Письма в ЭЧАЯ. 2011. Т. 8, №5(168). С. 724–727

КОМПЬЮТЕРНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В ФИЗИКЕ

НОВЫЕ ГОМОГРАФИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ В НЬЮТОНОВОЙ ЗАДАЧЕ МНОГИХ ТЕЛ

Е. А. Гребеников, Н. И. Земцова

Учреждение Российской академии наук Вычислительный центр им. А. А. Дородницына РАН (ВЦ РАН), Москва

Исследована проблема существования концентрических центральных конфигураций, геометрически изображаемых правильными многоугольниками размерности n и $2n$, вложенными друг в друга. Необходимые и достаточные условия существования таких центральных конфигураций получены с использованием методов компьютерной алгебры.

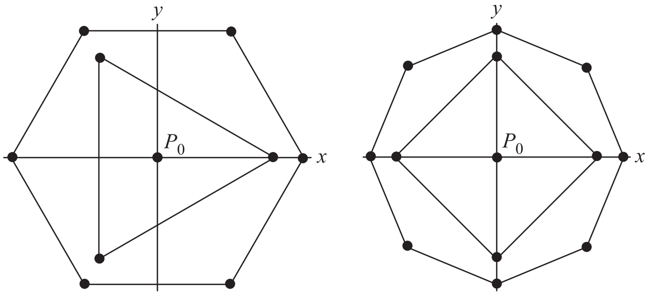
The problem of existence of the concentric central configurations, geometrically represented by regular polygons with the dimension n and $2n$, enclosed into each other, is investigated. Necessary and sufficient conditions of existence of such central configurations are obtained using the computer algebra system Mathematica.

PACS: 45.20.D

Дифференциальные уравнения новых ограниченных задач космической динамики принадлежат к классу неинтегрируемых систем [1, 2]. Для поиска точных частных решений таких уравнений А. Уинтнером была разработана теория гомографических решений, фундаментальным понятием которой является *понятие центральной конфигурации* [3]. Заметим, что любая центральная конфигурация является точным решением ньютоновой проблемы n тел и $2n$ тел. Развитие систем компьютерной алгебры, какой, например, является система Mathematica [4], позволяет сделать поиск новых центральных конфигураций, а следовательно, и новых точных частных решений дифференциальных уравнений гравитационных моделей весьма эффективным.

Рассматривается следующая ньютонова кольцеобразная задача $(3n + 1)$ тел. Тела $P_0, P_1, \ldots, P_{3n}$ с массами $m_0, m_1, \ldots, m_{3n}$ взаимно притягиваются друг другом в соответствии с законом всемирного тяготения, и их движение происходит в одной плоскости. В своем движении тела $P_1, \ldots, P_{2n}$ образуют правильный $2n$-угольник, а тела $P_{2n+1}, \ldots, P_{3n}$ образуют правильный n-угольник, вложенный в $2n$-угольник. Все тела равномерно вращаются вокруг тела P_0 с угловой скоростью ω. Для $n = 3$ и $n = 4$ данные конфигурации изображены на рисунке.

Рассмотрим вопрос о существовании центральных конфигураций [3] для этих моделей в неинерциальной вращающейся декартовой системе координат P_0xy. Так как существование центральных конфигураций при простейших преобразованиях не зависит от ориентации и размеров фигур [3], для удобства выберем вариант, соответствующий рисунку.



Координаты вершин $2n$-угольника и n-угольника задаются формулами

$$x_k = 1\cos\frac{2\pi(k-1)}{2n},\quad y_k = 1\sin\frac{2\pi(k-1)}{2n},\quad z_k = 0,\quad k=\overline{1,2n},$$

$$x_k = \alpha\cos\frac{2\pi(k-1)}{n},\quad y_k = \alpha\sin\frac{2\pi(k-1)}{n},\quad z_k = 0,\quad k=\overline{2n+1,3n},$$

$0<\alpha<1$ — параметр, определяющий размер n-угольника.

