Письма в ЭЧАЯ. 2011. Т. 8, № 5(168). С. 710–723

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ФЕЙНМАНОВСКИХ ИНТЕГРАЛОВ

О. В. Тарасов[1]

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Найден новый тип уравнений для фейнмановских интегралов. Показано, что фейнмановские интегралы подчиняются функциональным уравнениям, связывающим интегралы с различной кинематикой. Предложен регулярный метод получения таких уравнений. Рассмотрен вывод функциональных уравнений для однопетлевых двух-, трех- и четырехточечных интегралов с произвольными массами и внешними импульсами. Показано, что функциональные уравнения могут быть использованы для аналитического продолжения фейнмановских интегралов в различные кинематические области.

New types of equations for Feynman integrals are found. It is shown that Feynman integrals satisfy functional equations connecting integrals with different kinematics. A regular method is proposed for obtaining such relations. The derivation of functional equations for one-loop two-, three- and four-point functions with arbitrary masses and external momenta is given. It is demonstrated that functional equations can be used for the analytic continuation of Feynman integrals to different kinematic domains.

PACS: 11.10.-z

ВВЕДЕНИЕ

Теоретические предсказания для планируемых экспериментов на ускорителях LHC и ILC требуют знания прецизионных радиационных поправок. Сложность вычисления таких поправок связана, в частности, с необходимостью вычисления фейнмановских интегралов, зависящих от большого числа аргументов — масс и кинематических переменных. Весьма сложной является проблема аналитического продолжения таких интегралов в различные кинематические области, их численное нахождение.

Дальнейший прогресс в аналитическом вычислении фейнмановских интегралов требует привлечения новых математических методов. В данной работе мы дадим краткий обзор найденного недавно [1] нового типа соотношений между фейнмановскими интегралами, которые могут существенно упростить решение указанных проблем. Эти новые соотношения являются функциональными уравнениями, связывающими интегралы с различными кинематическими переменными. Общий метод вывода функциональных соотношений был предложен в работе [1]. Вывод функциональных уравнений для однопетлевых интегралов пропагаторного и вершинного типов был рассмотрен в работе [1], а

[1]E-mail: tarasov@theor.jinr.ru

для четырехточечных интегралов в работе [2]. Предложенные функциональные уравнения могут быть использованы для аналитического продолжения интегралов, упрощения их аналитического и численного определения, а также для построения их асимптотического разложения.

1. МЕТОД ПОЛУЧЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Как хорошо известно [3, 4], между фейнмановскими интегралами существуют рекуррентные соотношения, которые позволяют свести всевозможные интегралы к небольшому набору так называемых базисных интегралов. В общем случае эти рекуррентные соотношения связывают между собой какие-то интегралы $I_{1,n}, \ldots, I_{N,n}$ с n линиями с интегралами с меньшим числом линий. Интегралы с меньшим числом линий обычно зависят от меньшего количества кинематических переменных, чем исходные интегралы. Для удобства дальнейшего изложения мы представим такого типа соотношения в следующем виде:

$$\sum_{i=1}^{N} Q_i(\{m_j\}, \{s_q\}, \nu_l, d)\ I_{i,n} = \sum_{\substack{r<n \\ k}} R_{k,r}(\{m_j\}, \{s_m\}, \nu_l, d)\ I_{k,r}, \tag{1}$$

где $I_{i,r}$ представляют собой интегралы с r линиями, произвольными степенями пропагаторов ν_j и с произвольными сдвигами параметра d. Q_i, R_k в общем случае являются отношениями полиномов, зависящих от масс, комбинаций лоренц-инвариантных скалярных произведений внешних импульсов $\{s_r\}$, степеней пропагаторов ν_l и размерности пространства-времени d.

Основная идея метода получения функциональных уравнений заключается в выборе кинематических переменных $\{s_r\}$, масс m_k, степеней пропагаторов и параметра d таким образом, чтобы в уравнении (1) занулить вклад либо всех интегралов с n линиями, либо их части, сохранив при этом вклад от интегралов с $n-1$ линиями. Таким образом, нужно найти все возможные решения системы уравнений

$$Q_i(\{m_j\}, \{s_r\}, \nu_l, d) = 0, \quad i = 1, \ldots, N \tag{2}$$

и отобрать те из них, для которых не все коэффициенты при интегралах в правой части уравнения (1) равны нулю. В данной работе мы используем размерную регуляризацию и предполагаем, что на решениях системы (2) она обеспечивает сходимость всех интегралов в соотношении (1).

Значительное количество функциональных уравнений удается получить только за счет выбора кинематических переменных $\{s_r\}$ и масс. В общем же случае для получения функциональных уравнений наряду с выбором этих переменных можно выбрать специфическим образом степени пропагаторов ν_j и параметр d.

В тех случаях, когда число кинематических переменных превышает число уравнений, получается функциональное уравнение со свободными параметрами. Этим произволом можно воспользоваться для приведения уравнения к наиболее простому виду или для того, чтобы привести интегралы, входящие в уравнение, к виду наиболее удобному для численных или аналитических вычислений. С этой точки зрения воспользоваться произволом можно следующим образом:

• дополнительно занулить часть слагаемых в правой части (1);

• упростить кинематику интегралов, положив кинематические инварианты равными нулю или какому-либо другому значению так, чтобы интегралы было проще вычислять;

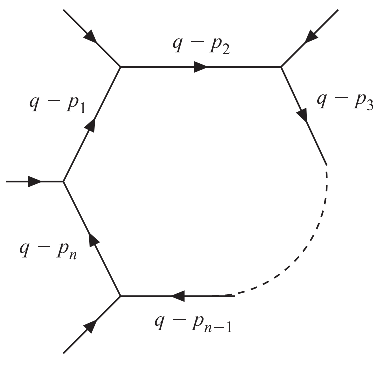
• выбрать кинематические переменные так, чтобы в каких-то интегралах модифицированный детерминант Кэйли или грамовский детерминант равнялись нулю. В таких случаях либо интеграл сводится к интегралам с меньшим числом линий, либо его вычисление упрощается за счет уменьшения числа базисных интегралов соответствующей топологии.

