Письма в ЭЧАЯ. 2011. Т. 8, № 7(170). С. 1282–1287

УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ КЛАССИЧЕСКОЙ ЦВЕТОЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЫ ВО ВНЕШНИХ НЕАБЕЛЕВЫХ ФЕРМИОННОМ И БОЗОННОМ ПОЛЯХ

Ю. А. Марков [1], *М. А. Маркова* [1], *А. А. Шишмарев* [2]

Институт динамики систем и теории управления, Сибирское отделение
Российской академии наук, Иркутск, Россия

Исходя из общих принципов вещественности, калибровочной и репараметризационной инвариантности лагранжиана построено действие, описывающее динамику классической цветозаряженной частицы, взаимодействующей с внешними неабелевыми бозонным и фермионным полями. Рассмотрены случаи линейной и квадратичной зависимости лагранжиана от внешнего фермионного поля. Показано, что в обоих случаях может существовать неограниченное количество членов взаимодействия. При помощи итерационной схемы построено несколько токов и источников, наводимых в среде движущейся частицей с неабелевым зарядом. Показано, что при определенном выборе некоторых параметров эти величины совпадают с полученными ранее в работе [1] из эвристических соображений.

Based on principles of gauge and reparametrization invariance of real valued Lagrangian, construction of the action describing dynamics of a classical color-charged particle interacting with background non-Abelian gauge and fermion fields is considered. The cases of the linear and quadratic dependence of a Lagrangian on background fermion field are discussed. It is shown that in both cases there exists an infinite number of interaction terms. From an iteration scheme, examples of construction of the first few currents and sources induced by a moving particle with non-Abelian charge are given. It is shown that by a suitable choice of parameters these quantities exactly reproduce additional currents and sources obtained previously in [1] on the basis of heuristic considerations.

PACS: 11.10.Ef; 12.38.Mh

Формулировка лагранжева и гамильтонова описания динамики (псевдо)классической цветной частицы, взаимодействующей с внешним полем Янга–Миллса, была предложена в двух фундаментальных работах: А. Бардуччи и др. [2] и А. П. Балачандрана и др. [3]. В данной работе мы пытаемся расширить подход, предложенный в [2, 3], на случай присутствия неабелева фермионного поля наряду с внешним калибровочным полем. Как основу мы используем общие принципы, впервые сформулированные в работе [3]. Желаемое действие, согласно им, должно удовлетворять следующим условиям:

[1] E-mail: markov@icc.ru
[2] E-mail: a.a.shishmarev@mail.ru

1) вещественности вплоть до полной производной по времени;

2) репараметризационной инвариантности, т.ė. инвариантности относительно замены $\tau \to \tau\prime = f(\tau)$;

3) инвариантности относительно калибровочных преобразований.

Кроме того, к этим условиям в работе [3] было добавлено условие согласованности с уравнением Вонга [4]:

$$\frac{dQ^a(t)}{dt} + igv^\mu A^b_\mu(t, vt)\,(T^b)^{ac}\,Q^c(t) = 0.$$

Авторами [2,3] было независимо предложено действие, удовлетворяющее всем вышеприведенным условиям, для частицы, движущейся во внешнем калибровочном поле:

$$S = \int L\,d\tau; \quad L = -m\sqrt{\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu} + i\theta^{\dagger i} D^{ij}\theta^j.$$

Здесь $D^{ij} = \delta^{ij}\partial/\partial\tau + ig\dot{x}^\mu A^a_\mu (t^a)^{ij}$ — ковариантная производная вдоль траектории движения частицы; $\theta^{\dagger i}$ и θ^i — набор грассмановых переменных, принадлежащих к фундаментальному представлению группы $SU(N_c)$, $i = 1, \ldots, N_c$. При этом, используя представление $Q^a = \theta^{\dagger i}(t^a)^{ij}\theta^j$, получаем уравнения движения для грассмановых цветовых зарядов θ^i:

$$\begin{aligned} \frac{d\theta^i(\tau)}{d\tau} + ig\dot{x}^\mu A^a_\mu(x)(t^a)^{ij}\theta^j(\tau) = 0, \\ \frac{d\theta^{\dagger i}(\tau)}{d\tau} - ig\dot{x}^\mu A^a_\mu(x)\theta^{\dagger j}(\tau)(t^a)^{ji} = 0. \end{aligned}$$

