Письма в ЭЧАЯ. 2011. Т. 8, №5(168). С. 760–766

КОМПЬЮТЕРНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В ФИЗИКЕ

СЕПАРАБЕЛЬНОСТЬ СОСТОЯНИЙ ДВУХ КУБИТОВ В ТЕРМИНАХ ЛОКАЛЬНЫХ ИНВАРИАНТОВ

В. П. Гердт [а, 1], *Ю. Г. Палий* [а, б, 2], *А. М. Хведелидзе* [а, в, 3]

[а] Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

[б] Институт прикладной физики, Академия наук Республики Молдовы, Кишинев, Республика Молдова

[в] Математический институт им. А. М. Размадзе, Тбилиси, Грузия

Условие сепарабельности смешанных состояний двух кубитов сформулировано в виде системы полиномиальных неравенств на инварианты присоединенного действия группы $SU(2) \otimes SU(2)$ на пространстве матриц плотности, т. е. неотрицательно-определенных эрмитовых 4×4 матрицах.

The separability condition for the two qubit mixed state is formulated in terms of a system of inequalities in invariants of the adjoint $SU(2) \otimes SU(2)$ action on the space of density matrices, i.e., positive semi-definite 4×4 Hermitian matrices.

PACS: 03.67.Hk; 03.67.Lx

ВВЕДЕНИЕ

Согласно постулату квантовой теории пространство состояний $\mathcal{H}$ *композиционной системы*, представляющей собой объединение систем A и B, является подпространством тензорного произведения гильбертовых пространств $\mathcal{H}_A$ и $\mathcal{H}_B$ соответствующих подсистем:

$$\mathcal{H} \subset \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B. \tag{1}$$

Это определение в сочетании с *принципом суперпозиции* допускает существование в объединенной системе корреляций, которые *не имеют классического аналога*. Классически мыслимые корреляции между подсистемами реализуются для так называемых *сепарабельных* состояний. Смешанное состояние ϱ, соответствующее объединению систем A и B, является сепарабельным, если матрица плотности ϱ может быть представлена (не обязательно единственным образом) как выпуклое множество произведений состояний [1]:

$$\varrho = \sum_{j=1}^{M} \omega_j \varrho_j^A \otimes \varrho_j^B, \quad \omega_j \geqslant 0, \quad \sum_{j=1}^{M} \omega_j = 1, \tag{2}$$

[1] E-mail: gerdt@jinr.ru

[2] E-mail: palii@jinr.ru

[3] E-mail: akhved@jinr.ru

индивидуальных матриц плотности подсистем, ϱ_i^A и ϱ_i^B. Состояния, непредставимые в виде (2), принято называть *запутанными или сцепленными (entangled)*.

В настоящей заметке мы обсудим вопрос об алгебраическом критерии представимости матрицы плотности двухкубитной системы в сепарабельной форме (2). Поскольку свойство сепарабельности, запутанности, матрицы плотности двух кубитов является инвариантом относительно *локальных унитарных преобразований*, действующих независимо на матрицы плотности каждой из подсистем

$$\varrho \to \varrho' = SU(2)^\dagger \otimes SU(2)^\dagger \varrho SU(2) \otimes SU(2), \tag{3}$$

то критерий должен допускать формулировку непосредственно в терминах инвариантов присоединенного действия группы $SU(2) \otimes SU(2)$. Далее будет показано, что, действительно, для смешанных состояний двух кубитов известный критерий сепарабельности Переса–Городецки [2, 3] может быть представлен в форме условий выполнимости системы полиномиальных неравенств на скаляры $SU(2) \otimes SU(2)$ в обертывающей алгебре $SU(4)$.

1. МАТРИЦА ПЛОТНОСТИ КОМПОЗИЦИОННОЙ СИСТЕМЫ

Наиболее общее состояние n-уровневой квантовой системы, *смешанное состояние*, задается $n \times n$ комплексной матрицей, матрицей плотности ϱ [4, 5], которая должна:

— *быть эрмитовой* — $\varrho = \varrho^+$,

— *иметь единичный след* — $\mathrm{Tr}(\varrho) = 1$,

— *быть неотрицательно-определенной* — $\varrho \geqslant 0$.