Как показывает опыт, не всегда удается исключить интегралы с наибольшим числом линий. Тем не менее можно исключить часть интегралов с наибольшим числом линий и получить соотношения, связывающие интегралы с разными аргументами. В принципе, выбором указанных выше параметров можно получать уравнения, выражающие какой-то один интеграл с n линиями в терминах интегралов с меньшим числом линий и видоизмененными кинематическими аргументами.

Отметим также, что несколько разных соотношений типа (1) могут приводить к одним и тем же функциональным уравнениям. В общем случае, используя предложенный метод, можно получить систему уравнений для одного и того же интеграла с различными кинематическими переменными. Проблема классификации независимых функциональных уравнений, а также возможность получения явного решения функционального уравнения будут рассмотрены в отдельной публикации. Решение этих вопросов определяется групповыми свойствами аргументов функций, входящих в функциональные уравнения, и симметрией интегралов $I_{k,r}$ относительно перестановки аргументов. Группа преобразований аргументов определяется симметрией системы алгебраических уравнений (2).

Как будет показано в следующих разделах на конкретных примерах, функциональные соотношения задают аналитическое продолжение интеграла в различные кинематические области. Фактически для фейнмановских интегралов с несколькими переменными они играют ту же роль, что и хорошо известные 24 соотношения Куммера для гипергеометрической функции Гаусса [5].

Для иллюстрации метода в данном разделе мы опишем схематически вывод функциональных уравнений для однопетлевых интегралов с n внутренними линиями, соответствующая диаграмма для которых приведена на рисунке, а в последующих разделах рассмотрим подробно случаи $n = 2, 3, 4$. Интеграл, соответствующий диаграмме, при-



Однопетлевая n-хвостая диаграмма

веденной на рисунке, имеет вид

$$I_n^{(d)}(\{m_l^2\};\ \{s_{ir}\}) = \int \frac{d^d q}{i\pi^{d/2}} \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{[(q-p_j)^2 - m_j^2]^{\nu_j}}, \tag{3}$$

где

$$s_{ir} = (p_i - p_r)^2. \tag{4}$$

Здесь и далее мы будем предполагать, что массы в пропагаторах имеют малую мнимую добавку, т. е. $1/[q^2 - m^2] \leftrightarrow 1/[q^2 - m^2 + i0]$. Для получения функциональных соотношений можно воспользоваться любым соотношением вида (1). В данной работе мы будем использовать соотношение, понижающее одновременно степень пропагатора с номером j и размерность пространства d, полученное в работах [4, 6]:

$$G_{n-1}\nu_j \mathbf{j}^+ I_n^{(d+2)}(\{m_l^2\};\{s_{ir}\}) - (\partial_j \Delta_n) I_n^{(d)}(\{m_l^2\};\{s_{ir}\}) = \\ = \sum_{k=1}^{n} (\partial_j \partial_k \Delta_n)\, \mathbf{k}^- I_n^{(d)}(\{m_l^2\};\{s_{ir}\}), \tag{5}$$

где операторы $\mathbf{j}^\pm$ и т. д. сдвигают индексы $\nu_j \to \nu_j \pm 1$, G_{n-1} — детерминант Грамма

$$G_{n-1} = \\ = -2^n \begin{vmatrix} (p_1-p_n)(p_1-p_n) & (p_1-p_n)(p_2-p_n) & \ldots & (p_1-p_n)(p_{n-1}-p_n) \\ (p_1-p_n)(p_2-p_n) & (p_2-p_n)(p_2-p_n) & \ldots & (p_2-p_n)(p_{n-1}-p_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (p_1-p_n)(p_{n-1}-p_n) & (p_2-p_n)(p_{n-1}-p_n) & \ldots & (p_{n-1}-p_n)(p_{n-1}-p_n) \end{vmatrix}, \tag{6}$$

Δ_n — модифицированный детерминант Кэйли

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} Y_{11} & Y_{12} & \ldots & Y_{1n} \\ Y_{12} & Y_{22} & \ldots & Y_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_{1n} & Y_{2n} & \ldots & Y_{nn} \end{vmatrix}, \quad Y_{ij} = m_i^2 + m_j^2 - s_{ij}, \quad \partial_j \equiv \frac{\partial}{\partial m_j^2}, \tag{7}$$

p_i, p_j — внешние импульсы, текущие через линии i, j соответственно, а m_j отвечает массе j-й линии. Граммовский детерминант G_{n-1} и детерминант Кэйли Δ_n являются полиномами от скалярных произведений и масс. Мы предполагаем, что эти скалярные произведения образованы d-мерными векторами и, следовательно, G_{n-1} и Δ_n не подчиняются условиям, специфическим для какой-либо целочисленной размерности пространства-времени. Из уравнения (5) видно, что интегралы с n линиями в левой части можно исключить, потребовав для каждого конкретного j выполнение двух условий:

$$G_{n-1} = 0, \quad \partial_j \Delta_n = 0. \tag{8}$$

Фактически мы имеем n уравнений (5), но так как

$$\sum_{k=1}^{n} \partial_k\ \Delta_n = -G_{n-1}, \tag{9}$$

то имеется только $n-1$ независимая система уравнений (8). Поскольку G_{n-1} и $\partial_j\Delta_n$ нелинейны по скалярным инвариантам и массам, то для каждого j система (8) в общем случае может иметь несколько решений и, следовательно, каждому решению может соответствовать функциональное уравнение. В действительности число получающихся функциональных уравнений меньше, поскольку, во-первых, для некоторых решений зануляется и левая, и правая части уравнения (1), а во-вторых, не все получающиеся соотношения независимы.

Группа преобразований аргументов функций, входящих в функциональное уравнение, должна определяться из систем уравнений (8).

В двухпетлевом и более высоких приближениях ситуация сложнее, чем в однопетлевом приближении. Функциональные уравнения для заданного интеграла получаются из уравнений вида (1) для нескольких интегралов с различной топологией. Для получения полного набора функциональных уравнений нужно рассмотреть все интегралы, из которых сжатием каких-либо линий получается интересующий нас интеграл.

Рассмотрим теперь получение функциональных соотношений из (5) для интегралов, соответствующих диаграммам с двумя, тремя и четырьмя внешними линиями.

2. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ИНТЕГРАЛА $I_2^{(d)}(m_1^2, m_2^2; s_{12})$

Рассмотрим подробно вывод функциональных уравнений для однопетлевого интеграла пропагаторного типа $I_2^{(d)}$. Как было отмечено выше, функциональные уравнения для данного интеграла можно получить при $n=3$ из (5), которое в данном случае имеет вид

$$\begin{aligned} G_2\mathbf{j}^+ I_3^{(d+2)}(m_1^2, m_2^2, m_3^2;\; s_{23}, s_{13}, s_{12}) - (\partial_j\Delta_3) I_3^{(d)}(m_1^2, m_2^2, m_3^2;\; s_{23}, s_{13}, s_{12}) = \\ = (\partial_j\partial_3\Delta_3)\; I_2^{(d)}(m_1^2, m_2^2; s_{12}) + (\partial_j\partial_2\Delta_3) I_2^{(d)}(m_1^2, m_3^2; s_{13}) + \\ + (\partial_j\partial_3\Delta_3) I_2^{(d)}(m_2^2, m_3^2; s_{23}), \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$G_2 = 2s_{12}^2 + 2s_{13}^2 + 2s_{23}^2 - 4s_{13}s_{23} - 4s_{12}s_{13} - 4s_{23}s_{12}, \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \Delta_3 = 2(m_2^2 - m_3^2)[(m_1^2 - m_2^2)s_{13} - (m_1^2 - m_3^2)s_{12}] - 2(m_1^2 - m_3^2)(m_1^2 - m_2^2)s_{23} + \\ + 2(m_2^2 + m_3^2)s_{12}s_{13} + 2(m_3^2 + m_1^2)s_{23}s_{12} + 2(m_2^2 + m_1^2)s_{13}s_{23} - \\ - 2m_1^2 s_{23}^2 - 2m_3^2 s_{12}^2 - 2m_2^2 s_{13}^2 - 2s_{12}s_{13}s_{23}, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} I_3^{(d)}(m_j^2, m_k^2, m_l^2; p_{kl}, p_{jl}, p_{jk}) = \int \frac{d^dq}{i\pi^{d/2}} \frac{1}{[(q-p_j)^2 - m_j^2][(q-p_k)^2 - m_k^2][(q-p_l)^2 - m_l^2]}, \\ I_2^{(d)}(m_j^2, m_k^2;\; p_{jk}) = \int \frac{d^dq}{i\pi^{d/2}} \frac{1}{[(q-p_j)^2 - m_j^2][(q-p_k)^2 - m_k^2]}. \end{aligned} \quad (13)$$

Рассмотрим уравнение (11) для $j = 1$. Чтобы исключить интегралы $I_3^{(d+2)}$, $I_3^{(d)}$ из соотношения, должны быть выполнены следующие условия:

$$\begin{aligned} G_2 &= 2s_{12}^2 + 2s_{13}^2 + 2s_{23}^2 - 4s_{12}s_{13} - 4s_{12}s_{23} - 4s_{13}s_{23} = 0, \\ \partial_1 \Delta_3 &= 2s_{23}(s_{13} + s_{12} - s_{23}) - 4m_1^2 s_{23} + 2m_2^2(s_{23} + s_{13} - s_{12}) + \\ &\qquad + 2m_3^2(s_{23} + s_{12} - s_{13}) = 0, \end{aligned} \tag{14}$$

при ненулевых значениях по крайней мере некоторых вторых производных $\partial_k \partial_j \Delta_3$. Систему (14) можно разрешить, например, относительно s_{13} и s_{23}. Нетривиальное решение системы (14) имеет вид

$$\begin{aligned} s_{13} = \phi_{13}(m_1^2, m_2^2, m_3^2, s_{12}) &= \frac{\Delta_{12} + 2s_{12}(m_1^2 + m_3^2) - (s_{12} + m_1^2 - m_2^2)\,\lambda}{2s_{12}}, \\ s_{23} = \phi_{23}(m_1^2, m_2^2, m_3^2, s_{12}) &= \frac{\Delta_{12} + 2s_{12}(m_2^2 + m_3^2) + (s_{12} - m_1^2 + m_2^2)\,\lambda}{2s_{12}}, \end{aligned} \tag{15}$$

где

$$\lambda = \pm\sigma(s_{12} - m_1^2 + m_2^2)\,\sqrt{\Delta_{12} + 4s_{12}m_3^2}, \tag{16}$$

$$\sigma(x) = \begin{cases} +1 & \text{для} \quad x \geqslant 0, \\ -1 & \text{для} \quad x < 0, \end{cases} \tag{17}$$

$$\Delta_{ij} = s_{ij}^2 + m_i^4 + m_j^4 - 2s_{ij}m_i^2 - 2s_{ij}m_j^2 - 2m_i^2 m_j^2. \tag{18}$$

Подставляя (15) в соотношение (11), взятое при $j = 1$, получаем следующее функциональное уравнение:

$$\begin{aligned} I_2^{(d)}(m_1^2, m_2^2;\ s_{12}) = \frac{s_{12} + m_1^2 - m_2^2 - \lambda}{2s_{12}}\, I_2^{(d)}(m_1^2, m_3^2;\ \phi_{13}(m_1^2, m_2^2, m_3^2, s_{12})) + \\ + \frac{s_{12} - m_1^2 + m_2^2 + \lambda}{2s_{12}}\, I_2^{(d)}(m_2^2, m_3^2;\ \phi_{23}(m_1^2, m_2^2, m_3^2, s_{12})). \end{aligned} \tag{19}$$

Аргументы интеграла $I_2^{(d)}$ в левой части (15) произвольны, в то время как аргументы интегралов в правой части подчиняются условиям (14). Масса m_3 в уравнении (19) является произвольным параметром и может быть выбрана по нашему усмотрению. Опыт показывает, что интегралы, в которых имеются пропагаторы с нулевыми массами, оказываются проще для вычислений, чем интегралы со всеми массивными пропагаторами. Положив $m_3 = 0$ в (15), получаем

$$\begin{aligned} I_2^{(d)}(m_1^2, m_2^2;\ s_{12}) = \frac{s_{12} + m_1^2 - m_2^2 - \alpha_{12}}{2s_{12}}\, I_2^{(d)}(m_1^2, 0;\ \varphi_{13}) + \\ + \frac{s_{12} - m_1^2 + m_2^2 + \alpha_{12}}{2s_{12}}\, I_2^{(d)}(0, m_2^2;\ \varphi_{23}), \end{aligned} \tag{20}$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_{13} &= \frac{\Delta_{12} + 2s_{12}m_1^2 - (s_{12} + m_1^2 - m_2^2)\alpha_{12}}{2s_{12}}, \\ \varphi_{23} &= \frac{\Delta_{12} + 2s_{12}m_2^2 + (s_{12} - m_1^2 + m_2^2)\alpha_{12}}{2s_{12}}, \end{aligned} \tag{21}$$

$$\alpha_{12} = \pm\sigma(s_{12} - m_1^2 + m_2^2)\ \sqrt{\Delta_{12}}. \tag{22}$$

