y_{l_2} \dots$ получается заменой индекса 1 на 2 за исключением

$$y_{l_{26}} = \frac{-Q^2 - t_{2,\min}}{\Delta_{t_2}}, \tag{63}$$

где происходит определенная замена знаков. Постоянная часть логарифмов,

$$\begin{aligned}
 & + \ln \left(\frac{y_{Q_2} (t_{2,\min} - t_2^{-,1}) (t_{2,\min} - t_2^{-,2})}{\sqrt{D_Q} t_{2,\min} + Q^2 (Q^2 + 2M_Z^2)} \right) - \\
 & - \ln \left(\frac{2y_{Q_1} (Q^2 + M_Z^2) (t_{2,\min} - t_2^{+,1}) (t_{2,\min} - t_2^{+,2})}{(t_{2,\min} + Q^2) (C_2 t_{2,\min} + B_2)} \right), \quad (64)
 \end{aligned}$$

обнуляется и в этом случае.

Наконец, мы готовы выписать окончательный ответ. Определим «мастер-интеграл»:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}(y_d, y_l) &= \int_0^1 \frac{dy}{(y - y_d)} l(y_l) = \\
 &= \ln \left(1 - \frac{y_d}{y_l} \right) l(y_d) - \text{Li}_2 \left(\frac{1 - y_d}{y_l - y_d} \right) + \text{Li}_2 \left(\frac{-y_d}{y_l - y_d} \right). \quad (65)
 \end{aligned}$$

Результат интегрирования по y примет вид

$$\begin{aligned}
 J_A^{ZZ} &= -\frac{1}{\sqrt{D_k}} \left(+ \left[-\ln \left(\frac{P}{m_e^2} \right) l(y_{k_1}) - \text{Li}_2 \left(\frac{1}{y_{k_1}} \right) + \sum_{y=y_{L1}, y_{L2}} \mathcal{M}(y, y_{k_1}) \right] - [y_{k_1} \rightarrow y_{k_2}] \right) + \\
 &+ \frac{1}{2\sqrt{D_Q}} \left(+ \left[-2 \ln \left(\frac{P}{m_e^2} \right) l(y_{Q_1}) + \frac{1}{2} l^2(y_{Q_1}) - 2 \text{Li}_2 \left(\frac{1}{y_{Q_1}} \right) + \sum_{y=y_{L1}, y_{L2}, y_{Q_2}} \mathcal{M}(y, y_{Q_1}) \right] - \right. \\
 &- [y_{Q_1} \leftrightarrow y_{Q_2}] + \left[-\frac{1}{2} l^2(y_{d_1}) + \sum_{y=y_{l11}}^{y_{l13}} \mathcal{M}(y, y_{d_1}) - \sum_{y=y_{l14}}^{y_{l16}} \mathcal{M}(y, y_{d_1}) \right] - \\
 &\left. - [y_{d_1} \rightarrow y_{d_2}, \quad l_{1j} \rightarrow l_{2j}] \right). \quad (66)
 \end{aligned}$$

1.5. Функция $J_{A,\text{lim}}^{ZZ}$. Выражение (66) значительно упрощается в пределе $m_e \rightarrow 0$. После идеологически простых, хотя и очень громоздких выкладок получается довольно короткий ответ

$$\begin{aligned}
 J_{A,\text{lim}}^{ZZ} &= \left\{ \frac{2}{Q^2} \ln \left(-\frac{Q^2}{m_e^2} \right) + \frac{1}{T^2 + M_Z^2} \ln \left(\frac{T^2 + M_Z^2}{m_e^2} \right) \left[\ln \left(\frac{T^2}{M_Z^2} \right) + i\pi \right] \right\} + \\
 &+ \frac{1}{T^2 + M_Z^2} \left\{ \left[\ln \left(1 + \frac{M_Z^2}{T^2} \right) - \ln \left(\frac{T^2}{M_Z^2} \right) \right] i\pi + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{(T^2 + M_Z^2)^2 M_Z^2}{(T^2)^3} \right) \ln \left(\frac{T^2}{M_Z^2} \right) + \right. \\
 &\left. + \frac{5}{6} \pi^2 - 2 \text{Li}_2 \left(-\frac{M_Z^2}{T^2} \right) \right\} + \frac{2}{Q^2} \left[\pi^2 - \ln \left(\frac{T^2}{M_Z^2} \right) i\pi \right]. \quad (67)
 \end{aligned}$$