Первые два условия могут быть легко реализованы в виде разложения матрицы плотности по базису алгебры $\mathfrak{su}(n)$. Так, для двух кубитов матрица плотности допускает разложение в форме

$$\rho = \frac{1}{4}\left(\mathbb{I}_4 + \sqrt{6}\,\boldsymbol{\eta}\cdot\boldsymbol{\lambda}\right). \tag{4}$$

В представлении (4) матрицы $\{\lambda_i\}_{i=1}^{15}$ составляют базис алгебры Ли $\mathfrak{su}(4)$, а коэффициенты разложения $\boldsymbol{\eta} = \{\eta_1, \ldots, \eta_{15}\} \in \mathbb{R}^{15}$ образуют так называемый вектор Блоха.

Третье из перечисленных выше условий на матрицу плотности, требование ее неотрицательности, определяет допустимую область значений вектора $\boldsymbol{\eta}$. Эта область представляет собой полуалгебраическое многообразие в $\mathbb{R}^{15}$, задаваемое системой полиномиальных неравенств на компоненты $\boldsymbol{\eta}$. Для вывода этих неравенств используем тот факт, что неотрицательность эрмитовой матрицы можно сформулировать в терминах коэффициентов S_k характеристического уравнения

$$|\mathbb{I}_4\, x - \rho| = x^4 - S_1 x^3 + S_2 x^2 - S_3 x + S_4 = 0 \tag{5}$$

как условие их неотрицательности [6, 7]

$$S_k \geqslant 0, \quad k = 1, \ldots, 4. \tag{6}$$

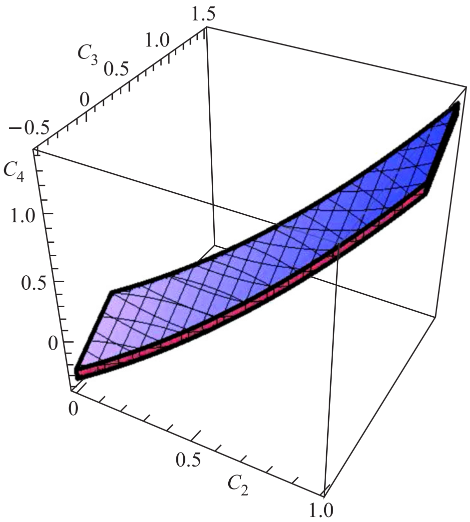

Рис. 1. Область определения матрицы плотности двух кубитов в пространстве инвариантов

Кроме ограничения снизу для коэффициентов S_k существует и ограничение сверху, вытекающее из условий нормировки $\mathrm{Tr}\,(\varrho) = 1$, $\mathrm{Tr}\,(\varrho^k) \leqslant 1$ при $k \geqslant 2$. Заметим, что знак равенства соответствует случаю чистых состояний и максимальные значения S_k достигаются при равных собственных значениях матрицы плотности.

Условия (6) инвариантны относительно присоединенного действия группы $SU(4)$ и могут быть записаны в терминах соответствующих инвариантов обертывающей алгебры

$$\begin{aligned} \mathfrak{C}_2 &= \boldsymbol{\eta}\cdot\boldsymbol{\eta}, \\ \mathfrak{C}_3 &= \sqrt{\frac{3}{2}}\, d_{ijk}\eta_i\eta_j\eta_k, \\ \mathfrak{C}_4 &= \frac{3}{2}\, d_{ijk}d_{lmk}\eta_i\eta_j\eta_l\eta_m, \end{aligned} \tag{7}$$

где d_{ijk} — полностью симметричные структурные константы алгебры $\mathfrak{su}(4)$. Как показывает прямой расчет,

$$S_2 = \frac{3}{8}(1-\mathfrak{C}_2), \quad S_3 = \frac{1}{16}(1-3\mathfrak{C}_2+2\mathfrak{C}_3), \quad S_4 = \frac{1}{256}((1-3\mathfrak{C}_2)^2+8\mathfrak{C}_3-12\mathfrak{C}_4). \tag{8}$$

Таким образом, окончательно имеем следующую систему неравенств

$$\begin{gathered} 0 \leqslant \mathfrak{C}_2 \leqslant 1, \\ 0 \leqslant 3\mathfrak{C}_2 - 2\mathfrak{C}_3 \leqslant 1, \\ 0 \leqslant (1-3\mathfrak{C}_2)^2 + 8\mathfrak{C}_3 - 12\mathfrak{C}_4 \leqslant 1. \end{gathered} \tag{9}$$

Система (9) определяет область допустимых значений инвариантов. Не приводя аналитических выражений для ее границ, дадим для наглядности лишь ее графическое представление (рис. 1).

