Письма в ЭЧАЯ. 2011. Т. 8, № 1(164). С. 19–26

О ФИЗИЧЕСКОЙ ИНТЕРПРЕТАЦИИ СИНГУЛЯРНОСТЕЙ ЦЕНТРАЛЬНО-СИММЕТРИЧНОГО ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ

В. М. Самсонов, Е. К. Петров

Тверской государственный университет, Тверь, Россия

Показано, что существование сингулярности в центрально-симметричном гравитационном поле, интерпретируемой как поверхность с особыми физическими характеристиками, вытекает из рассмотрения действия и энергии для пробной частицы без использования уравнений Эйнштейна и их решений. Черная дыра рассматривается как физическая модель указанной сингулярности. Полученные результаты сопоставлены с существующими представлениями о сингулярности в решениях Шварцшильда уравнений Эйнштейна.

One has shown that the existence of singularity in the centrally symmetric gravitational field, interpreted as a surface with unusual physical properties, follows from equations for the action and the energy of a testing particle not using Einstein's equations and their solutions. The black hole is treated as the physical model of the singularity in question. The obtained results are compared with the usual interpretation of the singularity in Schwarzschild's solutions of Einstein's equations.

PACS: 04.20.-g; 04.20.Jb; 04.20.Dw

Обычно метрикой Шварцшильда называют метрику [1, 2]

$$ds^2 = \left(\frac{r-\alpha}{r}\right) c^2 dt^2 - \left(\frac{r}{r-\alpha}\right) dr^2 - r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\psi^2\right), \tag{1}$$

где ds — элементарный интервал; r, θ, ψ — так называемые координаты Шварцшильда, т. е. обычные сферические координаты (полярный угол обозначен через ψ, чтобы зарезервировать обозначение φ для гравитационного потенциала); t — время, измеряемое в системе отсчета удаленного наблюдателя, для которого $\varphi = 0$; c — скорость света в вакууме. Постоянную

$$\alpha = \frac{2GM}{c^2} \tag{2}$$

называют гравитационным радиусом или радиусом Шварцшильда (G — гравитационная постоянная; M — масса тела, создающего гравитационное поле). Метрика (1) имеет две сингулярности: $g_{11} = r/(r-\alpha) \to -\infty$ при $r \to \alpha$; $g_{00} \to \infty$ при $r \to 0$. В данном случае, как это принято в математике, мы понимаем под сингулярностями появление в (1) бесконечных величин.

Сам Шварцшильд [3], основываясь на точных решениях уравнений Эйнштейна $R_{ik} = 0$ [4] для тензора кривизны R_{ik} в центрально-симметричном статическом гравитационном поле в вакууме, получил более общее выражение

$$ds^2 = f_0\, dx_0^2 - f_1\, dx_1^2 - f_2 \left(1 - x_2^2\right)^{-1} dx_2^2 - f_3 \left(1 - x_2^2\right) dx_3^2, \tag{3}$$

где $x_0 = ct$, $x_1 = r^3/3$, $x_2 = -\cos\theta$, $x_3 = \psi$, $R = (3x_1 + \rho)^{1/3}$ — вспомогательная переменная, имеющая размерность длины. Здесь ρ — одна из двух постоянных, которые появляются при интегрировании уравнений Эйнштейна. Вторая постоянная α задается формулой (2), а способ ее определения будет обсуждаться ниже. Функции $f_0 = 1 - \alpha R^{-1}$, $f_1 = R^{-4}/f_0$, $f_2 = f_3 = R^2$ непосредственно связаны с компонентами метрического тензора: $g_{00} = f_0$, $g_{11} = -f_0 r^4$, $g_{22} = -f_2 \left(1 - x_2^2\right)^4$, $g_{33} = -f_3 \left(1 - x_2^2\right)$. Легко видеть, что при $\rho \neq 0$ метрика (3) имеет не две, а одну сингулярность, причем в компоненте g_{11}, а общее условие этой сингулярности может быть записано в виде [3]

$$r_s^3 = \alpha^3 - \rho, \tag{4}$$

где r_s — радиус сингулярности. Метрика (1) следует из исходной метрики Шварцшильда (3), если положить $\rho = 0$.