Аналитическое выражение для интеграла $I_2^{(d)}(0, m^2, p^2)$ хорошо известно [7, 8]:

$$I_2^{(d)}(0, m^2;\ p^2) = I_2^{(d)}(0, m^2;\ 0)\,{}_2F_1\left[\begin{matrix} 1, 2 - d/2\,; & \dfrac{p^2}{m^2} \\ d/2\,; & \end{matrix}\right], \tag{23}$$

где

$$I_2^{(d)}(0, m^2;\ 0) = -\Gamma\left(1 - \frac{d}{2}\right) m^{d-4}. \tag{24}$$

Выбор $m_3 = 0$ не единственная возможность урощения вычислений $I_2^{(d)}$. Можно, например, положить m_3 равной m_1 или m_2, избавившись таким образом от радикалов в аргументах интегралов $I_2^{(d)}$. Для $m_3 = m_2$ из уравнения (19) получаем

$$\begin{aligned} I_2^{(d)}(m_1^2, m_2^2;\ s_{12}) = \frac{m_1^2 - m_2^2}{s_{12}} I_2^{(d)}\left(m_1^2, m_2^2;\ \frac{(m_1^2 - m_2^2)^2}{s_{12}}\right) + \\ + \frac{s_{12} - m_1^2 + m_2^2}{s_{12}} I_2^{(d)}\left(m_2^2, m_2^2;\ \frac{(s_{12} - m_1^2 + m_2^2)^2}{s_{12}}\right). \end{aligned} \tag{25}$$

Переставив в (25) массы $m_1^2 \leftrightarrow m_2^2$, сложив получившийся результат с (25), с учетом симметрии $I_2^{(d)}$ относительно перестановки масс получаем

$$\begin{aligned} I_2^{(d)}(m_1^2, m_2^2;\ s_{12}) = \frac{s_{12} - m_2^2 + m_1^2}{2s_{12}} I_2^{(d)}\left(m_1^2, m_1^2;\ \frac{(s_{12} - m_2^2 + m_1^2)^2}{s_{12}}\right) + \\ + \frac{s_{12} - m_1^2 + m_2^2}{2s_{12}} I_2^{(d)}\left(m_2^2, m_2^2;\ \frac{(s_{12} - m_1^2 + m_2^2)^2}{s_{12}}\right). \end{aligned} \tag{26}$$

Положив в уравнении (20) $m_2 = 0$, получаем соотношение

$$I_2^{(d)}(m_1^2, 0;\ s_{12}) = \frac{m_1^2}{s_{12}} I_2^{(d)}\left(m_1^2, 0;\ \frac{m_1^4}{s_{12}}\right) + \frac{(s_{12} - m_1^2)}{s_{12}} I_2^{(d)}\left(0, 0;\ \frac{(s_{12} - m_1^2)^2}{s_{12}}\right). \tag{27}$$

Такое же соотношение мы получим из уравнения (11), положив там $m_2^2 = 0$. Первое слагаемое в правой части (27) — это тот же интеграл $I_2^{(d)}$, что и в левой части, но с обратным последним аргументом, а второе слагаемое содержит $I_2^{(d)}$ с безмассовыми пропагаторами. Формула (27) может быть использована для аналитического продолжения $I_2^{(d)}(m_1^2, 0;\ s_{12})$ в область импульсов $s_{12} > m_1^2$. Аналогичная формула может быть написана для интеграла $I_2^{(d)}(0, m_2^2;\ s_{12})$. Эти формулы совместно с (20) позволяют аналитически продолжить $I_2^{(d)}(m_1^2, m_2^2;\ s_{12})$ с произвольными массами на всю кинематическую область.

Уравнение (27) находится в полном соответствии с хорошо известной формулой аналитического продолжения гипергеометрической функции Гаусса (см., например, [5]):

$$
{}_2F_1\left[\begin{matrix} 1, 2-d/2\,; & \\ d/2\,; & z\end{matrix}\right] = \frac{1}{z}\ {}_2F_1\left[\begin{matrix} 1, 2-d/2\,; & \frac{1}{}\\ d/2\,; & z\end{matrix}\right] +
$$

$$
+ \frac{\Gamma\,(d/2)\,\Gamma\,(d/2-1)}{\Gamma(d-2)}(-z)^{d/2-2}\left(1-\frac{1}{z}\right)^{d-3}. \quad (28)
$$

Действительно, заменив в уравнении (27) интегралы с одним безмассовым пропагатором по формуле (23), воспользовавшись формулой для интеграла с двумя безмассовыми пропагаторами

$$
I_2^{(d)}(0,0;\ p^2) = \frac{1}{i\pi^{d/2}}\int\frac{d^dk_1}{k_1^2(k_1-p)^2} = \frac{-\pi^{3/2}\ (-p^2)^{d/2-2}}{2^{d-3}\Gamma\left(\dfrac{d-1}{2}\right)\sin\dfrac{\pi d}{2}}, \quad (29)
$$

сократив на общий фактор, приходим к соотношению (28) с $z = s_{12}/m_1^2$.

В заключение данного раздела мы отметим важность функционального уравнения (20). С его помощью мы свели задачу вычисления интеграла, зависящего от трех параметров, к вычислению интеграла, зависящего от двух параметров. Такой интеграл легко вычисляется, и его аналитическое продолжение в любую кинематическую точку не представляет трудностей.

3. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ИНТЕГРАЛА ВЕРШИННОГО ТИПА $I_3^{(d)}(m_1^2, m_2^2, m_3^2;\ s_{23}, s_{13}, s_{12})$

Начнем наше рассмотрение с уравнения (5) при $n = 4$, которое в данном случае имеет вид

$$
\begin{aligned}
&G_3\,\mathbf{j}^+ I_4^{(d+2)}(m_1^2, m_2^2, m_3^2, m_4^2;\ s_{12}, s_{23}, s_{34}, s_{14};\ s_{24}, s_{13}) - \\
&\quad - (\partial_j\Delta_4) I_4^{(d)}(m_1^2, m_2^2, m_3^2, m_4^2;\ s_{12}, s_{23}, s_{34}, s_{14};\ s_{24}, s_{13}) = \\
&\quad = (\partial_j\partial_1\Delta_4)\ I_3^{(d)}(m_2^2, m_3^2, m_4^2;\ s_{34}, s_{24}, s_{23}) + \\
&\quad + (\partial_j\partial_2\Delta_4)\ I_3^{(d)}(m_1^2, m_3^2, m_4^2;\ s_{34}, s_{14}, s_{13}) + \\
&\quad + (\partial_j\partial_3\Delta_4)\ I_3^{(d)}(m_1^2, m_2^2, m_4^2;\ s_{24}, s_{14}, s_{12}) + \\
&\quad + (\partial_j\partial_4\Delta_4)\ I_3^{(d)}(m_1^2, m_2^2, m_3^2;\ s_{23}, s_{13}, s_{12}),
\end{aligned} \quad (30)
$$

где

$$
\begin{aligned}
&I_4^{(d)}(m_n^2, m_j^2, m_k^2, m_l^2;\ s_{nj}, s_{jk}, s_{kl}, s_{nl};\ s_{jl}, s_{nk}) = \\
&= \int\frac{d^dq}{i\pi^{d/2}}\frac{1}{[(q-p_n)^2-m_n^2][(q-p_j)^2-m_j^2][(q-p_k)^2-m_k^2][(q-p_l)^2-m_l^2]}.
\end{aligned} \quad (31)
$$

Для исключения из (30) слагаемых с $I_4^{(d+2)}$, $I_4^{(d)}$ нужно потребовать выполнения двух условий:

$$G_3 = 0, \qquad \partial_j \Delta_4 = 0. \tag{32}$$

Функциональное уравнение для $I_3(m_1^2, m_2^2, m_3^2;\ s_{23}, s_{13}, s_{12})$ с произвольными аргументами можно получить, выбрав надлежащим образом две из четырех переменных s_{14}, s_{24}, s_{34}, m_4^2. Система (32) может быть решена, например, исключением переменных s_{14} и s_{34}. В данном случае имеется четыре решения, однако получающиеся выражения довольно громоздки и по этой причине не могут быть приведены здесь.

Мы рассмотрим упрощенную проблему, а именно, в уравнении (30) с самого начала положим $j = 1$, $m_4^2 = 0$ и исключим слагаемое с $\partial_1\partial_2\Delta_4$. Систему уравнений

$$G_3 = 0, \quad \partial_1 \Delta_4 = 0, \quad \partial_1\partial_2\Delta_4 = 0 \tag{33}$$

можно решить за счет выбора s_{14}, s_{34}, s_{24}. Имеется несколько решений системы (33), но только два из них приводят к ненулевым производным в правой части (30). Эти решения имеют следующий вид:

$$\begin{gathered} s_{14} = s_{14}^{(13)}, \quad s_{34} = s_{34}^{(13)}, \\ s_{24} = s_{24}(m_1^2, m_3^2, s_{23}, s_{13}, s_{12}) = \\ = \frac{(s_{12} + s_{23} - m_1^2 - m_3^2)s_{13} + (s_{12} - s_{23} - m_1^2 + m_3^2)(m_3^2 - m_1^2 + \alpha_{13})}{2s_{13}}, \end{gathered} \tag{34}$$

где

$$\begin{gathered} s_{14}^{(ij)} = \frac{\Delta_{ij} + 2m_i^2 s_{ij} - (s_{ij} + m_i^2 - m_j^2)\alpha_{ij}}{2s_{ij}}, \\ s_{34}^{(ij)} = \frac{\Delta_{ij} + 2m_j^2 s_{ij} + (s_{ij} + m_j^2 - m_i^2)\alpha_{ij}}{2s_{ij}}, \\ \alpha_{ij} = \pm\sigma(s_{ij} - m_i^2 + m_j^2)\sqrt{\Delta_{ij}}. \end{gathered} \tag{35}$$

Подставляя решение (34) в (32), приходим к следующему функциональному уравнению:

$$\begin{aligned} I_3^{(d)}&(m_1^2, m_2^2, m_3^2;\ s_{23}, s_{13}, s_{12}) = \\ &= \frac{s_{13} + m_3^2 - m_1^2 + \alpha_{13}}{2s_{13}}\, I_3^{(d)}(m_2^2, m_3^2, 0;\ s_{34}^{(13)}, s_{24}(m_1^2, m_3^2, s_{23}, s_{13}, s_{12}), s_{23}) + \\ &+ \frac{s_{13} - m_3^2 + m_1^2 - \alpha_{13}}{2s_{13}}\, I_3^{(d)}(m_1^2, m_2^2, 0;\ s_{24}(m_1^2, m_3^2, s_{23}, s_{13}, s_{12}), s_{14}^{(13)}, s_{12}). \end{aligned} \tag{36}$$

Обратим внимание, что соотношение (36) для $I_3^{(d)}$ по форме весьма схоже с уравнением (20) для $I_2^{(d)}$.