2. КРИТЕРИЙ ПЕРЕСА–ГОРОДЕЦКИ

Для формулировки критерия сепарабельности введем понятие частичного транспонирования. Частичное транспонирование двухкубитной матрицы плотности ρ определяется как операция транспонирования T в одной из подсистем, например в подсистеме B:

$$\rho^{T_B} = I \otimes T\rho. \tag{10}$$

Заметим, что под действием транспонирования матрицы Паули преобразуются следующим образом: $T(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \to (\sigma_1, -\sigma_2, \sigma_3)$.

Критерий Переса–Городецки: *заданное двухкубитное состояние ρ является сепарабельным тогда и только тогда, когда частично транспонированная матрица плотности ρ^{T_B} — неотрицательно-определенная.*

Для проверки сепарабельности матрицы плотности с использованием операции частичного транспонирования удобной формой представления является ее разложение по базису тензорного произведения $\mathfrak{su}(2) \otimes \mathfrak{su}(2)$

$$\rho = \frac{1}{4}\left[\mathbb{I}_2 \otimes \mathbb{I}_2 + \sum_{i=1}^{3} a_i \sigma_i \otimes \mathbb{I}_2 + \sum_{i=1}^{3} b_i \mathbb{I}_2 \otimes \sigma + \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} c_{ij}\sigma_i \otimes \sigma_j\right], \tag{11}$$

где элементы базиса алгебры $\mathfrak{su}(2)$ выбраны в виде $\boldsymbol{\sigma}$-матриц Паули, коэффициенты $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ являются трехмерными блоховскими векторами индивидуальных кубитов, а вещественная 3×3 матрица $C = (c_{ij})$ служит корреляционной матрицей.

Применяя операцию частичного транспонирования (10) к разложению (11), находим, что коэффициенты $S_k^{T_B}$ характеристического уравнения для матрицы ρ^{T_B} выражаются через коэффициенты S_k в (8) и инварианты группы $SU(2) \otimes SU(2)$:

$$S_2^{T_B} = S_2, \quad S_3^{T_B} = S_3 - \frac{1}{4}\det(C), \quad S_4^{T_B} = S_4 + \frac{1}{16}\left(\det(C) - \frac{1}{2}\mathcal{I}_4\right), \tag{12}$$

где

$$\mathcal{I}_4 = \epsilon_{ijk}\epsilon_{\alpha\beta\gamma} a_i b_\alpha c_{j\beta} c_{k\gamma}. \tag{13}$$

В силу соотношений (12) и условий (9) неотрицательность частично транспонированной матрицы будет иметь место при выполнении неравенств

$$\begin{gathered} 0 \leqslant \mathfrak{C}_2 \leqslant 1, \\ 0 \leqslant 3\mathfrak{C}_2 - 2\mathfrak{C}_3 - 4\det(C) \leqslant 1, \\ 0 \leqslant (1 - 3\mathfrak{C}_2)^2 + 8\mathfrak{C}_3 - 12\mathfrak{C}_4 + \left(\det(C) - \frac{1}{2}\mathcal{I}_4\right) \leqslant 1. \end{gathered} \tag{14}$$

Таким образом, совместная система (9) и (14) дает искомую алгебраическую форму условий сепарабельности смешанных состояний двух кубитов в терминах инвариантов группы $SU(2) \otimes SU(2)$.

3. ПРИМЕР: ТРЕХПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ МАТРИЦА ПЛОТНОСТИ

В заключение приведем наглядный пример использования неравенств (9) и (14) для анализа сепарабельности смешанных состояний двух кубитов, матрицы плотности которых зависят от трех вещественных параметров.