1.6. Функция $J_{A,\text{sub}}^{ZZ}$. Вычтенная J_A^{ZZ} -функция, определяемая выражением (4), имеет компактный вид:

$$J_{A,\text{sub}}^{ZZ} = \frac{2}{Q^2} \left\{ \frac{1}{2} \ln^2 \left(\frac{T^2}{M_Z^2} \right) - \ln \left(-\frac{(T^2 + M_Z^2)^2}{Q^2 T^2} \right) \left[\ln \left(\frac{T^2}{M_Z^2} \right) + i\pi \right] + 2\text{Li}_2 \left(-\frac{M_Z^2}{T^2} \right) + \frac{\pi^2}{6} \right\}. \quad (68)$$

Отметим, что подстановка явного вида функции $C_0(-m_e^2, -M_Z^2, T^2; 0, m_e, m_e)$ в (4) приводит не только к сокращению $\ln(m_e^2)$, но и к более короткому ответу.

Приведем численное сравнение результатов наших расчетов с результатами, полученными пакетом LoopTools [6], с помощью которого вычислялось выражение, следующее из (3) и (4):

$$J_{A,\text{sub}}^{ZZ}(Q^2, T^2; M_Z) = (T^2 + m_e^2)D_0(m_e^2, m_e^2, M_Z^2, M_Z^2, -Q^2, -T^2; m_e, m_\gamma, m_e, m_e) - C_0(m_e^2, M_Z^2, -T^2, 0, m_e, m_e) + C_0(m_e^2, m_e^2, -Q^2, m_e, m_\gamma, m_e) + \left(2\frac{M_Z^2 + T^2}{Q^2} + 1 \right) C_0(m_e^2, M_Z^2, -T^2; 0, m_e, m_e). \quad (69)$$

Отметим разницу в знаках аргументов C_0 - и D_0 -функций и знаков перед самими C_0 -функциями, связанную с использованием разных метрик двумя программами.

В табл. 1 приведено сравнение вещественных и мнимых частей функции $J_{A,\text{sub}}^{ZZ}$ при двух значениях переменной s и трех $\cos\theta$ при $m_\gamma = 10^{-40}$, $m_e = 10^{-10}$, $M_Z = 91,1867$ (все размерные величины приведены в ГэВ). Первая строка — LoopTools, вторая строка — настоящая работа.

Таблица 1

$\cos\theta$	$s = 4 \cdot 10^4$	$s = 10^5$
-0,999	-9,1779326944043E-5, 5,01365750241311E-5 -9,1779326943961E-5, 5,01365750241524E-5	-8,3481907627769E-5, 9,56822492987005E-6 -8,3481907627712E-5, 9,56822492986940E-6
0	-8,1947632677557E-5, 2,66195083157199E-5 -8,1947632677483E-5, 2,66195083157431E-5	-7,5949691284465E-5, -1,71354446353227E-5 -7,5949691284414E-5, -1,71354446353217E-5
0,999	-6,3846067135480E-5, 7,09185809002590E-7 -6,3846067135421E-5, 7,09185809028460E-7	-3,5699920258466E-5, -6,06505583369081E-5 -3,5699920258452E-5, -6,06505583368993E-5

Как видно из табл. 1, имеется согласие в пределах 11–12 знаков для вещественной части и 10–13 знаков для мнимой части, что представляется вполне удовлетворительным, если принять во внимание тот факт, что LoopTools использует точные по массам громоздкие формулы [7] при экстремально малых значениях масс m_γ и m_e , причем неизбежно происходит большая потеря точности вычислений, тогда как в нашем случае работает формула длиной в одну строчку. Подчеркнем в этой связи еще раз основную цель работы — получение явно независимого от m_γ и m_e и к тому же компактного результата (68), хотя следует отметить, что LoopTools хорошо справляется с этой задачей численно, хотя и в сотни раз медленнее.