Тем не менее в работе [1] было продемонстрировано, что уравнения для грассмановых зарядов и уравнение Вонга в том виде, в котором они были представлены в оригинальных работах [2–4], не дают возможности получить полные и калибровочно-инвариантные выражения для матричных элементов некоторых процессов рассеяния. Причина этого состоит в том, что данные уравнения получены в приближении наличия в системе только (регулярного и/или стохастического) внешнего калибровочного поля. Таким образом, использование упомянутого выше разложения $Q^a = \theta^{\dagger i}(t^a)^{ij}\theta^j$ приводит только к возможности получения элегантной лагранжевой (гамильтоновой) формулировки, но реальная динамика самих грассмановых зарядов $\theta^{\dagger i}$ и θ^i в этом случае не отслеживается. Это происходит из-за того, что фактически только квадратичная комбинация грассмановых цветовых зарядов $\theta^\dagger t^a \theta$ входит в выражения для координаты x_μ и тока j^a_μ, наводимого движущейся частицей в среде. Ситуация, однако, качественно меняется, когда в системе появляется внешнее фермионное поле, разделяющее данную комбинацию на пару отдельных грассмановых зарядов — $\theta^{\dagger\, i}$ и θ^i. В работе [1] были предложены минимальное расширение этих уравнений на случай присутствия в системе мягких (неабелевых) фермионных полей $\Psi^i_\alpha(x)$ и $\bar{\Psi}^i_\alpha(x)$:

$$\begin{aligned} \frac{d\theta^i(\tau)}{d\tau} + ig\dot{x}^\mu A^a_\mu(x)(t^a)^{ij}\theta^j(\tau) + ig(\bar{\psi}_\alpha \Psi^i_\alpha(x)) = 0, \\ \frac{d\theta^{\dagger i}(\tau)}{d\tau} - ig\dot{x}^\mu A^a_\mu(x)\theta^{\dagger j}(\tau)(t^a)^{ji} - ig(\bar{\Psi}^i_\alpha(x)\psi_\alpha) = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

а также модифицированное уравнение Вонга

$$\frac{dQ^a(\tau)}{d\tau} + ig\dot{x}^\mu A^b_\mu(x)(T^b)^{ac}Q^c(\tau)+ \\ + ig\Big\{\,\theta^{\dagger j}(\tau)(t^a)^{ji}\Big(\bar{\psi}_\alpha\Psi^i_\alpha(x)\Big) - \Big(\bar{\Psi}^i_\alpha(x)\psi_\alpha\Big)(t^a)^{ij}\theta^j(t)\Big\} = 0. \quad (2)$$

Нетрудно построить лагранжиан, вариации которого будут порождать требуемые расширенные уравнения движения:

$$L = i\theta^{\dagger i}D^{ij}\theta^j - g\{\theta^{\dagger i}(\bar{\chi}^\alpha\Psi^i_\alpha) + (\bar{\Psi}^i_\alpha\chi^\alpha)\theta^i\}.$$

Наряду с обобщенными уравнениями движения, в работах [1,5] получены наводимые в среде движущейся частицей дополнительные калибровочно-ковариантные цветные токи и источники, которые должны быть добавлены в правые части уравнений Янга–Миллса и Дирака, так как только в этом случае возможно вычисление полных и калибровочно-ковариантных выражений токов и источников, наводимых жесткими термальными частицами в процессах рассеяния в кварк-глюонной плазме.

Однако построенный выше лагранжиан все еще не позволяет воспроизвести полученные ранее в работе [1] наводимые частицей токи и источники. Предложено следующее его обобщение [6]:

$$L = -\frac{1}{2e}\dot{x}^\mu\dot{x}_\mu - \frac{e}{2}m^2 + i\theta^{\dagger i}D^{ij}\theta^j - \frac{e}{\sqrt{2}}g\{\theta^{\dagger i}(\bar{\psi}^\alpha\Psi^i_\alpha) + (\bar{\Psi}^i_\alpha\psi^\alpha)\theta^i\} + \\ + \frac{e}{\sqrt{2}}\,ig\,Q^a\{\theta^{\dagger j}(t^a)^{ji}(\bar{\psi}^\alpha\Psi^i_\alpha) - (\bar{\Psi}^i_\alpha\psi^\alpha)(t^a)^{ij}\theta^j\},$$

где e — одномерная метрика, преобразующаяся по закону $e \to e' = e\,(d\tau'/d\tau)$. Главное отличие данного лагранжиана от предыдущего состоит в наличии последнего слагаемого, которое позволяет построить наводимые в среде дополнительные токи и источники. Тем не менее этот лагранжиан не является наиболее общим, удовлетворяющим вышеописанным условиям. В работе [6] была предложена несложная схема построения наиболее общего выражения для такого лагранжиана.