Пусть матрица плотности ρ_0 ($\rho_0^{T_B}$ — частично транспонированная) имеет вид

$$\rho_0 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1+\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\beta & i\gamma & 0 \\ 0 & -i\gamma & 1+\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\alpha \end{pmatrix}, \quad \rho_0^{T_B} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1+\alpha & 0 & 0 & i\gamma \\ 0 & 1-\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+\beta & 0 \\ -i\gamma & 0 & 0 & 1-\alpha \end{pmatrix}. \tag{15}$$

Матрицам (15) в параметризации (11) соответствуют блоховские векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и матрица C со следующими ненулевыми элементами:

$$a_3 = \frac{\alpha - \beta}{2}, \quad b_3 = \frac{\alpha + \beta}{2}, \quad c_{12} = -c_{21} = \frac{\gamma}{2}. \tag{16}$$

Как показывает прямой расчет, собственные значения матриц ρ_0 и $\rho_0^{T_B}$ неотрицательны, если параметры α, β, γ удовлетворяют системе неравенств

$$\rho_0 : \begin{array}{r} \alpha^2 \leqslant 1, \\ \beta^2 + \gamma^2 \leqslant 1, \end{array} \qquad \rho_0^{T_B} : \begin{array}{r} \beta^2 \leqslant 1, \\ \alpha^2 + \gamma^2 \leqslant 1. \end{array} \tag{17}$$

Т. е. значения параметров, соответствующих сепарабельным состояниям, лежат в области пересечения цилиндров на рис. 2.

Определим теперь соответствующие области сепарабельности в терминах локальных инвариантов матриц плотности (15). В качестве алгебраически независимых инвариантов выберем следующие три:

$$\mathcal{I}_1 = a_i a_i = \frac{(\alpha - \beta)^2}{4}, \quad \mathcal{I}_2 = b_i b_i = \frac{(\alpha + \beta)^2}{4}, \quad \mathcal{I}_3 = c_{ij} c_{ij} = \frac{\gamma^2}{2}. \tag{18}$$

Инвариант $\mathcal{I}_4$ (см. определение (13)) при этом связан с независимым уравнением второй степени:

$$\mathcal{I}_4^2 - \mathcal{I}_1 \mathcal{I}_2 \mathcal{I}_3^2 = 0. \tag{19}$$

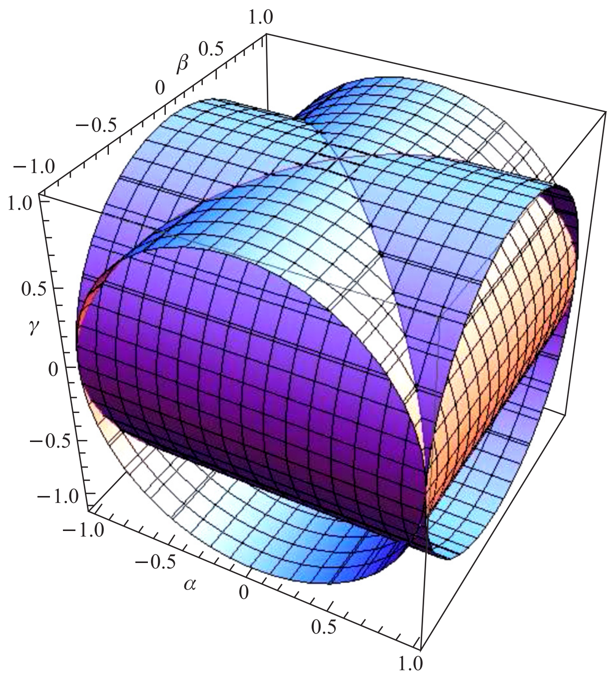

Рис. 2. Цилиндры, задающие допустимые значения параметров матриц ρ_0 и $\rho_0^{T_B}$