2. ДРУГИЕ ФУНКЦИИ J_A^{XX}

Лишь вычисление функции J_A^{ZZ} описано в этой статье подробно, для двух других функций этого типа мы приведем только окончательные результаты.

2.1. Функция J_A^{ZA} . Эта функция появляется при вычислении однопетлевых электрослабых поправок к процессу $f\bar{f} \rightarrow ZA$, см [5], в диаграммах того же типа, что и на рисунке. J_A^{ZA} -функция определяется выражением, подобным (1), и связана с D_0 - и C_0 -соотношением, подобным (1):

$$J_A^{ZA}(Q^2, T^2; m_e, M_Z) = (T^2 + m_e^2)D_0(-m_e^2, -m_e^2, 0, -M_Z^2, Q^2, T^2; m_e, 0, m_e, m_e) + \\ + C_0(-m_e^2, 0, T^2, 0, m_e, m_e) - C_0(-m_e^2, -m_e^2, Q^2, m_e, 0, m_e). \quad (70)$$

Справедливы также представления (13) и (17), однако в (19) величину N_y следует заменить на

$$N_y = Q^2(1 - y) + M_Z^2 y + T^2 + m_e^2, \quad (71)$$

что приводит к технической модификации выкладок, но не по существу.

Окончательный ответ для функции J_A^{ZA} после интегрирования по y имеет более компактный вид, чем (66):

$$J_A^{ZA} = +\frac{1}{P} \left(\ln \left(\frac{P}{m_e^2} \right) \left[\ln^2 \left(1 - \frac{m_e^2}{P} \right) - \ln^2 \left(-\frac{m_e^2}{P} \right) + \text{Li}_2 \left(\frac{P}{m_e^2} \right) \right] \right) + \\ + \frac{1}{\sqrt{D_Q}} \left(+ \left[-2 \ln \left(\frac{P}{m_e^2} \right) l(y_{Q_1}) + \frac{1}{2} l^2(y_{Q_1}) - 2 \text{Li}_2 \left(\frac{1}{y_{Q_1}} \right) + \mathcal{M}(y_{Q_2}, y_{Q_1}) \right] - [y_{Q_1} \leftrightarrow y_{Q_2}] + \right. \\ \left. + \left[-\frac{1}{2} l^2(y_{d_1}) + 2\mathcal{M}(y_{l_{11}}, y_{d_1}) - \mathcal{M}(y_{l_{12}}, y_{d_1}) - 2\mathcal{M}(y_{l_{13}}, y_{d_1}) + \mathcal{M}(y_{l_{14}}, y_{d_1}) \right] \right) + \\ \left. + \left[+\frac{1}{2} l^2(y_{d_1}) + 2\mathcal{M}(y_{l_{21}}, y_{d_2}) + \mathcal{M}(y_{l_{22}}, y_{d_2}) - 2\mathcal{M}(y_{l_{23}}, y_{d_2}) - \mathcal{M}(y_{l_{24}}, y_{d_2}) \right] \right). \quad (72)$$

Здесь использованы определения (65) и последнее равенство (60); величины D_Q , $y_{Q_{1,2}}$ определены в (30), а $y_{d_{1,2}}$ и $y_{(k,q,d,l)1j}$ — другие корни линейных или квадратных уравнений:

$$y_{d_1} = -\frac{B_1 + C_1 t_1^{\min}}{C_1 d_{t_1}}, \quad y_{l_{11}} = -\frac{t_1^{\min} - A}{d_{t_1}}, \\ y_{l_{12}} = -\frac{t_1^{\min} + M_Z^2 - Q^2}{d_{t_1}}, \quad y_{l_{13}} = -\frac{t_1^{\min} + A}{d_{t_1}}, \\ y_{l_{13}} = -\frac{\sqrt{D_Q} t_1^{\min} + A Q^2}{\sqrt{D_Q} d_{t_1}}$$