С точки зрения теории дифференциальных уравнений эти две постоянных интегрирования должны быть найдены из тех или иных условий однозначности (граничных условий). Однако проблема их нахождения была переформулирована как проблема калибровки решений Шварцшильда, которая может основываться на любых физических и математических условиях. С этой точки зрения ОТО является калибровочной теорией. В [5] отмечается около десятка наиболее известных калибровок: Шварцшильда (1916), Гильберта (1917), Дроста (1917), Вейля (1917), Эйнштейна–Розена (1935), изотропная, гармоническая, Пугачева–Гунько–Менцеля (1974–1976).

Вариант (1) метрики Шварцшильда был, если можно так выразиться, канонизирован, т. е. стал общепринятым. Основывающиеся на этой метрике представления о сингулярностях в ОТО были обобщены и нашли дальнейшее развитие в известной монографии [6]. Согласно [6], все сингулярности, возникающие в теории гравитационного поля, делятся на два типа: 1) сингулярности геометрии, которые не могут быть устранены каким-либо преобразованием пространственных координат и времени; 2) сингулярности координат, которые вызывают сингулярности компонент метрического тензора, устранимые каким-либо преобразованием. Методологическую основу для отмеченной выше классификации составляет ряд работ, в которых с помощью тех или иных хитроумных преобразований координат и времени устраняется сингулярность метрики Шварцшильда, отвечающая ненулевому конечному значению r_s. Наибольшей известностью пользуются преобразования Крускала–Шекереса [6, 7]. В соответствии с этими преобразованиями вместо шварцшильдовских переменных t и r вводятся переопределенное время $u = \left(c^2 r/2GM - 1\right)^{1/2} \mathrm{e}^{c^2 r/4GM} \operatorname{ch}(c^3 t/4GM)$ и переопределенная радиальная координата $v = \left(c^2 r/2GM - 1\right)^{1/2} \mathrm{e}^{c^2 r/4GM} \operatorname{sh}(c^3 t/4GM)$. Хотя эти преобразования и устраняют сингулярность, отвечающую $r = \alpha$, новые переменные u и v имеют, в свою очередь, сингулярности при $r \to \infty$ и $M \to 0$, не имеющие какого-либо физического смысла. Да и сами переменные u и v вряд ли имеют определенный физический смысл.

На наш взгляд, постоянные Шварцшильда α и ρ даже в принципе не могут быть адекватно найдены без использования понятий и законов классической физики, дополняющих геометрический подход к тяготению. Так, в монографии В. Паули [1] выражение

$$g_{00} = 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \tag{5}$$

получено без использования решений Шварцшильда, но с учетом нескольких других физических соотношений и условий: 1) второго закона Ньютона; 2) соотношения $f_r = -\partial\varphi/\partial r$, связывающего проекцию f_r удельной силы тяжести (напряженности гравитационного поля) на радиальное направление с гравитационным потенциалом φ; 3) допущения о том, что гравитационное поле является слабым, т. е.

$$|\varphi|/c^2 \ll 1; \tag{6}$$

4) допущения, что гравитационный потенциал φ равен ньютоновскому потенциалу $\varphi_N = -GM/r$.

Сопоставляя (6) с метрикой Шварцшильда (1), получим выражение (2) для постоянной α. Необходимо только отметить, что роль формулы (5) не сводится лишь к нахождению указанной постоянной. Дело в том, что эта формула и выражение $g_{00} = 1 - \alpha/r$, отвечающее метрике (1), совпадают функционально для всех допустимых значений r. Это отражает приближенный характер как указанной метрики, так и уравнений Эйнштейна, предложенных для описания квазиплоского пространства-времени.

В дальнейшем вопреки условию (6) Ю. Оппенгеймер и Г. Снайдер [8] предсказали на основе (5) существование черной дыры и горизонта событий, который отвечает $r = \alpha$ и, соответственно, $g_{00} = 0$, $g_{11} \to -\infty$. С учетом неадекватности использования формулы (5) при $r \to \alpha$ адекватность понятий горизонта событий и черной дыры также вызывает вполне резонные сомнения. В связи с этим целесообразно рассмотреть проблему сингулярности центрально-симметричного гравитационного поля, исходя из базовых физических принципов и концепций без использования решений Шварцшильда.