Из уравнения (36) следует, что интеграл $I_3^{(d)}$ с произвольными аргументами всегда может быть выражен через интегралы, в которых как минимум один пропагатор безмассовый. Единственное исключение, когда $s_{12} = s_{13} = s_{23} = 0$, но в этом случае $I_3^{(d)}$ легко сводится к комбинации простых вакуумных интегралов. В свою очередь, интегралы с одним безмассовым пропагатором можно выразить в терминах интегралов с двумя безмассовыми пропагаторами. Действительно, положив в соотношении (36) $m_2^2 = 0$, получаем

$$
\begin{aligned}
&I_3^{(d)}(m_1^2, 0, m_3^2;\ s_{23}, s_{13}, s_{12}) = \\
&\quad = \frac{s_{13} - m_1^2 + m_3^2 + \alpha_{13}}{2s_{13}}\ I_3^{(d)}(0, m_3^2, 0;\ s_{34}^{(13)}, s_{24}(m_1^2, m_3^2, s_{23}, s_{13}, s_{12}), s_{23}) + \\
&\quad + \frac{s_{13} + m_1^2 - m_3^2 - \alpha_{13}}{2s_{13}}\ I_3^{(d)}(m_1^2, 0, 0;\ s_{24}(m_1^2, m_3^2, s_{23}, s_{13}, s_{12}), s_{14}^{(13)}, s_{12}). \qquad (37)
\end{aligned}
$$

Воспользовавшись симметрией интеграла $I_3^{(d)}$ относительно перестановки аргументов, заменим интегралы в правой части (36) по формуле (37). В результате мы получим

$$
\begin{aligned}
&I_3^{(d)}(m_1^2, m_2^2, m_3^2;\ s_{23}, s_{13}, s_{12}) = \\
&\quad = \frac{(s_{13} + m_3^2 - m_1^2 + \alpha_{13})(s_{23} + m_3^2 - m_2^2 + \alpha_{23})}{4s_{13}s_{23}} \times \\
&\times I_3^{(d)}(m_3^2, 0, 0;\ s_{24}(m_2^2, m_3^2, s_{34}^{(13)}, s_{23}, s_{24}(m_1^2, m_3^2, s_{23}, s_{13}, s_{12})), s_{34}^{(23)}, s_{34}^{(13)}) + \\
&\quad + \frac{(s_{13} + m_3^2 - m_1^2 + \alpha_{13})(s_{23} - m_3^2 + m_2^2 - \alpha_{23})}{4s_{13}s_{23}} \times \\
&\times I_3^{(d)}(m_2^2, 0, 0;\ s_{24}(m_2^2, m_3^2, s_{34}^{(13)}, s_{23}, s_{24}(m_1^2, m_3^2, s_{23}, s_{13}, s_{12})), \\
&\qquad s_{14}^{(23)}, s_{24}(m_1^2, m_3^2, s_{23}, s_{13}, s_{12})) + \\
&\quad + \frac{(s_{13} - m_3^2 + m_1^2 - \alpha_{13})(s_{12} + m_2^2 - m_1^2 + \alpha_{12})}{4s_{13}s_{12}} \times \\
&\times I_3^{(d)}(m_2^2, 0, 0;\ s_{24}(m_1^2, m_2^2, s_{24}(m_1^2, m_3^2, s_{23}, s_{13}, s_{12}), s_{12}, s_{14}^{(13)}), \\
&\qquad s_{34}^{(12)}, s_{24}(m_1^2, m_3^2, s_{23}, s_{13}, s_{12})) + \\
&\quad + \frac{(s_{13} - m_3^2 + m_1^2 - \alpha_{13})(s_{12} - m_2^2 + m_1^2 - \alpha_{12})}{4s_{12}s_{13}} \times \\
&\times I_3^{(d)}(m_1^2, 0, 0;\ s_{24}(m_1^2, m_2^2, s_{24}(m_1^2, m_3^2, s_{23}, s_{13}, s_{12}), s_{12}, s_{14}^{(13)}), s_{14}^{(12)}, s_{14}^{(13)}). \qquad (38)
\end{aligned}
$$

Как было показано в работе [1], интеграл с двумя безмассовыми пропагаторами может быть выражен через интегралы с двумя безмассовыми пропагаторами и дополнительно с одним из квадратов импульсов, равным нулю, и интегралы со всеми массами, равными нулю. Такое соотношение можно получить, положив в уравнении (30) с самого начала $m_1^2 = m_3^2 = s_{24} = 0$, а затем решив систему

$$
G_3 = 0, \qquad \partial_1 \Delta_4 = 0 \qquad (39)
$$

относительно s_{14}, s_{34}.

Таким образом, для получения аналитического результата для вершинной функции с произвольными массами и ненулевыми квадратами внешних импульсов нам нужно знать аналитические формулы для двух базисных интегралов. Аналитическое выражение для интеграла для произвольного d со всеми безмассовыми пропагаторами в виде комбинации гипергеометрических функций ${}_2F_1$ приведено в [9, 10].

Аналитическое выражение для базисного интеграла $I_3^{(d)}(0, m^2, 0;\ 0, s_{13}, s_{12})$ было получено в работе [1]. Для случая когда $s_{12} \leqslant m^2$ и $s_{13} \leqslant m^2$,

$$I_3^{(d)}(0, m^2, 0;\ 0, s_{13}, s_{12}) = -\frac{I_2^{(d)}(0, 0;\ s_{13})}{m^2}\, {}_2F_1\left[\begin{array}{c} 1, \dfrac{d-2}{2};\ \dfrac{s_{12}-s_{13}}{m^2} \\ d-2; \end{array}\right] + \\ + \frac{1}{m^2}\, I_2^{(d)}(0, m^2;\ 0)\ F_1\left(1, 1, 2-\frac{d}{2}, \frac{d}{2}; \frac{s_{12}-s_{13}}{m^2}, \frac{s_{12}}{m^2}\right), \quad (40)$$

где F_1 — гипергеометрическая функция Аппеля [11], представляемая рядом

$$F_1(a, b, b'; c; w, z) = \sum_{k,l=0}^{\infty} \frac{(a)_{k+l}(b)_k(b')_l}{(c)_{k+l}} \frac{w^k}{k!} \frac{z^l}{l!}, \quad (41)$$

$(a)_k = \Gamma(a+k)/\Gamma(a)$ — так называемый символ Похгаммера. Таким образом, воспользовавшись (40), мы можем получить результат для интегралов $I_3^{(d)}$ в терминах функции Аппеля F_1. Результат в терминах F_1 уже был получен в работе [12, 13] и позднее в работе [14].