Основная идея схемы построения состоит в том, что, зная общий вид инфинитезимальных вариаций различных переменных при калибровочном преобразовании и требуя обращения полной вариации лагранжиана в нуль, можно получить уравнение, решение которого будет являться расширенной формой калибровочно-ковариантного лагранжиана. В нашей работе лагранжиан является функцией следующих переменных:

$$L = L(\dot{x}, \theta, \theta^\dagger, (\bar{\Psi}^i_\alpha\chi_\alpha), (\bar{\chi}_\alpha\Psi^i_\alpha), A^a_\mu, A^a_{\mu,\nu}).$$

Для простоты здесь мы не включаем в рассмотрение спиновую динамику частицы, т. е. пренебрегаем членами, содержащими $\dot{\chi}_\alpha$ и $\dot{\bar{\chi}}_\alpha$. Используя следующий, выбранный нами набор калибровочных инфинитезимальных вариаций

$$
\begin{aligned}
\Psi^i_\alpha &\to \Psi^i_\alpha + ig\Lambda^a (t^a)^{ij}\Psi^j_\alpha,\\
\bar\Psi^i_\alpha &\to \bar\Psi^i_\alpha - ig\Lambda^a \bar\Psi^j_\alpha (t^a)^{ji},\\
\theta^i &\to \theta^i + ig\Lambda^a (t^a)^{ij}\theta^j,\\
\theta^{\dagger i} &\to \theta^{\dagger i} - ig\Lambda^a \theta^{\dagger j}(t^a)^{ji},\\
Q^a &\to Q^a - gf^{abc}\Lambda^b Q^c,\\
A^a_\mu &\to A^a_\mu - gf^{abc}\Lambda^b A^c_\mu - \partial_\mu\Lambda^a
\end{aligned}
$$

и приравнивая нулю полную вариацию лагранжиана, получаем следующее уравнение:

$$
\delta L = ig\Lambda^a \left(\overrightarrow{\frac{\partial L}{\partial\theta^i}} (t^a)^{ij}\theta^j - \theta^{\dagger j}(t^a)^{ji} \overleftarrow{\frac{\partial L}{\partial\theta^{\dagger i}}} + \overrightarrow{\frac{\partial L}{\partial\Psi^i_\alpha}} (t^a)^{ij}\Psi^j_\alpha - \bar\Psi^j_\alpha (t^a)^{ji} \overleftarrow{\frac{\partial L}{\partial\bar\Psi^i_\alpha}} \right) - \\
- \frac{\partial L}{\partial A^a_\mu}(gf^{abc}\Lambda^b A^c_\mu + \partial_\mu\Lambda^a) = 0. \quad (3)
$$

В [6] рассмотрены случаи линейной и квадратичной зависимостей L от полей Ψ^i_α и $\bar\Psi^i_\alpha$. Отмечено, что структура лагранжиана в случае квадратичной зависимости намного богаче, чем в случае линейной, но даже в этих простейших случаях число членов взаимодействия, которые удовлетворяют полученному уравнению, неограничено. Тем не менее формально все они должны быть добавлены в выражение для лагранжиана.

Дополнительные токи и источники, приведенные в [1], получены практически полностью из эвристических соображений, без какой-либо связи с динамическими уравнениями (1) и (2). В данной работе предложен алгоритм вычисления добавочных токов и источников, основанный исключительно на уравнениях движения грассмановых цветных зарядов и начальных значениях грассмановых и классического цветных зарядов, позволяющий вычислять все возможные калибровочно-ковариантные выражения в любом порядке по константе взаимодействия. Основная идея алгоритма состоит в определении решений уравнений движения для грассмановых цветовых зарядов в виде разложений

$$
\begin{aligned}
\theta^i(t) &= \theta^{(0)i}(t) + \varepsilon\theta^{(1)i}(t) + \varepsilon^2\theta^{(2)i}(t) + \varepsilon^3\theta^{(3)i}(t) + \ldots,\\
\theta^{\dagger i}(t) &= \theta^{\dagger(0)i}(t) + \varepsilon\theta^{\dagger(1)i}(t) + \varepsilon^2\theta_2^{\dagger(2)i}(t) + \varepsilon^3\theta^{\dagger(3)i}(t) + \ldots,\\
Q^a(t) &= Q^{(0)a}(t) + \varepsilon Q^{(1)a}(t) + \varepsilon^2 Q^{(2)a}(t) + \varepsilon^3 Q^{(3)a}(t) + \ldots,
\end{aligned}
$$