Ниже предлагаются два подхода к выводу аналога формулы (5) без использования условия (6), т. е. допущения о том, что гравитационное поле является слабым. Основы первого из этих подходов были заложены Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшицем [9], но в рамках приближения слабого гравитационного поля. Будем исходить из соотношения

$$\delta S = -m_0 c\delta \int ds = \delta \int L\, dt = 0 \tag{7}$$

для действия S, отвечающего пробной частице в гравитационном поле. Здесь L — функция Лагранжа; t — время; ds — интервал; c — скорость света в вакууме; m_0 — масса покоя пробной частицы. Чтобы упростить дальнейшее рассмотрение, можно ограничиться случаем малых скоростей пробной частицы ($v \ll c$). Правомерность такого упрощения задачи может быть обоснована следующим образом. По определению, компоненты метрического тензора, включая g_{00}, не должны зависеть от v, поскольку эти компоненты являются характеристиками не пробной частицы, а гравитационного поля в заданной точке четырехмерного пространства-времени. Следовательно, выражения, полученные в допущении $v \ll c$, останутся справедливыми для любого значения скорости.

Согласно [9], в сильных гравитационных полях пробная частица неизбежно приобретает очень большую скорость v, сравнимую со скоростью света c. Но это утверждение справедливо лишь для случая, когда пробная частица предоставлена самой себе, т. е. ускоряется гравитационным полем без какого-либо противодействия. Необходимо также отметить, что ускорение будет определяться не величиной гравитационного потенциала φ, а его градиентом. Таким образом, даже если $\varphi \sim -c^2$, величина $|\mathrm{grad}\,\varphi|$ может и не быть большой. Наконец, само определение пробной частицы допускает, что ее можно медленно приближать к телу, являющемуся источником гравитационного поля.

В допущении $v \ll c$ функция Лагранжа L запишется в виде [9]

$$L = -m_0 c^2 + \frac{m_0 v^2}{2} - m_0 \varphi. \tag{8}$$

Подставляя (8) в (7), полагая $v/c \to 0$ и сравнивая интегралы по ds и dt, получим

$$g_{00} = \left(1 + \frac{\varphi}{c^2}\right)^2. \tag{9}$$

В [9] аналогичное рассмотрение ограничивалось лишь приближением слабого поля (6). Соответственно, было использовано равенство $(1 + \varphi/c^2)^2 = 1 + 2\varphi/c^2$, при выполнении которого соотношение (9) перепишется в виде

$$g_{00} = 1 + \frac{2\varphi}{c^2}. \tag{10}$$

Если, наконец, подставить в (10) ньютоновский потенциал, то получим для g_{00} общепринятую формулу (5). Если же ньютоновский потенциал подставить в формулу (9), отвечающую приближению сильного поля, то вместо (5) находим:

$$g_{00} = \left(1 - \frac{GM}{c^2 r}\right)^2. \tag{11}$$

Еще один независимый вывод соотношения (11) для g_{00} отвечает сравнению формулы [9]

$$\varepsilon = \frac{m_0 c^2 \sqrt{g_{00}}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{12}$$

для энергии пробной частицы ε с квазиклассическим выражением

$$\varepsilon = m_0 c^2 + m_0 \varphi, \tag{13}$$

отвечающим $v = 0$. Полагая в (12) $v = 0$ и приравнивая правые части выражений, снова получим для g_{00} формулу (11).

В соответствии с (9) $g_{00} = 0$ при выполнении условия

$$\varphi = -c^2. \tag{14}$$

Если, как уже отмечалось выше, исключить возможность мнимых значений промежутка времени $d\tau$ и мнимой энергии пробной частицы ε, то значение φ, отвечающее формуле (14), следует рассматривать как минимально допустимую величину гравитационного потенциала. Таким образом, выражение (14) можно рассматривать как еще одно определение (критерий) физической сингулярности.