Функция Аппеля F_1 в уравнении (40) имеет особенности, если какой-либо из ее аргументов превышает 1, т. е. если выполняется хотя бы одно из условий

$$|s_{12}| > m^2, \quad |s_{12} - s_{13}| > m^2. \quad (42)$$

Для аналитического продолжения F_1 в указанные области можно воспользоваться результатами, приведенными в работе [15]. Однако в нашем случае проще воспользоваться предлагаемыми функциональными уравнениями. В том случае, когда $s_{12} > m^2$, можно воспользоваться формулой

$$I_3^{(d)}(0, m^2, 0;\ 0, s_{13}, s_{12}) = \frac{m^2}{s_{12}}\ I_3^{(d)}\left(0, m^2, 0;\ 0, \frac{m^2(s_{13}-s_{12}+m^2)}{s_{12}}, \frac{m^4}{s_{12}}\right) + \\ + \frac{(s_{12}-m^2)}{s_{12}}\ I_3^{(d)}\left(0, 0, 0;\ \frac{m^2(s_{13}-s_{12}+m^2)}{s_{12}}, \frac{(s_{12}-m^2)^2}{s_{12}}, s_{13}\right). \quad (43)$$

В правой части этого уравнения мы имеем исходный интеграл, в котором последний аргумент заменен на обратный, и дополнительно возник интеграл с безмассовыми линиями. Данное соотношение можно получить из уравнения (30) при $j = 1$, $m_1^2 = m_3^2 = s_{23} = 0$ и решив систему уравнений

$$G_3 = 0, \quad \partial_1\Delta_4 = 0, \quad \partial_1\partial_3\Delta_4 = 0 \quad (44)$$

относительно s_{14}, s_{24}, s_{34}. Аналитическое продолжение данного интеграла в другие области переменных рассмотрено в работе [1].

4. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ОДНОПЕТЛЕВОЙ ЧЕТЫРЕХХВОСТКИ $I_4^{(d)}(m_1^2, m_2^2, m_3^2, m_4^2;\ \{s_{ij}\})$

Для вывода функциональных уравнений для интеграла, соответствующего диаграмме с четырьмя внешними линиями, нам потребуется соотношение (5) при $n = 5$. Для каждого значения j, выбрав кинематические переменные так, чтобы выполнялись два условия:

$$\partial_j \Delta_5 = 0, \qquad G_4 = 0, \tag{45}$$

и при этом не все вторые производные $\partial_i \partial_j \Delta_5$ были бы равны нулю, получили несколько решений, которые приводят к довольно громоздким выражениям и которые по этой причине мы не приводим. Для практических применений можно получить функциональные уравнения, рассмотрев более простую ситуацию и наложив, например, условия

$$G_4 = 0, \quad \partial_1 \Delta_5 = 0, \quad \partial_1 \partial_2 \Delta_5 = 0, \quad \partial_1 \partial_3 \Delta_5 = 0. \tag{46}$$

Положив дополнительно $m_5^2 = 0$ и разрешив систему уравнений (46) относительно переменных $s_{15}, s_{25}, s_{35}, s_{45}$, мы получили несколько решений, из которых только одно приводит к нетривиальному функциональному уравнению:

$$\begin{aligned}
&I_4^{(d)}(m_1^2, m_2^2, m_3^2, m_4^2;\ s_{12}, s_{23}, s_{34}, s_{14};\ s_{24}, s_{13}) = \\
&\quad = (1 - \kappa(m_1^2, m_4^2, s_{14}))\ I_4^{(d)}(m_1^2, m_2^2, m_3^2, 0; s_{12}, s_{23}, \phi(m_1^2, m_4^2, s_{13}, s_{14}, s_{34}), \\
&\quad (m_4^2 - m_1^2 - s_{14})\kappa(m_1^2, m_4^2, s_{14}) - m_4^2 + s_{14};\ \phi(m_1^2, m_4^2, s_{12}, s_{14}, s_{24}), s_{13}) + \\
&\quad + \kappa(m_1^2, m_4^2, s_{14})\ I_4^{(d)}(m_2^2, m_3^2, m_4^2, 0;\ s_{23}, s_{34}, (s_{14} - m_1^2 + m_4^2)\kappa(m_1^2, m_4^2, s_{14}) - m_4^2, \\
&\qquad \phi(m_1^2, m_4^2, s_{12}, s_{14}, s_{24});\ \phi(m_1^2, m_4^2, s_{13}, s_{14}, s_{34}), s_{24}),
\end{aligned} \tag{47}$$

где

$$\begin{aligned}
\phi(m_1^2, m_4^2, s_{13}, s_{14}, s_{34}) &= (s_{13} - m_1^2 + m_4^2 - s_{34})\kappa(m_1^2, m_4^2, s_{14}) - m_4^2 + s_{34}, \\
\kappa(m_1^2, m_4^2, s_{14}) &= \frac{s_{14} - m_1^2 + m_4^2 + \sigma(s_{14} - m_1^2 + m_4^2)\ \sqrt{\Delta_{14}}}{2 s_{14}}.
\end{aligned} \tag{48}$$

Полагая $m_2^2 = 0$ в уравнении (47), приходим к соотношению

$$\begin{aligned}
&I_4^{(d)}(m_1^2, 0, m_3^2, m_4^2;\ s_{12}, s_{23}, s_{34}, s_{14};\ s_{24}, s_{13}) = \\
&\quad = (1 - \kappa(m_1^2, m_4^2, s_{14}))\ I_4^{(d)}(m_1^2, 0, m_3^2, 0; s_{12}, s_{23}, \phi(m_1^2, m_4^2, s_{13}, s_{14}, s_{34}), \\
&\quad (m_4^2 - m_1^2 - s_{14})\kappa(m_1^2, m_4^2, s_{14}) - m_4^2 + s_{14};\ \phi(m_1^2, m_4^2, s_{12}, s_{14}, s_{24}), s_{13}) + \\
&\quad + \kappa(m_1^2, m_4^2, s_{14})\ I_4^{(d)}(0, m_3^2, m_4^2, 0;\ s_{23}, s_{34}, (s_{14} - m_1^2 + m_4^2)\kappa(m_1^2, m_4^2, s_{14}) - m_4^2, \\
&\qquad \phi(m_1^2, m_4^2, s_{12}, s_{14}, s_{24});\ \phi(m_1^2, m_4^2, s_{13}, s_{14}, s_{34}), s_{24}).
\end{aligned} \tag{49}$$