Необходимые и достаточные условия существования неинерциальных плоских центральных конфигураций для любой модели (число тел n — произвольное число) имеют вид [2]

$$\begin{cases} I\left(\sum\limits_{\substack{s=1\\ s\neq k}}^{n}\left(\dfrac{x_s-x_k}{\Delta^3_{k,s}}-\dfrac{x_s}{r_s^3}\right)-\dfrac{(m_0+m_k)x_k}{r_k^3}\right)=-Wx_k,\\ I\left(\sum\limits_{\substack{s=1\\ s\neq}}^{n}\left(\dfrac{y_s-y_k}{\Delta^3_{k,s}}-\dfrac{y_s}{r_s^3}\right)-\dfrac{(m_0+m_k)y_k}{r_k^3}\right)=-Wy_k,\\ k=1,2,\ldots,3n.\\ \Delta^2_{k,s}=(x_k-x_s)^2+(y_k-y_s)^2,\quad r_s^2=x_s^2+y_s^2, \end{cases} \tag{1}$$

где I — суммарный момент инерции системы тел, функция W является аналогом потенциала в неинерциальной системе координат [2]:

$$I=\sum_{k=1}^{n} m_k(x_k^2+y_k^2+z_k^2)^2,$$

$$W=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{\substack{s=1\\ s\neq}}^{n}\frac{m_k m_s}{\Delta_{ks}}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{\substack{s=1\\ s\neq}}^{n} m_k m_s(x_k x_s+y_k y_s+z_k z_s)\times$$
$$\times\left(\frac{1}{r_k^3}+\frac{1}{r_s^3}\right)+\sum_{k=1}^{n}\frac{(m_0+m_k)m_k}{r_k}.$$

В работе показано [5], что если тела, расположенные в вершинах многоугольников, имеют равные массы: $m_i=m_1 (i=1,\ldots,2n)$, $m_i=m_2(i=2n+1,\ldots,3n)$, условия (1) выполняются только при $m_2=0$, т. е. тела $P_{2n+1},\ldots,P_{3n}$, находящиеся в вершинах n-угольника, должны иметь нулевые массы и, следовательно, не являются гравитирующими.

Таким образом, при равных массах тел не существует центральной конфигурации для нашей модели.

Рассмотрим случай, когда массы тел в вершинах $2n$-угольника распределены следующим образом: в n вершинах, лежащих на лучах, проходящих из центра координат через вершины n-угольника, массы равны m_1, а массы в остальных n вершинах равны m_2. Пусть массы вершин n-угольника равны m_3.

Тогда необходимые и достаточные условия существования центральных конфигураций (1) после необходимых упрощений принимают вид

$$\begin{gathered}
\left[\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{x_2(x_{2k-1}-x_1)}{\Delta^3_{1,2k-1}}-\frac{x_{2k-1}-x_2}{\Delta^3_{2,2k-1}}+\frac{x_{2k-1}(1-x_2)}{r^3_{2k-1}}\right)+\right.\\
\left.+\frac{x_1(1-x_2)}{r_1^3}-\frac{x_1-x_2}{\Delta^3_{2,1}}\right]m_1+\left[\frac{x_2(1-x_2)}{r_2^3}+\frac{x_2(x_2-x_1)}{\Delta^3_{1,2}}+\right.\\
\left.+\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{x_2(x_{2k}-x_1)}{\Delta^3_{1,2k}}-\frac{x_{2k}-x_2}{\Delta^3_{2,2k}}-\frac{x_{2k}(x_2-1)}{r^3_{2k}}\right)\right]m_2+\\
+\left[\sum_{k=2n+1}^{3}n\left(\frac{x_2(x_k-x_1)}{\Delta^3_{1,k}}-\frac{x_k+x_2}{\Delta^3_{2,k}}-\frac{x_2(1-x_k)}{r^3_k}\right)\right]m_3=0,
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
\left[-\frac{x_1x_{2n+1}}{r_1^3}+\frac{x_{2n+1}}{r^3_{2n+1}}\right]m_0-\\
-\left[\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{x_{2n+1}(x_{2k-1}-x_1)}{\Delta_{1,2k-1}}-\frac{x_{2k-1}-x_{2n+1}}{\Delta_{2n+1,2k-1}}+\frac{x_{2k-1}(1-x_{2n+1})}{r^3_{2k-1}}\right)+\right.\\
\left.+\frac{x_1(1-x_{2n+1})}{r_1^3}-\frac{x_1-x_{2n+1}}{\Delta_{2n+1,1}}\right]m_1+\\
+\left[\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{x_{2n+1}(x_{2k}-x_1)}{\Delta_{1,2k}}-\frac{x_{2k}-x_{2n+1}}{\Delta_{2n+1,2k}}+\frac{x_{2k}(1-x_{2n+1})}{r^3_{2k}}\right)\right]m_2+\\
+\left[\sum_{k=2n+2}^{3n}\left(\frac{x_{2n+1}(x_k-x_1)}{\Delta_{1,k}}-\frac{x_k-x_{2n+1}}{\Delta_{2n+1,k}}+\frac{x_k(1-x_{2n+1})}{r^3_k}\right)+\right.\\
[7pt]\quad\left.+\frac{x_{2n+1}(x_{2n+1}-x_1)}{\Delta_{1,2n+1}}+\frac{x_{2n+1}(1-x_{2n+1})}{r^3_{2n+1}}\right]m_3=0.
\end{gathered}\tag{2}$$

Система (2) является системой двух уравнений с четырьмя неизвестными m_0, m_1, m_2, m_3, поэтому она имеет бесконечное число решений. Будем решать эту систему, например, относительно m_1, m_2, считая m_0, m_3 заданными величинами.