Если подставить в (14) ньютоновский гравитационный потенциал, то находим, что условию $g_{00} = 0$ отвечает не $r = \alpha$, а значение радиальной координаты, равное

$$R_G = \frac{GM}{c^2} = \frac{\alpha}{2}. \tag{15}$$

ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

На наш взгляд, оригинальность и значение результатов, представленных выше, далеко не исчерпываются тем, что мы получили значение гравитационного радиуса R_G, отвечающее горизонту событий, вдвое отличающееся от постоянной α. Фактически речь идет о новом критерии сингулярности, не связанном непосредственно с рассмотрением решений Шварцшильда. На первый взгляд правомерен вопрос о том, что же является более корректным: наш критерий или же уравнения Эйнштейна, с которыми связаны как решения Шварцшильда, так и постановка проблемы сингулярности этих решений.

Однако такая постановка вопроса не является вполне уместной. Действительно, переформулировка проблемы однозначности решений уравнений Эйнштейна и нахождения постоянных α и ρ как проблемы калибровки этих решений эквивалентна признанию их неоднозначности. Следуя [10, 11], мы не считаем «трюки» с преобразованиями координат решением проблемы сингулярности. С этой точки зрения оригинальность наших результатов сводится к тому, что из множества вариантов калибровки мы предлагаем выбрать тот, который имеет физический смысл и вытекает из достаточно общих физических принципов. Тем самым мы показали, что сингулярность центрально-симметричного гравитационного поля вовсе не является математическим артефактом.

Далее перейдем к более детальному сравнению нашего критерия сингулярности с различными калибровками решений Шварцшильда. Метрика (1) может рассматриваться как частный случай метрики Шварцшильда в калибровке Гильберта

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{c^2 R}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \dfrac{2M}{c^2 R}} - R^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\psi^2\right), \tag{16}$$

отвечающий допущению, что $\rho \equiv 0$ и $R(r) \equiv r$. В свою очередь, выражение (16) фактически эквивалентно исходному соотношению Шварцшильда (3), в котором не делаются какие-либо допущения о постоянных α и ρ.

Покажем, что предложенный нами критерий сингулярности и отвечающие нашему рассмотрению соотношения (9), (11) и (14) не противоречат метрике Шварцшильда, если не делать допущения о том, что $\rho = 0$. Действительно, в общем случае шварцшильдовское выражение для g_{00} можно записать в виде

$$g_{00} = 1 - \frac{\alpha}{\left(r^3 + \rho\right)^{1/3}}. \tag{17}$$

Легко видеть, что при выполнении общего условия сингулярности (4), полученного К. Шварцшильдом, правая часть (17) будет равна нулю независимо от значений α и ρ. Приравнивая правые части выражений (9) и (17), находим

$$\left(1 + \frac{\varphi}{c^2}\right)^2 = 1 - \frac{\alpha}{R}. \tag{18}$$

При выполнении условия сингулярности (4) правая часть формулы (18) будет равна нулю, и мы получим условие (14).

Из (14) следует еще одно определение гравитационного радиуса объекта: гравитационный радиус R_G — это такой радиус объекта массы M, при котором гравитационный потенциал на его поверхности принимает минимальное значение $\varphi = -c^2$, а энергия пробной частицы в гравитационном поле $m_0\varphi$ становится равной по модулю энергии покоя m_0c^2. Если же воспользоваться формулой (5), то минимальному (при $R \geqslant R_G$) значению потенциала $\varphi_{\min} = -GM/\alpha$ будет отвечать $|m_0\varphi| = m_0c^2/2$, что лишено физического смысла.

Еще раз обсудим, при каких же условиях вместо (15) получается общепринятое выражение (2) для гравитационного радиуса. Как уже отмечалось выше, при нашем рассмотрении, соотношение (2) получится, если сначала положить $v \ll c$ и разложить полную энергию свободной частицы $m_0c^2/\sqrt{1-v^2/c^2}$ в ряд по степеням v/c, а затем уже положить, что $v = c$. Как мы видим, при таком выводе появление числового множителя является результатом ошибки, связанной с применением несовместимых условий $v \ll c$ и $v = c$. Ошибочный вывод выражения для радиуса горизонта событий может быть связан и с тем, что правая часть формулы (5), справедливой лишь при $|\varphi|/c^2 \ll 1$, приравнивается нулю. В рамках ОТО такой результат эквивалентен допущению, что постоянная ρ равна нулю.