Воспользовавшись этой формулой, с учетом симметрии интеграла при перестановке масс и соответствующей перестановке скалярных импульсных переменных мы можем выразить все интегралы в правой части (47) в терминах интегралов с двумя безмассовыми пропагаторами. Более того, мы можем свести интегралы с двумя безмассовыми пропагаторами к интегралам с тремя безмассовыми пропагаторами. Полагая $m_3^2 = 0$ в формуле (49), получаем

$$
\begin{aligned}
&I_4^{(d)}(m_1^2, 0, 0, m_4^2;\ s_{12}, s_{23}, s_{34}, s_{14};\ s_{24}, s_{13}) = \\
&\qquad = (1 - \kappa(m_1^2, m_4^2, s_{14}))\ I_4^{(d)}(m_1^2, 0, 0, 0; s_{12}, s_{23}, \phi(m_1^2, m_4^2, s_{13}, s_{14}, s_{34}), \\
&\qquad (m_4^2 - m_1^2 - s_{14})\kappa(m_1^2, m_4^2, s_{14}) - m_4^2 + s_{14};\ \phi(m_1^2, m_4^2, s_{12}, s_{14}, s_{24}), s_{13}) + \\
&\quad + \kappa(m_1^2, m_4^2, s_{14})\ I_4^{(d)}(0, 0, m_4^2, 0;\ s_{23}, s_{34}, (s_{14} - m_1^2 + m_4^2)\kappa(m_1^2, m_4^2, s_{14}) - m_4^2, \\
&\qquad\qquad \phi(m_1^2, m_4^2, s_{12}, s_{14}, s_{24});\ \phi(m_1^2, m_4^2, s_{13}, s_{14}, s_{34}), s_{24}).
\end{aligned}
\tag{50}
$$

Воспользовавшись данной формулой и упомянутой выше симметрией, мы можем выразить все интегралы в правой части (49) в терминах интегралов с тремя безмассовыми пропагаторами. Таким образом, формулы (47), (49), (50) позволяют нам выразить любой интеграл $I_4^{(d)}$ с произвольными массами и ненулевыми скалярными инвариантами, соответствующими внешним линиям, в терминах интегралов с тремя безмассовыми пропагаторами.

Более подробное рассмотрение функциональных уравнений, а также формул, необходимых для аналитического продолжения интеграла $I_4^{(d)}$, будет представлено в отдельной публикации.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выделим наиболее важные, с нашей точки зрения, результаты, которые были получены в работах [1, 2], и отметим проблемы, которые представляют интерес для дальнейших исследований в данном направлении.

Во-первых, был сформулирован общий метод получения функциональных уравнений для произвольных фейнмановских интегралов.

Во-вторых, было продемонстрировано, что с помощью функциональных соотношений интегралы, зависящие от многих кинематических переменных, либо могут быть сведены к интегралам с более простой кинематикой, либо с их помощью может быть уменьшено количество нетривиальных базисных интегралов.

В-третьих, было показано, что функциональные уравнения могут быть использованы для аналитического продолжения фейнмановских интегралов, зависящих от многих переменных, в различные кинематические области. Отметим, что знание явного вида интеграла не требуется. До настоящего времени столь общего алгоритма для аналитического продолжения фейнмановских интегралов не существовало.

Для дальнейшего, более систематического исследования предложенных функциональных уравнений требуется применение методов алгебраической геометрии и теории групп. Особенно важным представляется групповой анализ решений систем алгебраических уравнений, на которых существуют рассмотренные функциональные уравнения.

Интересным аспектом представляется также применение предложенного метода для получения функциональных уравнений для гипергеометрических функций. Фактически фейнмановские интегралы являются комбинациями гипергеометрических функций, поэтому идеи, работающие в данном случае без существенных изменений, могут быть перенесены на гипергеометрические функции самого общего вида. В качестве начальных соотношений могут быть взяты соотношения между сопряженными функциями.

Данная работа была выполнена частично при поддержке грантов DFG KN365/3-2, SFB-676-B4 и BMBF HT6QUA.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Tarasov O. V.* // Phys. Lett. B. 2008. V. 670. P. 67; arXiv:0809.3028 [hep-ph].
2. *Kniehl B. A., Tarasov O. V.* // Nucl. Phys. B. 2009. V. 820. P. 178; arXiv:0904.3729 [hep-ph].
3. *Petersson B.* // J. Math. Phys. 1965. V. 6. P. 1955;
   't Hooft G., Veltman M. J. G. // Nucl. Phys. B. 1972. V. 44. P. 189;
   Tkachov F. V. // Phys. Lett. B. 1981. V. 100. P. 65;
   Chetyrkin K. G., Tkachov F. V. // Nucl. Phys. B. 1981. V. 192. P. 159.
4. *Tarasov O. V.* // Phys. Rev. D. 1996. V. 54. P. 6479; arXiv:hep-th/9606018.
5. *Erdèly A. et al.* Higher Transcendental Functions. N. Y.: McGraw-Hill, 1953. V. 1.
6. *Fleischer J., Jegerlehner F., Tarasov O. V.* // Nucl. Phys. B. 2000. V. 566. P. 423; arXiv:hep-ph/9907327.
7. *Bollini C. G., Giambiagi J. J.* // Phys. Lett. B. 1972. V. 40. P. 566.
8. *Boos E. E., Davydychev A. I.* // Theor. Math. Phys. 1991. V. 89. P. 1052; Teor. Mat. Fiz. 1991. V. 89. P. 56.
9. *Bern Z., Dixon L. J., Kosower D. A.* // Nucl. Phys. B. 1994. V. 412. P. 751; arXiv:hep-ph/9306240.
10. *Davydychev A. I.* // Phys. Rev. D. 2000. V. 61. P. 087701; arXiv:hep-ph/9910224.
11. *Appell P., Kampé de Fériet J.* Fonctions hypergeometriques et hypersphériques. Paris: Gauthier Villars, 1926.
12. *Tarasov O. V.* // Nucl. Phys. Proc. Suppl. 2000. V. 89. P. 237; arXiv:hep-ph/0102271.
13. *Fleischer J., Jegerlehner F., Tarasov O. V.* // Nucl. Phys. B. 2003. V. 672. P. 303; arXiv:hep-ph/0307113.
14. *Davydychev A. I.* // Nucl. Instr. Meth. A. 2006. V. 559. P. 293; arXiv:hep-th/0509233.
15. *Olsson P. O. M.* // J. Math. Phys. 1964. V. 5. P. 420.