Например, для $n=3$ получаются следующие решения:

$$\left\{\begin{aligned}
m_1&=\frac{\lambda_1}{\lambda_4}m_0+\left(\lambda_2+\frac{(-4+5\sqrt{3})\lambda_3}{\lambda_4}\right)m_3,\\
m_2&=-\frac{\lambda_1}{\lambda_4}m_0+\frac{\lambda_3}{\lambda_4}m_3,
\end{aligned}\right.\tag{3}$$

где

$$\lambda_1 = \frac{(-4+5\sqrt{3})(1-\alpha^3)}{4\sqrt{3}\alpha^2},$$

$$\lambda_2 = \frac{4\sqrt{3}}{4-5\sqrt{3}}\left(\frac{4\alpha}{(-1+\alpha^2)^2} - \frac{2-\alpha}{(1-\alpha+\alpha^2)^{3/2}} + \frac{2+\alpha}{(1+\alpha+\alpha^2)^{3/2}}\right),$$

$$\lambda_3 = \left(\frac{4\alpha}{(-1+\alpha^2)^2} - \frac{2-\alpha}{(1-\alpha+\alpha^2)^{3/2}} + \frac{2+\alpha}{(1+\alpha+\alpha^2)^{3/2}}\right)\times \\ \times\left(\frac{-1}{(-1+\alpha^2)^2} - \frac{\alpha}{\sqrt{3}} + \frac{1+2\alpha}{(1+\alpha+\alpha^2)^{3/2}}\right) + \frac{5\sqrt{3}-4}{4\sqrt{3}}\times \\ \times\left(\frac{1}{\sqrt{3}\alpha^2} - \frac{\alpha}{(\alpha-1)^2} - \frac{\alpha(2+\alpha)}{(1+\alpha+\alpha^2)^{3/2}}\right),$$

$$\lambda_4 = \frac{91-40\sqrt{3}}{4\sqrt{3}}\left(-\frac{(15+4\sqrt{3})\alpha}{12} - \frac{4\alpha}{(\alpha^2-1)^2} - \frac{2\alpha-1}{(1-\alpha+\alpha^2)^{3/2}} + \frac{2\alpha+1}{(1+\alpha+\alpha^2)^{3/2}}\right).$$

Так как параметры m_1, m_2 при различных значениях положительных параметров m_3, α должны принимать только положительные значения, мы имеем очевидные неравенства

$$m_1 \geqslant 0, \quad m_2 \geqslant 0. \tag{4}$$

Вычисления показали, что множество значений параметров α, m_3, удовлетворяющее условиям (4) при различных значениях n, не пусто. Например, для $n = 3$ при $\alpha = 0{,}1$ для выполнения неравенств (4) значение m_3 должно удовлетворять соотношению $m_3 > 0$, а при $\alpha = 0{,}6$ — соотношению $0 < m_3 < 0{,}050469$ (не нарушая общности, мы полагаем $m_0 = 1$).

Вышеизложенное позволяет сформулировать следующее утверждение.

Необходимыми и достаточными условиями существования центральных конфигураций, геометрически изображаемых правильным $2n$-угольником и вложенным в него правильным n-угольником, расположенных во вращающейся координатной системе P_0xy, является выполнение условий (2), (4).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 07-01-00126.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Пуанкаре А.* Избранные труды. Т. 2. М.: Наука, 1971.
2. *Гребеников Е. А., Козак-Сковородкин Д., Якубяк М.* Методы компьютерной алгебры в проблеме многих тел. М.: Изд-во Рос. ун-та дружбы народов, 2002.
3. *Уинтнер А.* Аналитические основы небесной механики. М.: Мир, 1967.
4. *Wolfram S.* The Mathematica Book. Cambridge Univ. Press, 1999.
5. *Гребеников Е. А., Земцова Н. И.* Новые центральные конфигурации ньютоновой проблемы десяти тел // Материалы III междунар. науч. конф. «Актуальные проблемы механики и машиностроения». Алма-Ата, 2009. С. 11–15.