Формула (18), отвечающая комбинированию нашего подхода с решением Шварцшильда уравнений Эйнштейна, эквивалентна переходу от ньютоновского потенциала к более сложному потенциалу

$$\varphi = c^2\left[\left(1-\frac{\alpha}{R}\right)^{1/2}-1\right] = c^2\left[\left(1-\frac{\alpha}{\left(r^3+\rho\right)^{1/3}}\right)^{1/2}-1\right]. \tag{19}$$

При $r = R_G$ соотношение (19) приводит к полученному ранее условию (14), а при противоположном предельном условии больших r ($r \gg \alpha$, $r^3 \gg \rho$) из (19) находим

$$\varphi = -\frac{1}{2}\frac{\alpha c^2}{r}, \tag{20}$$

т. е. постоянная ρ «выпадает» из рассмотрения, и мы приходим к ньютоновскому потенциалу. Сравнивая (20) с обычным выражением для ньютоновского потенциала, получим выражение (2) для постоянной α. Но, как уже было показано, сингулярности отвечает не $r = \alpha$, а $r = R_G = \alpha/2$.

Если теперь вновь вернуться к общему шварцшильдовскому условию сингулярности (4), то получим соотношение

$$\rho = \alpha^3 + R_G^3 = (7/8)\,\alpha^3 = 7R_G^3 > 0, \tag{21}$$

связывающее постоянные ρ и α. При $r = R_G$ и $\rho = 7R_G$ числитель и знаменатель дроби $\alpha/\left(r^3+\rho\right)^{1/3}$, фигурирующей в (19), становятся одинаковыми, что приводит к предельному условию $\varphi = -c^2$. Окончательное выражение для гравитационного потенциала запишется в виде

$$\varphi = c^2\left[\left(1-\frac{2R_G}{\left(r^3+7R_G^3\right)^{1/3}}\right)^{1/2}-1\right]. \tag{22}$$

Для более удобного сравнения потенциала (22) и ньютоновского потенциала перейдем к приведенным переменным $r^* = r/R_G$ и $\varphi^* = \varphi/c^2$. Тогда вместо указанных соотношений получим

$$\varphi_N^* = -1/r^*, \tag{23}$$

$$\varphi^* = \left[1 - \frac{2}{\left(r^{*3}+7\right)^{1/3}}\right]^{1/2} - 1. \tag{24}$$

Эти потенциалы имеют одну и ту же асимптотику. Следовательно, различие может проявляться лишь при промежуточных значениях аргумента, что подтверждают графики, представленные на рисунке. Таким образом, даже вблизи горизонта событий отличие гравитационного потенциала φ от ньютоновского потенциала φ_N является незначительным.

В соответствии с метрикой

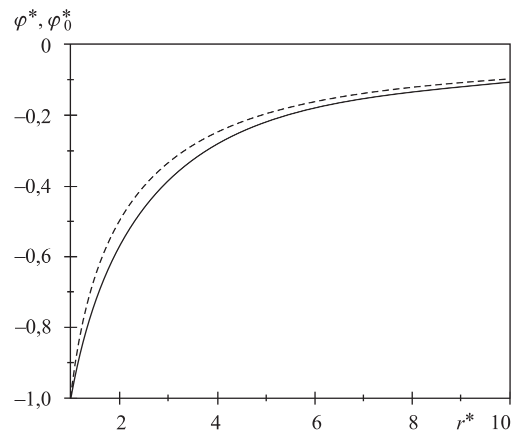
$$ds^2 = c^2\left(\frac{r-\alpha/2}{r+\alpha/2}\right)dt^2 - \left(\frac{r+\alpha/2}{r-\alpha/2}\right)dr^2 - (r+\alpha/2)\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\psi^2\right), \tag{25}$$

отвечающей гармонической калибровке [12], $g_{00} = 0$ и $g_{11} \to -\infty$ при $r = R_G = \alpha/2$, что согласуется с нашими результатами. Вместе с тем, мы не видим никакого физического смысла в наложении на пространственные координаты и время условия гармоничности, т. е. четырехмерного волнового уравнения.