— и зависящие от этих корней выражения и корни в переменной t_1 :

$$\begin{aligned} B_1 &= A(Q^2 - Ay_{Q_1}), \quad C_1 = -Q^2 y_{Q_2} - M_z^2 y_{Q_1}, \\ t_1^{\max} &= \frac{M_z^2 D_e - C_1}{1 - y_{Q_1}}, \quad t_1^{\min} = -\frac{\sqrt{(Q^2)^2 - 4M_z^2(m_e^2 - i\epsilon)} - C_1}{-y_{Q_1}}, \\ d_{t_1} &= t_1^{\max} - t_1^{\min}. \end{aligned} \quad (73)$$

Набор переменных $C_2, t_2 \dots$ и $y_{l_2} \dots$ получается заменой индекса 1 на 2 за исключением

$$C_2 = +Q^2 y_{Q_1} + M_z^2 y_{Q_2}, \quad (74)$$

где меняется знак ($C_{1,2}$ должны быть положительны).

Общие величины

$$A = Q^2 + M_z^2, \quad (75)$$

и D_e — как и в (50).

2.2. Функция $J_{A,\text{lim}}^{ZA}$. В пределе $m_e \rightarrow 0$ функция J_A^{ZA} значительно упрощается:

$$\begin{aligned} J_{A,\text{lim}}^{ZA} &= \frac{1}{T^2} \left[\frac{1}{2} \ln^2 \left(\frac{T^2}{m_e^2} \right) + 2\zeta(2) \right] + \\ &+ \frac{1}{Q^2} \left\{ \frac{1}{2} \ln^2 \left(\frac{M_z^2}{m_e^2} \right) + \left[2 \ln \left(\frac{T^2}{M_z^2} \right) + \ln \left(-\frac{Q^2}{M_z^2} \right) + i\pi \right] \ln \left(\frac{M_z^2}{m_e^2} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{2} \pi^2 - \left[2 \ln \left(\frac{T^2}{M_z^2} \right) + \ln \left(-\frac{M_z^2}{Q^2} \right) \right] i\pi - \right. \\ &\quad \left. - 2 \ln \left(\frac{T^2}{M_z^2} \right) \ln \left(-\frac{M_z^2}{Q^2} \right) + \text{Li}_2 \left(\frac{Q^2 + M_z^2 - i\epsilon}{M_z^2} \right) - \text{Li}_2 \left(\frac{Q^2 + M_z^2 - i\epsilon}{Q^2} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (76)$$

2.3. Функция $J_{A,\text{sub}}^{ZA}$. Вычтенная J_A^{ZA} -функция определяется выражением

$$\begin{aligned} J_{A,\text{sub}}^{ZA}(Q^2, T^2; M_z) &= -J_A^{ZA}(Q^2, T^2; m_e, M_z) + \\ &+ \frac{1}{Q^2} \left[(T^2 + M_z^2) C_0(-M_z^2, -m_e^2, T^2; m_e, m_e, 0) + \right. \\ &\left. + (Q^2 + T^2) C_0(0, -m_e^2, T^2; m_e, m_e, 0) + (Q^2 + M_z^2) C_0(0, -M_z^2, Q^2; m_e, m_e, m_e) \right]. \end{aligned} \quad (77)$$

В результате длинных вычислений был получен также достаточно компактный ответ:

$$\begin{aligned} J_{A,\text{sub}}^{ZA} &= -\frac{1}{Q^2} \left\{ 2 \ln \left(\frac{-Q^2}{T^2 + M_z^2} \right) \left[\ln \left(\frac{T^2}{M_z^2} \right) + i\pi \right] - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \ln^2 \left(-\frac{Q^2}{M_z^2} \right) + \text{Li}_2 \left(\frac{Q^2 + M_z^2 - i\epsilon}{M_z^2} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \text{Li}_2 \left(\frac{Q^2 + M_z^2 - i\epsilon}{Q^2} \right) - \text{Li}_2 \left(-\frac{T^2}{M_z^2} - i\epsilon \right) - \text{Li}_2 \left(-\frac{T^2}{M_z^2} + i\epsilon \right) \right\}. \end{aligned} \quad (78)$$