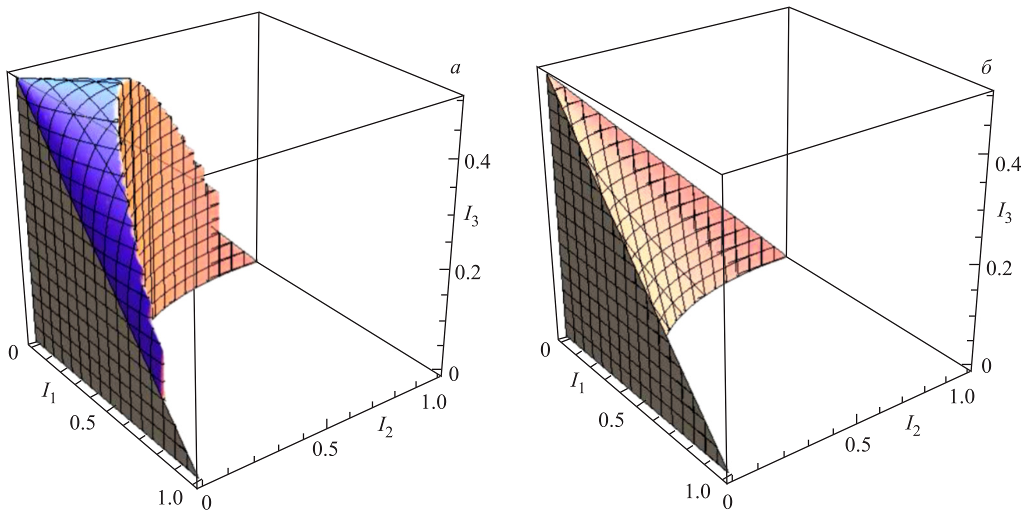

Рис. 3. Решения системы неравенств (21) и (22)

С учетом того, что инварианты Казимира группы $SU(4)$ выражаются через $\mathcal{I}_i$:

$$\mathfrak{C}_2 = \frac{1}{3}(\mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2 + \mathcal{I}_3), \quad \mathfrak{C}_3 = 0, \quad \mathfrak{C}_4 = \frac{1}{3}(\mathcal{I}_1\mathcal{I}_2 - \mathcal{I}_4) + \frac{1}{12}\mathcal{I}_3^2, \tag{20}$$

находим полную систему неравенств, гарантирующую неотрицательность матриц ρ_0 и $\rho_0^{T_B}$:

$$0 \leqslant \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2 + \mathcal{I}_3 \leqslant 1, \tag{21}$$

$$0 \leqslant (1 - \mathcal{I}_1 - \mathcal{I}_2 - \mathcal{I}_3)^2 - 4\mathcal{I}_1\mathcal{I}_2 - \mathcal{I}_3^2 \pm 4|\mathcal{I}_4| \leqslant 1. \tag{22}$$

Опуская детальный анализ неравенств (21), (22), прокомментируем лишь их графическое решение. Рис. 3, *а* изображает область допустимых значений инвариантов, когда в неравенстве (22) взят знак «плюс», а рис. 3, *б* соответственно дает картину для случая со знаком «минус». Именно последняя область, будучи пересечением правой и левой областей, и определяет значения инвариантов смешанных сепарабельных состояний.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 07-01-00660), Министерства образования и науки Российской Федерации (грант № 5362.2006.2.) и Национального фонда науки Грузии (грант GNSF/ST08/4-405).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Werner R. F.* Quantum States with Einstein–Podolski–Rosen Correlations Admitting a Hidden-Variable Model // Phys. Rev. A. 1989. V. 40. P. 4277–4281.

2. *Peres A.* Separability Criterion for Density Matrices // Phys. Rev. Lett. 1996. V. 77. P. 1413–1416.

3. *Horodecki M., Horodecki P., Horodecki R.* Separability of Mixed States: Necessary and Sufficient Conditions // Phys. Lett. A. 1996. V. 223. P. 1–8.

4. *von Neumann J.* Wahrscheinlichkeitstheoretischer Aufbau der Quantenmechanik // Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. 1927. V. 1. P. 245–272.

5. *Landau L. D.* Das Dämpfungsproblem in der Wellenmechanik // Z. für Physik. 1927. V. 45. P. 430–441.

6. *Kimura G.* The Bloch Vector for N-level Systems // Phys. Lett. A. 2003. V. 314. P. 339–349.

7. *Byrd M. S., Khaneja N.* Characterization of the Positivity of the Density Matrix in Terms of the Coherence Vector Representation // Phys. Rev. A. 2003. V. 68. P. 062322–062334.