Калибровка Физиева [5] также приводит к переопределению ньютоновского гравитационного потенциала, т. е. к его замене выражением

$$\varphi = -\frac{GM}{\xi + GM/c^2 \ln\left(M_0/M\right)}. \tag{26}$$

Следует только отметить, что в (26) фигурирует переопределенная радиальная переменная $\xi = r_\infty\left(r/\tilde{r}\right)/\left(r/\tilde{r}+1\right)$, где r_∞ и $\tilde{r}$ — еще одна пара постоянных, имеющих размерность длины. Если не учитывать эти постоянные, то выражение (26) отвечает двухпараметрической калибровке. В роли этих двух параметров выступают M_0 и M, где M_0 — так



Сравнение гравитационного потенциала φ^* с ньютоновским потенциалом φ_N^*

называемая «голая масса» («bare mass» [5]). Что же касается нашего подхода, то он отвечает однопараметрической калибровке, поскольку параметр ρ выражен через постоянную α, а последняя, в свою очередь, выражается через массу M с помощью общего условия сингулярности (4).

Таким образом, с формальной точки зрения наш критерий сингулярности можно рассматривать как частный случай калибровки Гильберта, исходящий не из допущения, что $\rho \equiv 0$, а из общего условия сингулярности (4). Вместе с тем, наш критерий не противоречит ни уравнениям Эйнштейна, ни решениям Шварцшильда, т. е. не приводит непосредственно к выводу о необходимости модификации уравнений Эйнштейна.

Реальность эффекта замедления времени приводит, в свою очередь, к выводу, что гравитационный коллапс массивного тела не может завершиться, т. е. привести к образованию черной дыры за конечное время Δt в системе отсчета удаленного наблюдателя, т. е. даже за время существования нашей Вселенной. В этом мы солидарны с авторами работ [10, 11], которые приходят к тому же выводу из несколько иных соображений. С нашей точки зрения, черную дыру следует рассматривать как физическую модель сингулярности центрально-симметричного гравитационного поля, которая может быть реализована лишь асимптотически, т. е. при $t \to \infty$.

Мы полагаем, что сделанный нами вывод будет адекватен и для объектов микромира. С этой точки зрения мы ожидаем, что даже с помощью большого адронного коллайдера не удастся смоделировать образование микроскопической черной дыры.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Паули В.* Теория относительности: Пер. с нем. М.: Наука, 1983. 336 с.
2. *Толмен Р.* Относительность, термодинамика и космология: Пер. с англ. М.: Наука, 1974. 520 с.
3. *Шварцшильд К.* О гравитационном поле точечной массы в эйнштейновской теории: Пер. с нем. // Альберт Эйнштейн и теория гравитации. М., 1979. С. 199–207.
4. *Эйнштейн А.* Основы общей теории относительности: Пер. с нем. // Собр. науч. тр. Т. 1. М., 1965. С. 452–504.
5. *Fiziev P.* The Gravitational Field of Massive Non-charged Point Source in General Relativity. gr-qc/0412131V1 30. 2004.
6. *Мизнер Ч., Торн К., Уиллер Дж.* Гравитация. Т. 3. М.: Мир, 1977. 510 с.
7. *Kruskal M. D.* Maximal Extension of Schwarzschild Metric // Phys. Rev. 1960. V. 119. P. 1743–1745.
8. *Оппенгеймер Ю., Снайдер Г.* О безграничном гравитационном сжатии: Пер. с англ. // Альберт Эйнштейн и теория гравитации. М., 1979. С. 353–361.
9. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теория поля. М.: Наука, 1973. 313 с.
10. *Киселев В. В., Логунов А. А., Мествиришвили М. А.* Черные дыры: предсказания теории или фантазия? // ЭЧАЯ. 2006. Т. 37, вып. 3. С. 597–604.
11. *Герштейн С. С., Логунов А. А., Мествиришвили М. А.* Общая теория относительности и сингулярности Шварцшильда // ЭЧАЯ. 2008. Т. 39, вып. 1. С. 81–106.
12. *Фок В. А.* Теория пространства, времени и тяготения. М., 1955. С. 263.

Получено 15 апреля 2010 г.