Выражение типа (69), которое в данном случае имеет вид

$$\begin{aligned}
 J_{A,\text{sub}}^{ZA}(Q^2, T^2; M_Z) = & - \left[(T^2 + m_e^2)D_0(m_e^2, m_e^2, 0, M_Z^2, -Q^2, -P; m_e, m_\gamma, m_e, m_e) - \right. \\
 & \left. - C_0(m_e^2, m_e^2, -Q^2; m_e, m_\gamma, m_e) + C_0(m_e^2, 0, -T^2; 0, m_e, m_e) \right] - \\
 & - \frac{1}{Q^2} \left[(T^2 + M_Z^2)C_0(-M_Z^2, -m_e^2, T^2; m_e, m_e, 0) + (Q^2 + T^2)C_0(0, -m_e^2, T^2; m_e, m_e, 0) + \right. \\
 & \left. + (Q^2 + M_Z^2)C_0(0, -M_Z^2, Q^2; m_e, m_e, m_e) \right], \quad (79)
 \end{aligned}$$

было вычислено пакетом LoopTools, и результаты сравнения вещественных и мнимых частей функции $J_{A,\text{sub}}^{ZA}$ приведены в табл. 2 при тех же значениях параметров, что и в табл. 1. Первая строка — LoopTools, вторая строка — настоящая работа.

Таблица 2

$\cos \theta$	$s = 4 \cdot 10^4$	$s = 10^5$
-0,999	-1,2787726929778E-8, 6,22256474707476E-8 -1,2787727059117E-8, 6,22256474555672E-8	-2,8674320909170E-9, 2,88102919507768E-8 -2,8674321134773E-9, 2,88102919481843E-8
0	-2,9174547510660E-5, 7,92127876055845E-5 -2,9174547510821E-5, 7,92127876055687E-5	-9,2325711394541E-6, 3,85331158705139E-5 -9,2325711394813E-6, 3,85331158705107E-5
0,999	-6,0585940767654E-4, 2,46444301639778E-4 -6,0585940773005E-4, 2,46444301639799E-4	-3,4674596728988E-4, 1,55924109795349E-4 -3,4674596729793E-4, 1,55924109795360E-4

Как видно из табл. 1, согласие двух вычислений также вполне удовлетворительно, особенно с учетом более сингулярного характера функции J_A^{ZA} .

2.4. Функция J_A^{AA} . Эта функция появляется при вычислении однопетлевых электрослабых поправок к процессу $f\bar{f} \rightarrow AA$ в диаграммах того же типа, что и на рисунке, см. также [8]. У нее нет в качестве аргумента массы M_Z . J_A^{AA} -функция определяется типичным выражением

$$\begin{aligned}
 J_A^{AA}(Q^2, T^2; m_e) = & (T^2 + m_e^2)D_0(-m_e^2, -m_e^2, 0, 0, Q^2, T^2; m_e, 0, m_e, m_e) + \\
 & + C_0(-m_e^2, 0, T^2, 0, m_e, m_e) - C_0(-m_e^2, -m_e^2, Q^2, m_e, 0, m_e). \quad (80)
 \end{aligned}$$

Справедливы также представления (13) и (17); в данном случае величины N_y и k_{xy} равны

$$\begin{aligned}
 N_y &= Q^2(1 - y) + T^2 + m_e^2, \\
 k_{xy}^2 &= N_y x - Q_y^2,
 \end{aligned} \quad (81)$$

что приводит к значительному упрощению выкладок.

Здесь приводится точное, невычтенное, выражение, которое уже достаточно компактно:

$$J_A^{AA}(Q^2, T^2; m_e) = \frac{1}{T^2} \left[\ln \left(\frac{T^2}{m_e^2} \right) \ln \left(1 - \frac{T^2}{m_e^2} \right) + \text{Li}_2 \left(\frac{T^2}{m_e^2} \right) \right] + \\ + \frac{1}{\sqrt{D_Q}} \left[2 \ln \left(\frac{T^2}{m_e^2} \right) \ln \left(-\frac{y_{Q_1}}{y_{Q_2}} \right) - \text{Li}_2 \left(\frac{1}{y_{Q_1}} \right) + \text{Li}_2 \left(\frac{1}{y_{Q_2}} \right) \right], \quad (82)$$

где $y_{Q_{1,2}}$ определяются выражениями (30).