где

$$
\begin{aligned}
Q^{(0)a}(t) &= \theta^{\dagger(0)}(t)\, t^a\theta^{(0)}(t),\\
Q^{(1)a}(t) &= \theta^{\dagger(0)}(t)\, t^a\theta^{(1)}(t) + \theta^{\dagger(1)}(t)\, t^a\theta^{(0)}(t)
\end{aligned}
$$

и т. д. В этих выражениях ε — введенный нами некоторый эффективный параметр, фактически указывающий степень нелинейности по грассманову цветовому заряду, который в конце вычислений мы полагаем равным единице. Теперь, подставляя это разложение в уравнение

$$\frac{d\theta^i(t)}{dt} + igv^\mu A^a_\mu(t,\mathbf{v}t)(t^a)^{ij}\theta^j(t) + ig\big(\bar\chi_\alpha\Psi^i_\alpha(t,\mathbf{v}t)\big) - \\ - ig\varepsilon f_0\, Q^a(t)(t^a)^{ij}\big(\bar\chi_\alpha\Psi^j_\alpha(t,\mathbf{v}t)\big) - ig\varepsilon(t^a)^{ij}\theta^j(t)\times \\ \times\Big\{f_0\,\theta^{\dagger l}(t)(t^a)^{lk}\big(\bar\chi_\alpha\Psi^k_\alpha(t,\mathbf{v}t)\big) + f_0^*\big(\bar\Psi^k_\alpha(t,\mathbf{v}t)\chi_\alpha\big)(t^a)^{kl}\theta^l(t)\Big\} = 0, \quad (4)$$

получаем систему уравнений при разных степенях ε. Используя явный вид токов и источников

$$j^{a\mu}(x) = g\int d\tau\delta^{(4)}(x - x(\tau))\,Q^a(\tau)\dot x^\mu + g\bar\Psi(x)\gamma^\mu t^a\Psi(x),$$

$$\eta^i_\alpha(x) = g\int d\tau\delta^{(4)}(x - x(\tau))\Big(\psi_\alpha\theta^i + i\psi_\alpha Q^a(t^a)^{ij}\theta^j\Big)$$

и подставляя в них найденные решения, можно получить выражения для наводимых частицей в среде токов и источников в любом порядке по константе взаимодействия. При определенном выборе произвольного параметра f_0 первые из полученных таким образом токов и источников совпадают с найденными ранее эвристическим путем в работе [1]. Это следует считать сильным подтверждением предложенной итерационной схемы решения уравнений движения для цветных грассмановых зарядов.

Можно надеяться, что задача движения точечной спиновой цветозаряженной частицы (которая может быть рассмотрена как струна в пределе нулевой длины) во внешнем фермионном поле даст возможность для лучшего понимания, по крайней мере на качественном уровне, аналогичного движения значительно более сложного объекта, такого как спиновая струна или суперструна. Особый интерес к этому существует в течение уже более двадцати лет.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 09-02-00749 и частичной поддержке гранта Президента РФ НШ-3810.2010.2, АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы: проекты РНП.2.2.1.1/1483, 2.1.1/1539»; ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг.: ГК 02.740.11.5154, ГК 16.740.11.0154.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Markov Yu. A., Markova M. A.* Nonlinear Dynamics of Soft Fermion Excitations in Hot QCD Plasma: II. Soft-Quark Hard-Particle Scattering and Energy Losses // Nucl. Phys. A. 2007. V. 784. P. 443–514.
2. *Barducci A., Casalbuoni R., Lusanna L.* Classical Scalar and Spinning Particles Interacting with External Yang–Mills Fields // Nucl. Phys. B. 1977. V. 124. P. 93–120.
3. *Balachandran A. P. et al.* Classical Description of Particle Interacting with Non-Abelian Gauge Field // Phys. Rev. D. 1977. V. 15. P. 2308–2346.

4. *Wong S. K.* Field and Particle Equations for the Classical Yang–Mills Field and Particles with Isotopic Spin // Nuovo Cim. A. 1970. V. 65. P. 689–694.
5. *Markov Yu. A., Markova M. A., Vall A. N.* Nonlinear Dynamics of Soft Fermion Excitations in Hot QCD Plasma: III. Soft-Quark Bremsstrahlung and Energy Losses // Intern. J. Mod. Phys. A. 2010. V. 25. P. 685–776.
6. *Markov Yu. A., Markova M. A., Shishmarev A. A.* Equations of Motion for a Classical Color Particle in Background Non-Abelian Bosonic and Fermionic Fields // J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. 2010. V. 37. P. 105001(25).