Выражение (80) было вычислено пакетом LoopTools, и результаты сравнения вещественных и мнимых частей функции J_A^{AA} приведены в табл. 3 при значениях параметров $m_\gamma = 10^{-40}$, $m_e = 1$, $s = 10, 10^4$, все величины в ГэВ. Первая строка — LoopTools, вторая строка — настоящая работа.

Таблица 3

$\cos \theta$	$s = 10$	$s = 10^4$
-0,999	-0,5879746887795445, 1,01082015997387194 -0,5879746887795445, 1,01082015997387194	-8,3186383783472E-3, 2,8938412134060E-3 -8,3186383783472E-3, 2,8938412134060E-3
0	-6,4246327440281E-2, 0,51951841757579184 -6,4246327440281E-2, 0,51951841757579184	-3,7039458586786E-3, 2,4586139700230E-3 -3,7039458586786E-3, 2,4586139700230E-3
0,999	1,7970553152674388,-0,92983187907679556 1,7970553152674387,-0,92983187907679556	0,7331455946952883,-1,7680717375768E-3 0,7331455946952884,-1,7680717375768E-3

Как видно из таблицы, два вычисления согласуются вплоть до последнего приведенного знака (в редких случаях до предпоследнего).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В отличие от универсальных функций Пассарино–Вельтмана, класс рассмотренных в этой работе функций очень богат; хотя все они — линейные комбинации D_0 - и C_0 -функций, их явный вид зависит от конкретного канала выбранного процесса. Эта неуниверсальность — несомненный недостаток рассмотренного класса.

Однако они обладают рядом очевидных достоинств:

1) конечные результаты (68) и (78) компактны и явно демонстрируют лежащую в основе физику;

2) «вычтенные» $J_{A,\text{sub}}$ -функции явно не содержат массовых логарифмических сингулярностей (результаты 1 и 2 скрыты внутри пакета LoopTools);

3) их компактность приводит к их стабильному и сверхбыстрому вычислению в компьютерных программах;

4) для их аналитического вычисления найден универсальный метод.

Приведенные в этой работе $J_{A,\text{sub}}$ -функции уже нашли свое применение для численных расчетов при имплементации ряда процессов в среду SANC (см. работы [3] и [5]).

Благодарности. Мы признательны С.Г. Бондаренко за стимулирующие обсуждения. Эта работа частично поддерживается грантом INTAS №03-51-4007 и грантом РФФИ №07-02-00932.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Passarino G., Veltman M. J. G.* One Loop Corrections for $E^+ E^-$ Annihilation into $\mu^+ \mu^-$ in the Weinberg Model // Nucl. Phys. B. 1979. V. 160. P. 151.
2. *Bardin D. Y., Passarino G.* The Standard Model in the Making: Precision Study of the Electroweak Interactions. Oxford: Clarendon, 1999. 685 p.
3. *Andonov A. et al.* SANCscope — v.1.00 // Comp. Phys. Commun. 2006. V. 174. P. 481–517.
4. *Bardin D. et al.* SANCnews: Sector f f b b // Comp. Phys. Commun. 2007. V. 177. P. 738–756.
5. *Bardin D. et al.* Electroweak Radiative Corrections to the Three Channels of the Process $f_1 \bar{f}_1 Z A \rightarrow 0$ // Eur. Phys. J. C. 2008. V. 54. P. 187–197.
6. *Hahn T., Perez-Victoria M.* Automatized One-Loop Calculations in Four and D Dimensions // Comp. Phys. Commun. 1999. V. 118. P. 153–165.
7. *van Oldenborgh G. J., Vermaseren J. A. M.* New Algorithms for One Loop Integrals // Z. Phys. C. 1990. V. 46. P. 425–438.
8. *Brown L. M., Feynman R. P.* Radiative Corrections to Compton Scattering // Phys. Rev. 1952. V. 85. P. 231–244.

Получено 4 марта 2008 г.